

Centrum Wiedzy i Informacji
Naukowo-Technicznej Politechniki Wrocławskiej



100100501395

Wojciech Puła

**Wybrane zagadnienia
oceny nośności posadowienia bezpośredniego
w ujęciu teorii pól losowych**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej



Wybrane zagadnienia
oceny nośności
posadowienia bezpośredniego
w ujęciu teorii pól losowych

Wojciech Puła

**Wybrane zagadnienia
oceny nośności
posadowienia bezpośredniego
w ujęciu teorii pól losowych**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej
Wrocław 2019

214262

Monografia naukowa

Recenzenci

Prof. dr hab. inż. Marian GWÓZDŹ

Prof. dr hab. inż. Elżbieta STILGER-SZYDŁO

Opracowanie redakcyjne i typograficzne

Zdzisław MAJEWSKI



Projekt okładki

Janusz M. SZAFRAN

39335515

Wszelkie prawa zastrzeżone. Niniejsza książka, zarówno w całości, jak i we fragmentach, nie może być reprodukowana w sposób elektroniczny, fotograficzny i inny bez zgody wydawcy i właściciela praw autorskich.

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 2019

OFICYNA WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

<http://www.oficyna.pwr.edu.pl>;

e-mail: oficwyd@pwr.edu.pl

zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl

ISBN 978-83-7493-052-9

Druk i oprawa: beta-druk, www.betadruk.pl

2019/042710

Spis treści

Wykaz symboli	7
1. Wprowadzenie	13
2. Wybrane zagadnienia teorii pól losowych	17
2.1. Podstawowe definicje i fakty	17
2.2. Warunki zgodności	20
2.3. Stacjonarne pola losowe	21
2.4. Przykłady struktur korelacyjnych pól losowych	24
2.5. Skala fluktuacji	30
2.6. Pola gaussowskie i ich transformacje	32
2.7. Transformacje skali fluktuacji	37
2.8. Uśrednienia lokalne. Funkcja wariancji	48
2.8.1. Koncepcja lokalnych uśrednień i podstawowe zależności	48
2.8.2. Jednowymiarowy obszar uśrednienia	50
2.8.3. Dwuwymiarowy obszar uśrednienia	54
2.8.4. Trójwymiarowy obszar uśrednienia	56
2.9. Zagadnienia estymacji	57
2.9.1. Estymacja liniowa nieobciążona	57
2.9.2. Ergodyczność	60
2.10. Numeryczne generowanie pól losowych (symulacja pól losowych)	61
2.10.1. Algorytm LAS	62
2.10.2. Testowanie algorytmu LAS	66
2.10.3. Generowanie pola wektorowego o współrzędnych skorelowanych	67
3. Probabilistyczne modelowanie właściwości gruntów	69
3.1. Modelowanie za pomocą zmiennych losowych	69
3.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa i współczynniki zmienności najczęściej stosowane w opisie parametrów podłoża	70
3.1.2. Korelacja wzajemna pomiędzy parametrami podłoża	78
3.2. Modelowanie właściwości podłoża za pomocą pól losowych	83
3.2.1. Podstawowe założenia	83
3.2.2. Metody określania skali fluktuacji	86
3.3. Przykłady statystycznego opisu badań gruntu na potrzeby modelowania parametrów za pomocą pól losowych	94
3.3.1. Grunty ilaste z okolic Tarentu (<i>Taranto clays</i>)	94
3.3.2. Grunty z rejonu Emilia-Romania	98
4. Szacowanie nośności na podstawie mechanizmów kinematycznych	103
4.1. Lokalne uśrednienia wzdłuż linii poślizgu dla mechanizmu Prandtla	104

4.1.1.	Uśrednienie jednowymiarowe	106
4.1.2.	Uśrednienie dwuwymiarowe	113
4.2.	Obliczenia funkcji wariancji i współczynników korelacji dla różnych szerokości fundamentu	119
4.2.1.	Odchylenia standardowe	119
4.2.2.	Współczynniki korelacji	130
4.3.	Formuła określająca nośność w przypadku stałej linii poślizgu	139
4.4.	Miary niezawodności	142
4.5.	Niezawodność posadowienia bezpośredniego. Analizy numeryczne	148
4.5.1.	Fundament pasmowy na podłożu niespoistym	149
4.5.2.	Fundament pasmowy na podłożu spoistym	155
4.6.	Losowe linie poślizgu	160
4.6.1.	Aproksymacja funkcji wariancji	161
4.6.2.	Algorytm estymacji prawdopodobieństwa awarii dla losowo zmiennych linii poślizgu	164
4.6.3.	Przykłady obliczeniowe	168
4.7.	Uwagi podsumowujące	172
5.	Ocena losowej nośności posadowienia bezpośredniego za pomocą losowej metody elementów skończonych	175
5.1.	Prace inicjujące zagadnienie	178
5.1.1.	Podłoże idealnie spoiste	178
5.1.2.	Podłoże tarciowo-kohezyjne (typu $\varphi-c$)	182
5.2.	Uogólnienie zagadnienia. Pole anizotropowe, fundament zagłębiony, uwzględnienie ciężaru własnego gruntu	186
5.2.1.	Modelowanie przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałości podłoża	187
5.2.2.	Podłoże idealnie spoiste. Porównanie wyników z modelowania izotropowego z wynikami modelowania anizotropowego	189
5.2.3.	Podłoże tarciowo-kohezyjne. Porównanie wyników z modelowania izotropowego i anizotropowego	191
5.2.4.	Uogólnienia dotyczące posadowienia bezpośredniego	197
5.3.	Rozkłady prawdopodobieństwa nośności	208
6.	Przykłady kalibracji wartości charakterystycznych i obliczeniowych	217
6.1.	Wartości charakterystyczne parametrów podłoża	218
6.2.	Wartości obliczeniowe nośności	229
7.	Podsumowanie i perspektywy rozwoju	237
	Bibliografia	243

Wykaz symboli

Duże litery łacińskie

- B, b – szerokość fundamentu,
 B – wysokość elementu w siatce MES (przypadek 2D),
 $B(r, t)$ – funkcja beta,
 C – macierz kowariancji wektora losowego,
 C_X – macierz kowariancji wektora losowego \mathbf{X} ,
 $C_X(i, j)$ – wyraz macierzy kowariancji wektora \mathbf{X} położony w wierszu i oraz kolumnie j ,
 COV – operator kowariancji,
 $COV(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$ – funkcja kowariancji pola,
 D – obszar (domena) w algorytmie LAS,
 D_{\min} – zagłębienie fundamentu (minimalne),
 $E[], E\{ \}$ – operator wartości oczekiwanej,
 E – moduł Younga,
 $F_X(x)$ – dystrybuanta zmiennej losowej X ,
 $F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ –
dystrybuanta wektora losowego $(X_1(x_1), X_2(x_2), \dots, X_n(x_n))$,
 $F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ – dystrybuanta skończenie wymiarowego rozkładu pola losowego $X(\mathbf{x})$, odpowiadającego punktom $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ obszaru określoności tego pola,
 FS – współczynnik bezpieczeństwa,
 G_ρ – standardowe gaussowskie pole losowe o strukturze korelacyjnej ρ ,
 $I[A]$ – indyktor zbioru A ,
 I_p – wskaźnik plastyczności gruntu,
 J – estymator prawdopodobieństwa awarii w metodzie Monte Carlo,
 J_0 – funkcja Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0,

- L – długość elementu w siatce MES (przypadek 2D),
 $M_2, M_3, M_4, \dots, M_k$ – estymator nieobciążony momentu centralnego rzędu 2, 3, 4, ..., k ,
 \mathbb{N} – zbiór liczb naturalnych,
 N – liczebność próby, liczba realizacji w symulacji Monte Carlo,
 N_c, N_q, N_y – współczynniki nośności,
 M_c – bezwymiarowy współczynnik nośności (podrozdział 5.2),
 P – prawdopodobieństwo,
 P – obciążenie fundamentu normalne do jego podstawy,
 $P\{X \leq x | Y\}$ – rozkład warunkowy zmiennej losowej X , pod warunkiem Y ,
 P_c – ciśnienie pęcznienia,
 Q_f – nośność (wyrażona w jednostkach siły) rozumiana jako zmienna losowa lub wartość deterministyczna – rozróżnienie każdorazowo wyniku z kontekstu,
 \mathbb{R} – przestrzeń liczb rzeczywistych,
 \mathbb{R}^n – n -wymiarowa przestrzeń rzeczywista (iloczyn kartezjański n przestrzeni liczb rzeczywistych),
 R^2 – współczynnik determinacji,
 $S, S_x, S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3)$ – gęstość widmowa (spektralna) pola losowego,
 S_r – stopień wilgotności,
 V – obszar w przestrzeni n -wymiarowej,
 VAR – operator wariancji,
 $X(\omega, \mathbf{x}), X(\mathbf{x}), X, Y, Z$ – pola losowe,
 X, Y, Z – zmienne losowe,
 X_V – pole losowe uśrednione po obszarze V ,
 X_k – wartość charakterystyczna parametru X ,
 X_d – wartość obliczeniowa parametru X .

Małe litery łacińskie

- b – szerokość fundamentu,
 c – spójność gruntu,
 c' – efektywna wartość spójności gruntu,
 c_c – wskaźnik skonsolidowania,
 c_u – wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odplywu,
 c_v – współczynnik konsolidacji,

- e – wskaźnik porowatości,
- f_i – zawartość frakcji ilowej,
- f_s – tarcie na tulei sondy CPT (CPTU),
- f_p – zawartość frakcji piaskowej,
- f_X – funkcja gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ,
- $f_{\mathbf{X}}$ – funkcja gęstości prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} ,
- $g(\mathbf{x})$ – funkcja stanu granicznego,
- h_z – głębokość posadowienia fundamentu,
- k – parametr kształtu rozkładu Weibulla,
- m – wartość średnia (oczekiwana) zamiennej losowej,
- \mathbf{m} – wartość oczekiwana wektora losowego,
- $m(\mathbf{x})$ – funkcja wartości oczekiwanej (wartości średniej) pola losowego,
- m_X – estymator wartości oczekiwanej zmiennej X ,
- m – średnia arytmetyczna,
- $m_2, m_3, m_4, \dots, m_k$ – estymator (obciążony) momentu centralnego rzędu 2, 3, 4, ..., k ,
- p_F – prawdopodobieństwo awarii,
- q_f – nośność (wyrażona w jednostkach naprężenia) rozumiana jako zmienna losowa lub wartość deterministyczna – rozróżnienie wynika każdorazowo z kontekstu,
- q_c – opór stożka sondy CPT (CPTU),
- q_d – wartość obliczeniowa nośności,
- s_X – estymator odchylenia standardowego zmiennej losowej X (obciążony lub nieobciążony),
- s_X^2 – estymator wariancji X (obciążony lub nieobciążony),
- $t(x)$ – funkcja trendu w polu losowym, określonym na obszarze jednowymiarowym,
- w – wilgotność gruntu; parametr kształtu rozkładu Weibulla,
- w_i – wagi w metodzie kwadratur Gaussa,
- w_L – granica płynności gruntu,
- w_{opt} – wilgotność optymalna,
- w_p – granica plastyczności gruntu,
- $x^{(n)}$ – wartość charakterystyczna parametru X według normy PN-81/B-03020,
- $x^{(r)}$ – wartość obliczeniowa parametru X według normy PN-81/B-03020,
- \mathbf{x}^* – punkt obliczeniowy,
- z_i – punkty Gaussa.

Duże litery greckie

- $\Gamma(x)$ – funkcja gamma Eulera,
 Θ_{c_u} – bezwymiarowa skala fluktuacji,
 Λ_X – macierz korelacji wektora \mathbf{X} ,
 $\Lambda_X(i, j)$ – wyraz macierzy korelacji wektora \mathbf{X} położony w wierszu i oraz kolumnie j ,
 Φ_0 – dystrybuanta standardowego rozkładu normalnego (jednowymiarowego),
 Φ_0^{-1} – funkcja odwrotna do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego (jednowymiarowego).

Małe litery greckie

- α, β, λ – współczynniki kierunkowe prostej,
 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ – mnożniki wyznaczające relacje pomiędzy skalami fluktuacji,
 β – wskaźnik niezawodności,
 β_{HL} – wskaźnik niezawodności Hasofer-Linda,
 γ_m – współczynnik materiałowy według normy PN-81/B-03020,
 γ – ciężar objętościowy gruntu,
 $\gamma(V)$ – funkcja wariancji,
 γ_b – ciężar objętościowy betonu,
 γ_z – ciężar objętościowy zasypki,
 γ_d – ciężar objętościowy szkieletu gruntowego,
 γ_p – ciężar objętościowy posadzki,
 γ_s – ciężar właściwy szkieletu gruntowego,
 γ_R – częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla nośności,
 $\delta(x)$ – dystrybucja Diraca,
 θ_X – skala fluktuacji pola X ,
 θ – skala fluktuacji pola X , gdy nie ma potrzeby specyfikowania symbolu pola,
 $\theta_{X(\alpha, \beta)}$ – skala fluktuacji pola w kierunku (α, β) – obszar dwuwymiarowy,
 $\theta_{X(\alpha, \beta, \lambda)}$ – skala fluktuacji pola w kierunku (α, β, λ) – obszar trójwymiarowy,
 $\theta_{(X)h}$ – pozioma skala fluktuacji pola X ,
 $\theta_{(X)x}$ – skala fluktuacji pola X w kierunku zgodnym z osią x ,

- $\theta_{(X)y}$ – skala fluktuacji pola X w kierunku zgodnym z osią y ,
 θ_h – pozioma skala fluktuacji pola X , gdy nie ma potrzeby specyfikowania symbolu pola,
 $\theta_{(X)v}$ – pionowa skala fluktuacji pola X ,
 θ_v – pionowa skala fluktuacji pola X , gdy nie ma potrzeby specyfikowania symbolu pola,
 μ_X – wartość oczekiwana (średnia) stacjonarnego pola losowego X ,
 μ_X – wartość oczekiwana zmiennej losowej X ,
 $\mu_X^{(n)}$ – moment statystyczny rzędu n zmiennej losowej X ,
 $\mu_X^{(nc)}$ – moment statystyczny centralny rzędu n zmiennej losowej X ,
 $\mu_{\ln Y}$ – wartość oczekiwana rozkładu normalnego podstawowego względem rozkładu log-normalnego Y ,
 ν – współczynnik Poissona,
 $\rho(X_i, X_j)$ – współczynnik korelacji zmiennych losowych X_i oraz X_j ,
 ρ_{ij} – współczynnik korelacji zmiennych losowych X_i oraz X_j (gdy wiadomo, o jakie zmienne chodzi),
 $\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2), \rho_X(\Delta x), \rho_X(\tau), \rho_X$ – funkcja korelacji pola X ,
 $\hat{\rho}(\tau_j)$ – estymator funkcji korelacji,
 $\rho(X(\mathbf{x}), Y(\mathbf{x}))$ – współczynnik korelacji pomiędzy polami losowymi $X(\mathbf{x})$ oraz $Y(\mathbf{x})$,
 ρ_d – gęstość objętościowa szkieletu gruntowego,
 σ_X – odchylenie standardowe pola stacjonarnego X ,
 σ_X – odchylenie standardowe zmiennej losowej X ,
 $\sigma_{\ln Y}$ – odchylenie standardowe rozkładu normalnego podstawowego względem rozkładu log-normalnego Y ,
 ν_X – współczynnik zmienności pola X ,
 ν_X – współczynnik zmienności zmiennej losowej X ,
 φ – kąt tarcia wewnętrznego gruntu,
 φ' – efektywna wartość kąta tarcia wewnętrznego gruntu,
 φ_1 – wartość kąta tarcia wewnętrznego bezpośrednio pod fundamentem (w rozdziale 4),
 τ – dolne ograniczenie nośnika rozkładu Weibulla,
 ψ – kąt dylatacji,
 $\omega, \omega_1, \omega_2$ – parametry funkcji korelacji typu Gaussa (w ramach rozdziału 4).

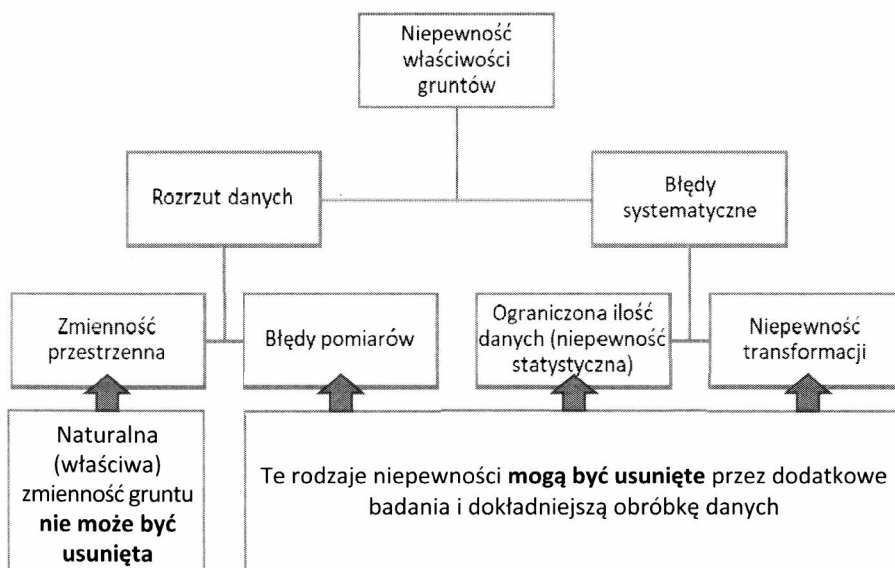
Inne symbole

- (Ω, Σ, P) – przestrzeń probabilistyczna,
 $\|\cdot\|$ – norma Euklidesowa w R^n ,
 $|V|$ – miara obszaru V (pole dla obszaru dwuwymiarowego, objętość dla obszaru trójwymiarowego),
 $|C|$ – wyznacznik macierzy kowariancji C ,
 C^{-1} – macierz odwrotna do macierzy kowariancji C ,
 C_X^{-1} – macierz odwrotna do macierzy C_X kowariancji wektora losowego X ,
 L^T – macierz transponowana do macierzy L ,
 ϕ_0 – gęstość prawdopodobieństwa standardowego jednowymiarowego rozkładu normalnego,
 ϕ_n – n -wymiarowa gęstość rozkładu normalnego.

Obecnie, gdy postęp w nauce dokonuje się bardzo szybko, zdarza się nierzadko, że język polski „nie nadąża” za rozwojem terminologii. Dlatego też w pewnych przypadkach trudno jest znaleźć polskie odpowiedniki angielskich terminów. Czasem te odpowiedniki nie są jeszcze dostatecznie „ugruntowane” i występują w kilku wersjach, a czasem wręcz trzeba je wprowadzać na nowo. W takich sytuacjach w nawiasach podawałem angielskie odpowiedniki tych neologizmów. Być może nie zawsze zręcznie, za co P.T. Czytelników przepraszam.

1. Wprowadzenie

Podobnie jak w wielu innych zagadnieniach geotechniki, także i nośność posadowienia bezpośredniego wiąże się z różnymi rodzajami niepewności. Dla geotechnika, który bada bezpieczeństwo posadowienia konstrukcji, najistotniejsza jest niepewność właściwości gruntów. Według Orra i Breyssego (Orr i Breysse, 2008) niepewność ta wynika z rozrzutu danych oraz błędów systematycznych, co schematycznie pokazano na rysunku 1.1. Te z kolei wynikają ze zmienności przestrzennej, błędów pomiarowych, ograniczonej liczby danych, a także niepewności transformacji.



Rys. 1.1. Rodzaje niepewności występujące przy opisie lub modelowaniu podłoża gruntowego (Orr i Breysse, 2008)

Zmienność przestrzenna jest konsekwencją niepewności naturalnej i bywa czasem nazywana inherentną. Natomiast trzy pozostałe wskazane wyżej rodzaje

niepewności występują pod wspólnym określeniem niepewności epistemologicznej. Podstawowa różnica pomiędzy tymi dwoma rodzajami niepewności polega na tym, że elementy drugiego z nich mogą być zredukowane, np. poprzez doskonalenie aparatury pomiarowej, gromadzenie większej liczby danych oraz rozwój modelowania i stwarzanie coraz doskonalszych wzorów transformacyjnych. Natomiast niepewność naturalna (inherentna) gruntu jest nieredukowalna i w zasadzie nie mamy na nią wpływu. Niepewność ta związana jest przede wszystkim z przestrzenną zmiennością właściwości podłoża. Przyczyną zaś – złożoność procesów geologicznych, które doprowadziły do powstania wierzchnich warstw, tych które możemy określić mianem gruntu budowlanego – odpowiedzialnych za bezpieczeństwo posadowień. W tej sytuacji pozostaje nam po pierwsze – badać niepewność naturalną gruntu w celu jej możliwie dokładnego opisu, a po drugie – wypracowywać metody, które pozwalają na adekwatne uwzględnienie niepewności naturalnej w obliczeniach konstrukcji współpracujących z gruntem, w tym posadowień obiektów inżynierskich. W ten sposób dochodzimy do zagadnień badania bezpieczeństwa w geotechnice i oceny ryzyka, które stało się przedmiotem zainteresowania wielu badaczy. W ramach międzynarodowej organizacji ISSMGE (*International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*) powstały komitety techniczne, w których pracuje się nad zagadnieniami bezpieczeństwa. Dwa najważniejsze z nich to TC 205 (*Safety and Serviceability in Geotechnical Design*) oraz TC 304 (*Engineering Practice of Risk Assessment and Management*). Zagadnienia bezpieczeństwa zawarte są także w przeznaczonym dla geotechników Eurokodzie 7 (PN-EN 1997-1:2008). Jednym z podstawowych „narzędzi” służących ocenie bezpieczeństwa są metody probabilistyczne, które opierają się na teorii prawdopodobieństwa oraz teorii funkcji losowych. W ramach tych teorii powstała gałąź wiedzy zwana niezawodnością konstrukcji (*structural reliability*). Wypracowała ona rozmaite miary bezpieczeństwa, spośród których zasadniczą rolę odgrywają prawdopodobieństwo awarii oraz wskaźnik niezawodności. Międzynarodowy komitet normalizacyjny (ISO) wydał także normę poświęconą zagadnieniom niezawodności pt. *General principles on reliability of structures* (ISO 2394, 1998). Należy odnotować, że w 2015 roku ukazało się czwarte wydanie tejże normy, a w nim (po raz pierwszy) załącznik (*Annex D*) poświęcony zagadnieniom niezawodności. Autor tego załącznika, Kok Kwang Phoon – były przewodniczący komitetu TC 304 – sformułował w nim kilka, jego zdaniem, najistotniejszych aspektów, które odróżniają ocenę niezawodności w geotechnice w stosunku do oceny niezawodności innych obiektów inżynierskich. Wśród nich jako najistotniejsze wskazano następujące.

- Duże wartości współczynników zmienności (v_x) parametrów gruntu.
- Niejednoznaczność współczynników zmienności parametrów podłoża polegającą na tym, że ich zakres może zmieniać się w zależności od procedury wyznaczania danego parametru.
- Właściwości podłoża różniące się pomiędzy sobą w zależności od miejsca badań *in situ*. Implikuje to konieczność wyjątkowej staranności w analizie statystycznej.
- Konieczność uwzględnienia korelacji przestrzennej danego parametru, który jest oznaczany na podstawie badań z kilku otworów. Może to skutkować zmniejszeniem współczynnika zmienności parametru, a w konsekwencji wzrostem wskaźnika niezawodności.

Do powyższych aspektów, a przede wszystkim do ostatniego z nich, odnosi się tematyka niniejszej monografii. Teoria pól losowych jest postrzegana jako jedno z najbardziej adekwatnych narzędzi modelowania przestrzennej zmienności właściwości gruntu i generalnie zmienności parametrów podłoża. Monografia koncentruje się na zagadnieniach nośności posadowienia bezpośredniego. Omawiane są dwa główne podejścia. Pierwsze z nich to oszacowanie na podstawie mechanizmów kinematycznych, gdzie zastosowanie teorii pól losowych prowadzi do uśrednionych parametrów umożliwiających lepszą, w stosunku do modelowania pojedynczymi zmiennymi losowymi, ocenę miar niezawodności związanych z nośnością fundamentów bezpośrednich (rozdział 4). Drugim podejściem są oszacowania uzyskane poprzez zastosowanie losowej metody elementów skończonych (*Random Finite Element Method – RFEM*) – rozdział 5. Jak pokazano w końcowym rozdziale, z obydwu podejść wynikają określone metody kalibracji wartości charakterystycznych lub obliczeniowych (rozdział 6). Na początku monografii znajduje się rozdział, w którym podano podstawowe pojęcia i metody teorii pól losowych, użyteczne w dalszej części monografii, a także w dalszych badaniach poruszanego tematu (rozdział 2). Zawarto tam też nowe (nigdzie jeszcze niepublikowane) oszacowania autora, dotyczące transformacji skali fluktuacji. W rozdziale 3 zawarto informacje dotyczące modelowania probabilistycznego w geotechnice.

2. Wybrane zagadnienia teorii pól losowych

2.1. Podstawowe definicje i fakty

Definicja 2.1. Niech $(\Omega, \Sigma_\Omega, P)$ będzie przestrzenią probabilistyczną, przy czym Σ_Ω oznacza σ -ciało zbiorów Ω ; k -wymiarowym polem losowym $X(\omega, \mathbf{x})$ nazywa się dowolną funkcję $X: \Omega \times U \rightarrow \mathbb{R}^k$, $U \subset \mathbb{R}^n$ taką, że dla każdego $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ funkcja $X(\omega, \mathbf{x}_0): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ jest funkcją mierzalną (wektorem losowym – Gichman i Skorochod, 1968). Przy ustalonym $\mathbf{x}_0 \in U$ funkcję $X(\omega, \mathbf{x}_0): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy stanem pola, zaś przy ustalonym $\omega_0 \in \Omega$ funkcję $X(\omega_0, \mathbf{x}): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^k$ nazywamy realizacją pola.

W szczególności, gdy $k = n = 1$, otrzymujemy proces stochastyczny. W przypadku $k = 1$, dla ustalonego punktu $\mathbf{x}_0 \in U \subset \mathbb{R}^n$, $X(\omega, \mathbf{x}_0)$ jest pojedynczą zmienną losową. Jako zamiennego określenia dla pola losowego używa się też pojęcia funkcja losowa. W niniejszej monografii konsekwentnie będzie używane określenie *pole losowe*, a to ze względu na powszechne stosowanie takiego nazewnictwa w zastosowaniach związanych z geotechniką. Z definicji wynika, że pole losowe może być traktowane jako pewna rodzina zmiennych losowych indeksowana parametrem $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$. Wymiar n jest wymiarem obszaru, na którym określone jest pole. W dalszym ciągu rozważania ograniczone będą do wymiaru $n \leq 3$ (obszary jedno-, dwu- i trójwymiarowe), choć w niektórych przypadkach uogólnienia na większą liczbę wymiarów są oczywiste. Ogólnie pola losowe mogą być definiowane jako funkcje o wartościach zespolonych. Jednak ze względu na specyfikę zastosowań w niniejszej monografii rozpatrywane będą jedynie pola losowe o wartościach rzeczywistych.

Dla opisu pola losowego kluczowe jest pojęcie *rozkładu skończenie wymiarowego*.

Definicja 2.2. Niech $X(\omega, \mathbf{x})$ będzie polem losowym, niech ponadto $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$ będzie dowolnym skończonym ciągiem punktów z \mathbb{R}^n . Łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora losowego $(X(\omega, \mathbf{x}_1), X(\omega, \mathbf{x}_2), \dots, X(\omega, \mathbf{x}_m))$ nazywamy skończenie wymiarowym rozkładem pola losowego $X(\omega, \mathbf{x})$.

Pełna informacja probabilistyczna o polu losowym znana jest wówczas, gdy znane są wszystkie rozkłady skończenie wymiarowe. W wielu zastosowaniach pól losowych taka informacja bywa niedostępna. Wtedy, analogicznie jak w przypadku pojedynczych zmiennych losowych, ograniczamy się do charakterystyk momentowych pola losowego. I tak, jeśli przyjąć założenie, że rozkłady skończenie wymiarowe posiadają skończone wariancje (skrótowo – pole losowe jest polem o skończonej wariancji), to najczęściej stosowanymi „narzędziami” opisu pola losowego są: funkcja wartości oczekiwanej (wartości średniej)

$$m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad m(\mathbf{x}) = E[X(\omega, \mathbf{x})] \quad (2.1)$$

oraz funkcja kowariancji pola

$$\begin{aligned} \text{COV} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{COV}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) &= E\left\{\left[X(\omega, \mathbf{x}_1) - E[X(\omega, \mathbf{x}_1)]\right]\left[X(\omega, \mathbf{x}_2) - E[X(\omega, \mathbf{x}_2)]\right]\right\}. \end{aligned} \quad (2.2)$$

W szczególności, jeśli we wzorze (2.2) przyjąć $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}$, otrzymujemy wariancję pola

$$\begin{aligned} \text{VAR} : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{VAR}(\mathbf{x}) &= E\left\{\left[X(\omega, \mathbf{x}) - E[X(\omega, \mathbf{x})]\right]^2\right\} = E[X^2(\omega, \mathbf{x})] - \{E[X(\omega, \mathbf{x})]\}^2. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Równoważnie, zamiast funkcji kowariancji pola, używa się funkcji korelacji pola, nazywanej też funkcją autokorelacji pola, którą definiuje się wzorem

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\text{COV}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\sqrt{\text{VAR}(\mathbf{x}_1)}\sqrt{\text{VAR}(\mathbf{x}_2)}}. \quad (2.4)$$

Fakt 2.1. Niech pole $X(\omega, \mathbf{x})$ będzie polem o skończonej wariancji. Wówczas prawdziwe są następujące własności funkcji kowariancji tego pola:

– symetria

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \quad \text{COV}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \text{COV}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1), \quad (2.5)$$

– nierówność Schwarza

$$|\text{COV}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)| \leq \sqrt{\text{VAR}(\mathbf{x}_1)}\sqrt{\text{VAR}(\mathbf{x}_2)}, \quad (2.6)$$

– nieujemna określoność

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n \forall a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R} \quad \sum_{i,j}^n a_i a_j \text{COV}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) \geq 0. \quad (2.7)$$

Dowód: własność symetrii wynika bezpośrednio z określenia funkcji kowariancji (2.2). Następną własność jest konsekwencją następującej nierówności Schwarz'a prawdziwej dla funkcji całkowalnych z kwadratem (Leja, 2018):

$$\left| \int fg \right| \leq \sqrt{\int f^2} \sqrt{\int g^2}. \quad (2.8)$$

Traktując wartość oczekiwaną jako całkę względem miary P w przestrzeni probabilistycznej (Ω, Σ, P) i stosując nierówność (2.8), otrzymuje się

$$\left| E[X(\omega, \mathbf{x}_1)X(\omega, \mathbf{x}_2)] \right| \leq \sqrt{E[X^2(\omega, \mathbf{x}_1)]} \sqrt{E[X^2(\omega, \mathbf{x}_2)]}. \quad (2.9)$$

Ostatnia nierówność pozostaje prawdziwa, jeśli zastąpić zmienną losową $X(\omega, \mathbf{x}_1)$ przez zmienną losową $[X(\omega, \mathbf{x}_1) - E[X(\omega, \mathbf{x}_1)]]$, zaś zmienną losową $X(\omega, \mathbf{x}_2)$ przez zmienną losową $[X(\omega, \mathbf{x}_2) - E[X(\omega, \mathbf{x}_2)]]$. Następnie, po uwzględnieniu definicji kowariancji (wzór (2.2)) oraz wariancji (wzór (2.3)) otrzymuje się nierówność (2.6).

Aby wykazać nieujemną określoność funkcji kowariancji, wybierzmy dowolnie ciąg a_1, \dots, a_n liczb rzeczywistych oraz ciąg punktów $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n \in \mathbb{R}^n$. Określmy nową zmienną losową $Y = \sum_{i=1}^n a_i X(\omega, \mathbf{x}_i)$. Oczywiście wariancja zmiennej Y jest liczbą nieujemną:

$$\text{VAR}(Y) \geq 0. \quad (2.10)$$

Z drugiej strony

$$\begin{aligned} \text{VAR}(Y) &= E\left\{[Y - E[Y]]^2\right\} = E\left\{\left[\sum_{i=1}^n a_i X(\omega, \mathbf{x}_i) - \sum_{i=1}^n a_i E[X(\omega, \mathbf{x}_i)]\right]^2\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j E\left\{[X(\omega, \mathbf{x}_i) - E[X(\omega, \mathbf{x}_i)]] [X(\omega, \mathbf{x}_j) - E[X(\omega, \mathbf{x}_j)]]\right\} = \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_i a_j \text{COV}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j). \end{aligned} \quad (2.11)$$

Zatem nierówność (2.7) wynika z zastosowania nierówności (2.10) do ostatniego elementu równania (2.11), co kończy dowód.

Warto zauważyć, że zerowa wartość wariancji we wzorze (2.10) ma miejsce tylko w przypadku zmiennej losowej skoncentrowanej w jednym punkcie z prawdopodobieństwem jeden. Zatem w znakomitej większości przypadków nierówność we wzorze (2.7) jest ostra, czyli funkcja kowariancji jest określona dodatnio.

W dalszych rozdziałach, dla uproszczenia notacji, pola losowe $X(\omega, \mathbf{x})$ będą oznaczane przez $X(\mathbf{x})$ lub po prostu przez X , względnie przez inne wielkie litery.

2.2. Warunki zgodności

Jak wskazano w poprzednim podrozdziale, pole losowe jest pewną rodziną zmiennych losowych. Takie podejście wymaga jednak uściślenia dotyczącego jednoznaczności. Zauważmy, że zgodnie z teorią prawdopodobieństwa skończony ciąg zmiennych losowych $X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{x}_2), \dots, X(\mathbf{x}_n)$ jest całkowicie scharakteryzowany przez ich rozkład łączny lub ich łączną dystrybuantę:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P\{X(\mathbf{x}_1) < x_1, X(\mathbf{x}_2) < x_2, \dots, X(\mathbf{x}_n) < x_n\}. \quad (2.12)$$

Powstaje jednak pytanie, jak opisać wzajemne związki nieskończonej ilości zmiennych losowych. Naturalnym podejściem jest tu przyjęcie założenia, że wszelkie możliwe zależności probabilistyczne określone są między dowolnym skończonym zbiorem zmiennych losowych

$$X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{x}_2), \dots, X(\mathbf{x}_n), \quad (2.13)$$

gdzie $\mathbf{x}_i \in U \subset \mathbb{R}^n; i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$. Zatem pole losowe $X(\mathbf{x})$ określone jest przez rodzinę rozkładów

$$F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.14)$$

$\mathbf{x}_i \in U \subset \mathbb{R}^n; i = 1, 2, \dots, n; n = 1, 2, \dots$. Każdą dystrybuantę (2.14) interpretuje się jako dystrybuantę ciągu zmiennych losowych (2.13). Są to rozkłady skończone wymiarowe pola losowego (tak jak podano w definicji 2.2). Taka interpretacja jest możliwa, gdy rodzina rozkładów (2.14) spełnia dwa następujące warunki:

$$F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots, \mathbf{x}_{n+p}}(x_1, x_2, \dots, x_n, +\infty, \dots, +\infty) = F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.15)$$

$$F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}), \quad (2.16)$$

gdzie i_1, i_2, \dots, i_n jest dowolną permutacją wskaźników $1, 2, \dots, n, \dots, n+p$. Konieczność powyższych warunków wynika z następujących równości:

$$\begin{aligned} & F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n, \mathbf{x}_{n+1}, \mathbf{x}_{n+2}, \dots, \mathbf{x}_{n+p}}(x_1, \dots, x_n, +\infty, \dots, +\infty) = \\ & = P\{X(\mathbf{x}_1) < x_1, \dots, X(\mathbf{x}_n) < x_n, X(\mathbf{x}_{n+1}) < +\infty, \dots, X(\mathbf{x}_{n+p}) < +\infty\} = \\ & = P\{X(\mathbf{x}_1) < x_1, \dots, X(\mathbf{x}_n) < x_n\} = F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n), \end{aligned} \quad (2.17)$$

$$\begin{aligned} & F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \\ & = P\{X(\mathbf{x}_1) < x_1, \dots, X(\mathbf{x}_n) < x_n\} = P\{X(\mathbf{x}_{i_1}) < x_{i_1}, \dots, X(\mathbf{x}_{i_n}) < x_{i_n}\} = \\ & = F_{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_n}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}). \end{aligned} \quad (2.18)$$

Powyższe argumenty prowadzą do równoważnej definicji pola losowego.

Definicja 2.3. Polem losowym $X(\mathbf{x})$ określonym na obszarze $\mathbf{x} \in U \subset \mathbb{R}^n$ i przyjmującym wartości rzeczywiste nazywamy rodzinę rozkładów (2.14) spełniającą warunki zgodności (2.15) i (2.16).

2.3. Stacjonarne pola losowe

Jak zaznaczono w rozdziale pierwszym, w niniejszym opracowaniu uwaga skoncentrowana będzie na stacjonarnych polach losowych, których definicja podana jest poniżej.

Definicja 2.4. Niech $\mathbf{h} \in U \subset \mathbb{R}^n$ będzie elementem obszaru, na którym określone jest dane pole losowe $X(\mathbf{x})$. Niech ponadto $F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ będzie dowolnym skończeniem wymiarowym rozkładem tego pola, przy czym n jest dowolną liczbą naturalną. Pole losowe $X(\mathbf{x})$ nazywamy stacjonarnym (stacjonarnym w węższym sensie), jeśli spełnia ono warunek

$$F_{\mathbf{x}_1+\mathbf{h}, \mathbf{x}_2+\mathbf{h}, \dots, \mathbf{x}_n+\mathbf{h}}(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n}(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.19)$$

Warunek stacjonarności (2.19) oznacza, że rozkłady skończenie wymiarowe są niezmiennicze ze względu na translacje (translacyjnie niezmiennicze).

W przypadku niepełnej informacji, tj. gdy rozkłady skończenie wymiarowe nie są znane, a dostępna jest jedynie funkcja wartości średniej oraz funkcja kowariancji, użyteczne jest pojęcie stacjonarności w szerszym sensie (słabej stacjonarności), które można określić w następujący sposób:

Definicja 2.5. Niech pole losowe $X(\mathbf{x})$ będzie polem o skończonej wariancji. Pole $X(\mathbf{x})$ nazywa się polem stacjonarnym w szerszym sensie, jeżeli:

- a) $\forall \mathbf{x} \in U \quad m(\mathbf{x}) = m = \text{const}$, czyli funkcja wartości średniej jest stała na całym obszarze określoności pola;
- b) dla dowolnego $\mathbf{h} \in U$

$$\forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \quad \text{COV}(\mathbf{x}_1 + \mathbf{h}, \mathbf{x}_2 + \mathbf{h}) = \text{COV}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_1). \quad (2.20)$$

Drugi warunek oznacza, że funkcja kowariancji jest translacyjnie niezmiennicza, a zatem zależy jedynie od różnic poszczególnych współrzędnych. W przypadku obszaru trójwymiarowego warunek (2.20) można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \text{COV}(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) &= \text{COV}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) = \\ &= \text{COV}(\Delta x, \Delta y, \Delta z). \end{aligned} \quad (2.21)$$

Równanie (2.20) wskazuje, że jeśli pole jest stacjonarne w szerszym sensie, to liczba zmiennych niezależnych w funkcji kowariancji redukuje się o połowę. W szczególnym przypadku obszaru trójwymiarowego (2.21) funkcja kowariancji jest funkcją tylko trzech zmiennych (zamiast sześciu), a w przypadku obszaru jednowymiarowego – funkcją jednej zmiennej. Jak łatwo zauważyć, własność (2.20) implikuje, że wariancja stacjonarnego w szerszym sensie pola losowego jest stała w każdym punkcie obszaru U . W związku z tym funkcja korelacji pola (2.4) przybiera następującą postać:

$$\rho(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \frac{\text{COV}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)}{\sigma_x^2}. \quad (2.22)$$

Oczywiście dla pola o skończonej wariancji stacjonarność w sensie węższym implikuje stacjonarność w sensie szerszym, ale nie odwrotnie.

Jako alternatywną do funkcji kowariancji charakterystykę stacjonarnego pola losowego stosuje się transformatę Fouriera S funkcji kowariancji, która nazywana bywa gęstością widmową (spektralną) funkcji losowej (Gikhman i Skorohod, 1977; Papoulis, 1972; Wentzel, 1980). Transformata Fouriera oraz transformata do niej odwrotna dają następujące zależności pomiędzy funkcją kowariancji a jej gęstością widmową:

$$\text{COV}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \iiint_{\mathbf{R}^3} S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \cos(\kappa_1 \Delta x + \kappa_2 \Delta y + \kappa_3 \Delta z) d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (2.23)$$

$$S(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbf{R}^3} \text{COV}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) \cos(\kappa_1 \Delta x + \kappa_2 \Delta y + \kappa_3 \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z. \quad (2.24)$$

Wzory (2.23) oraz (2.24) znane są w literaturze (Yardenko, 1983) jako relacje Wienera–Chinczyna. Gęstości spektralne są ważnym narzędziem stosowanym w zagadnieniach dynamiki stochastycznej (Śniady, 2000). W dalszej części tego opracowania używane będą przede wszystkim funkcje kowariancji lub korelacji pola.

Poniżej rozpatrywane będą jedynie pola losowe o skończonej wariancji, które są stacjonarne w szerszym sensie.

Kolejnym uproszczeniem modelu matematycznego jest przyjęcie założenia o separowalności pola.

Definicja 2.6. Stacjonarne w szerszym sensie pole losowe $X(\mathbf{x})$ jest separowalne, jeżeli jego funkcja kowariancji daje się przedstawić w następującej postaci:

$$\text{COV}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\text{COV})_1(x_1 - y_1) \cdot (\text{COV})_2(x_2 - y_2) \cdot \dots \cdot (\text{COV})_n(x_n - y_n), \quad (2.25)$$

gdzie $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, zaś $(\text{COV})_i(x_i - y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ jest funkcją kowariancji „w kierunku i ”.

Oczywiście poszczególne funkcje kowariancji $(\text{COV})_i(x_i - y_i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ są funkcjami jednej zmiennej. Własność separowalności pozwala na analizę struktury korelacyjnej pola w każdym kierunku z osobna za pomocą n funkcji jednej zmiennej.

Specjalną klasę stacjonarnych pól losowych stanowią pola izotropowe.

Definicja 2.7. Stacjonarne w szerszym sensie pole losowe $X(\mathbf{x})$ jest izotropowe, jeżeli jego funkcja kowariancji ma postać

$$\text{COV}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|), \quad (2.26)$$

gdzie f jest funkcją nieujemnie określoną, zaś $\|\cdot\|$ oznacza normę Euklidesową w \mathbf{R}^n .

Podobnie jak w przypadku ogólnym nieujemna określoność funkcji f jest warunkiem koniecznym do tego, aby ta funkcja była funkcją korelacji stacjonarnego (w szerszym sensie) pola losowego. Oznacza to, że dla dowolnych liczb c_i, c_j oraz dowolnych punktów $\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j$ spełniony jest warunek

$$\sum_{i,j}^n c_i c_j f(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) \geq 0. \quad (2.27)$$

Matern (1960) wykazał, że w funkcja kowariancji pola izotropowego, którego obszar określoności zawiera się w \mathbb{R}^n musi spełniać warunek

$$\text{COV}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = f(\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|) \geq -\frac{1}{n}. \quad (2.28)$$

Twierdzenia dotyczące warunków dostatecznych na to, aby funkcja f była funkcją korelacji izotropowego pola losowego, można znaleźć np. w monografii Gichmana i Skorochoda (1968). Pola izotropowe są polami, w których funkcją kowariancji jest funkcja tylko jednej zmiennej i zależy jedynie od odległości punktów w obszarze. Jest oczywiste, że separowalność nie implikuje izotropii pola. Ale i na odwrót – nie każde pole izotropowe jest separowalne.

2.4. Przykłady struktur korelacyjnych pól losowych

Na podstawie informacji podanych w poprzednich podrozdziałach łatwo zauważyć, że bardzo istotną charakterystyką pola jest to, w jaki sposób zmienne losowe odpowiadające poszczególnym punktom obszaru są ze sobą powiązane. Informacja ta jest oczywiście zawarta w postaci rozkładów skończenie wymiarowych. Jeśli jednak postać rozkładów skończenie wymiarowych nie jest znana, to źródłem tej informacji jest tzw. struktura korelacyjna pola, charakteryzowana przez funkcję kowariancji pola. W przypadku pól stacjonarnych, w których wariancja jest stała, prościej jest posługiwać się funkcją korelacji pola (2.22). Poniżej podano kilka przykładów często stosowanych funkcji korelacji. Na początku rozpatrzone będą pola, których obszar określoności jest jednowymiarowy.

Przykład 2.1. Jako pierwszy przykład warto wymienić funkcję losową zwaną „idealnym białym szumem”, którą można uważać za najprostszy przykład pola losowego. Pole to, oznaczane dalej jako $X(t)$, $t \in \mathbb{R}$, składa się z nieskończonych ciągów niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach, określonych dla każdego t , co oznacza, że każda ze zmiennych $X_1 = X(t_1)$, $X_2 = X(t_2)$, ..., $X_n = X(t_n)$, ... ma jednakowy rozkład jednowymiarowy o dystrybuancie $F_X(x)$. Z założenia o niezależności wynika, że dystrybuanta rozkładu łącznego jest iloczynem dystrybuant rozkładów brzegowych (Feller, 2008), czyli

$$F_{X_1, X_2, \dots, X_n, \dots}(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots) = F_X(x_1) \cdot F_X(x_2) \cdot \dots \cdot F_X(x_n) \cdot \dots \quad (2.29)$$

Korelacja w tym polu, czyli korelacja pomiędzy zmiennymi losowymi $X(t_1)$ i $X(t_2)$, określonymi w punktach t_1 oraz t_2 , jest następująca:

$$\rho(|t_1 - t_2|) = \rho(\Delta t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta t = 0, \\ 0 & \text{dla } \Delta t \neq 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

Można wykazać, że wariancja w takim polu nie może być skończona (Fenton i Griffiths, 2008) tylko wówczas, gdy poszczególne zmienne losowe $X(t)$ przyjmują stałą wartość z prawdopodobieństwem 1.

Zatem funkcja kowariancji w ścisłym formalnym sensie nie jest określona. Często jednak przedstawia się ją posługując się „intuicyjnym” (jak to często robią fizycy) rozumieniem dystrybucji Diraca $\delta(x)$:

$$\text{COV}(\Delta t) = G_0 \delta(\Delta t), \quad (2.31)$$

gdzie G_0 jest pewną stałą.

Oznacza to, że w powyższym polu zmienne losowe odpowiadające dwóm dowolnie bliskim punktom są nieskorelowane. Nie jest to sytuacja realistyczna z punktu widzenia modelowania w geotechnice. Jednak pola te można w sposób łatwy i efektywny symulować numerycznie, a następnie używać do symulacji innych pól losowych (Fenton i Griffiths, 2008). Dlatego też warto zwrócić na nie uwagę w niniejszej monografii. Biały szum pojawi się w podrozdziale 2.10, gdzie będzie zastosowany w konstrukcji algorytmu LAS.

Przykład 2.2. Innym prostym przykładem funkcji korelacyjnej jest tzw. funkcja trójkątna:

$$\rho(\Delta x) = \begin{cases} \left(1 - \frac{|\Delta x|}{a}\right) & \text{dla } |\Delta x| \leq a, \\ 0 & \text{dla } |\Delta x| > a. \end{cases} \quad (2.32)$$

gdzie a jest dodatnią liczbą charakteryzującą „siłę korelacji”. W tym przypadku korelacja zanika, gdy punkty w obszarze są odległe od siebie o wartość a lub większą niż a .

Przykład 2.3. Jeśli korelacja zanika dopiero przy bardzo dużych odległościach („w nieskończoności”), to można zastosować funkcję zanikającą potęgowo, o postaci

$$\text{COV}(\Delta x) = \frac{a^3}{(a + \Delta x)^3}. \quad (2.33)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie a jest dodatnim parametrem określającym stopień skorelowania zmiennych w polu. Stopień wykładnika może być też inny niż 3.

Przykład 2.4. Do modelowania szybszego niż w poprzednim przykładzie zaniku korelacji używa się funkcji wykładniczej. Najczęściej ma ona postać

$$\rho(\Delta x) = \exp(-a|\Delta x|). \quad (2.34)$$

Powyższa funkcja bywa nazywana funkcją korelacji Markowa, gdyż jest ona funkcją korelacji tzw. procesów Markowa (Fenton i Griffiths, 2008; Feller, 2008; Chung, 1974). Procesy Markowa są to funkcje losowe, które spełniają zależność

$$P\{X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n), X(t_{n-1}), X(t_{n-2}), \dots, X(t_1)\} = P\{X(t_{n+1}) \leq x | X(t_n)\}, \quad (2.35)$$

w której prawdopodobieństwo po lewej stronie równości jest prawdopodobieństwem warunkowym.

Powyższą identyczność rozkładów warunkowych (zwaną też własnością Markowa) można interpretować w ten sposób, że „przyszłość” zależy jedynie od „stanu teraźniejszego” (lub najpóźniejszego stanu przeszłego), a nie od wszystkich stanów przeszłych. Własność Markowa bywa stosowana w modelowaniu wielu procesów losowych, także inżynierskich (Benjamin i Cornell, 1977). Oczywiście stosowanie funkcji korelacji w postaci (2.34) nie ogranicza się jedynie do procesów Markowa. Innym przykładem są tzw. procesy (modele) autoregresyjne (Box i Jenkins, 1983), tj. procesy będące rozwiązaniem liniowego stochastycznego równania różniczkowego o postaci

$$c \frac{dX(t)}{dt} + \alpha X(t) = W(t), \quad (2.36)$$

gdzie $W(t)$ jest idealnym białym szumem, zaś c i α stałymi rzeczywistymi. Można udowodnić (Fenton i Griffiths, 2008), że rozwiązanie tego równania ma funkcję korelacji o postaci

$$\rho(\Delta x) = \exp\left(-\alpha \frac{|\Delta x|}{c}\right), \quad (2.37)$$

a więc analogiczna do (2.34). Rozwiązanie, o którym mowa powyżej, w fizyce nazywa się procesem Ornsteina-Uhlenbecka i jest modelem klasycznego

ruchu Browna. Należy odnotować, że funkcje korelacji (2.34) i (2.37) nie posiadają pochodnej w punkcie $\Delta x = 0$, co czasem stanowi komplikację w obliczeniach.

Przykład 2.5. Aby uniknąć niedogodności z brakiem pochodnej w punkcie „zero”, można zastosować tzw. gaussowską funkcję korelacji o postaci

$$\rho(\Delta x) = \exp\left(-a(\Delta x)^2\right), \quad (2.38)$$

której zastosowanie będzie pokazane w rozdziale 4 tej monografii.

Przykład 2.6. Za pracą Rackwitz (2000) podano poniżej trzy dalsze przykłady funkcji korelacyjnych użyteczne przy modelowaniu procesów losowych:

$$\rho(\Delta x) = \exp(-a|\Delta x|)[1 + a|\Delta x|], \quad (2.39)$$

$$\rho(\Delta x) = \exp(-a|\Delta x|)\cos(b\Delta x), \quad (2.40)$$

$$\rho(\Delta x) = \exp(-a|\Delta x|)J_0(b\Delta x). \quad (2.41)$$

W powyższych wzorach $a > 0$ i $b > 0$ są parametrami pola, J_0 oznacza funkcję Bessela pierwszego rodzaju rzędu 0.

Poniżej podane są przykłady funkcji korelacyjnych dla przypadku, gdy pole losowe określone jest na obszarze dwuwymiarowym.

Przykład 2.7. Przez analogię do funkcji (2.34) określa się funkcję korelacji typu Markowa:

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp\left(-\left(a_1|\Delta x| + a_2|\Delta y|\right)\right) = \exp(-a_1|\Delta x|)\exp(-a_2|\Delta y|), \quad (2.42)$$

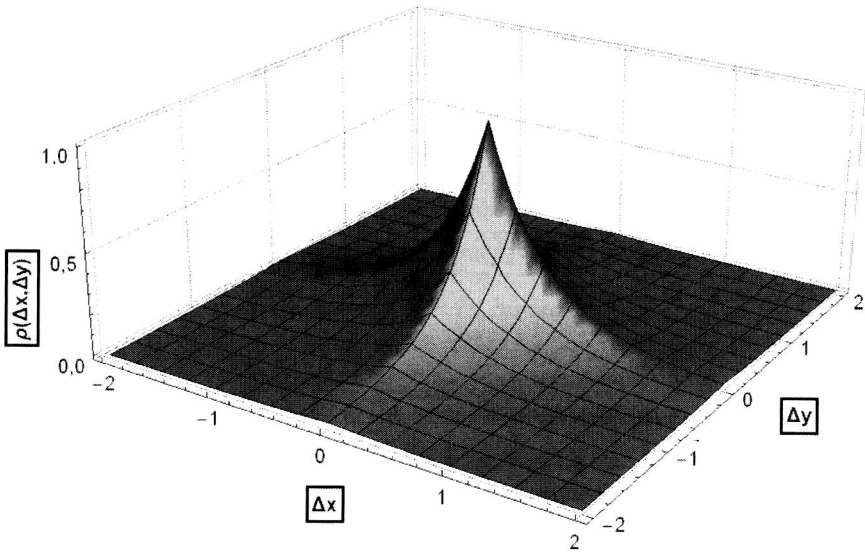
gdzie a_1 oraz a_2 są stałymi dodatnimi. Warto zauważyć, że nawet w przypadku $a_1 = a_2$ funkcja ta nie jest funkcją korelacji pola izotropowego, co ilustruje rysunek 2.1.

Natomiast pole stacjonarne z funkcją korelacji postaci (2.42) jest polem separowalnym.

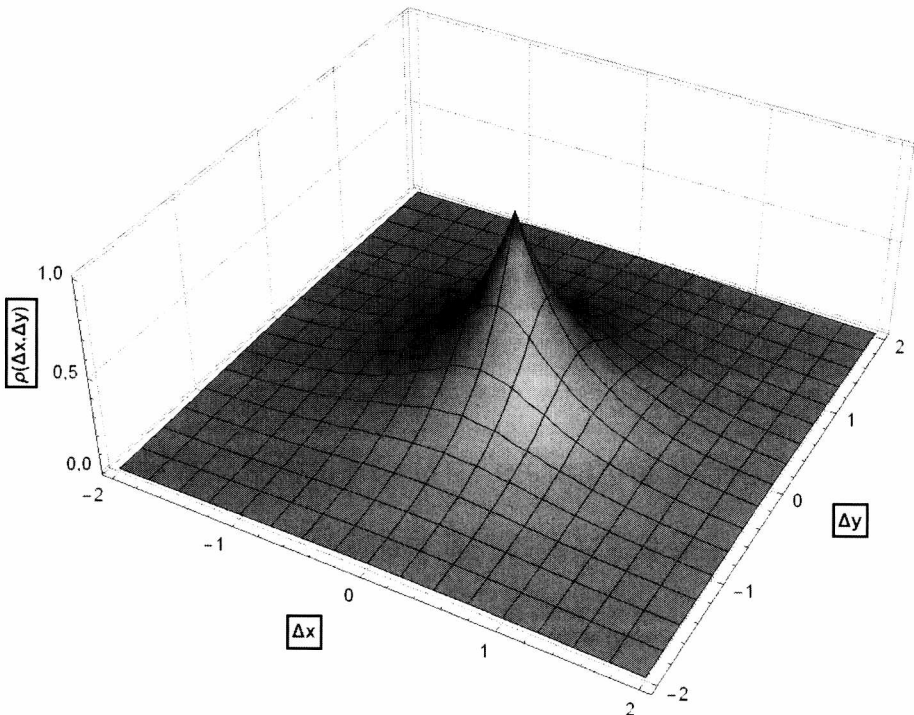
Przykład 2.8. Aby funkcja korelacji typu Markowa była funkcją korelacji pola izotropowego musi być funkcją jednej zmiennej – odległości pomiędzy punktami obszaru określoności pola, co daje następującą postać:

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp\left(-a\sqrt{((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)}\right), \quad (2.43)$$

ale powyższa funkcja nie jest już funkcją pola separowalnego. Wykres tego typu funkcji pokazano na rysunku 2.2.



Rys. 2.1. Wykres funkcji korelacji typu Markowa (wzór (2.42)), $a_1 = a_2 = a_3$



Rys. 2.2. Wykres funkcji korelacji typu Markowa pola izotropowego (wzór (2.43)), $a = 2$

Przykład 2.9. W rozdziale 5 stosowana będzie funkcja korelacji będąca ogólniejszą postacią funkcji (2.43), a mianowicie

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp\left(-\sqrt{\left((a_1\Delta x)^2 + (a_2\Delta y)^2\right)}\right). \quad (2.44)$$

Funkcja ta w przypadku $a_1 = a_2$ jest identyczna z (2.43). Natomiast w przypadku $a_1 \neq a_2$ przestaje być funkcją pola izotropowego. Gdy $a_1 \neq a_2$, struktura korelacyjna bywa nazywana strukturą elipsoidalną. Funkcja (2.44) nie jest też funkcją pola separowalnego.

Analogiczne przykłady dotyczą funkcji korelacji typu gaussowskiego.

Przykład 2.10. Funkcja korelacji typu gaussowskiego ma postać

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp\left(-\left(a_1(\Delta x)^2 + a_2(\Delta y)^2\right)\right). \quad (2.45)$$

Jak łatwo zauważyć, pole, którego struktura korelacyjna charakteryzowana jest przez funkcję (2.45), jest polem separowalnym. W przypadku $a_1 = a_2$ pole staje się izotropowe.

Uogólnienie na obszary o wyższych wymiarach odbywa się analogicznie jak przejście z obszarów jednowymiarowych na dwuwymiarowe. I tak separowalna struktura korelacyjna ma postać

$$\rho(\Delta \mathbf{x}) = \rho_1(\Delta x_1)\rho_2(\Delta x_2)\cdots\rho_n(\Delta x_n). \quad (2.46)$$

W przypadku modelu Markowa

$$\rho_i(\Delta x_i) = \exp(-a_i|\Delta x_i|), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.47)$$

zaś w przypadku modelu gaussowskiego

$$\rho_i(\Delta x_i) = \exp(-a_i(\Delta x_i)^2), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.48)$$

Natomiast elipsoidalny model Markowa ma funkcję korelacji o postaci

$$\rho(\Delta \mathbf{x}) = \exp\left(-\sqrt{\left((a_1\Delta x_1)^2 + (a_2\Delta x_2)^2 + \dots + (a_n\Delta x_n)^2\right)}\right). \quad (2.49)$$

Modelowanie wielu właściwości jednocześnie wymaga zastosowania wielowymiarowego pola losowego, którego kolejne składowe (komponenty) odpo-

wiadają poszczególnym właściwościom. W zastosowaniach do problemów inżynierskich pełna informacja probabilistyczna, w postaci skończenie wymiarowych rozkładów łącznych, najczęściej nie jest dana z powodu braku możliwości statystycznej weryfikacji założeń. Często jednak istnieje pewna informacja na temat wzajemnej korelacji poszczególnych właściwości. Wówczas poszczególne składowe pola wektorowego powinny być w analogiczny sposób skorelowane. Zatem jeżeli $(X_1(\mathbf{x}_1), X_2(\mathbf{x}_2), \dots, X_m(\mathbf{x}_m))$ jest m -wymiarowym polem losowym stacjonarnym w szerszym sensie, określonym na n -wymiarowym obszarze $U \subset \mathbb{R}^n$, to struktura korelacyjna takiego pola jest scharakteryzowana przez m funkcji korelacji $\rho_{X_i}(\Delta\mathbf{x})$, które odpowiednio są funkcjami autokorelacji pól $X_i(\mathbf{x})$, $i = 1, 2, \dots, m$ oraz $m(m-1)$ funkcji $\rho_{X_i, X_j}(\Delta\mathbf{x})$, będących funkcjami korelacji wzajemnej pomiędzy polami $X_i(\mathbf{x}_i)$ oraz $X_j(\mathbf{x}_j)$.

2.5. Skala fluktuacji

Miarą szybkości zmienności stacjonarnego pola losowego X jest promień korelacyjny, zwany też skalą fluktuacji (Vanmarcke, 1977), odległością korelacyjną, długością korelacyjną. W przypadku jednowymiarowym określa się go jako całkę z funkcji korelacji pola, zatem

$$\theta_X = \frac{2}{\sigma^2} \int_0^{\infty} \text{COV}(\Delta x) d\Delta x = 2 \int_0^{\infty} \rho_X(\Delta x) d\Delta x = \frac{1}{\sigma^2} \pi S_X(0), \quad (2.50)$$

przy czym S_X jest gęstością spektralną tegoż pola (wzór (2.24)). Dla wielu często używanych w zastosowaniach funkcji kowariancji skalę fluktuacji można interpretować jako miarę obszaru, w którym własności fizyczne są silnie skorelowane. Podstawiając do wzoru (2.50) różne postaci funkcji korelacji otrzymuje się wartości skali fluktuacji dla charakteryzowanych przez nie struktur korelacyjnych pola. Poniżej podano kilka rezultatów dla przykładów opisanych w podrozdziale 2.4, przy czym dolne indeksy odnoszą się do numerów wzorów określających funkcje korelacji w podrozdziale 2.4.

$$\begin{aligned} \theta_{2.32} &= a, & \theta_{2.34} &= \frac{2}{a}, & \theta_{2.38} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}}, & \theta_{2.39} &= \frac{4}{a}, \\ \theta_{2.40} &= \frac{2a}{a^2 + b^2}, & \theta_{2.41} &= \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{8a}\right) J_0\left(\frac{b^2}{8a}\right). \end{aligned} \quad (2.51)$$

W przypadku, gdy obszar, na którym określone jest pole X , jest podzbiorem \mathbb{R}^2 lub \mathbb{R}^3 . skalę fluktuacji należy odnieść do kierunku, w którym obserwuje się zmiany pola. Jest to istotne zwłaszcza wtedy, gdy analizowane pole nie jest izotropowe. W przypadku dwuwymiarowym kierunek zmian pola, poczynając od punktu (x_0, y_0) , można określić poprzez parametryczne równanie prostej $l(x(t), y(t))$:

$$x(t) = x_0 + \alpha t, \quad y(t) = y_0 + \beta t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.52)$$

w którym α i β są współczynnikami określającymi kierunek prostej, niebędącymi równocześnie zerami. Następnie, przez analogię do wzoru (2.50) można określić skalę fluktuacji w kierunku (α, β) jako

$$\theta_{X(\alpha, \beta)} = \frac{1}{\sigma^2} \int_l \text{COV}(l(x, y)) dl = \int_l \rho_X(l(x, y)) dl. \quad (2.53)$$

W powyższym wzorze obie całki rozumiane są jako całki krzywoliniowe (niezorientowane) wzdłuż prostej $l(x(t), y(t))$. Korzystając z twierdzenia o zamianie całki krzywoliniowej na zwykłą (Leja, 2018), wzór (2.53) można zredukować do postaci

$$\begin{aligned} \theta_{X(\alpha, \beta)} &= 2 \int_0^\infty \rho_X(l(x(t), y(t))) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt = \\ &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^\infty \rho_X(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t) dt = 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^\infty \rho_X(\alpha t, \beta t) dt, \end{aligned} \quad (2.54)$$

o ile całka z lewej strony wzoru (2.54) istnieje (jest zbieżna). Ostatnia z równości w zależnościach (2.54) prawdziwa jest dla pól stacjonarnych.

W przypadku trójwymiarowego obszaru określoności postępuje się analogicznie. Równanie kierunkowe prostej $l(x(t), y(t), z(t))$ ma postać

$$x(t) = x_0 + \alpha t, \quad y(t) = y_0 + \beta t, \quad z(t) = z_0 + \lambda t, \quad t \in \mathbb{R}, \quad (2.55)$$

co prowadzi do następującego wyrażenia dla skali fluktuacji:

$$\begin{aligned} \theta_{X(\alpha, \beta, \lambda)} &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2} \int_0^\infty \rho_X(x_0 + \alpha t, y_0 + \beta t, z_0 + \lambda t) dt = \\ &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \lambda^2} \int_0^\infty \rho_X(\alpha t, \beta t, \lambda t) dt. \end{aligned} \quad (2.56)$$

gdzie podobnie jak poprzednio konieczna jest zbieżność powyższej całki.

2.6. Pola gaussowskie i ich transformacje

Definicja 2.8. Pole losowe $X(\mathbf{x})$ nazywa się gaussowskim, gdy dla dowolnego $n = 1, 2, \dots$ każdy skończenie n -wymiarowy rozkład tego pola ma n -wymiarowy rozkład gaussowski, co oznacza, że wektor losowy $\mathbf{X} = (X(\mathbf{x}_1), X(\mathbf{x}_2), \dots, X(\mathbf{x}_n))$ ma łączną gęstość prawdopodobieństwa o postaci

$$f_{x_1, x_2, \dots, x_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \frac{1}{\sqrt{|\mathbf{C}|}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T \mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\right], \quad (2.57)$$

gdzie

$$\mathbf{m} = E[\mathbf{X}] = (E[X(\mathbf{x}_1)], E[X(\mathbf{x}_2)], \dots, E[X(\mathbf{x}_n)]), \quad (2.58)$$

oraz

$$\mathbf{C} = E[(\mathbf{X} - \mathbf{m})(\mathbf{X} - \mathbf{m})^T] \quad (2.59)$$

jest macierzą kowariancji, $|\mathbf{C}|$ jej wyznacznikiem, zaś T oznacza operację transpozycji macierzy.

Pola gaussowskie są polami losowymi najczęściej pojawiającymi w zastosowaniach. Jednak ze względu na nieograniczoność nośnika rozkładu gaussowskiego nie zawsze nadają się do modelowania właściwości fizycznych materiałów. Czasem tę trudność można ominąć wprowadzając nowe pole losowe uzyskane z pola gaussowskiego poprzez transformację postaci

$$Y(\mathbf{x}) = T(X(\mathbf{x})), \quad (2.60)$$

gdzie $X(\mathbf{x})$ jest polem gaussowskim, zaś $T: R \rightarrow R$ dowolną funkcją mierzalną (założenie mierzalności funkcji T wystarcza, aby pole Y było poprawnie zdefiniowane).

W kolejnych rozdziałach tej monografii najczęściej stosowane będzie pole log-normalne (w literaturze polskiej często spotyka się nieco dłuższą nazwę, a mianowicie „logarytmiczno-normalne” lub logarytmicznie normalne). Pole to otrzymuje się z pola gaussowskiego $X(\mathbf{x})$ poprzez nałożenie transformacji typu (2.60) o następującej postaci:

$$Y(\mathbf{x}) = \exp(X(\mathbf{x})). \quad (2.61)$$

Można udowodnić (Crow i Shimizu, 1988), że jednowymiarowe rozkłady pola Y mają następującą gęstość prawdopodobieństwa:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sigma_{\ln Y}\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu_{\ln Y}}{\sigma_{\ln Y}}\right)^2\right\}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases} \quad (2.62)$$

Parametry $\mu_{\ln Y}$ oraz $\sigma_{\ln Y}$ gęstości prawdopodobieństwa (2.62) wynikają z relacji (2.61) pomiędzy rozkładami jednowymiarowymi, przy czym $\mu_{\ln Y}$ jest wartością oczekiwaną zmiennej X (można przyjąć oznaczenie $\ln Y$), będącej stanem pola w zadanym punkcie \mathbf{x} , zaś $\sigma_{\ln Y}$ odchyleniem standardowym zmiennej X . Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej X bywa nazywany pierwotnym (podstawowym) względem rozkładu zmiennej Y . W anglojęzycznej literaturze używa się określenia *underlying distribution*. Wartość oczekiwana rozkładu log-normalnego oraz jego wariancja przedstawiają się za pomocą parametrów $\mu_{\ln Y}$ oraz $\sigma_{\ln Y}$ następująco:

$$E[Y] = \mu_Y = \exp\left(\mu_{\ln Y} + \frac{1}{2}\sigma_{\ln Y}^2\right), \quad (2.63)$$

$$\sigma_Y^2 = \mu_Y^2 \left(\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1\right). \quad (2.64)$$

Poprzez rozwiązanie układu równań (2.63) i (2.64) względem $\mu_{\ln Y}$ oraz $\sigma_{\ln Y}$ otrzymuje się relacje odwrotne:

$$\sigma_{\ln Y}^2 = \ln\left(1 + \frac{\sigma_Y^2}{\mu_Y^2}\right), \quad (2.65)$$

$$\mu_{\ln Y} = \ln(\mu_Y) - \frac{1}{2}\sigma_{\ln Y}^2. \quad (2.66)$$

W zastosowaniach wielowymiarowego rozkładu log-normalnego można zawsze posłużyć się podstawowym względem niego rozkładem normalnym. Warto jednak odnotować, jako szczególny przypadek, postać dwuwymiarowego rozkładu log-normalnego. Gęstość łączna wektora losowego (Y_1, Y_2) ma w tym przypadku postać

$$f_{Y_1 Y_2}(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_{\ln Y_1}\sigma_{\ln Y_2}rxy} \exp\left[-\frac{1}{2r^2}(\Psi_1^2 - 2\rho_{\ln 12}\Psi_1\Psi_2 + \Psi_2^2)\right], \quad (2.67)$$

$$x > 0, \quad y > 0,$$

gdzie $\Psi_1 = \frac{(\ln x - \mu_{\ln Y_1})}{\sigma_{\ln Y_1}}$, $\Psi_2 = \frac{(\ln y - \mu_{\ln Y_2})}{\sigma_{\ln Y_2}}$, $r^2 = 1 - \rho_{\ln 12}^2$, przy czym $\rho_{\ln 12}$ jest współczynnikiem korelacji zmiennych $\ln Y_1$ oraz $\ln Y_2$. Jeśli przez ρ_{12} oznaczyć współczynnik korelacji zmiennych Y_1 oraz Y_2 , to relacje pomiędzy $\rho_{\ln 12}$ a ρ_{12} są następujące:

$$\rho_{12} = \frac{\exp(\rho_{\ln 12} \sigma_{\ln Y_1} \sigma_{\ln Y_2}) - 1}{\sqrt{[\exp(\sigma_{\ln Y_1}^2) - 1][\exp(\sigma_{\ln Y_2}^2) - 1]}}, \quad (2.68)$$

$$\rho_{\ln 12} = \frac{\ln(1 + \rho_{12} \nu_{Y_1} \nu_{Y_2})}{\sqrt{\ln(1 + \nu_{Y_1}^2) \ln(1 + \nu_{Y_2}^2)}}, \quad (2.69)$$

przy czym ν_{Y_1} oraz ν_{Y_2} oznaczają współczynniki zmienności, odpowiednio zmiennej losowej Y_1 oraz zmiennej losowej Y_2 .

Innym, istotnym dla dalszej części pracy przykładem jest transformacja typu tangens hiperboliczny. Załóżmy, że $X_0(\mathbf{x})$ jest polem gaussowskim o stałej średniej równej 0 i stałej wariancji równej 1. Rozważmy pole losowe otrzymane w wyniku następującego przekształcenia:

$$Y(\mathbf{x}) = a + \frac{1}{2}(b - a) \left[1 + \operatorname{tgh} \left(\frac{m + s X_0(\mathbf{x})}{2\pi} \right) \right]. \quad (2.70)$$

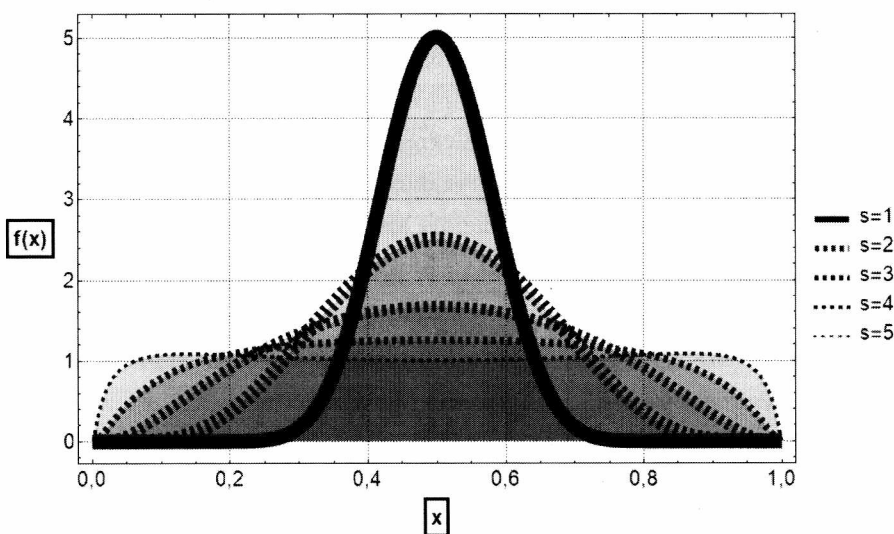
Pole $Y(\mathbf{x})$ jest polem ograniczonym, którego wartości zmieniają się w ograniczonym przedziale (a, b) i zależą od parametrów m oraz s . Można pokazać, że gęstość prawdopodobieństwa jednowymiarowego rozkładu ma postać

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\pi}(b-a)}{\sqrt{2s}(x-a)(b-x)} \exp \left\{ -\frac{1}{2s^2} \left[\pi \ln \left(\frac{x-a}{b-x} \right) - m \right]^2 \right\}, & x \in (a, b), \\ 0, & x \notin (a, b). \end{cases} \quad (2.71)$$

Jest to rozkład o nośniku ograniczonym. Parametr m jest parametrem położenia. Jeśli $m = 0$, to rozkład jest symetryczny względem środka przedziału zmienności, czyli punktu $x_c = \frac{1}{2}(a+b)$. Parametr s decyduje o wariancji rozkładu. Przykładowe wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa w zależności od

parametru s pokazano na rysunku 2.3. Warto zwrócić uwagę, że przy wartości s bliskiej 5 gęstość prawdopodobieństwa zbliża się do gęstości rozkładu jednostajnego (por. rys. 2.3). Dla wartości s większych niż 5 wykres gęstości zaczyna przypominać literę U. W dalszej części książki będzie przyjmowane założenie, że $s \in (0,5)$. Zależność pomiędzy wariancją rozkładu a parametrem s nie daje się przedstawić w zamkniętej postaci. W związku z tym korzysta się z przybliżenia za pomocą wzoru Taylora. Przybliżenie trzeciego rzędu daje następującą zależność:

$$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= \frac{1}{4}(b-a)^2 \operatorname{E} \left[\operatorname{tgh}^2 \left(\frac{sX_0}{2\pi} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{4}(b-a)^2 \operatorname{E} \left[\frac{[sX_0/2\pi]^2}{1 + [sX_0/2\pi]^2} \right] \approx \frac{1}{4}(b-a)^2 \frac{s^2}{4\pi^2 + s^2}.\end{aligned}\quad (2.72)$$



Rys. 2.3. Wykresy funkcji gęstości prawdopodobieństwa postaci (2.71) o nośniku $(0, 1)$ dla różnych wartości parametru s

Fenton i Griffiths (2008) zaproponowali dokładniejsze w stosunku do wzoru (2.72) przybliżenie, które uzyskano na drodze dopasowywania wykresu dla różnych wartości $s \in (0,5)$, mianowicie:

$$\sigma_x \approx \frac{0,46(b-a)s}{\sqrt{4\pi^2 + s^2}}.\quad (2.73)$$

Zależność (2.73) może być uogólniona w celu uzyskania wzoru określającego kowariancję pomiędzy zmiennymi losowymi Y_i oraz Y_j o gęstościach postaci (2.71), powstałych poprzez transformację postaci (2.70) standardowych zmiennych normalnych X_{0i} i X_{0j} , skorelowanych ze współczynnikiem korelacji ρ_{ij} .

$$\begin{aligned} \text{COV}(Y_i, Y_j) &= \frac{1}{4}(b-a)^2 \text{E} \left[\text{tgh} \left(\frac{sX_{0i}}{2\pi} \right) \text{tgh} \left(\frac{sX_{0j}}{2\pi} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{4}(b-a)^2 \text{E} \left[\frac{[sX_{0i}/2\pi][sX_{0j}/2\pi]}{1 + \frac{1}{2} \left\{ [sX_{0i}/2\pi]^2 + [sX_{0j}/2\pi]^2 \right\}} \right] \approx \\ &\approx (0,46)^2 (b-a)^2 \frac{s^2 \rho_{ij}}{4\pi^2 + s^2}. \end{aligned} \quad (2.74)$$

W ostatniej równości przybliżonej zastosowano przybliżenie (2.73) zaproponowane przez Fentona. Powyżej podano jedynie dwa przykłady transformacji pól losowych, jako że właśnie te dwie transformacje stosowane będą w dalszych rozdziałach opracowania. Warto też odnotować, że wyprowadzanie wzoru na gęstość jednowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa po zastosowaniu transformacji odbywa się według schematu podanego w poniższym twierdzeniu.

Twierdzenie 2.1. Niech X będzie zmienną losową, mającą gęstość prawdopodobieństwa $f_X(x)$. Niech $g: R \rightarrow R$ będzie funkcją różniczkowalną i taką, która nie jest stała w żadnym przedziale. Wówczas zmienna losowa $Y = g(x)$ ma gęstość prawdopodobieństwa $f_Y(y)$, którą znajduje się w następujący sposób:

dla zadanej wartości y znajduje wszystkie pierwiastki $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ równania $y = g(x)$. Gęstość $f_Y(y)$ w punkcie y ma wartość

$$f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \frac{f_X(x_2)}{|g'(x_2)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|} + \dots, \quad (2.75)$$

przy czym g' oznacza pochodną funkcji g . Jeżeli dla pewnego y równanie $y = g(x)$ nie ma pierwiastków rzeczywistych, to $f_Y(y) = 0$.

Uwagi:

1. Z założenia, że funkcja g nie jest przedziałami stała wynika, że równanie $y = g(x)$ ma co najwyżej przeliczalną liczbę pierwiastków.
2. Jeżeli funkcja g jest monotoniczna, to oznaczając przez $x = h(y)$ funkcję odwrotną względem funkcji $g(x)$, równanie (2.75) zredukujemy do postaci

$$f_Y(y) = f_X[h(y)] \cdot h'(y). \quad (2.76)$$

Dowód twierdzenia 2.1, wynikający ze wzoru na zamianę zmiennych przy całkowaniu, można znaleźć w podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, np. książce Papoulisa (1991) (polskie wydanie: Papoulis, 1972) lub Fisz (1967).

2.7. Transformacje skali fluktuacji

W kontekście dwóch poprzednich podrozdziałów nasuwa się pytanie: jak zachowuje się skala fluktuacji, gdy następuje transformacja pola losowego? Rozpatrzmy najpierw transformację typu (2.61), a więc transformację stacjonarnego pola gaussowskiego X w pole log-normalne Y ($X = \ln Y$). Niech θ_Y oznacza skalę fluktuacji w polu Y , zaś $\theta_{\ln Y}$ skalę fluktuacji w polu X . Można oczekiwać, że zależność pomiędzy skalami fluktuacji w obu polach zależy od typu funkcji korelacji w podstawowym polu gaussowskim. Załóżmy, że $\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})$ jest funkcją korelacji gaussowskiego pola podstawowego (dla uproszczenia notacji argument funkcji korelacji jest tu oznaczany przez τ w miejsce wcześniej stosowanego Δx). Dodatkowo załóżmy, że funkcja $\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})$ jest różniczkowalna względem zmiennej τ , a ponadto spełnia warunek

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y}) = 0. \quad (2.77)$$

Korzystając ze wzoru (2.68), określającego współczynnik korelacji w dwuwymiarowym rozkładzie log-normalnym, i podstawiając w nim wzór (2.77) otrzymuje się funkcję korelacji w polu log-normalnym Y :

$$\rho_Y(\tau) = \frac{\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1}. \quad (2.78)$$

Powyżej korzysta się z założenia o stacjonarności $\ln Y$, a w konsekwencji z faktu, że wariancja w polu $\ln Y$ jest stała. Następnie stosując definicję skali fluktuacji według wzoru (2.50) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \theta_Y &= 2 \int_0^{+\infty} \rho_Y(\tau) d\tau = 2 \int_0^{+\infty} \frac{\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} d\tau = \\ &= \frac{2}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} [\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1] d\tau. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Ostatnia całka we wzorze (2.79) nie ma niestety, dla większości używanych w zastosowaniach funkcji korelacji, przedstawienia w postaci zamkniętej. Należy też udowodnić, że całka ta jest zbieżna. Warto jednak zwrócić uwagę na pewną interesującą własność asymptotyczną, mianowicie

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1}{\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2} = \\
 & = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{\ln Y}^2 \frac{\partial \rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})}{\partial \tau} \exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2)}{\sigma_{\ln Y}^2 \frac{\partial \rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})}{\partial \tau}} = \\
 & = \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) = 1, \tag{2.80}
 \end{aligned}$$

przy czym w pierwszej równości skorzystano z twierdzenia de L'Hospitala (Leja, 2018). Natomiast w ostatniej równości skorzystano z założenia (2.77) oraz ciągłości funkcji eksponent. Z równości (2.80), poprzez zastosowanie kryterium ilorazowego zbieżności całek (Leja, 2018), wynika, że całka $\int_0^{+\infty} [\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1] d\tau$ jest zbieżna. Dzięki temu wzór (2.79) może służyć do przybliżonego obliczenia relacji pomiędzy skalami fluktuacji θ_Y i $\theta_{\ln Y}$ – poprzez przybliżone obliczenie całki po prawej stronie ostatniej równości (2.79). Co więcej, rezultat (2.80) pokazuje, że wyrażenia w liczniku i mianowniku pod granicą z lewej strony równości (2.80) są tego samego rzędu (w nieskończoności). Stąd wynika, że jeśli zastąpić w całce z prawej strony funkcję podcałkową $[\exp(\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2) - 1]$ przez funkcję $\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2$, wówczas otrzyma się

$$\begin{aligned}
 \theta_Y & \approx \frac{2}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y})\sigma_{\ln Y}^2 d\tau = \\
 & = \frac{2\sigma_{\ln Y}^2}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \frac{1}{2} \theta_{\ln Y} = \frac{\sigma_{\ln Y}^2}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \theta_{\ln Y}. \tag{2.81}
 \end{aligned}$$

Uwzględniając w (2.81) wzór (2.65), określający wariancję rozkładu normalnego podstawowego względem rozważanego rozkładu log-normalnego, otrzymuje się

$$\theta_Y \approx \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2 - 1} \theta_{\ln Y} = \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \theta_{\ln Y} \approx \theta_{\ln Y}, \quad (2.82)$$

przy czym ostatnia równość przybliżona jest przybliżeniem pierwszego rzędu i daje dobre wyniki dla niewielkich wartości współczynnika zmienności $v_x = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$

w polu Y.

Wprowadzając oznaczenie

$$\alpha_0 = \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \quad (2.83)$$

otrzymuje się zależność

$$\theta_Y \approx \alpha_0 \theta_{\ln Y} \approx \theta_{\ln Y}, \quad (2.84)$$

w której mnożnik α_0 jest funkcją jedynie współczynnika zmienności $v_x = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$

w polu Y.

A zatem skale fluktuacji w analizowanym polu oraz w polu względem niego podstawowym mogą być zbliżonego rzędu. Interesującym spostrzeżeniem jest to, że na zależność (2.84) nie ma wpływu postać funkcji korelacji pola gaussowskiego $\ln Y$ podstawowego względem rozpatrywanego pola log-normalnego Y. Ta własność pozwala na uniknięcie kłopotliwego wyznaczenia skali fluktuacji w polu podstawowym, np. wtedy, gdy tylko „jakościowe efekty” są poddawane analizie. Jednak w sytuacji, gdy celem obliczeń jest kalibrowanie wartości obliczeniowych lub też możliwie dokładne obliczanie prawdopodobieństw awarii, przyjmowanie jednakowej skali fluktuacji w obu polach może nie być wystarczające. Wówczas dobre przybliżenie skali fluktuacji θ_Y można uzyskać na podstawie wzoru (2.79), który najczęściej można przedstawić w prostszej postaci. Często bowiem funkcję korelacji $\rho_{\ln Y}$ da się przedstawić w postaci

$$\rho_{\ln Y}(\tau, \theta_{\ln Y}) = \rho_{\ln Y}(h(\theta_{\ln Y}) \cdot \tau), \quad (2.85)$$

gdzie $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest pewną zadaną funkcją. Wówczas stosując (2.85) oraz podstawienie $h(\theta_{\ln Y}) \cdot \tau = t$ w ostatniej całce wzoru (2.79) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \theta_Y &= \frac{2}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \left[\exp(\rho_{\ln Y}(t) \sigma_{\ln Y}^2) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{2}{h(\theta_{\ln Y}) \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp(\rho_{\ln Y}(t) \sigma_{\ln Y}^2) - 1 \right] dt. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Równości (2.86) pokazują, że przy zadanym współczynniku zmienności w polu Y zależność pomiędzy skalami fluktuacji ma postać

$$\theta_Y = \frac{\alpha}{h(\theta_{\ln Y})}, \quad (2.87)$$

gdzie α jest mnożnikiem zależnym od współczynnika zmienności w polu Y , ale nie zależącym od skali fluktuacji $\theta_{\ln Y}$. Kolejne, mniej ogólne, lecz łatwiejsze do obliczeń postaci można uzyskać podstawiając konkretne funkcje korelacyjne $\rho_{\ln Y}$ pola gaussowskiego podstawowego względem Y , co zilustrowano w przykładach poniżej.

Przykład 2.11. Załóżmy, że funkcja korelacji w gaussowskim polu podstawowym ma postać (2.34), co wobec (2.51) oraz zastosowanych tu oznaczeń daje wzór

$$\rho_{\ln Y}(\tau) = \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\theta_{\ln Y}}\right). \quad (2.88)$$

W tym przypadku $h(\theta_{\ln Y}) = \frac{2}{\theta_{\ln Y}}$, a wzór (2.86) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \theta_Y &= \frac{\theta_{\ln Y}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp(\exp(-t) \sigma_{\ln Y}^2) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{\theta_{\ln Y}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp(\exp(-t + \ln \sigma_{\ln Y}^2)) - 1 \right] dt. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Wprowadzając podstawienie: $s = t - \ln \sigma_{\ln Y}^2$ otrzymuje się

$$\theta_Y = \frac{\theta_{\ln Y}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \int_{-\ln \sigma_{\ln Y}^2}^{+\infty} [\exp(\exp(-s)) - 1] ds = \theta_{\ln Y} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right). \quad (2.90)$$

Wartości (przybliżone) mnożnika α_1 , uzyskane poprzez przybliżone obliczenie całki we wzorze (2.90), podano w tabeli 2.1. Są one zależne jedynie od współczynnika zmienności $\nu_X = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$ w polu Y.

Przykład 2.12. Załóżmy teraz, że funkcja korelacji w polu gaussowskim, podstawowym względem Y, ma postać (2.38). Po uwzględnieniu zależności (2.51) otrzymuje się następujący wzór:

$$\rho_{\ln Y}(\tau) = \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_{\ln Y}}\tau\right)^2\right]. \quad (2.91)$$

Tutaj $h(\theta_{\ln Y}) = \frac{\sqrt{\pi}}{\theta_{\ln Y}}$, w związku z czym wzór (2.86) ma postać

$$\theta_Y = \frac{2\theta_{\ln Y}}{\sqrt{\pi}\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \int_0^{+\infty} [\exp(\exp(-t^2)\sigma_{\ln Y}^2) - 1] dt = \theta_{\ln Y} \alpha_2 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right). \quad (2.92)$$

Wartości (przybliżone) mnożnika α_2 , uzyskane poprzez przybliżone obliczenie całki we wzorze (2.92), podano w tabeli 2.1. Podobnie jak w przypadku mnożnika α_1 są one zależne jedynie od współczynnika zmienności $\nu_X = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$ w polu Y.

Przykład 2.13. W przypadku „fluktuacyjnego charakteru” korelacji wygodnie jest stosować funkcję typu cosinus eksponent (por. wzór (2.40)). Jeśli we wzorze (2.40) przyjąć $a = b$, to zgodnie z (2.51) $a = 1/\theta_{\ln Y}$ i funkcja korelacji przyjmuje postać

$$\rho_{\ln Y}(\tau) = \cos\left(\frac{|\tau|}{\theta_{\ln Y}}\right) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\theta_{\ln Y}}\right). \quad (2.93)$$

W tym przypadku funkcja korelacji nie ma reprezentacji w postaci (2.85), co powoduje, że należy się posłużyć bezpośrednio wzorem (2.79), który sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \theta_Y &= \frac{2}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(\cos\left(\frac{|\tau|}{\theta_{\ln Y}}\right) \exp\left(-\frac{|\tau|}{\theta_{\ln Y}}\right) \sigma_{\ln Y}^2\right) - 1 \right] d\tau = \\ &= \frac{2\theta_{\ln Y}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp(\cos(|t|) \exp(-|t|) \sigma_{\ln Y}^2) - 1 \right] d\tau = \alpha_3 \theta_{\ln Y}. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Wartości (przybliżone) mnożnika α_3 , uzyskane poprzez przybliżone obliczenie całki we wzorze (2.94), podano w tabeli 2.1. Podobnie jak w przypadku mnożników α_1 oraz α_2 są one zależne jedynie od współczynnika zmienności $\nu_X = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$ w polu Y.

Wykresy mnożników α_1 , α_2 oraz α_3 jako funkcji współczynnika zmienności $\nu_X = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$ zamieszczono na rysunku 2.4.

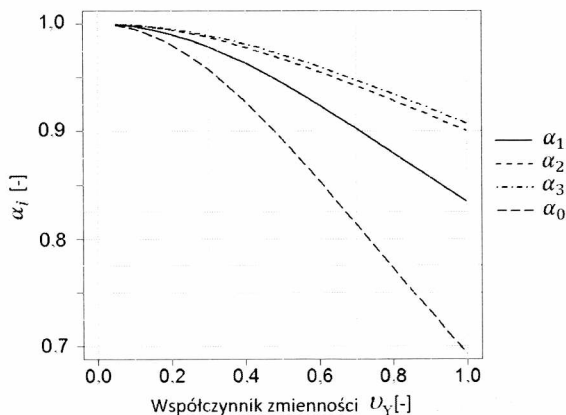
Tabela 2.1. Wartości mnożników do obliczania zależności pomiędzy skalą fluktuacji θ_Y oraz skalą fluktuacji $\theta_{\ln Y}$. Współczynniki α_1 , α_2 oraz α_3 dotyczą odpowiednio funkcji korelacji typu Markowa, typu Gaussa oraz cosinus eksponent, zaś α_0 odpowiada zależności (2.83) – niezależnej od postaci funkcji korelacji

Współczynnik zmienności $\nu_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4	0,45	0,5
$\alpha_1\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)$	0,9994	0,9975	0,9944	0,9902	0,9849	0,9786	0,9713	0,9632	0,9544	0,9449
$\alpha_2\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)$	0,9996	0,9985	0,9967	0,9943	0,9911	0,9874	0,9831	0,9783	0,9731	0,9675
$\alpha_3\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)$	0,9997	0,9988	0,9972	0,9951	0,9924	0,9891	0,9854	0,9811	0,9765	0,9714
$\alpha_0\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)$	0,9987	0,9950	0,9889	0,9805	0,9699	0,9575	0,9433	0,9276	0,9106	0,8926

Tabela 2.1 cd.

Współczynnik zmienności $\nu_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$	0,55	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9	0,95	1,0	2,0
$\alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)$	0,9350	0,9245	0,9138	0,9027	0,8915	0,8801	0,8687	0,8572	0,8458	0,8345	0,6454
$\alpha_2 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)$	0,9615	0,9553	0,9488	0,9422	0,9354	0,9285	0,9215	0,9145	0,9075	0,9005	0,7797
$\alpha_3 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)$	0,9660	0,9602	0,9542	0,9480	0,9416	0,9349	0,9282	0,9214	0,9144	0,9075	0,7707
$\alpha_0 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)$	0,8737	0,8541	0,8341	0,8138	0,7934	0,7730	0,7526	0,7325	0,7127	0,6931	0,4024

W ostatnim wierszu tabeli 2.1 zamieszczono mnożnik α_0 odpowiadający zależności (2.83), która jest niezależna od postaci funkcji korelacji. Na podstawie wyników podanych w tabeli 2.1 oraz na rysunku 2.4 można uznać, że dla wartości współczynnika zmienności $\nu_Y \leq 0,3$ daje on dobre przybliżenie relacji pomiędzy skalami fluktuacji θ_Y oraz $\theta_{\ln Y}$. Warto przypomnieć, że mnożnik α_0 nie wymaga przybliżonego obliczania całki i może być w bardzo prosty sposób oszacowany. Ponadto można uznać, że w zakresie do $\nu_Y \leq 0,4$ różnice pomiędzy mnożnikami uzyskanymi dla funkcji typu Markowa (α_1) dla funkcji korelacji typu Gaussa (α_2) oraz korelacji typu cosinus eksponent (α_3) są pomijalne.



Rys. 2.4. Wykresy mnożników α_1 , α_2 , α_3 oraz α_0 w funkcji współczynnika zmienności $\nu_Y = \frac{\sigma_Y}{\mu_Y}$ pola log-normalnego Y

Przejdźmy obecnie do transformacji typu tangens hiperboliczny (2.70). W tym przypadku jednak brak jest jawnej zależności pomiędzy współczynnikami korelacji gaussowskiego pola podstawowego oraz pola otrzymanego w wyniku transformacji, a więc uzyskanie podobnych oszacowań do otrzymanych dla pola log-normalnego nie jest możliwe. W tej sytuacji rozsądne wydaje się zastosowanie przybliżeń zaproponowanych przez Fentona (wzory (2.72) i (2.73)). Przybliżenia te prowadzą do wniosku, że współczynniki korelacji w podstawowym polu gaussowskim oraz w polu uzyskanym w wyniku transformacji są sobie w przybliżeniu równe. To z kolei implikuje przybliżoną równość skali fluktuacji w obu polach.

W ogólnym przypadku transformacji T , aby dokonać oszacowań analogicznych do przedstawionych wyżej należy zastosować ogólny wzór na kowariancję zmiennych losowych po nałożeniu transformacji:

$$\text{COV}(Y_i, Y_j) = E \left[\left(T(X_i) - E[T(X_i)] \right) \left(T(X_j) - E[T(X_j)] \right) \right]. \quad (2.95)$$

Efektywne wykorzystanie tego wzoru wymaga jednak znajomości łącznej gęstości prawdopodobieństwa wektora losowego $(Y_i, Y_j) = (T(X_i), T(X_j))$. Gęstość tę można wyznaczyć znając łączną gęstość wektora (X_i, X_j) oraz stosując twierdzenie analogiczne do twierdzenia 2.1 dla funkcji dwóch zmiennych (Fisz, 1967). Zwykle trudno jest uzyskać rozwiązanie w postaci zamkniętej, ale dla uzyskania przybliżenia można zastosować wzór Taylora (Leja, 2018). Zagadnienie to wykracza jednak poza ramy niniejszej monografii.

Przejdźmy teraz do przypadku, gdy obszar, na którym określone jest pole X , jest podzbiorem R^2 . Jak przedstawiono to w podrozdziale 2.5, w tym przypadku skala fluktuacji musi odnosić się do zadanego kierunku określonego przez wektor (α, β) i wówczas określa się ją wzorem (2.54). W zastosowaniach do geotechniki najczęściej istotne są dwa kierunki: kierunek poziomy, w którym $(\alpha, \beta) = (1, 0)$, oraz kierunek pionowy: $(\alpha, \beta) = (0, 1)$. W pierwszym z przypadków mamy do czynienia z poziomą skalą fluktuacji (ozn. $\theta_{X(1,0)} = \theta_{(X)h}$), zaś w drugim – z pionową skalą fluktuacji (ozn. $\theta_{X(0,1)} = \theta_{(X)v}$). Zaprezentowana poniżej analiza ogranicza się do przypadku transformacji postaci (2.61) z polem log-normalnym Y oraz podstawowym względem niego polem normalnym $X = \ln Y$. W tej sytuacji wzór (2.79) określający zależność pomiędzy skalami fluktuacji w obu polach przyjmie postać

$$\begin{aligned}\theta_{(Y)(\alpha,\beta)} &= 2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2} \int_0^{\infty} \rho_Y(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) \sigma_{\ln Y}^2\right) - 1 \right] dt, \quad (2.96)\end{aligned}$$

gdzie $\theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}$ jest skalą fluktuacji pola normalnego $\ln Y$ w kierunku (α, β) . Podobnie jak na początku tego rozdziału zakładamy, że funkcja $\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)})$, będąca funkcją korelacji gaussowskiego pola podstawowego $\ln Y$, jest dla dowolnie wybranego wektora (α, β) różniczkowalna względem zmiennej t , a ponadto, również przy dowolnie wybranym wektorze (α, β) , spełnia warunek

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) = 0. \quad (2.97)$$

Wzór (2.96) pełni funkcję analogiczną do wzoru (2.79) i po podstawieniu konkretnej funkcji korelacji pola gaussowskiego $\ln Y$ pod całką z prawej strony równości (2.96) można uzyskać przybliżoną zależność pomiędzy skalą fluktuacji w kierunku (α, β) w log-normalnym polu Y a skalą fluktuacji w kierunku (α, β) w podstawowym względem niego polu gaussowskim $\ln Y$. Zauważmy następnie, że relacje asymptotyczne analogiczne do tych z (2.80) są prawdziwe także i w tym przypadku, mianowicie

$$\begin{aligned}& \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\exp\left(\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) \sigma_{\ln Y}^2\right) - 1}{\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) \sigma_{\ln Y}^2} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\sigma_{\ln Y}^2 \frac{\partial \rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)})}{\partial t} \exp\left(\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) \sigma_{\ln Y}^2\right)}{\sigma_{\ln Y}^2 \frac{\partial \rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)})}{\partial t}} = \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(\rho_{\ln Y}(\alpha t, \beta t, \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}) \sigma_{\ln Y}^2\right) = 1, \quad (2.98)\end{aligned}$$

przy czym ostatnia równość wynika ze wzoru (2.97). Nietrudno zauważyć, że dokonując analogicznych przekształceń jak w zależnościach (2.81) oraz (2.82), otrzyma się przybliżony wzór, który nie zależy od postaci funkcji korelacji w polu $\ln Y$:

$$\theta_{Y(\alpha,\beta)} \approx \frac{\ln\left(1 + \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2\right)}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)} \approx \theta_{(\ln Y)(\alpha,\beta)}. \quad (2.99)$$

Przyjmując w (2.99) $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ otrzymamy zależność dla skali poziomej, natomiast po podstawieniu $(\alpha, \beta) = (0, 1)$ – relacje pomiędzy skalami pionowymi. Aby uzyskać dokładniejsze wyniki na podstawie przybliżonego całkowania we wzorze (2.96), należy założyć konkretne postaci funkcji korelacji w polu gausowskim $\ln Y$. Ilustrują to podane niżej przykłady.

Przykład 2.14. Rozważmy funkcję typu Markowa o postaci (2.42). Po uwzględnieniu zależności parametrów we wzorze (2.42) od skal fluktuacji (wzór (2.51)) i podstawieniu do (2.96) otrzymamy

$$\begin{aligned} \theta_{(Y)(\alpha,\beta)} &= \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(\exp\left(-\frac{2\alpha}{\theta_{(\ln Y)h}} t\right) \exp\left(-\frac{2\beta}{\theta_{(\ln Y)v}} t\right) \sigma_{\ln Y}^2\right) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(\exp\left(-\left(\frac{2\alpha}{\theta_{(\ln Y)h}} + \frac{2\beta}{\theta_{(\ln Y)v}}\right) t\right) \sigma_{\ln Y}^2\right) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right)^2 \left(\frac{2\alpha}{\theta_{(\ln Y)h}} + \frac{2\beta}{\theta_{(\ln Y)v}}\right)} \int_0^{+\infty} \left[\exp\left(\exp(-s + \ln \sigma_{\ln Y}^2)\right) - 1 \right] ds = \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\alpha}{\theta_{(\ln Y)h}} + \frac{\beta}{\theta_{(\ln Y)v}}\right)} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y}\right). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Należy odnotować, że mnożnik α_1 na końcu powyższego ciągu równości jest identyczny z odpowiednim mnożnikiem α_1 we wzorze (2.90). Umożliwia to skorzystanie z wartości podanych w tabeli 2.1 dla dowolnego wektora kierunku (α, β) . Przyjmując kolejno $(\alpha, \beta) = (1, 0)$ i $(\alpha, \beta) = (0, 1)$, a następnie

podstawiając do (2.100), otrzymuje się relacje dla skal poziomych oraz pionowych w postaci

$$\theta_{(Y)h} = \theta_{(\ln Y)h} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right), \quad \theta_{(Y)v} = \theta_{(\ln Y)v} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right). \quad (2.101)$$

Są to relacje analogiczne do jednowymiarowej zależności (2.90).

Przykład 2.15. Niech teraz funkcją korelacji w polu $\ln Y$ będzie funkcja gausowska o postaci (2.45)

$$\begin{aligned} \theta_{(Y)(\alpha,\beta)} &= \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\exp \left(- \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_{(\ln Y)h}} \alpha t \right)^2 \right) \exp \left(- \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_{(\ln Y)v}} \beta t \right)^2 \right) \sigma_{\ln Y}^2 \right) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\sigma_{\ln Y}^2 \exp \left(- \left(\frac{\pi \alpha^2}{\theta_{(\ln Y)h}^2} + \frac{\pi \beta^2}{\theta_{(\ln Y)v}^2} \right) t^2 \right) \right) - 1 \right] dt = \\ &= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2 \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\alpha^2}{\theta_{(\ln Y)h}^2} + \frac{\beta^2}{\theta_{(\ln Y)v}^2}}} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\sigma_{\ln Y}^2 \exp(-s^2) \right) - 1 \right] ds = \\ &= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\theta_{(\ln Y)h}^2} + \frac{\beta^2}{\theta_{(\ln Y)v}^2}}} \alpha_2 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right). \end{aligned} \quad (2.102)$$

Podobnie jak w poprzednim przykładzie, mnożnik α_2 na końcu ciągu równości jest identyczny z mnożnikiem α_2 we wzorze (2.92) i jego wartości podane są w tabeli 2.1. Jak łatwo zauważyć, obowiązują też relacje analogiczne do (2.101), czyli

$$\theta_{(Y)h} = \theta_{(\ln Y)h} \alpha_2 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right), \quad \theta_{(Y)v} = \theta_{(\ln Y)v} \alpha_2 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right). \quad (2.103)$$

Przykład 2.16. Jako ostatnią przyjmijmy funkcję typu Markowa, lecz o postaci (2.44), czyli dającą tzw. elipsoidalną strukturę korelacyjną (patrz przykład 2.9):

$$\begin{aligned}
\theta_{(Y)(\alpha,\beta)} &= \\
&= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\exp(\sigma_{\ln Y}^2) - 1} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\sigma_{\ln Y}^2 \exp \left(-\sqrt{\left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)h}} \alpha t \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)v}} \beta t \right)^2} \right) \right) - 1 \right] dt = \\
&= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\sigma_{\ln Y}^2 \exp \left(-t \sqrt{\left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)h}} \alpha \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)v}} \beta \right)^2} \right) \right) - 1 \right] dt = \\
&= \frac{2\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right)^2 \sqrt{\left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)h}} \alpha \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_{(\ln Y)v}} \beta \right)^2}} \int_0^{+\infty} \left[\exp \left(\exp(-s + \ln \sigma_{\ln Y}^2) \right) - 1 \right] ds = \\
&= \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\frac{\alpha^2}{\theta_{(\ln Y)h}^2} + \frac{\beta^2}{\theta_{(\ln Y)v}^2}}} \alpha_1 \left(\frac{\sigma_Y}{\mu_Y} \right). \tag{2.104}
\end{aligned}$$

Warto odnotować, że ponownie otrzymaliśmy mnożnik α_1 identyczny jak w przykładzie 2.14. Natomiast współczynnik, który jest mnożony przez α_1 , jest identyczny jak w przykładzie 2.15. Relacje pomiędzy poziomymi i pionowymi skalami fluktuacji dla pola Y oraz $\ln Y$ pozostają identyczne jak w przykładzie 2.14 (wzór (2.101)).

Jeśli pole jest określone na obszarze trójwymiarowym, to stosując wzór (2.56) otrzyma się rezultaty w pełni analogiczne do przypadku dwuwymiarowego. W szczególności relacje (2.101) oraz (2.103) będą takie same.

W dalszych rozdziałach, w sytuacji gdy będzie oczywiste, o którym polu losowym jest mowa, zamiast oznaczenia $\theta_{(Y)h}$ na poziomą skalę fluktuacji oraz $\theta_{(Y)h^v}$ na pionową, będą używane prostsze oznaczenia: odpowiednio θ_h oraz θ_v .

2.8. Uśrednienia lokalne. Funkcja wariancji

2.8.1. Koncepcja lokalnych uśrednień i podstawowe zależności

Większość właściwości oraz parametrów materiałów stosowanych w zagadnieniach inżynierskich ma charakter pewnego rodzaju średnich (niekoniecznie średnich arytmetycznych). Wynika to po pierwsze ze sposobu prowadzenia

pomiarów. A po drugie – z koncepcji, że o zachowaniu się danego obiektu w większości przypadków nie decydują własności „punktowe”, ale cechy występujące w pewnym większym obszarze geometrycznym rozpatrywanego obiektu. W przypadku obszaru trójwymiarowego $V \subset \mathbf{R}^3$ prowadzi to do następującego opisu. Załóżmy, że parametr gruntu X opisany jest przez stacjonarne (w szerszym sensie), ciągłe w sensie średniej kwadratowej (por. np. Wentzell, 1980) pole losowe $X(x, y, z)$, o funkcji kowariancji $\text{COV}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) = \sigma_X^2 \rho(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$, gdzie σ_X^2 jest wariancją pola X , zaś ρ_X jego funkcją korelacji. Niech $|V|$ oznacza miarę (objętość) obszaru V . Lokalne (zwane też przestrzennym) uśrednienie polega na wprowadzeniu nowego pola określonego jako

$$X_V = \frac{1}{|V|} \iiint_V X(x, y, z) dx dy dz, \quad (2.105)$$

przy czym całka we wzorze (2.105) jest rozumiana jako całka w sensie średniej kwadratowej (por. np. Wentzell, 1980). Jak łatwo zauważyć, X_V jest zmienną losową określającą pewną średnią pola X w obszarze V . Nowa rodzina zmiennych losowych $\{X_V\}$ indeksowana jest rodziną rozpatrywanych obszarów $\{V\}$. W teorii procesów stochastycznych (teorii funkcji losowych) obiekt (2.105) nazywa się procesem o ruchomej średniej (por. Box i Jenkins, 1983) lub funkcją losową o ruchomej średniej, ze względu na zmieniający się obszar V . Do zagadnień geotechniki uśrednienia lokalne pól losowych (zwane też uśrednieniami przestrzennymi) wprowadził Vanmarcke w swoich fundamentalnych pracach (1977a, 1977b) oraz w monografii poświęconej polom losowym (1983). Dzięki własności stacjonarności pole losowe X_V ma taką samą wartość oczekiwaną jak X , ale zmienia się jego wariancja, którą można zapisać w postaci

$$\text{VAR}[X_V] = \sigma_V^2 = \gamma(V) \sigma_X^2. \quad (2.106)$$

Wzór (2.106) definiuje funkcję $\gamma(V)$, tzw. funkcję wariancji (zwaną też czasem funkcją redukcji wariancji), określającą zmiany wariancji punktowej σ_X^2 po zastosowaniu lokalnego uśrednienia. Aby znaleźć funkcję wariancji, niezbędne jest obliczenie wariancji zmiennych $\text{VAR}[X_V]$. Z definicji kowariancji oraz ogólnych zależności dotyczących całek stochastycznych (Wentzell, 1980) wynika, że

$$\text{COV}(X_{V_1}, X_{V_2}) = \frac{1}{|V_1||V_2|} \int \int \text{COV}(\Delta x, \Delta y, \Delta z) dV_1(\Delta x, \Delta y, \Delta z) dV_2(\Delta x, \Delta y, \Delta z). \quad (2.107)$$

Całką we wzorze (2.107) jest całką po obszarach V_1 i V_2 , może być całką powierzchniową, krzywoliniową lub całką wielokrotną w zależności od postaci obszarów V_1 i V_2 . W szczególnym przypadku, gdy $V_1 = V_2$, wzór (2.107) określa wariancję $\text{VAR}[X_V]$. Gdy obszar $V \subset \mathbb{R}^3$ jest prostopadłością o postaci $V = [0, L_1] \times [0, L_2] \times [0, L_3]$, a pole X jest polem stacjonarnym, wariancja $\text{VAR}[X_V]$ obliczona według (2.107) wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_V] &= \\ &= \frac{1}{(L_1 L_2 L_3)^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \text{COV}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 = \\ &= \frac{\sigma_X^2}{(L_1 L_2 L_3)^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \rho_X(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 dz_1 dz_2 = \\ &= \sigma_X^2 \gamma(L_1, L_2, L_3). \end{aligned} \quad (2.108)$$

Ostatnia równość w (2.108) pokazuje postać funkcji wariancji dla tego przypadku.

2.8.2. Jednowymiarowy obszar uśrednienia

Przejdźmy obecnie do przypadku jednowymiarowego i załóżmy, że obszar uśrednienia jest przedziałem $V = [0, L]$. Wówczas wzór (2.108) redukuje się do postaci

$$\text{VAR}[X_L] = \frac{\sigma_X^2}{L^2} \int_0^L \int_0^L \rho_X(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 = \sigma_X^2 \gamma(L). \quad (2.109)$$

Funkcję wariancji $\gamma(L)$ określoną powyższym wzorem można doprowadzić do prostszej postaci. Mianowicie, wprowadzając zamianę zmiennych poprzez przekształcenie

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_2 - x_1, \quad t = \sqrt{2}(L - x_2) \quad \text{dla} \quad \{(x_1, x_2) : x_2 \in [0, L], 0 \leq x_1 \leq x_2\} \\ \text{oraz} & \\ \Delta x &= x_2 - x_1, \quad t = \sqrt{2}(L - x_1) \quad \text{dla} \quad \{(x_1, x_2) : x_1 \in [0, L], 0 \leq x_2 < x_1\}, \end{aligned} \quad (2.110)$$

którego jacobian równy jest $J = \sqrt{2}$, oraz stosując twierdzenie o zamianie zmiennych w całce podwójnej (Leja 2018), otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\gamma(L) &= \frac{1}{L^2} \int_0^L \int_0^L \rho_X(x_2 - x_1) dx_1 dx_2 = \\
&= \frac{1}{L^2} \left[\int_{-L}^0 \rho_X(\Delta x) \int_0^{\sqrt{2}(L-|\Delta x|)} \frac{1}{\sqrt{2}} dt d\Delta x + \int_0^L \rho_X(\Delta x) \int_0^{\sqrt{2}(L-|\Delta x|)} \frac{1}{\sqrt{2}} dt d\Delta x \right] = \\
&= \frac{1}{L^2} \left[\int_{-L}^0 \sqrt{2}(L-|\Delta x|) \rho_X(\Delta x) \frac{d\Delta x}{\sqrt{2}} + \int_0^L \sqrt{2}(L-|\Delta x|) \rho_X(\Delta x) \frac{d\Delta x}{\sqrt{2}} \right] = \\
&= \frac{1}{L^2} \int_{-L}^L (L-|\Delta x|) \rho_X(\Delta x) d\Delta x. \tag{2.111}
\end{aligned}$$

Korzystając z faktu, że $\rho_X(\Delta x) = \rho_X(-\Delta x)$, można ostatecznie napisać

$$\gamma(L) = \frac{2}{L} \int_0^L \left(1 - \frac{\Delta x}{L}\right) \rho_X(\Delta x) d\Delta x. \tag{2.112}$$

Porównując powyższy wzór ze wzorem definiującym skalę fluktuacji (2.50) łatwo zauważyć, że

$$\theta_X = \lim_{L \rightarrow \infty} L\gamma(L). \tag{2.113}$$

Ostatni wzór wskazuje, że o ile skala fluktuacji ma wartość skończoną, to przy dużych wartościach ($L \gg \theta_X$) można napisać równość przybliżoną

$$\gamma(L) \approx \frac{\theta_X}{L}. \tag{2.114}$$

Powyższe przybliżenie daje najprostszą aproksymację funkcji wariancji w sytuacji, gdy struktura korelacyjna nie jest dokładnie określona (Vanmarcke, 1977a). Mianowicie

$$\gamma(L) = \begin{cases} 1 & \text{dla } L \leq \theta_X, \\ \frac{\theta_X}{L} & \text{dla } L > \theta_X. \end{cases} \tag{2.115}$$

Zdaniem niektórych autorów (Fenton i Griffiths, 2008), gdy struktura korelacyjna nie jest dokładnie znana, lepszym oszacowaniem niż (2.114) jest zależność przybliżona o postaci

$$\gamma(L) \approx \frac{\theta_x}{\theta_x + L}. \quad (2.116)$$

Można sprawdzić, że funkcji z prawej strony zależności (2.116) odpowiada według wzoru (2.112) funkcja korelacji

$$\rho_x(\Delta x) = \frac{\theta_x^3}{(\theta_x + \Delta x)^3}. \quad (2.117)$$

Powyższa funkcja jest identyczna z funkcją korelacji określoną wzorem (2.33), gdyż podstawienie (2.33) do wzoru (2.50) określającego skalę fluktuacji, a następnie obliczenie całki, daje rezultat $\theta_x = a$.

Poniżej podano kilka przykładów funkcji korelacyjnych oraz odpowiadających im funkcji wariancji.

Przykład 2.17. W najprostszym modelu można zaproponować funkcję korelacji w polu X w postaci

$$\rho_x(\Delta x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |\Delta x| \leq \frac{\theta_x}{2}, \\ 0 & \text{dla } |\Delta x| > \frac{\theta_x}{2}. \end{cases} \quad (2.118)$$

Taka postać funkcji korelacji implikuje, zgodnie ze wzorem (2.112) funkcję wariancji postaci:

$$\gamma(L) = \begin{cases} 1 & \text{dla } L \leq \frac{\theta_x}{2}, \\ \frac{\theta_x}{L} \left(1 - \frac{\theta_x}{4L}\right) & \text{dla } L > \frac{\theta_x}{2}. \end{cases} \quad (2.119)$$

Przykład 2.18. Inny prosty model to trójkątna funkcja korelacji (por. wzór (2.32) w przykładzie 2.2). Z definicji skali fluktuacji (2.50) wynika, że skala ta jest w tym przypadku równa parametrowi a . Zatem wzór (2.32) może być przepisany w postaci

$$\rho(\Delta x) = \begin{cases} 1 - \frac{|\Delta x|}{\theta_x} & \text{dla } |\Delta x| \leq \theta_x, \\ 0 & \text{dla } |\Delta x| > \theta_x. \end{cases} \quad (2.120)$$

W tym przypadku funkcja wariancji przybiera postać:

$$\gamma(L) = \begin{cases} 1 - \frac{L}{3\theta_x} & \text{dla } L \leq \theta_x, \\ \frac{\theta_x}{L} \left(1 - \frac{\theta_x}{3L}\right) & \text{dla } L > \theta_x. \end{cases} \quad (2.121)$$

Przykład 2.19. Dla funkcji korelacji jednej zmiennej typu Markowa (przykład 2.4, wzór (2.34) oraz przykład 2.11, wzór (2.88)) całkowanie we wzorze (2.112) prowadzi do zależności

$$\gamma(L) = \frac{2(aL - 1 + \exp(-aL))}{(aL)^2} = \frac{\frac{2}{\theta_x}L - 1 + \exp\left(-\frac{2}{\theta_x}L\right)}{2\left(\frac{L}{\theta_x}\right)^2}. \quad (2.122)$$

Przykład 2.20. W przypadku funkcji korelacji typu cosinus eksponent (por. (2.40)), gdy przyjąć $a = b$, otrzymuje się skalę fluktuacji $\theta_x = 1/a$. Wówczas funkcja korelacji ma postać (2.93) (por. przykład 2.13). Po wstawieniu do wzoru (2.112) i scałkowaniu otrzymuje się następującą funkcję redukcji wariancji:

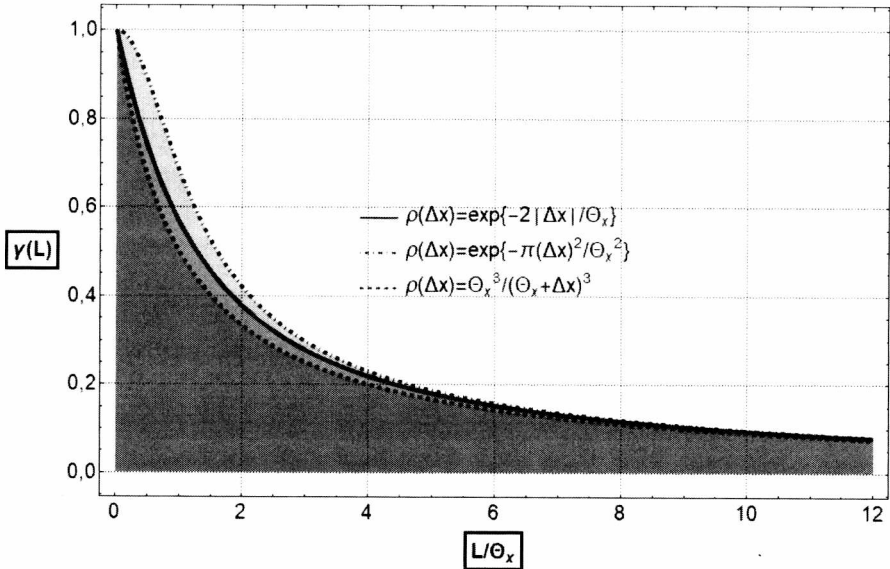
$$\gamma(L) = 2 \frac{(a^3L + aLb - a^2 + b^2) + \exp(-aL) [a^2 \cos(Lb) - b^2 \cos(Lb) - 2ab \sin(Lb)]}{(a^2 + b^2)^2 L^2}. \quad (2.123)$$

Przykład 2.21. Gaussowska funkcja korelacji (por. (2.38) oraz (2.91)) generuje funkcję wariancji o postaci (Vanmarcke, 1977a; Rackwitz, 2000)

$$\begin{aligned} \gamma(L) &= \frac{\sqrt{\pi a} L \cdot \operatorname{erf}(\sqrt{a}L) - 1 + \exp(-aL^2)}{aL^2} = \\ &= \frac{\theta_x^2}{\pi L^2} \left[\frac{\pi L}{\theta_x} \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{\pi}L}{\theta_x}\right) + \exp\left(-\frac{\pi L^2}{\theta_x^2}\right) - 1 \right], \end{aligned} \quad (2.124)$$

gdzie

$$\operatorname{erf}(t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \exp(-x^2) dx. \quad (2.125)$$



Rys. 2.5. Porównanie wykresów funkcji wariancji dla różnych modeli korelacyjnych (por. legenda z prawej strony). Na osi poziomej wielkość obszaru L odniesiona jest do skali fluktuacji θ_x

Porównanie wykresów funkcji wariancji dla trzech modeli korelacyjnych: typu Markowa (2.122), typu Gaussa (2.124) oraz funkcji ze wzoru (2.116) przedstawiono na rysunku 2.5. Z porównania wynika, że różnice w wartościach pomiędzy poszczególnymi funkcjami są niewielkie. Największą redukcję wariancji daje funkcja homograficzna (2.116).

2.8.3. Dwuwymiarowy obszar uśrednienia

W przypadku dwuwymiarowym dla prostokąta $V = [0, L_1] \times [0, L_2]$ wzór (2.108) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned}
 \text{VAR}[X_V] &= \\
 &= \frac{1}{(L_1 L_2)^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \text{COV}(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\
 &= \frac{\sigma_x^2}{(L_1 L_2)^2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \rho_x(x_2 - x_1, y_2 - y_1) dx_1 dx_2 dy_1 dy_2 = \\
 &= \sigma_x^2 \gamma(L_1, L_2).
 \end{aligned} \tag{2.126}$$

Poprzez zastosowanie zamiany zmiennych i przekształceń analogicznych do opisanych wzorami (2.110) i (2.111) wzór (2.126) redukuje się do postaci

$$\frac{\sigma_X^2}{L_1 L_2} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left(1 - \frac{|\Delta x|}{L_1}\right) \left(1 - \frac{|\Delta y|}{L_2}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y) d\Delta x d\Delta y = \sigma_X^2 \gamma(L_1, L_2). \quad (2.127)$$

Oznacza to, że funkcja wariancji jest w tym przypadku funkcją dwóch zmiennych i wyraża się wzorem

$$\gamma(L_1, L_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \left(1 - \frac{|\Delta x|}{L_1}\right) \left(1 - \frac{|\Delta y|}{L_2}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y) d\Delta x d\Delta y. \quad (2.128)$$

Dalsze uproszczenie powyższego wzoru jest możliwe po przyjęciu dodatkowych założeń, dotyczących struktury korelacyjnej pola. Chodzi tu mianowicie o przyjęcie tzw. symetrii ćwiartkowej (ang. *quadrant symmetry*), czyli założenia, że funkcja korelacji w polu spełnia warunek

$$\rho_X(\Delta x, \Delta y) = \rho_X(-\Delta x, \Delta y) = \rho_X(\Delta x, -\Delta y) = \rho_X(-\Delta x, -\Delta y). \quad (2.129)$$

Po przyjęciu tego założenia wzór (2.128), określający funkcję wariancji, przyjmuje postać analogiczną do (2.112), tj.

$$\gamma(L_1, L_2) = \frac{4}{L_1 L_2} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \left(1 - \frac{\Delta x}{L_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{L_2}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y) d\Delta x d\Delta y. \quad (2.130)$$

Przykład 2.22. W niektórych przypadkach całkę podwójną we wzorze (2.130) można znaleźć w postaci zamkniętej. Tak jest np. w przypadku funkcji korelacji typu Markowa (wzór (2.42), por. także przykład 2.14), gdzie stosując całkowanie przez części otrzymuje się

$$\gamma(L_1, L_2) = \frac{\theta_h \theta_v}{4L_1^2 L_2^2} \left[\frac{2L_1}{\theta_h} + \exp\left(-\frac{2L_1}{\theta_h}\right) - 1 \right] \left[\frac{2L_2}{\theta_v} + \exp\left(-\frac{2L_2}{\theta_v}\right) - 1 \right] \quad (2.131)$$

Warto też odnotować, że jeśli korelacja w polu jest separowalna (wzór (2.46)), to ze wzoru (2.130) natychmiast wynika, że

$$\gamma(L_1, L_2) = \gamma(L_1) \gamma(L_2). \quad (2.132)$$

2.8.4. Trójwymiarowy obszar uśrednienia

W przypadku trójwymiarowym podstawienia i przekształcenia analogiczne do tych z przypadków jedno- i dwuwymiarowych prowadzą do następującej ogólnej postaci funkcji wariancji:

$$\begin{aligned} \gamma(L_1, L_2, L_3) &= \\ &= \frac{1}{L_1 L_2 L_3} \int_{-L_1}^{L_1} \int_{-L_2}^{L_2} \int_{-L_3}^{L_3} \left(1 - \frac{|\Delta x|}{L_1}\right) \left(1 - \frac{|\Delta y|}{L_2}\right) \left(1 - \frac{|\Delta z|}{L_3}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z. \end{aligned} \quad (2.133)$$

Jeśli, tak jak w przypadku dwuwymiarowym, założyc dodatkowo symetrię oktanową funkcji korelacji, to wzór (2.133) przyjmie postać

$$\begin{aligned} \gamma(L_1, L_2, L_3) &= \\ &= \frac{2^3}{L_1 L_2 L_3} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} \int_0^{L_3} \left(1 - \frac{\Delta x}{L_1}\right) \left(1 - \frac{\Delta y}{L_2}\right) \left(1 - \frac{\Delta z}{L_3}\right) \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) d\Delta x d\Delta y d\Delta z. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Podobnie jak poprzednio, dla separowalnej korelacji w polu obowiązuje wzór

$$\gamma(L_1, L_2, L_3) = \gamma(L_1) \gamma(L_2) \gamma(L_3). \quad (2.135)$$

Przykład 2.23. Niech funkcją korelacji pola X określonego na obszarze trójwymiarowym będzie funkcja Gaussa (wzór (2.48), por. także przykład 2.15). Wprowadzając skale fluktuacji w trzech kierunkach – zgodnie z kierunkami osi OX , OY oraz OZ – i oznaczając je odpowiednio przez θ_x , θ_y oraz θ_z , otrzymamy

$$\begin{aligned} \rho_X(\Delta x, \Delta y, \Delta z) &= \\ &= \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_x} \Delta x\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_y} \Delta y\right)^2\right] \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\theta_z} \Delta z\right)^2\right]. \end{aligned} \quad (2.136)$$

Korzystając teraz z jednowymiarowej postaci funkcji wariancji (wzór (2.124)) oraz zależności (2.135) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \gamma(L_1, L_2, L_3) = & \left\{ \frac{\theta_x^2}{\pi L_1^2} \left[\frac{\pi L_1}{\theta_x} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi} L_1}{\theta_x} \right) + \exp \left(\frac{\pi L_1^2}{\theta_x^2} \right) - 1 \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\theta_y^2}{\pi L_2^2} \left[\frac{\pi L_2}{\theta_y} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi} L_2}{\theta_y} \right) + \exp \left(\frac{\pi L_2^2}{\theta_y^2} \right) - 1 \right] \right\} \times \\ & \times \left\{ \frac{\theta_z^2}{\pi L_3^2} \left[\frac{\pi L_3}{\theta_z} \operatorname{erf} \left(\frac{\sqrt{\pi} L_3}{\theta_z} \right) + \exp \left(\frac{\pi L_3^2}{\theta_z^2} \right) - 1 \right] \right\}. \end{aligned} \quad (2.137)$$

Przedstawione w powyższym podrozdziale koncepcje dają duże możliwości praktycznego zastosowania teorii pól losowych do probabilistycznej oceny bezpieczeństwa konstrukcji współpracujących z gruntem. Dla umożliwienia obliczeń konieczna jest znajomość skali fluktuacji pola (czasem w postaci trzech liczb, charakteryzujących fluktuacje w trzech kierunkach). W rozdziale 3 podane zostaną propozycje oceny skali fluktuacji na podstawie badań podłoża.

2.9. Zagadnienia estymacji

Dla właściwego modelowania parametrów podłoża za pomocą pól losowych niezwykle istotne jest odpowiednie określenie charakterystyk probabilistycznych pola losowego, takich jak wartość średnia, odchylenie standardowe czy funkcja korelacji. Wiąże się to bezpośrednio z zagadnieniami estymacji, o których mowa jest w niniejszym podrozdziale.

2.9.1. Estymacja liniowa nieobciążona

Zagadnienie estymacji liniowej dotyczy sytuacji, w której mając dane w kilku punktach obszaru, chcemy na ich podstawie oszacować dane w innych punktach. Załóżmy zatem, że znane są stany pola $X(\omega, \mathbf{x}_1)$, $X(\omega, \mathbf{x}_2)$, ..., $X(\omega, \mathbf{x}_n)$. Jak wiadomo (por. podrozdział 2.1), są to zmienne losowe, które, dla uproszczenia, w ramach tego podrozdziału oznaczane będą przez X_1, X_2, \dots, X_n . Przypuśćmy, że chcemy za pomocą tych zmiennych estymować zmienną X_{n+1} , czyli stan pola $X(\omega, \mathbf{x}_{n+1})$. Niech \hat{X}_{n+1} oznacza oszacowanie X_{n+1} . Jednym z prostszych sposobów jest przyjęcie \hat{X}_{n+1} w postaci kombinacji liniowej X_1, X_2, \dots, X_n , czyli

$$\hat{X}_{n+1} = \mu_{n+1} + \sum_{k=1}^n \beta_k (X_k - \mu_k), \quad (2.138)$$

gdzie μ_k jest wartością oczekiwaną X_k . Należy odnotować, że dla takiego sposobu estymacji wartości oczekiwane μ_k muszą być znane. Teraz zadanie polega na tym, aby tak wyznaczyć wektor współczynników $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$, żeby błąd estymacji

$$X_{n+1} - \hat{X}_{n+1} = X_{n+1} - \mu_{n+1} - \sum_{k=1}^n \beta_k (X_k - \mu_k) \quad (2.139)$$

był możliwie mały. Zauważmy najpierw, że

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}] &= E\left[X_{n+1} - \mu_{n+1} - \sum_{k=1}^n \beta_k (X_k - \mu_k)\right] = \\ &= \mu_{n+1} - \mu_{n+1} - \sum_{k=1}^n \beta_k E[X_k - \mu_k] = -\sum_{k=1}^n \beta_k (\mu_k - \mu_k) = 0, \end{aligned} \quad (2.140)$$

co oznacza, że \hat{X}_{n+1} jest estymatorem nieobciążonym. Przechodząc do minimalizowania wariancji \hat{X}_{n+1} zauważmy, że ze względu na relację (2.140) zachodzi równość

$$\text{VAR}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}] = E\left[(X_{n+1} - \hat{X}_{n+1})^2\right] = E\left[X_{n+1}^2 - 2X_{n+1}\hat{X}_{n+1} + \hat{X}_{n+1}^2\right]. \quad (2.141)$$

Załóżmy dla uproszczenia przekształceń, że $\mu_i = 0, i = 1, 2, \dots, n+1$. Przy tym założeniu wzór (2.138), określający estymator \hat{X}_{n+1} , redukuje się do postaci

$$\hat{X}_{n+1} = \sum_{k=1}^n \beta_k X_k. \quad (2.142)$$

Podstawiając (2.142) do (2.141) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}] &= \\ &= E[X_{n+1}^2] - 2\sum_{k=1}^n \beta_k E[X_{n+1}X_k] + \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_k \beta_j E[X_k X_j]. \end{aligned} \quad (2.143)$$

Aby zminimalizować wariancję (2.143), należy rozwiązać względem nieznanych współczynników $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ następujący układ równań:

$$\frac{\partial}{\partial \beta_l} \text{VAR}[X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}] = 0, \quad l = 1, 2, \dots, n, \quad (2.144)$$

który, po uwzględnieniu (2.143), sprowadza się do postaci

$$\frac{\partial}{\partial \beta_l} \text{VAR} [X_{n+1} - \hat{X}_{n+1}] = -2E[X_{n+1}X_l] + 2\sum_{k=1}^n \beta_k E[X_l X_k] = 0. \quad (2.145)$$

A to oznacza, że

$$E[X_{n+1}X_l] = \sum_{k=1}^n \beta_k E[X_l X_k], \quad l = 1, 2, \dots, n. \quad (2.146)$$

Ostatni układ równań można zapisać w postaci macierzowej, mianowicie

$$\mathbf{b} = \mathbf{C}\boldsymbol{\beta}, \quad (2.147)$$

gdzie

$$\mathbf{b} = (E[X_{n+1}X_1], E[X_{n+1}X_2], \dots, E[X_{n+1}X_n]),$$

zaś

$$\mathbf{C} = \text{COV}[X_l, X_k] = [E[X_l X_k]], \quad l, k = 1, 2, \dots, n$$

jest macierzą kowariancji. Układ równań (2.147) nazywa się układem równań Yulle-Walkera. Po rozwiązaniu tego układu wektor współczynników

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{b} \quad (2.148)$$

daje ostateczną postać estymatora (2.138).

W literaturze anglojęzycznej metoda zwykle oznaczana jest jako BLUE (*best linear unbiased estimator*). Można zauważyć podobieństwo pomiędzy metodą BLUE a popularną i często stosowaną metodą regresji liniowej. Jednak w metodzie BLUE wektor współczynników wyznaczony z równania (2.148), jedynie na podstawie wartości kowariancji, nie zależy od przestrzennego położenia stanów pola X_1, X_2, \dots, X_n , jak to ma miejsce przy zastosowaniu regresji liniowej. Regresja liniowa natomiast ignoruje korelacje pomiędzy stanami pola X_1, X_2, \dots, X_n . Dlatego metoda BLUE wydaje się być bardziej adekwatna do zastosowań w geotechnice. Może się bowiem zdarzyć, że punkty pomiarowe są względem siebie blisko zlokalizowane, ale znajdują się w różnych strukturalnie warstwach gruntu, a w związku z tym ich wzajemna korelacja może być bardzo niewielka.

Natomiast wadą metody BLUE jest to, że zarówno wartości średnie w polu, jak i kowariancje muszą być znane *a priori*.

2.9.2. Ergodyczność

Pojęcie ergodyczności jest zapewne fundamentalne, jeśli chodzi o zastosowania teorii procesów stochastycznych i teorii pól losowych w geotechnice. Zanim przejdziemy do jego określenia, zwróćmy uwagę na to, że klasyczne podejście statystyczne opiera się na obserwacji powtarzanych prób, które powinny być od siebie niezależne (tzw. statystyczna próba prosta – por. np. Fisz, 1980; 1967). Estymacja momentów statystycznych, a także rozkładu prawdopodobieństwa opiera się na takim sposobie próbkowania. Wyobraźmy teraz sobie badania gruntu *in situ* za pomocą sondy CPT w warstwie, którą uważamy za jednorodną. W wyniku sondowania w kilku otworach otrzymujemy wartości oporu stożka sondy q_c oraz tarcia na tulei sondy f_s na różnych głębokościach i w różnych miejscach. Zatem każdy pomiar pary (q_c, f_s) jest przypisany do jednego punktu w przestrzeni trójwymiarowej. Jeśli teraz założymy, że $q_c(\omega, \mathbf{x})$ oraz $f_s(\omega, \mathbf{x})$ są stacjonarnymi polami losowymi, to w wyniku wyżej wspomnianych badań otrzymamy tylko jedną realizację tego pola, i to w dodatku znaną w zaledwie skończonej liczbie punktów. Powstaje pytanie, w jaki sposób na podstawie tej jednej realizacji oszacować (estymować) wartości oczekiwane pól μ_{q_c} i μ_{f_s} oraz ich odchylenia standardowe σ_{q_c} i σ_{f_s} . Tu właśnie pojawia się koncepcja ergodyczności, która zakłada, że w pewnych sytuacjach uśrednienie względem próby (czyli względem zmiennej ω) może być zastąpione poprzez uśrednienie „po przestrzeni”, czyli względem zmiennej \mathbf{x} . Prowadzi to do następującej definicji.

Definicja 2.9. Stacjonarne pole losowe X o wartości oczekiwanej m nazywa się ergodycznym, jeżeli spełnione są dwa następujące warunki:

$$\mu_X = E[X(\mathbf{x})] = \lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (2.149)$$

$$\begin{aligned} \text{COV}(\Delta \mathbf{x}) + \mu_X^2 &= E[X(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})X(\mathbf{x})] = \\ &= \lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_V X(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{x})X(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (2.150)$$

gdzie V jest obszarem określoności pola X .

W przypadku stacjonarnego pola gaussowskiego warunkiem dostatecznym spełnienia warunków (2.149) oraz (2.150) są dwa następujące warunki graniczne:

$$\lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_{|V|} \text{COV}(\Delta \mathbf{x}) d\Delta \mathbf{x} = 0, \quad (2.151)$$

$$\lim_{|V| \rightarrow \infty} \frac{1}{|V|} \int_{|V|} [\text{COV}(\Delta \mathbf{x})]^2 d\Delta \mathbf{x} = 0. \quad (2.152)$$

W przypadku, gdy $V = \mathbb{R}$, warunki (2.151) i (2.152) są spełnione, jeśli funkcja kowariancji pola X zbiega do zera w nieskończoności, tj.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow \infty} \text{COV}(\Delta x) = 0. \quad (2.153)$$

Ostatnia równość oznacza, że współczynniki korelacji pomiędzy odległymi punktami w polu ergodycznym muszą być bliskie zera.

2.10. Numeryczne generowanie pól losowych (symulacja pól losowych)

Symulacja numeryczna pól losowych jest naturalnym rozszerzeniem generowania zmiennych losowych (Rubinstein i Kroese, 2011; Zieliński, 1979). Generowanie pól stanowi dziś istotną część metod symulacyjnych. Do najważniejszych metod generowania pól losowych należą:

- metoda ruchomej średniej (*moving-average methods*, MA);
- metoda dekompozycji macierzy kowariancji (*covariance matrix decomposition*);
- metoda dyskretnej transformaty Fouriera (*discrete Fourier transform method*, DFT);
- metoda szybkiej transformaty Fouriera (*fast Fourier transform method*, FFT);
- metoda TBM (*turning-bands method*);
- metoda podziału lokalnych uśrednień LAS (*local average subdivision method*, LAS).

Obszerne informacje na ten temat można znaleźć w monografiach (np. Fenton i Griffiths, 2008).

W ramach tej monografii bardziej szczegółowo omówiona zostanie ostatnia z wymienionych, zwana dalej metodą LAS lub algorytmem LAS, która była stosowana do generowania stacjonarnych pól losowych w przykładach przedstawionych w rozdziałach piątym i szóstym. Algorytm LAS został opracowany przez Fentona i Vanmarcke'a (1990). Szczegółowy opis tego algorytmu można znaleźć też pracy Spencera (2007), w monografii Fentona i Griffithsa (2008), a w polskiej literaturze – w rozprawie doktorskiej Pieczyńskiej (2012) oraz w publikacji Kawy, Puły i Suski (2016).

2.10.1. Algorytm LAS

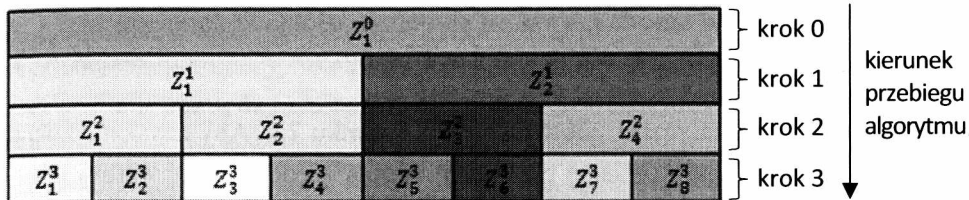
Dla uproszczenia opisu przedstawiono poniżej wersję dla pola losowego, którego obszar jest jednowymiarowy ($X(\omega, x)$, $x \in \mathbb{R}$). Algorytm służy do generowania pola gaussowskiego. Opiera się on na pomysśle kolejnego dzielenia komórek wyjściowych (odpowiadających zmiennym losowym) na dwie części w ten sposób, aby suma wartości oczekiwanych nowo powstałych komórek była równa wartości oczekiwanej wyjściowej komórki. Ponadto podział dokonywany jest w taki sposób, aby zapewnić wariancję zgodną z lokalnym uśrednieniem (podrozdział 2.8), a także odpowiednią korelację przestrzenną, zgodną z założoną dla danego pola funkcją kowariancji.

Algorytm przebiega w sposób rekurencyjny, w którym nowo utworzona komórka staje się „rodzicem” kolejnych, aż do osiągnięcia żądanej dyskretyzacji pola.

Założmy teraz, że X jest stacjonarnym procesem gaussowskim (polem określonym na obszarze jednowymiarowym) o wartości oczekiwanej zero oraz o funkcji kowariancji $\text{COV}(\Delta x) = \sigma_x^2 \rho_x(\Delta x)$, przy czym $\rho_x(\Delta x)$ jest funkcją korelacji typu Markowa, tj. o postaci (2.34) i (2.88). Zatem zgodnie ze stosowanymi w tym podrozdziale oznaczeniami rozpatrywana tu funkcja kowariancji przyjmuje następującą postać:

$$\text{COV}(\Delta x) = \sigma_x^2 \exp\left(-\frac{2|\Delta x|}{\theta_x}\right). \quad (2.154)$$

Jak wykazano w podrozdziale 2.8 (przykład 2.19), takiej strukturze korelacyjnej odpowiada funkcja wariancji określona wzorem (2.122). Algorytm LAS, który schematycznie pokazano na rysunku 2.6, przebiega w następujący sposób.



Rys. 2.6. Schematyczna prezentacja algorytmu LAS. Generowanie wartości kolejnych komórek (Kawa, Puła i Suska, 2016)

Cały proces odbywa się w pewnym obszarze D (obszarze określoności pola), który ulega podziałowi na komórki o jednakowej mierze. W i -tym kroku algorytmu obszar D jest sumą rozłącznych obszarów D^i (komórek) o jednakowej mierze: $|D^i| = |D|/2^i$. Niech Z_j^i oznacza zmienną losową przyporządkowaną komórce j w i -tym kroku algorytmu. Zmienna ta jest jednocześnie uśrednieniem pola X względem komórki j , czyli

$$Z_j^i = \frac{1}{D^i} \int_{(j-1)D^i}^{jD^i} X(x) dx. \quad (2.155)$$

W kroku „zero” jedyna istniejąca komórka zajmuje cały obszar D , a wartość średnia Z_1^0 jest równa wartości oczekiwanej pola, która jest stała w związku z założeniem stacjonarności pola. W przypadku tu rozpatrywanym założono powyżej, że wartość ta jest równa zero. Natomiast wariancja Z_1^0 , zgodnie z teorią lokalnych uśrednień (podrozdział 2.8), jest równa $\sigma_D^2 = \sigma_X^2 \gamma(D)$, gdzie σ_X^2 jest wariancją rozpatrywanego pola. W pierwszym kroku komórka dzielona jest na dwie komórki D^1 o jednakowych rozmiarach $|D^1| = |D|/2$. Tym nowym komórkom przyporządkowane są zmienne losowe Z_1^1 i Z_2^1 . Zgodnie z nałożonym warunkiem, aby suma wartości oczekiwanych nowo powstałych komórek była równa wartości oczekiwanej wyjściowej komórki, oznacza to, że

$$\frac{1}{2}(Z_1^1 + Z_2^1) = Z_1^0. \quad (2.156)$$

Tylko wartość Z_2^1 jest generowana losowo. Natomiast wartość Z_1^1 jest wyznaczana ze wzoru (2.156) z uwzględnieniem wygenerowanej wcześniej wartości Z_2^1 . Analogicznie przebiegają kolejne kroki algorytmu. I tak w kroku i -tym mamy 2^i komórek D^i o rozmiarze $|D^i| = |D|/2^i$ każda. Losowe wartości generowane są tylko dla komórek Z_{2j}^{i+1} , natomiast wartości Z_{2j-1}^{i+1} są obliczane według wzoru analogicznego do (2.156), a mianowicie

$$\frac{1}{2}(Z_{2j-1}^{i+1} + Z_{2j}^{i+1}) = Z_j^i. \quad (2.157)$$

Procedurę schematycznie zilustrowano na rysunku 2.6. Aby uzyskać żadaną (założoną na początku) korelację przestrzenną pola X , dodatkowe warunki muszą być nałożone na generowane wartości. Dla dowolnej komórki generowanej w kroku $i + 1$ oraz odpowiadającej jej zmiennej losowej Z_{2j}^{i+1} te warunki są następujące: poprawna wartość wariancji, zgodna z teorią uśrednień lokalnych i odpowiednia korelacja w otoczeniu wyjściowej komórki. Jak wykazali Fenton i Vanmarcke (1990), a także Samy (1998), dla pola z funkcją korelacji typu Markowa sąsiedztwo rozmiaru 3, tj. $\{Z_{j-1}^i, Z_j^i, Z_{j+1}^i\}$ z poprzedzającego kroku wystarcza do wygenerowania poprawnie skorelowanego (tzn. o korelacji zgodnej z założoną na początku) pola losowego. W związku z tym zmienna losowa przyporządkowana komórce Z_{2j}^{i+1} może być przedstawiona w postaci

$$Z_{2j}^{i+1} = a_{-1}^{i+1} Z_{j-1}^i + a_0^{i+1} Z_j^i + a_{+1}^{i+1} Z_{j+1}^i + c^{i+1} U_{2j}^{i+1}, \quad (2.158)$$

gdzie U_{2j}^{i+1} oznacza biały szum (por. podrozdział 2.4, przykład 2.1) o średniej równej zeru i jednostkowej wariancji. Zmienna U_{2j}^{i+1} jest stochastycznie niezależna od zmiennych Z_j^i . Współczynniki a_k^{i+1} , $k \in \{-1, 0, 1\}$ we wzorze (2.158) muszą być wyznaczone na podstawie korelacji zmiennej Z_{2j}^{i+1} ze zmiennymi z sąsiedztwa $\{Z_{j-1}^i, Z_j^i, Z_{j+1}^i\}$. Natomiast wartość współczynnika c^i jest dobrana tak, aby wariancja zmiennej Z_j^i była równa $\sigma_X^2 \gamma(D^i)$.

Mnożąc obie strony równania (2.158) przez Z_m^i , gdzie $m = j - 1, j, j + 1$, oraz nakładając obustronnie operator wartości oczekiwanej, otrzymuje się

$$\begin{aligned} E[Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] &= E[a_{-1}^{i+1} Z_{j-1}^i Z_m^i + a_0^{i+1} Z_j^i Z_m^i + a_{+1}^{i+1} Z_{j+1}^i Z_m^i + c^{i+1} U_{2j}^{i+1} Z_m^i] = \\ &= a_{-1}^{i+1} E[Z_{j-1}^i Z_m^i] + a_0^{i+1} E[Z_j^i Z_m^i] + a_{+1}^{i+1} E[Z_{j+1}^i Z_m^i] + c^{i+1} E[U_{2j}^{i+1} Z_m^i]. \end{aligned} \quad (2.159)$$

Jak wiadomo, wartość oczekiwana iloczynu stochastycznie niezależnych zmiennych losowych jest równa iloczynowi wartości oczekiwanych tychże zmiennych (Feller, 2008). Korzystając z tego faktu oraz z założenia, że $E[U_{2j}^{i+1}] = 0$, ostatecznie otrzymujemy

$$E[Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] = a_{-1}^{i+1} E[Z_{j-1}^i Z_m^i] + a_0^{i+1} E[Z_j^i Z_m^i] + a_{+1}^{i+1} E[Z_{j+1}^i Z_m^i] \quad (2.160)$$

dla $m = j - 1, j, j + 1$.

Trzy kowariancje, które występują po prawej stronie wzoru (2.160), są kowariancjami pomiędzy lokalnymi uśrednieniami w kroku i (precyzyjniej – kowariancjami pomiędzy zmiennymi losowymi powstałymi w wyniku uśrednień). Każda z nich ma postać $E[Z_k^i Z_{k+m}^i]$, a ta kowariancja może być obliczona na podstawie teorii lokalnych uśrednień Vanmarcke’a (por. podrozdział 2.8 oraz monografię Vanmarcke’a, 1983), mianowicie

$$E[Z_k^i Z_{k+m}^i] = \frac{\sigma_x^2}{2} \left[(m-1)^2 \gamma((m-1)D^i) - 2m^2 \gamma(mD^i) + (m+1)^2 \gamma((m+1)D^i) \right], \quad (2.161)$$

przy czym $\gamma(\dots)$ jest funkcją wariancji (por. podrozdział 2.8.1), która tutaj ma postać (2.122). Po lewej stronie wzoru (2.160) mamy kowariancję pomiędzy uśrednieniami w dwóch kolejnych krokach $E[Z_{2j}^{i+1} Z_m^i]$. Tę kowariancję można jednak wyznaczyć z zależności

$$E[Z_{2j}^{i+1} Z_m^i] = \frac{1}{2} \left(E[Z_{2j}^{i+1} Z_{2m-1}^i] + E[Z_{2j}^{i+1} Z_{2m}^i] \right). \quad (2.162)$$

Korzystając teraz ze wzorów (2.161) i (2.162) można układ trzech równań (2.160) rozwiązać ze względu na niewiadome współczynniki $a_{-1}^{i+1}, a_0^{i+1}, a_{+1}^{i+1}$. Zatem, aby określić zmienną losową Z_{2j}^{i+1} zgodnie ze wzorem (2.158), musimy jeszcze wyznaczyć współczynnik c^{i+1} z zależności

$$E[Z_{2j}^{i+1} Z_{2j}^{i+1}] = a_{-1}^{i+1} E[Z_{2j}^{i+1} Z_{j-1}^i] + a_0^{i+1} E[Z_{2j}^{i+1} Z_j^i] + a_{+1}^{i+1} E[Z_{2j}^{i+1} Z_{j+1}^i] + (c^{i+1})^2, \quad (2.163)$$

stąd ostatecznie

$$c^{i+1} = \sqrt{E\left[\left(Z_{2j}^{i+1}\right)^2\right] - a_{-1}^{i+1} E\left[Z_{2j}^{i+1} Z_{j-1}^i\right] - a_0^{i+1} E\left[Z_{2j}^{i+1} Z_j^i\right] - a_{+1}^{i+1} E\left[Z_{2j}^{i+1} Z_{j+1}^i\right]}. \quad (2.164)$$

Ponieważ wartości współczynników a_k^i oraz c^i , $k = -1, 0, 1$ zależą jedynie od numeru kroku i , zatem mogą być wyliczone na początku procedury w zależności od planowanej liczby kroków. Następnie uruchamia się proces generowania.

Na koniec zauważmy, że w sytuacji, gdy komórka Z_{2j}^{i+1} znajduje się na brzegu rozpatrywanego obszaru określoności pola, jedynie część trójelementowego sąsiedztwa znajduje się w obszarze, w związku z czym równania (2.160) oraz (2.164) muszą zostać zmodyfikowane (Fenton i Vanmarcke, 1990). Jeśli tylko jeden z elementów trójelementowego sąsiedztwa jest poza obszarem, to liczba równań we wzorze (2.160) oraz liczba współczynników a_k^{i+1} redukuje się do dwóch. Jeśli dwa elementy trójelementowego sąsiedztwa są poza obszarem (dotyczy to sytuacji generowania Z_2^1), wówczas w (2.159) mamy tylko jedno równanie, mianowicie

$$E[Z_2^1 Z_1^0] = a_0^1 E[Z_1^0 Z_1^0]. \quad (2.165)$$

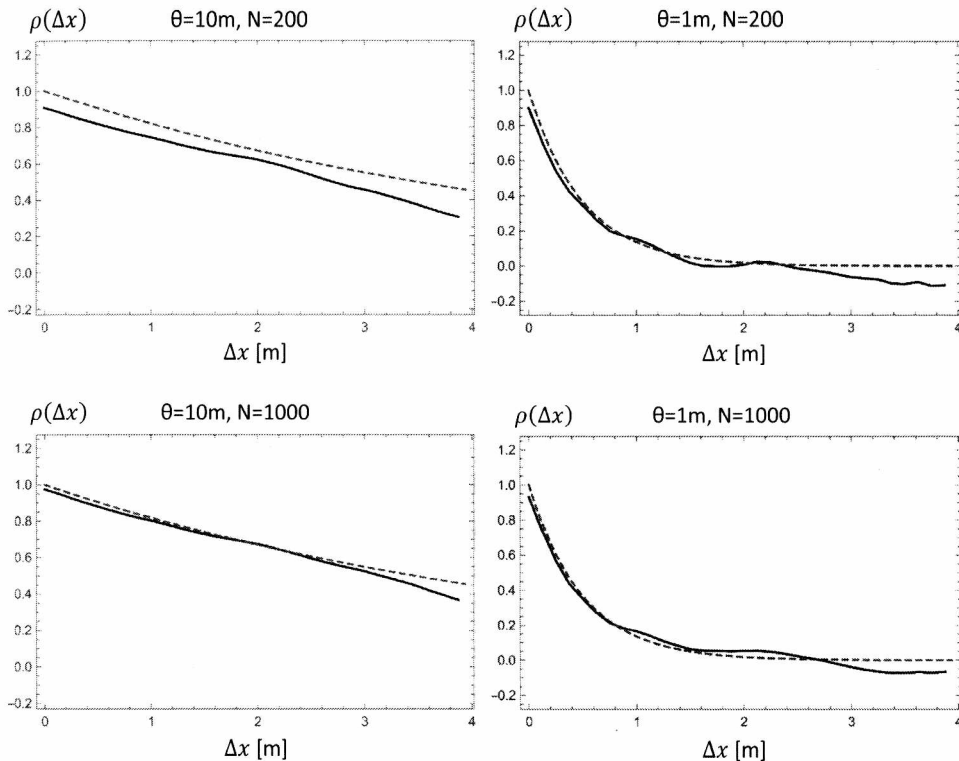
Wzór (2.164) określający współczynnik c^{i+1} modyfikuje się analogicznie.

Do tej pory przyjęte było założenie, że pole X jest stacjonarnym polem gausowskim o wartości zerowej wartości oczekiwanej. Jednak modyfikacja algorytmu dla różnej od zera wartości oczekiwanej $\mu_X \neq 0$ nie nastręcza trudności. Wystarczy bowiem na końcu algorytmu dokonać następującej modyfikacji:

$$K_j^i = Z_j^i + \mu_X. \quad (2.166)$$

2.10.2. Testowanie algorytmu LAS

W celu dalszych zastosowań w pracy Kawy, Puły i Suski (2016) stworzona została implementacja algorytmu LAS (według sformułowania podanego w punkcie 2.10.1) w środowisku *Mathematica*. W procesie symulacyjnym badano zgodność wartości średniej, wariancji oraz funkcji kowariancji z teoretycznie założonymi. Wartość średnia i wariancja wykazywały dobrą zgodność, nawet przy stosunkowo niewielkiej liczbie realizacji (ok. 50). W przypadku funkcji kowariancji, która w tym zadaniu ma postać (2.154), do uzyskania akceptowalnej zgodności z „teoretyczną” potrzebna była znacznie większa liczba realizacji, co pokazano na rysunku 2.7. Porównania dokonano dla dwóch wartości skali fluktuacji w polu X , $\theta_X = 1$ m oraz $\theta_X = 10$ m (widoczna jest istotna różnica pomiędzy oboma „teoretycznymi wykresami”). W przypadku wyników generowanych według algorytmu LAS wartość kowariancji w każdym punkcie Δx jest średnią uzyskaną z N realizacji w procesie symulacyjnym. Rysunek 2.7 pokazuje, że do odtworzenia zakładanej funkcji korelacji ρ_X przez symulację algorytmem LAS potrzebna jest dużo większa liczba realizacji niż do odtworzenia pierwszych dwóch mo-



Rys. 2.7. Porównanie wykresów funkcji kowariancji „teoretycznych” (linia przerywana) z „wygenerowanymi” i uśrednionymi względem liczby realizacji N . Rysunki po lewej stronie uzyskano dla skali fluktuacji $\theta_x = 10$ m, zaś te po prawej stronie uzyskano dla skali fluktuacji $\theta_x = 1$ m (Kawa, Puła i Suska, 2016)

mentów statystycznych. Przy liczbie realizacji $N = 200$ odtworzenie funkcji kowariancji nie jest jeszcze dostateczne. Dużo lepsze odtworzenie, dla obu testowanych wartości skali fluktuacji, uzyskano przy $N = 1000$.

2.10.3. Generowanie pola wektorowego o współrzędnych skorelowanych

W przypadku generowania pól wektorowych $(X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x}), \dots, X_m(\mathbf{x}))$ ważnym elementem jest zachowanie struktury korelacyjnej pomiędzy poszczególnymi komponentami $X_i(\mathbf{x}), i = 1, 2, \dots, m$. W dalszej części monografii taka sytuacja będzie miała miejsce w rozdziale 5. Ograniczymy się tu do najprostszej sytuacji, a mianowicie takiej, gdzie poszczególne współczynniki korelacji pomiędzy polami $\rho_{ij}(X_i(\mathbf{x}), X_j(\mathbf{x})), i, j = 1, \dots, m$ nie zależą od wektora położenia \mathbf{x} (są stałe dla każdych dwóch komponentów). Przyjmijmy też, że wszystkie komponenty

wektora są stacjonarnymi polami gaussowskimi o wartościach oczekiwanych μ_{X_i} i wariancjach $\sigma_{X_i}^2$, $i = 1, 2, \dots, m$. Poniżej przedstawiony jest prosty algorytm polegający na dekompozycji macierzy kowariancji. Dla uproszczenia zapisów zakładamy tu, że wektorowe pole składa się z dwóch komponentów. Uogólnienie procedury na większą liczbę wymiarów nie nastręcza istotnych trudności. Poszczególne kroki algorytmu są następujące:

1. Na podstawie analizy statystycznej ustalić wartość współczynnika korelacji $\rho_{12} = \rho(X_1(\mathbf{x}), X_2(\mathbf{x})) = \rho(X_2(\mathbf{x}), X_1(\mathbf{x})) = \rho_{21}$.

2. Macierz korelacji pomiędzy polami $X_1(\mathbf{x})$ oraz $X_2(\mathbf{x})$ ma postać

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{21} \\ \rho_{21} & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.167)$$

3. Dokonać rozkładu Choleskiego (Horn i Johnson, 1985) macierzy \mathbf{C} , tzn. znaleźć dolnotrójkątną macierz \mathbf{L} , taką że $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{C}$. Macierz \mathbf{L} bywa czasem nazywana pierwiastkiem kwadratowym macierzy \mathbf{C} . Rozkład ten jest możliwy dzięki dodatniej określoności macierzy \mathbf{C} .

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix}. \quad (2.168)$$

4. Wygenerować dwa niezależne standardowe gaussowskie pola losowe o zadanej strukturze korelacyjnej względem wektora położenia \mathbf{x} : pole $G_{\rho_1}^1(\mathbf{x})$ – odpowiadające pierwszej współrzędnej rozpatrywanego pola wektorowego oraz pole $G_{\rho_2}^2(\mathbf{x})$ – odpowiadające drugiej współrzędnej tegoż pola.

5. Dla każdego punktu \mathbf{x} znajduje się wektor

$$\begin{bmatrix} \tilde{G}_{\rho_1}^1(\mathbf{x}) \\ \tilde{G}_{\rho_2}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_{11} & 0 \\ L_{12} & L_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{\rho_1}^1(\mathbf{x}) \\ G_{\rho_2}^2(\mathbf{x}) \end{bmatrix}, \quad (2.169)$$

w każdym punkcie \mathbf{x} zmienne losowe $\tilde{G}_{\rho_1}^1(\mathbf{x})$ oraz $\tilde{G}_{\rho_2}^2(\mathbf{x})$ są skorelowane ze współczynnikiem ρ_{12} .

6. W każdym punkcie \mathbf{x} dokonuje się transformacji zmiennych losowych według schematu

$$X_i(\mathbf{x}) = \mu_{X_i} + \sigma_{X_i} \tilde{G}_{\rho_i}^i(\mathbf{x}), \quad i = 1, 2. \quad (2.170)$$

W wyniku transformacji 6 otrzymuje się wektorowe pole losowe o żądanych charakterystykach.

3. Probabilistyczne modelowanie właściwości gruntów

Rozdział ten poświęcony jest kilku najważniejszym zagadnieniom dotyczącym probabilistycznego modelowania właściwości gruntów. Aby takie modelowanie było użyteczne z punktu widzenia oceny bezpieczeństwa konstrukcji współpracującej z gruntem, musi opierać się na rzetelnej i wiarogodnej analizie statystycznej. Najprostszymi informacjami tego typu są charakterystyki momentowe zmienności losowej, a więc wartość średnia, odchylenie standardowe i momenty wyższych rzędów. Ponieważ w zadanym punkcie obszaru pole losowe redukuje się do zmiennej losowej (wektora losowego), bardzo istotną charakterystyką jest także rozkład prawdopodobieństwa. Z tych też powodów w rozdziale zamieszczono stosunkowo obszerny przegląd opisu właściwości podłoża za pomocą zmiennych losowych.

3.1. Modelowanie za pomocą zmiennych losowych

Znakomita większość modeli stosowanych w geomechanice i geoinżynierii to modele deterministyczne, co oznacza, że w ich matematycznym opisie nie pojawiają się żadne funkcje losowe. Z drugiej jednak strony, jak już wspomniano w rozdziale 1, podłoże, w warstwach współpracujących z konstrukcją, charakteryzuje się bardzo dużą niejednorodnością i zmiennością przestrzenną. Niejednorodność ta wynika zarówno z różnorodności procesów geologicznych zachodzących w przeszłości, jak i bardzo różnych warunków sedymentacji i konsolidacji warstw wierzchnich (Wiłun, 2013), a także ze zmienności przestrzennej właściwości gruntów. Poszczególne cząstki gruntu, tworzące jego szkielet, są rozmieszczone w sposób całkowicie przypadkowy, mają przypadkowe rozmiary oraz kształty. Jeśli jeszcze weźmie się pod uwagę przypadkowy udział fazy gazowej pomiędzy cząstkami, to w naturalny sposób dochodzi się do

losowego – probabilistycznego – modelowania cech fizycznych i mechanicznych podłoża (Biernatowski, 1982; Puła, 1984; Przewłócki, 2006). W zagadnieniach niezawodności oraz zagadnieniach analizy ryzyka do stosowanych w obliczeniach modeli deterministycznych wprowadza się metody rachunku prawdopodobieństwa. Najczęściej odbywa się to poprzez tzw. „randomizację”, czyli przyjęcie, że pewne parametry podłoża, fundamentu czy też oddziaływań nie są stałe, lecz podlegają losowym fluktuacjom. Najprostszym sposobem probabilistycznego opisu zmienności losowej parametrów podłoża jest założenie, że każdy z tych parametrów jest pewną zmienną losową o zadanym rozkładzie prawdopodobieństwa.

3.1.1. Rozkłady prawdopodobieństwa i współczynniki zmienności najczęściej stosowane w opisie parametrów podłoża

Badania dotyczące określania opisu cech podłoża za pomocą zmiennych losowych prowadzone są już od ponad pół wieku. Najistotniejsze prace powstały już dosyć dawno, lecz ich rezultaty są do dziś uwzględniane, i to one dominują w poniżej przedstawionym przeglądzie. Za pionierską pracę w dziedzinie probabilistycznego opisu parametrów podłoża uważana jest praca Lumba (1966), której autor weryfikował za pomocą testu chi-kwadrat hipotezy dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa wielu podstawowych cech gruntu. Przedmiotem badań Lumba były specyficzne grunty z okolic Hongkongu – ilt morski, aluwialny ilt piaszczysty, piasek pylasty oraz pył ilasty. Własnościom gruntów przypisywano (i testowano) przede wszystkim rozkład normalny, ale też log-normalny. Istotną zaletą przeprowadzonych badań były znaczne liczebności prób (od 30 do 120), co istotnie podnosi jakość opracowania statystycznego. Zagadnieniu badania statystycznej zmienności własności gruntu poświęconych jest także kilka kolejnych prac Lumba (Lumb, 1970, 1971, 1974, 1975; Lumb i Holt, 1968). Spośród innych badań nad opisem cech podłoża w postaci zmiennych losowych, wnoszących najwięcej do stanu wiedzy, należy wymienić badania Schultzego (1971 i 1975) oraz Corotisa, Azzousa i Krizka (1975). Ci ostatni autorzy przeprowadzili badania dla dużej liczby próbek podzielonych na trzy grupy w zależności od gęstości objętościowej szkieletu gruntowego. Parametry statystyczne podano dla każdej z grup z osobna oraz dla wszystkich próbek łącznie. W tabeli 3.1 przytoczono rezultaty uzyskane przez tych autorów. Analizowane tu cechy gruntu wykazały, że ich własności statystyczne w istotny sposób zależą

od ciężaru szkieletu, a więc i od rodzaju gruntu. Widoczne są także duże wartości współczynników zmienności poszczególnych cech, przy czym najmniejsze otrzymano dla ciężaru szkieletu. Wyniki wydają się być miarodajne ze względu na duże liczebności prób. Rozkłady prawdopodobieństwa właściwości gruntów proponowane przez różnych autorów zestawiono w tabeli 3.2 (wraz z odniesieniami do poszczególnych prac). W tabeli 3.2 pojawia się pięć rozkładów prawdopodobieństwa. Gęstości trzech z tych rozkładów – normalnego i log-normalnego oraz rozkładu o nośniku ograniczonym otrzymanym z rozkładu normalnego przez transformację typu tangens hiperboliczny – były już omawiane w podrozdziale 2.6. Natomiast gęstości dwóch pozostałych, tj. rozkładu jednostajnego i rozkładu beta, wraz z ich dwoma pierwszymi momentami, podano w tabeli 3.3. Niektórzy badacze (Kulhawy i in., 1991; Cherubini, 1992) zwracają uwagę na fakt, że w przypadku parametrów wytrzymałościowych gruntu należałoby wprowadzić zróżnicowanie współczynników zmienności w zależności od wartości średnich tych parametrów. Sugestie tych autorów podano w tabeli 3.4.

Tabela 3.1. Parametry statystyczne cech gruntowych z badań Corotiza, Azzousa i Krizka (1975). Poszczególne symbole w pierwszej i drugiej kolumnie oznaczają: ρ_d – gęstość objętościową szkieletu gruntowego, w_L – granica płynności, w_p – granica plastyczności, I_p – wskaźnik plastyczności, w – wilgotność, e – wskaźnik porowatości, f_i – zawartość frakcji ilowej, c_c – wskaźnik skonsolidowania, c_v – współczynnik konsolidacji, P_c – ciśnienie pęcznienia

Populacja	Cecha gruntu	Liczebność próby	Wartość średnia	Wartość minim.	Wartość maksym.	Mediana	Odchyl. stand.	Współcz. zmienn.
$\rho_d < 1,5$ [t(m) ⁻³]	w_L [%]	225	54	27	98	53	15	0,28
	w_p [%]	225	26	15	62	25	7	0,27
	I_p [%]	225	27	10	60	27	11	0,40
	w [%]	241	39	9	108	36	13	0,34
	ρ_d [t(m) ⁻³]	239	1,29	0,69	1,49	1,34	0,17	0,13
	e	243	1,105	0,579	2,12	1,02	0,29	0,262
	f_i [%]	198	34	1	100	32	21	0,63
	c_c	241	0,33	0,07	0,98	0,28	0,17	0,52
	c_v [cm ² s ⁻¹]	158	0,00162	0,0001	0,008	0,004	0,00154	0,95
P_c [kPa]	238	198	19,6	716	157	136	0,69	
$1,5 < \rho_d < 1,75$ [t(m) ⁻³]	w_L [%]	299	39	20	73	35	11	0,28
	w_p [%]	299	19	8	41	18	4	0,27
	I_p [%]	299	20	4	48	17	9	0,45
	w [%]	315	22	8	48	25	5	0,20
	ρ_d [t(m) ⁻³]	315	1,62	1,5	1,74	1,69	0,07	0,05
	e	315	0,658	0,427	1,18	0,723	0,095	0,14
	f_i [%]	244	24	2	80	22	16	0,68
	c_c	314	0,16	0,01	0,43	0,19	0,06	0,39
	c_v [cm ² s ⁻¹]	152	0,00111	0,001	0,008	0,009	0,00129	1,16
	P_c [kPa]	306	246	24,5	942	294	156	0,64

Tabela 3.1 cd. Parametry statystyczne cech gruntowych z badań Corotiza, Azzousa i Krizka (1975). Poszczególne symbole w pierwszej i drugiej kolumnie oznaczają: ρ_d – gęstość objętościową szkieletu gruntowego, w_L – granica płynności, w_p – granica plastyczności, I_p – wskaźnik plastyczności, w – wilgotność, e – wskaźnik porowatości, f_i – zawartość frakcji iłowej, c_c – wskaźnik skonsolidowania, c_v – współczynnik konsolidacji, P_c – ciśnienie pęcznienia

Populacja	Cecha gruntu	Liczebność próby	Wartość średnia	Wartość minim.	Wartość maksym.	Mediana	Odchyl. stand.	Współcz. zmienn.
$\rho_d > 1,75$ [t(m) ⁻³]	w_L [%]	154	33	18	60	30	8	0,23
	w_p [%]	154	17	11	24	16	2	0,13
	I_p [%]	154	16	4	36	13	7	0,42
	w [%]	165	16	5	28	16	3	0,22
	ρ_d [t(m) ⁻³]	165	1,86	1,75	2,12	1,83	0,09	0,05
	e	165	0,453	0,276	0,78	0,462	0,076	0,17
	f_i [%]	114	19	2	55	17	12	0,63
	c_c	165	0,09	0,01	0,18	0,08	0,04	0,47
	c_v [cm ² s ⁻¹]	96	0,00232	0,001	0,008	0,002	0,00151	0,65
	P_c [kPa]	163	260	29,4	638	245	1,19	0,46
Wszystkie próbki razem	w_L [%]	678	43	18	98	40	15	0,34
	w_p [%]	678	21	8	62	20	6	0,29
	I_p [%]	678	22	4	60	20	10	0,48
	w [%]	711	26	5	108	23	12	0,47
	ρ_d [t(m) ⁻³]	719	1,57	0,69	2,12	1,6	0,24	0,15
	e	723	0,762	0,276	2,12	0,68	0,316	0,415
	f_i [%]	556	26	1	100	24	18	0,70
	c_c	720	0,2	0,01	0,98	0,16	0,14	0,73
	c_v [cm ² s ⁻¹]	406	0,002	0,0001	0,008	0,001	0,0015	0,75
	P_c [kPa]	707	233	19,6	942	196	143	0,62

Tabela 3.2. Wartości współczynników zmienności oraz rozkłady prawdopodobieństwa niektórych parametrów gruntu zbadane lub proponowane przez różnych autorów

Parametr gruntu	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Kąt tarcia wewnętrznego w gruntach niespoistych	0,05 ÷ 0,15	Singh (1972), Holtz i Krizek (1972), Schultze (1972, 1975), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy (1992), Cherubini i in. (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996)	Normalny Log-normalny O gęstości (2.71)	Lumb (1966) Wu i Kraft (1967), Schultze (1972, 1975), Biernatowski (1966a), McAnally (1983), Pieczyńska i in. (2011), Puła i Zaskórski (2015)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego w gruntach niespoistych	0,07 ÷ 0,15	Lumb (1966), Schultze (1972, 1975), Alonso (1976), McAnally (1983), Kulhawy i in. (1991)	Normalny Log-normalny	Lumb (1966) Schultze (1972, 1975)

Tabela 3.2 cd. Wartości współczynników zmienności oraz rozkłady prawdopodobieństwa niektórych parametrów gruntu zbadane lub proponowane przez różnych autorów

Parametr gruntu	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Porowatość	0,08 ÷ 0,19	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972)
Wskaźnik porowatości	0,13 ÷ 0,29	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972), Corotis i in. (1975)
Kąt tarcia wewnętrznego w gruntach spoistych	0,1 ÷ 0,56	Schultze (1972, 1975), Singh (1972), Biernatowski (1981), Bagheri i Magnan (1983), Kulhawy (1992), Cherubini i in. (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996).	Normalny Beta Log-normalny O gęstości (2.71)	Lumb (1966, 1970), Lumb (1970), Biernatowski (1966a, 1972), Wu i Kraft (1967), Fenton i Griffiths (2003, 2008), Pieczyńska-Kozłowska (2015)
Tangens kąta tarcia wewnętrznego w gruntach spoistych	0,15	Lumb (1966),	Normalny Beta Log-normalny Jednostajny	Lumb (1966, 1970), Lumb (1970), Oboni i Bourdeau (1983), Biernatowski (1966a), Förster i Weber (1982)
Wilgotność naturalna	0,13 ÷ 0,47	Schultze (1972), Corotis i in. (1975), Kulhawy (1992), Phoon et al (1993).	Normalny Log-normalny	Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975)
Spójność	0,05 ÷ 0,85	Lumb (1966), Biernatowski (1966), Fredlund i Dahlman (1972), Grolimund i Recordon (1972), Schultze (1975), Alonso (1976), Bagheri i Magnan (1983), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Kulhawy i in. (1991), Kulhawy (1992), Cherubini i in. (1993), Meyerhof (1993, 1995), Becker (1996)	Normalny Log-normalny Beta Jednostajny	Lumb (1966), Biernatowski (1966a, 1972), Wu i Kraft (1967), Vessia i in. (2009), Lumb (1970), Oboni i Bourdeau (1983), Förster i Weber (1982)
Granica płynności	0,22 ÷ 0,34	Schultze (1972), Corotis i in. (1975), Kulhawy (1992), Phoon i in. (1993)	Normalny Log-normalny Beta	Lumb (1966), Schultze (1972), Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975).
Granica plastyczności	0,13 ÷ 0,29	Schultze (1972), Corotis i in. (1975), Kulhawy (1992), Phoon i in. (1993)	Normalny Log-normalny	Lumb (1966), Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975)
Wskaźnik skonsolidowania	0,17 ÷ 0,73	Corotis i in. (1975), Lumb (1966), Kulhawy (1992), Cherubini i in. (1993), Meyerhof (1993, 1995),	Normalny Log-normalny Beta	Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975), Corotis i in. (1975)

Tabela 3.2 cd. Wartości współczynników zmienności oraz rozkłady prawdopodobieństwa niektórych parametrów gruntu zbadane lub proponowane przez różnych autorów

Parametr gruntu	Współczynnik zmienności	Źródło literaturowe	Rozkład prawdopodobieństwa	Źródło literaturowe
Ciężar objętościowy	0,01 ÷ 0,16	Corotis i in. (1975), Evangelista i in. (1975), Ingles (1980), Biernatowski (1981), Baghery i Magnan (1983), Kulhawy (1992), Cherubini i in. (1993), Przewłócki (1998)	Normalny Beta Log-normalny	Evangelista i in. (1975), McAnally (1983), Schultze (1972), Baghery i Magnan (1983), Evangelista i in. (1975), Baghery i Magnan (1983), Biernatowski (1966b), Evangelista i in. (1975)
Ciężar właściwy szkieletu	0,01	Schultze (1972)	Normalny	Schultze (1972)
Moduł Younga	0,04 ÷ 0,5	Schultze (1972), Meyerhof (1993, 1995).		
Współczynnik Poissona	0,15	Cherubini (1998)		
Edometryczny moduł ścisłości	0,2 ÷ 0,4	Meyerhof (1993, 1995), Przewłócki (1998)		

Cytowane badania pokazują, że współczynniki zmienności poszczególnych parametrów podłoża mogą osiągać bardzo duże wartości, co może rzutować na niskie wartości wskaźników niezawodności dla konstrukcji współpracujących z gruntem (o miarach niezawodności będzie mowa w podrozdziale 4.4). Z drugiej strony trzeba pamiętać o tym, że na uzyskiwane wartości współczynników zmienności ma bardzo duży wpływ wielkość obszaru, z którego pobierane są próby. Nawet w podłożu, które można uznać za jednorodną warstwę gruntową, obserwuje się zmiany własności parametrów, zwłaszcza ze wzrostem głębokości. Przewłócki (1998) wskazuje na tendencję do wzrostu wariancji w sytuacji, gdy poszczególne próby pobrane są w znacznym oddaleniu od siebie. Przypisanie poszczególnym parametrom podłoża określonych rozkładów prawdopodobieństwa jest zadaniem wymagającym pobrania bardzo znacznej liczby prób gruntu, co w zagadnieniach praktycznych na ogół nie jest możliwe. Nie jest

także możliwe wyznaczenie takiego rozkładu w wyniku zastosowania określonego modelu podłoża. Jak wynika z zestawienia zaprezentowanego w tabeli 3.2, propozycje badaczy skupiają się zaledwie wokół kilku rozkładów, przy czym stosowanie rozkładu normalnego wynika głównie z jego „dobrych własności statystycznych” i łatwości prowadzenia obliczeń. Często przytaczany argument, że o uprzywilejowanej roli rozkładu normalnego stanowi centralne twierdzenie graniczne (por. np. Feller, 2008), nie wydaje się właściwy, gdyż poszczególne cechy materiałowe mogą wskazywać nawet znaczne rozbieżności z rozkładem normalnym. Dla parametrów podłoża, w sytuacji gdy charakteryzują się one znacznymi współczynnikami zmienności, stosowanie rozkładu normalnego może okazać się niewłaściwe ze względu na możliwość przyjmowania wartości ujemnych. Na negatywne konsekwencje związane z bezpieczeństwem skarp w przypadku stosowania rozkładu normalnego do charakteryzowania wytrzymałości gruntów zwałowych wskazano w pracy Puły i Traczyka (1988). Zdaniem Schneidera (2011) akceptowanie rozkładu normalnego dla określonej właściwości gruntu jest możliwe tylko wówczas, gdy współczynnik zmienności tej właściwości jest mniejszy niż 0,3. W przypadku większych współczynników zmienności lepiej jest przyjąć rozkład log-normalny. Z tego punktu widzenia właściwsze wydają się rozkłady skoncentrowane na półprostej dodatniej, jak rozkład log-normalny, lub rozkłady o nośnikach ograniczonych. Te właśnie będą stosowane w dalszych rozdziałach niniejszej monografii.

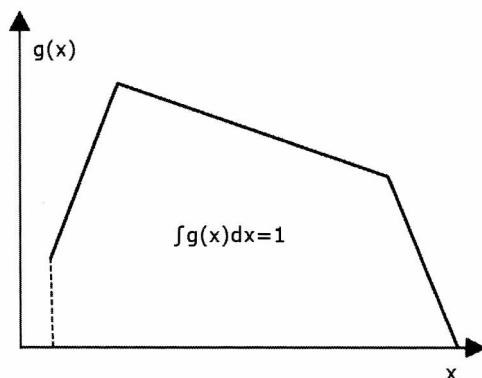
Tabela 3.3. Rozkłady prawdopodobieństwa: jednostajny i beta oraz ich parametry

Nazwa rozkładu	Funkcja gęstości prawdopodobieństwa	Zależność momentów od parametrów rozkładu	
		Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe
Jednostajny (równomierny, prostokątny)	$f(x) = \frac{1}{b-a}$ $a \leq x \leq b; \quad a < b$	$E\{X\} = \frac{a+b}{2}$	$\text{VAR}\{X\} = \frac{(b-a)^2}{12}$
Beta	$\frac{\left(\frac{x-a}{b-a}\right)^{r-1} \left(1 - \frac{x-a}{b-a}\right)^{t-1}}{(b-a)B(r,t)}$ <p>$B(r, t)$ jest funkcją beta (całką Eulera I rodzaju, Leja 2018)</p> $a \leq x \leq b; \quad a < b; \quad r > 0; \quad t > 0$	$E\{X\} =$ $= a + (b-a) \frac{r}{r+t}$	$\text{VAR}\{X\} =$ $= (b-a)^2 \left[\frac{rt}{(r+t)^2 (r+t+1)} \right]$

Tabela 3.4. Współczynniki zmienności kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności wg Kulhawego, Rotha i Grigoriu (1991) oraz Cherubiniego (1992)

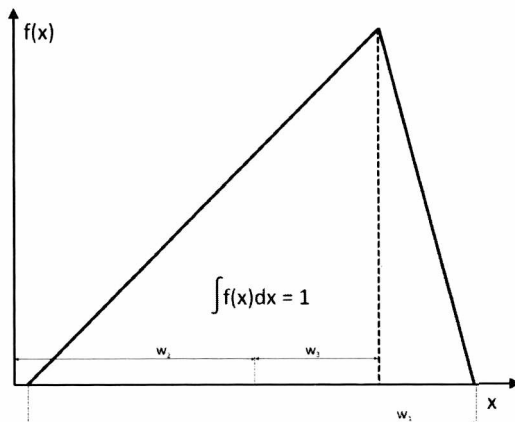
Parametr podłoża	Wartość średnia	Współczynnik zmienności
Spójność	< 50 kPa	0,26 ÷ 0,82
	50 ÷ 150 kPa	0,19 ÷ 0,66
	150 ÷ 300 kPa	0,19 ÷ 0,53
	> 300 kPa	0,13 ÷ 0,41
Kąt tarcia wewnętrznego	< 30°	0,03 ÷ 0,15
	30 ÷ 40°	0,10 ÷ 0,22

Autor niniejszej monografii zaproponował stosowanie tzw. rozkładów wielokątnych (Puła, 1984; Puła, 1987), tj. takich, których funkcja gęstości prawdopodobieństwa ma wykres o kształcie łamanej (zwyczajnej). Przykładowy wykres takiej funkcji gęstości pokazano na rysunku 3.1.



Rys. 3.1. Przykład funkcji gęstości wielokątnego rozkładu prawdopodobieństwa

Rozkłady tego typu nadają się do opisu losowej zmienności parametrów podłoża o ograniczonych zakresach zmienności, a ponadto okazały się bardzo przydatne w obliczeniach symulacyjnych, ze względu na efektywne generatory liczb pseudolosowych (zaproponowane przez autora, 1984) uzyskiwane metodą odwracania dystrybuanty (Rubinstein i Kroese, 2011). Rozkłady te zastosowano w pracy Biernatowskiego i Puły (1988) do analizy niezawodności przyczółków mostowych, a także w pracy Puły i Traczyka (1988) do opisu wytrzymałości gruntów zwałowych. Typowym, a zarazem szczególnie prostym w estymacji i zastosowaniach reprezentantem tej rodziny rozkładów jest rozkład trójkątny, którego wykres gęstości prawdopodobieństwa pokazano na rysunku 3.2 (wzór na gęstość prawdopodobieństwa otrzymuje się przez napisanie równań ramion trójkąta).



Rys. 3.2. Gęstość trójkątnego rozkładu prawdopodobieństwa i jego parametry: w_1 – długość podstawy, w_2 – odcięta środka podstawy, w_3 – różnica pomiędzy odcięcą wierzchołka a odcięcą środka podstawy (kolejność odjemnej i odjemnika jest istotna)

Relację pomiędzy momentami centralnymi tego rozkładu a jego parametrami (w postaci podanej na rysunku) opisują następujące wzory:

$$E[X] = \frac{1}{3}w_3 + w_2, \quad (3.1)$$

$$\text{VAR}[X] = \frac{w_3^2}{18} + \frac{w_1^2}{24}, \quad (3.2)$$

$$E[(X - E[X])^3] = \frac{w_3^3}{135} - \frac{w_3w_1^2}{60}. \quad (3.3)$$

Relacje te mogą służyć do estymacji rozkładu empirycznego metodą momentów (Benjamin i Cornell, 1977). Szczególnie prosty przypadek stanowi symetryczny rozkład trójkątny, dla którego $w_3 = 0$, a pozostałe dwa parametry otrzymuje się z pary równań (3.1) i (3.2). Analizy przeprowadzone przez autora (Puła, 1984, 1987; Biernatowski i Puła, 1984) pokazały jednak, że lepszym sposobem estymacji rozkładu aniżeli metoda momentów, zwłaszcza gdy dysponuje się próbą o znacznej liczebności, jest dopasowanie dystrybuanty rozkładu wielokątnego do dystrybuanty empirycznej (uzyskanej z próby) metodą najmniejszych kwadratów. We wzmiankowanych pracach pokazano przykłady estymacji rozkładów empirycznych otrzymanych w wyniku badania laboratoryjnego prób gruntu rozkładami wielokątnymi dla parametrów wytrzymałościowych podłoża (kąta tarcia wewnętrznego i spójność) oraz ciężaru objętościowego.

Najprostszy przypadek rozkładu wielokątnego stanowi rozkład jednostajny (równomierny, prostokątny – por. tabela 3.3), dla którego wykresem funkcji gęstości jest odcinek równoległy do osi odciętych. Taki rozkład nadaje się do opisu zmienności, gdy można uznać, że wartość danego parametru może pojawić się w każdym miejscu pewnego przedziału z jednakowym prawdopodobieństwem (Förster i Weber, 1982).

Uogólnienie przedstawionej wyżej koncepcji, pod nazwą rozkładów kawałkami liniowych (*piecewise linear distributions*), oraz ich zastosowanie do wyznaczania związanych z geotechniką miar niezawodności sformułowali Sofianos i współautorzy (2014).

W zastosowaniach do obliczeń niezawodności użyteczne są też tzw. złożone rozkłady prawdopodobieństwa, tj. takie, w których co najmniej jeden z parametrów rozkładu jest zmienną losową. Dla przykładu wartość średnią położenia zwierciadła wody gruntowej pod fundamentem można uznać za losowo zmienną. Jeśli więc położenie było przyjęte jako zmienna losowa, to mamy do czynienia jakby z podwójną zmiennością losową. Rozkłady złożone są dobrze opisane w literaturze probabilistycznej (np. Benjamin i Cornell, 1977). Przykładowo, jeżeli X jest zmienną losową o dystrybuancie $F_X(x)$, która zależy od parametru η , czyli ma postać $F_X(x; \eta)$, a parametr η jest zmienną losową o gęstości prawdopodobieństwa $f_\eta(\eta)$, to dystrybuanta powstałej w ten sposób nowej zmiennej losowej Y ma postać

$$F_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} F_X(y, \eta) f_\eta(\eta) d\eta. \quad (3.4)$$

Jeśli natomiast $\mu_X^{(n)}(\theta)$ oznacza n -ty moment statystyczny zmiennej X , to dla zmiennej Y otrzymuje się

$$E[Y^n] = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_X^{(n)}(\theta) f_\theta(\theta) d\theta. \quad (3.5)$$

3.1.2. Korelacja wzajemna pomiędzy parametrami podłoża

Parametry geotechniczne podłoża są na ogół ze sobą wzajemnie skorelowane. Niestety wiedza na ten temat jest uboga. Niedobór danych eksperymentalnych w tym zakresie wynika z faktu, że takie badania nie wchodzą do standardowego rozpoznania geotechnicznego. Informacja, dotycząca wzajemnej korelacji para-

metrów wytrzymałościowych podłoża gruntowego, w przypadku badania losowej nośności posadowienia bezpośredniego oraz określania niezawodności tego typu posadowienia metodami probabilistycznymi jest istotna. Jak bowiem pokazano w pracy autora (Puła, 2004), przy modelowaniu parametrów wytrzymałościowych przez zmienne losowe, przyjęcie ujemnej korelacji pomiędzy tymi parametrami prowadzi do większych wartości wskaźnika niezawodności, a założenie braku korelacji, czyli $\rho(\varphi, c) = 0$, obniża wartość wskaźnika niezawodności. Z drugiej strony przyjęcie ujemnej wartości $\rho(\varphi, c)$ musi być poparte rzetelną analizą statystyczną badań podłoża. Również w przypadku modelowania parametrów φ i c za pomocą pól losowych ujemna wartość współczynnika korelacji pomiędzy polami implikuje większą wartość wskaźnika niezawodności β (więcej informacji na temat wskaźnika niezawodności podanych zostanie w podrozdziale 4.4), co pokazano w pracy Vessii i współautorów (2009). Zatem znajomość wzajemnej korelacji (macierzy kowariancji wektora losowego) może okazać się istotna dla obliczeń wykonywanych w ramach teorii niezawodności. Zagadnienie wzajemnej korelacji parametrów było w przeszłości przedmiotem studiów kilku badaczy, np. Lumba (1966), Holza i Krizka (1972), Yücemena i Tanga (1972) oraz Thao (1984). Przykładowe oceny współczynników korelacji (liniowej) dla gliny, według badań Holza i Krizka (1972), pokazano w tabeli 3.5.

Tabela 3.5. Współczynniki korelacji wzajemnej wybranych właściwości gruntów. Poszczególne symbole – jak w tabeli 3.1, a ponadto: f_p – zawartość frakcji piaskowej, γ_s – ciężar właściwy szkieletu gruntowego, γ_d – ciężar objętościowy szkieletu gruntowego, w_{opt} – wilgotność optymalna, S_r – stopień wilgotności, c – spójność gruntu, φ – kąt tarcia wewnętrznego

Parametr	f_i	f_p	w_L	w_p	γ_s	w_{opt}	γ_d	S_r	c	φ
f_i	1,00	-0,84	0,13	-0,61	0,91	-0,58	0,73	-0,19	-0,13	0,44
f_p		1,00	-0,22	0,22	-0,62	0,31	-0,54	0,33	0,40	-0,55
w_L			1,00	0,57	-0,15	0,63	-0,51	-0,66	-0,13	-0,47
w_p				1,00	-0,85	0,93	-0,89	-0,38	-0,22	-0,41
γ_s					1,00	-0,83	0,90	0,02	0,07	0,39
w_{opt}						1,00	-0,96	-0,33	-0,13	-0,47
γ_d							1,00	0,21	0,00	0,58
S_r								1,00	0,67	0,13
c									1,00	-0,49
φ										1,00

Jak widać, Holz i Krizek zaobserwowali dość silną ujemną korelację pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi gruntu (parametrami φ i c). Fakt ten potwierdzają także inni badacze, np. Lumb (1966), Yücemen i Tang (1972),

Athanasiou-Grivas i Harrop-Wiliams (1979). Cherubini (2000) proponuje, aby w obliczeniach nośności posadowienia bezpośredniego uwzględniać ujemny współczynnik korelacji pomiędzy parametrami φ i c , rzędu od $-0,24$ do $-0,7$.

Aby uwzględnić w obliczeniach rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych cech podłoża oraz korelacje pomiędzy nimi, należy określić łączny rozkład prawdopodobieństwa tych cech. Lumb (1966) testował dwuwymiarowy rozkład normalny jako łączny rozkład wskaźnika plastyczności i granicy płynności. Za interesującą należy uznać propozycję Athanasiou-Grivasa i współautorów (Athanasiou-Grivas i Harr, 1979 oraz Athanasiou-Grivas i Harrop-Wiliams, 1979), którzy zasugerowali, aby jako łączny rozkład kąta tarcia wewnętrznego φ i spójności c przyjąć dwuwymiarowy rozkład Dirichleta, tj. rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_3)} x^{\alpha_1-1} y^{\alpha_2-1} (1-x-y)^{\alpha_3-1}, & x, y \geq 0, \quad 0 \leq x+y \leq 1, \\ 0 & \text{dla pozostałych,} \end{cases} \quad (3.6)$$

gdzie

$$x = \frac{c - c_{\min}}{c_{\max} - c_{\min}}; \quad y = \frac{\varphi - \varphi_{\min}}{\varphi_{\max} - \varphi_{\min}}, \quad (3.7)$$

przy czym c_{\max} , c_{\min} , φ_{\max} , φ_{\min} oznaczają maksymalne i minimalne wartości spójności i kąta tarcia wewnętrznego, odpowiednio; Γ jest funkcją gamma Eulera, zaś α_1 , α_2 , α_3 parametrami rozkładu. Parametry α_1 , α_2 , α_3 mogą być określone z relacji pomiędzy nimi a momentami statystycznymi (odpowiednie zależności można znaleźć w książce Wilksa (1962) oraz w pracach Athanasiou-Grivasa i Harrop-Wiliamsa (1979) lub Puły i Stilger-Szydło (1990)). Jest to o tyle interesująca propozycja, że rozkładami brzegowymi tego rozkładu są rozkłady beta, a więc rozkłady o nośnikach ograniczonych (skoncentrowanych na przedziałach $[c_{\min}, c_{\max}]$ oraz $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$), co koresponduje z ograniczonymi przedziałami zmienności tych parametrów (przede wszystkim z wąskim przedziałem zmienności kąta tarcia wewnętrznego φ , a także propozycjami kilku autorów odnośnie do rozkładów jednowymiarowych (por. tabela 3.2). Ponadto współczynnik korelacji rozkładów brzegowych dwuwymiarowego rozkładu Dirichleta jest równy

$$\rho_{c,\varphi} = \rho_{x,y} = -\sqrt{\frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_3)}} \quad (3.8)$$

i ma wartość ujemną, co jest zgodne z wcześniej podanymi uwagami na temat korelacji pomiędzy φ i c . Propozycja Athanasiou-Grivasa i współautorów została zastosowana w pracy autora i Stilger-Szydło (Puła i Stilger-Szydło, 1990) do probabilistycznej analizy kształtu uwarstwionej skarpy w stanie równowagi granicznej. W pracy tej w celu zastosowania techniki symulacji cyfrowej autorzy przedstawili po raz pierwszy oryginalny algorytm generowania liczb losowych o rozkładzie Dirichleta, skonstruowany z ciągu niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie gamma. Wadą rozkładu Dirichleta jest jednak to, że, jak to łatwo zauważyć we wzorze (3.6), jest on skoncentrowany na obszarze trójkątnym, co daje zerowe prawdopodobieństwo jednoczesnego otrzymania dużych wartości (bliskich wartościom maksymalnym) kąta tarcia wewnętrznego i spójności lub innych analizowanych parametrów podłoża.

W przypadku wektorów losowych o wymiarze większym niż dwa opis probabilistyczny na ogół mocno się komplikuje. Rzadko bowiem, zwłaszcza w geotechnice, dysponuje się tak liczną próbą, aby estymować rozkład wielowymiarowy. Znacznie częściej znane są jednowymiarowe rozkłady poszczególnych cech (rozkłady brzegowe) oraz współczynniki korelacji pomiędzy poszczególnymi cechami. Przyjęcie założenia, że rozkład łączny jest rozkładem normalnym, możliwe jest tylko wtedy, gdy poszczególne rozkłady brzegowe są normalne. W innych przypadkach określenie dokładne rozkładu łącznego można zastąpić zastosowaniem tzw. rozkładów Natafa (Nataf, 1962). Konstrukcja Natafa polega na utworzeniu wielowymiarowego rozkładu prawdopodobieństwa, tak aby miał on z góry zadane i określone rozkłady brzegowe oraz współczynniki korelacji pomiędzy nimi. Przypuśćmy, że X_1, X_2, \dots, X_n są zmiennymi losowymi o znanych dystrybuantach F_{X_i} oraz odpowiadających im gęstościach f_{X_i} , a współczynniki korelacji ρ_{ij} pomiędzy tymi zmiennymi są także znane. N -wymiarowy rozkład Natafa definiuje się jako rozkład o następującej funkcji gęstości:

$$f_N(x_1, x_2, x_n) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2) \dots f_{X_n}(x_n) \frac{\phi_n(y_1, y_2, \dots, y_n, \mathbf{R}')}{\phi_0(y_1) \phi_0(y_2) \dots \phi_0(y_n)}, \quad (3.9)$$

przy czym

$$y_i = \Phi_0^{-1}(F_{X_i}(x_i)), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.10)$$

jest transformacją układu współrzędnych, w której Φ_0^{-1} jest funkcją odwrotną do dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego (jednowymiarowego),

ϕ_0 jest gęstością standardowego jednowymiarowego rozkładu normalnego, a ϕ_n jest n -wymiarową gęstością rozkładu normalnego o średniej zero, jednostkowych wariancjach i macierzy korelacji \mathbf{R}' , której elementy ρ'_{ij} są zdefiniowane przez współczynniki korelacji ρ_{ij} według następującej zależności:

$$\begin{aligned} \rho_{ij} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - E[X_i]}{\sigma_i} \right) \left(\frac{x_j - E[X_j]}{\sigma_j} \right) f_{X_i}(x_i) f_{X_j}(x_j) \frac{\phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij})}{\phi_0(y_i) \phi_0(y_j)} dx_i dx_j = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{F_{X_i}^{-1}(\Phi_0(y_i)) - E[X_i]}{\sigma_i} \right) \left(\frac{F_{X_j}^{-1}(\Phi_0(y_j)) - E[X_j]}{\sigma_j} \right) \phi_2(y_i, y_j, \rho'_{ij}) dy_i dy_j. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Rozkład Natafa może być skonstruowany, o ile transformacja (3.10) jest wzajemnie jednoznaczna (wystarczy aby dystrybuanty F_{X_i} były ciągłe i ściśle rosnące) oraz o ile macierz \mathbf{R}' okaże się dodatnio określona. Pewną trudnością w zastosowaniu rozkładu Natafa jest konieczność rozwiązania równania (3.11) ze względu na ρ'_{ij} , co musi być zrobione na drodze numerycznej. Istnieje jednak możliwość zastosowania uproszczonych formuł przybliżonych do wyznaczenia ρ'_{ij} , na co wskazali Liu i Der Kiureghian (1986).

W monografii Johnsona i Kotza (1976) można znaleźć inne przykłady konstruowania rozkładów łącznych o zadanych rozkładach brzegowych, dotyczą one jednak tylko przypadków dwuwymiarowych.

Wyżej opisane zadanie, polegające na znalezieniu rozkładu wielowymiarowego, gdy zadane są jedynie rozkłady jednowymiarowe oraz współczynniki korelacji pomiędzy nimi, takiego aby jego rozkładami brzegowymi były właśnie te zadane rozkłady jednowymiarowe, stało się podstawą teorii tzw. *copulas* (autorowi nie jest znany polski odpowiednik tego terminu). Konstrukcja Natafa nie jest bowiem jednoznaczna i najczęściej istnieje wiele rozkładów spełniających postawiony wyżej warunek. Obszerne informacje na temat tej teorii można znaleźć w monografii Nelsena (2006). Teoria ta obecnie jest intensywnie rozwijana i stosowana w zagadnieniach niezawodności. Przykładem jest niedawno opublikowana praca Wanga i Li (2017) analizująca rozkłady typu *copulas* pod kątem zastosowania ich do konstrukcji tzw. powierzchni odpowiedzi (por. np. Bauer i Puła, 2000).

3.2. Modelowanie właściwości podłoża za pomocą pól losowych

3.2.1. Podstawowe założenia

W przypadku modelowania właściwości podłoża za pomocą pól losowych zakłada się, że dany parametr gruntu jest reprezentowany przez określone pole losowe. Tak więc każdemu punktowi rozpatrywanego obszaru przestrzeni (lub obszaru płaskiego, gdy przyjmowany jest płaski stan odkształcenia) przyporządkowana jest pojedyncza zmienna losowa. Pojawiająca się w ten sposób rodzina zmiennych losowych ma określoną strukturę korelacyjną. Pełna informacja probabilistyczna zadana jest wówczas, gdy znane są rozkłady skończone wymiarowe tak określonego pola losowego. Takie podejście jest oczywiście znacznie bardziej skomplikowane od modelowania pojedynczymi zmiennymi losowymi, jednak wiadomo, że o bezpieczeństwie fundamentów decydują najczęściej duże obszary gruntu współpracujące z tymi fundamentami, a to może oznaczać, że charakterystyka zmienności losowej danego parametru gruntu w całym obszarze za pomocą pojedynczej zmiennej losowej jest zbyt uboga.

Równocześnie wcześniej analizowane, a przedstawione w podrozdziale 3.1 informacje probabilistyczne, dotyczące współczynników zmienności poszczególnych cech, ich rozkładów prawdopodobieństwa oraz współczynników korelacji pomiędzy nimi, mogą być zaimplementowane do modelowania polami losowymi.

Zastosowanie metod z pochodzących z teorii funkcji losowych stosunkowo wcześniej pojawiło się w geologii złożowej, gdzie stanowiło wyjątkowo adekwatne, choć skomplikowane narzędzie do planowania eksploatacji złóż naturalnych. Wielkie znaczenie mają prace Krigego (np. Krige, 1951; Krige, 1962), który, w oparciu o teorię funkcji losowych, opracował metodę szacowania intensywności występowania eksploatowanego minerału w danym obszarze. Badania Krigego związane były z eksploatacją złota w Południowej Afryce, jednak opracowana przez niego metoda zwana krigingiem jest ciągle udoskonalana i stanowi jedno z ważniejszych narzędzi geostatystyki (Matheron, 1963), rozwijanej także w Polsce (np. w pracach Namysłowskiej-Wilczyńskiej, 1993). W Polsce za pionierskie w dziedzinie zastosowań teorii pól losowych w geologii należy uznać prace wrocławskiego matematyka Stefana Zubrzyckiego (1957), które powstały w związku z eksploatacją rud cynku na Górnym Śląsku. ¹

W geotechnice pierwsze prace stosujące aparat funkcji losowych powstały w połowie lat siedemdziesiątych. Do pionierskich należą tu prace Lumba (1974, 1975) czy Alonso i Krizka (1975). Ci ostatni autorzy badali zmienność parametrów podłoża z głębokością, dopasowując funkcję korelacji, zwanej dalej funkcją autokorelacji o postaci (2.34). Wybrane rezultaty z ich pracy przedstawiono w tabeli 3.6.

Tabela 3.6. Współczynniki a funkcji autokorelacji wybranych właściwości gliny pylastej miękkoplastycznej wg Alonso i Krizka (1975). Δz oznacza zmiany współrzędnej pionowej, zaś parametr a jest parametrem funkcji (2.34)

Własność	Parametr a	Współczynnik autokorelacji $\rho = \exp(-a \Delta z)$		
		$\Delta z = 1 \text{ m}$	$\Delta z = 2 \text{ m}$	$\Delta z = 3 \text{ m}$
Zawartość frakcji piaskowej	0,231	0,7937	0,6300	0,5001
Zawartość frakcji pylastej	0,310	0,7334	0,5379	0,3946
Ciężar objętościowy	0,253	0,7765	0,6029	0,4681
Wskaźnik porowatości	0,191	0,8261	0,6825	0,5638
Granica płynności	0,230	0,7945	0,6312	0,5016

Modelowanie cech podłoża za pomocą pól losowych stosował Alonso w kolejnej swojej pracy (Alonso, 1976) do probabilistycznej analizy stateczności zboczy. Późniejsze prace – Vanmarcke’a (1977a, 1977b) oraz Wildego (1977) – przyniosły istotny postęp w technikach obliczeniowych związanych z zastosowaniem teorii pól losowych. Z kolejnych prac opublikowanych w Polsce należy wymienić, ważną z punktu widzenia zastosowań, monografię Wildego (1981) poświęconą metodom dyskretyzacji pól losowych oraz pracę Brząkały (1981), w której badano własności funkcji korelacyjnych, mogących służyć do stochastycznego opisu parametrów podłoża wraz z doświadczalną identyfikacją parametrów tych funkcji. Pewne modele gruntoznawcze, modele wytrzymałości oraz modele gleboznawcze analizował Szczepankiewicz (1985). Kalibrowanie funkcji korelacyjnych poparte obszernymi badaniami doświadczalnymi przeprowadził Przewłocki (1998, 2000). Współczesne podejście do modelowania parametrów podłoża za pomocą pól losowych sformułowane zostało w pracy Rackwitza (2000) oraz w obszernej monografii Fentona i Griffithsa (2008). W obecnej chwili prac, w których stosowany jest aparat matematyczny teorii pól losowych, jest już bardzo dużo i ciągle pojawiają się nowe, np. Lei-Lei Liu i in. (2017), Te Xiao i in. (2018) oraz Ching i in. (2018).

Wróćmy teraz do wartości parametru a podanych w tabeli 3.6. Warto zwrócić uwagę na stosunkowo nieduże różnice pomiędzy wartościami tegoż parametru dla pięciu wskazanych własności gruntu. Można by postawić hipotezę, że funkcje autokorelacyjne badanych własności tego samego gruntu są jednakowe, zaś występujące różnice są konsekwencją błędów pomiarowych lub małej liczebności próby. Hipoteza o jednakowej funkcji autokorelacji różnych parametrów tej samej warstwy gruntowej (dla określonego regionu) jest obecnie powszechnie akceptowana i stosowana przez wielu badaczy (np. Cherubini, 2000b czy Rackwitz, 2000). Będzie też przyjmowana w badaniach przedstawionych w dalszych rozdziałach niniejszej monografii. Jak pokazano w rozdziale 2, istnieje wzajemnie jednoznaczna odpowiedniość pomiędzy parametrem a funkcji korelacji o postaci (2.34) a skalą fluktuacji (por. wzory (2.51)). Tak więc hipoteza o jednakowej funkcji autokorelacji różnych parametrów tej samej warstwy implikuje jednakową skalę fluktuacji dla wszystkich parametrów a danej warstwie. Aby uzasadnić tę hipotezę, autorzy często przywołują argumenty jednakowej natury geologicznej danej warstwy i jednakowych warunków jej powstawania. A więc to naturalne cechy podłoża powinny odpowiadać za stopień skorelowania przestrzennego właściwości, bez zróżnicowania na fizyczne i mechaniczne parametry, które są abstrakcyjnymi miarami służącymi opisowi gruntu i jego stanu.

W ten sposób dochodzimy do podstawowych założeń dotyczących pól losowych opisujących właściwości podłoża. Są to trzy podstawowe założenia, które są przyjmowane (czasem być może nie do końca świadomie) przez autorów w znakomitej większości prac z omawianej dziedziny.

Założenie 1. Stosowane do opisu (modelowania) właściwości gruntu pola losowe są stacjonarne w szerszym sensie (por. podrozdział 2.3). Jest to założenie upraszczające, które redukuje znacząco opis matematyczny. W polu niestacjonarnym bowiem funkcja kowariancji zawiera dwa razy więcej zmiennych niezależnych aniżeli odpowiednia funkcja w polu stacjonarnym (np. w polu określonym na obszarze trójwymiarowym funkcja kowariancji w polu niestacjonarnym jest funkcją sześciu zmiennych, zaś w przypadku pola stacjonarnego – tylko trzech zmiennych). Założenie to wydaje się być adekwatne dla jednorodnych warstw gruntowych. Czasami trudny jest do zaakceptowania warunek jednakowej średniej danego parametru w całej warstwie. Wówczas często okazuje się, że po odjęciu trendu zmian wartości średniej (tzw. detrendyzacja – por. podrozdział 3.3), otrzymane „fluktuacje wokół średniej” można uznać za stacjonarne. Ocenie tego służą specjalne testy stacjonarności (np. Page, 1954).

Założenie 2. Zakłada się, że stosowane pola są ergodyczne (punkt 2.9.2). Bez tego założenia rzetelna ocena wartości oczekiwanej oraz funkcji kowariancji na podstawie badań polowych nie byłaby możliwa, o czym wspomniano już w punkcie 2.2.2.

Założenie 3. Skala fluktuacji jest jednakowa dla wszystkich parametrów gruntu, o ile rozpatrywana jest jedna, choćby w przybliżeniu jednorodna, warstwa gruntu. Jeśli takich warstw jest więcej, to rozpatrywany parametr musi być modelowany przez dwa różne pola losowe – po jednym dla każdej warstwy. Założenie jednakowej skali fluktuacji zostało już omówione powyżej.

3.2.2. Metody określania skali fluktuacji

Zatem jednym z ważniejszych elementów przy modelowaniu właściwości gruntu za pomocą pól losowych jest poprawne określenie skali fluktuacji. Skala fluktuacji jest bowiem miarą szybkości zmienności pola losowego (por podrozdział 2.5), a jej wartość często interpretuje się jako przybliżoną odległość pomiędzy punktami pola, poza którą wzajemna korelacja właściwości staje się nieistotna. Poniżej omówione będą podstawowe metody służące wyznaczeniu tego parametru na podstawie badań gruntu.

Pierwsza z metod pochodzi od Vanmarcke'a (1977a), który zaproponował sposób badania skali fluktuacji na podstawie terenowych badań podłoża, na przykładzie badania oporu stożka sondy CPT. Korzystając ze wzorów (2.114) oraz (2.115) funkcję wariancji można w przybliżeniu zapisać w postaci

$$\gamma(\Delta L) \approx \frac{\theta_x}{\Delta L} \quad (3.12)$$

dla dostatecznie dużych ΔL (co najmniej $\Delta L > \theta_x$). Jak zaznaczono w punkcie 2.8.2, to proste, acz niezbyt dokładne oszacowanie może być stosowane, gdy funkcja korelacji w polu nie jest znana. Tok dalszego postępowania jest następujący:

1. Wartości danego parametru podłoża (mogą to być wartości oporu stożka sondy) są próbkowane w jednakowych odstępach ΔL_0 .
2. Oszacowane zostają wartość średnia i „punktowe” odchylenie standardowe σ z całości próby.
3. Sąsiednie wyniki są uśredniane parami i odpowiednie odchylenie standardowe uśrednienia wynosi $\sigma\sqrt{\gamma(2)}$.

4. Procedurę kontynuuje się dla $n = 3, 4, \dots, n$, wykonując wykres wartości $\sqrt{\gamma(n)}$ w funkcji n , co pokazano linią przerywaną na rysunku 3.3b.
5. Wraz ze wzrostem n wartości $\sqrt{\gamma(n)}$ zbliżają się do wartości teoretycznej, wynikającej z przybliżenia (3.12), przedstawionej za pomocą linii ciągłej na rysunku 3.3b, przy czym linia ciągła jest wykresem następującej zależności:

$$\sqrt{\gamma(\Delta L)} = \begin{cases} 1 & \text{dla } \Delta L \leq \theta_x, \\ \sqrt{\frac{\theta_x}{\Delta L}} & \text{dla } \Delta L > \theta_x, \end{cases} \quad (3.13)$$

przy czym $\Delta L = n\Delta L_0$. Zatem dla dużych wartości n powinna być w przybliżeniu spełniona równość

$$\sqrt{\gamma(n)} = \sqrt{\frac{\theta_x}{n\Delta L_0}}. \quad (3.14)$$

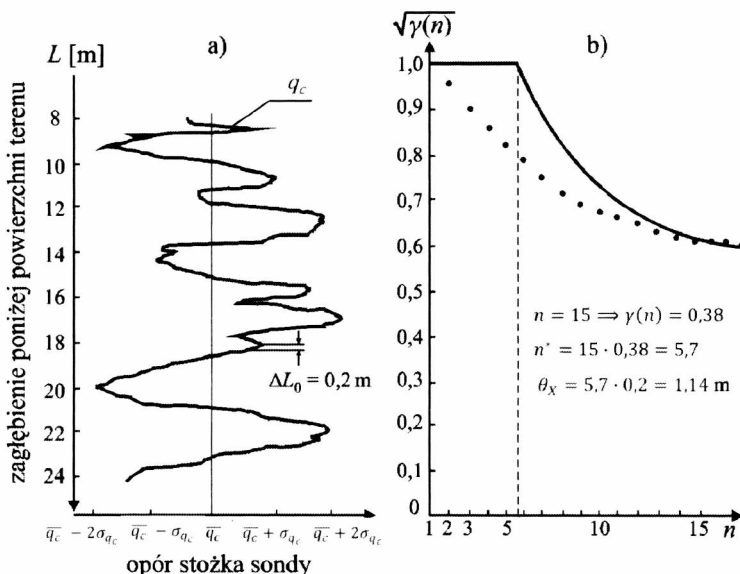
6. Ostatnim krokiem jest dopasowanie *krzywej teoretycznej* (3.13) – na rysunku 3.3b zaznaczonej linią ciągłą do określonej na podstawie badań (linia przerywana) w końcowym fragmencie ich przebiegu. Jako że jedynym parametrem krzywej (3.13) jest θ_x , zatem dopasowanie to doprowadzi do oznaczenia wartości skali fluktuacji θ_x . Dopasowanie może być dokonane np. metodą najmniejszych kwadratów w końcowym fragmencie krzywych. Vanmarcke (1977a) zaproponował ustalenie pewnej końcowej wartości n (dla której zgodność krzywych jest już dobra), na podstawie której można obliczyć skalę fluktuacji według zależności

$$\theta_x = n\gamma(n)\Delta L_0 = n^* \Delta L_0. \quad (3.15)$$

Zależność (3.15) definiuje ponadto wartość n^* , która określa zasięg odcinka prostoliniowego *krzywej teoretycznej* na wykresie zależności $\sqrt{\gamma(n)}$ od n (rys. 3.3.b).

W przykładzie pokazanym na rysunku 3.3b, dotyczącym danych oporu stożka sondy pokazanych na rysunku 3.2a, przyjęto jako końcową wartość $n = 15$, co doprowadziło do wartości skali fluktuacji $\theta_x = 1,14$ m (por. obliczenia na rysunku 3.3b).

Należy odnotować, że w przypadku, gdy n^* jest bliskie jedności, wówczas ostatni wzór daje istotnie zawyżoną wartość skali fluktuacji. Gdy bowiem $n^* = 1$,



Rys. 3.3. Ilustracja metody wyznaczania skali fluktuacji wg Vanmarcke'a (1977a): a) zmienność oporu stożka q_c z głębokością $L - \bar{q}_c$ oznacza średnią wartość oporu stożka na całej długości L ; b) wyznaczanie skali fluktuacji (objaśnienia w tekście)

to poszczególne „obserwacje” są nieskorelowane, zaś skala fluktuacji jest mniejsza niż przedział próbkowania ΔL_0 .

Druga metoda, zaproponowana w pracy Wickremesinghe i Campanelli (1993), powstała z modyfikacji przedstawionej powyżej metody Vanmarcke'a. Autorzy ci zauważyli, że zgodnie z zależnością (3.12) iloczyn $\gamma(\Delta L)\Delta L$ (zwany funkcją fluktuacji) powinien być stały dla dostatecznie dużych ΔL . W procedurze Vanmarcke'a można więc sporządzić wykres $\gamma(n\Delta L_0)n\Delta L_0$ w zależności od $n\Delta L_0$. Po ustabilizowaniu się wykresu na poziomie stałej wartości można przyjąć tę stałą wartość jako wartość skali fluktuacji θ_x . Ponadto pokazali oni na przykładach z badań, że ta modyfikacja, ich zdaniem prostsza w zastosowaniu od metody oryginalnej, prowadzi do bardzo zbliżonych oszacowań skali fluktuacji w zestawieniu z metodą Vanmarcke'a.

Trzecia z metod oceny skali fluktuacji θ_x , także zaproponowana przez Vanmarcke'a (1977a), jest możliwa do zastosowania pod warunkiem posiadania dużej liczby pomiarów. Polega ona na zastosowaniu relacji pomiędzy skalą fluktuacji θ_x a średnią odległością \bar{d} pomiędzy przekroczeniami przez fluktuujący parametr $q_c(L)$ jego średniej wartości \bar{q}_c . Średnią częstotliwość przekroczeń wartości średniej przez funkcję losową, w przybliżeniu równą $\frac{1}{\bar{d}}$, określa tzw. wzór Rice'a (Rice, 1944):

$$\frac{1}{\bar{d}} \approx \frac{1}{\pi} \sqrt{\left. \frac{\partial^2 \rho(\tau)}{\partial \tau^2} \right|_{z=0}}. \quad (3.16)$$

Wielkość \bar{d} może być oszacowana na podstawie wykresu jak na rysunku 3.2a. Jeśli ponadto znana jest postać funkcji korelacji $\rho_X(\tau, a)$ w rozpatrywanym polu X, to na podstawie zależności (3.16) można zidentyfikować parametr a . Następnie, korzystając z zależności typu (2.51) lub bezpośrednio z definicji (2.50), można wyznaczyć skalę fluktuacji θ_X . Oczywiście procedura ta jest skuteczna w przypadku, gdy tylko jeden parametr funkcji korelacji $\rho_X(\tau, a)$ pozostaje do zidentyfikowania.

Przykładowo, jeżeli funkcja korelacji jest typu gaussowskiego (wzór (2.38)), to zastosowanie zależności (3.16) prowadzi do wzoru

$$\frac{1}{\bar{d}} \approx \frac{1}{\pi} 2a \quad (3.17)$$

i dalej poprzez zależność (2.51) dla funkcji gaussowskiej otrzymuje się ostatecznie

$$\bar{d} \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \theta_X \approx 1,25 \theta_X. \quad (3.18)$$

Jeśli zastosować tę metodę do przykładu pokazanego na rysunku 3.3, to uzyska się wartość skali fluktuacji $\theta_X = 1,3$ m, a więc zbliżoną do wartości uzyskanej pierwszą metodą.

Ograniczeniem powyższej metody jest założenie, że rozpatrywana w danym polu funkcja korelacji $\rho_X(\tau)$ musi posiadać drugą pochodną w punkcie 0 (por. wzór (3.16)). Tego założenia nie spełnia popularna w zastosowaniach funkcja korelacji typu Markowa (wzór (2.34)).

Ostatnia – czwarta w tym zestawieniu – metoda polega na estymacji funkcji korelacji pola, a następnie obliczeniu skali fluktuacji z definicji. Estymator funkcji korelacji w polu stacjonarnym określony jest wzorem (Baecher i Christian, 2003)

$$\hat{\rho}(\tau_j) = \frac{1}{s_X^2(k-j)} \sum_{i=1}^{k-j} (x_i - m_X)(x_{i+j} - m_X), \quad (3.19)$$

w którym $\tau_j = j\Delta\tau$ jest odległością pomiędzy punktami obszaru, pomiędzy którymi korelacja danej cechy jest szacowana; odległość ta jest wielokrotnością

pewnej ustalonej odległości jednostkowej; $\Delta \tau$, x_i , x_{i+j} są wartościami rozpatrywanej cechy uzyskanymi z pomiarów odpowiednio w punkcie i oraz $i + j$, przy czym k jest liczbą wszystkich punktów, w których wykonano pomiar; s_x^2 jest wariancją z próby badanej cechy (estymatorem wariancji pola losowego) zaś m_x średnią z tejże próby (estymatorem wartości oczekiwanej pola).

Wzór (3.19) pozwala oszacować funkcję korelacji w skończonej liczbie punktów. Do tej „empirycznej funkcji korelacji dopasowuje się którąś z wybranych „funkcji teoretycznych”, starając się zachować możliwie najlepsze dopasowanie (np. w sensie metody najmniejszych kwadratów). Mając postać funkcji korelacji w postaci wzoru, znajduje się skalę fluktuacji z definicji (podrozdział 2.5) lub na podstawie wcześniej ustalonych zależności pomiędzy skalą fluktuacji a parametrami funkcji korelacji (zależności typu (2.51).

Widać, że każda z czterech metod narażona jest na błędy w ocenie skali fluktuacji. Błędy te maleją wraz ze wzrostem liczby pomiarów. Z tego punktu widzenia z najlepszą sytuacją mamy do czynienia, gdy korzysta się z wyników sondowania, np. sondą CPT, gdyż wówczas liczba danych jest duża (przynajmniej w obrębie jednego otworu). Jeśli zaakceptuje się założenie 3. sformułowane w poprzednim punkcie, to skala fluktuacji oszacowana na podstawie oporu stożka sondy może być przyjęta także dla innych parametrów podłoża. Z tego punktu widzenia wydaje się, że najlepszą metodą jest czwarta z opisanych wyżej, tj. polegająca na oszacowaniu funkcji korelacji w polu. Znajomość funkcji korelacji pozwala na numeryczne generowanie pól losowych, o czy była mowa w podrozdziale 2.10.

Opisane wyżej cztery metody służą w zasadzie do wyznaczania skali fluktuacji w polu określonym na obszarze jednowymiarowym. W praktyce służą najczęściej ocenie pionowej skali fluktuacji, czyli ocenie skorelowania właściwości podłoża wraz ze zmieniającą się głębokością. Niektórzy autorzy, badając losowy charakter posadowienia bezpośredniego, korzystali z koncepcji modelowania właściwości gruntu za pomocą pól izotropowych (będzie o tym mowa w rozdziale 5). W takiej sytuacji wyznaczenie pionowej skali fluktuacji okazuje się wystarczające, gdyż w polu izotropowym promień korelacyjny jest jednakowy w każdym kierunku. Jednak badania przestrzennej zmienności cech podłoża prowadzi zwykle do wniosku, że zmienność cech podłoża jest zwykle szybsza w kierunku pionowym aniżeli w poziomym. Wynika to choćby z natury procesów sedymentacji oraz konsolidacji podłoża. W konsekwencji modelowanie cech podłoża za pomocą pól izotropowych może nie być adekwatne, np. w kontekście badania bezpieczeństwa posadowienia bezpośredniego. Temu zagadnieniu po-

święcono sporo miejsca w rozdziale 5 niniejszej monografii. Jeśli zatem zrezygnujemy z modelowania polem izotropowym, to wówczas skala fluktuacji będzie zależała od kierunku, w którym badamy korelację danej cechy (por. podrozdział 2.5). W szczególności bardzo ważnym zadaniem staje się rzetelna ocena skali fluktuacji w kierunku poziomym (pozioma skala fluktuacji). W tym celu może być także zastosowana czwarta z podanych wyżej metod. Zadanie to jest jednak dużo trudniejsze i wymaga dużo większej liczby danych z pomiarów. Na przykład otwory, w których dokonuje się sondowania powinny być w stosunkowo niewielkiej odległości od siebie, co zazwyczaj wykracza poza standardowe badania geotechniczne. Pojawiają się też inne propozycje, np. w pracach Phoon i Kulhawego (1999), Jaksy i Kaggwy (1999), Lloreta-Cabota i współautorów (2014). Zagadnienie to ciągle jest otwarte, o czy świadczą niedawno opublikowane prace.

Poniżej zestawiono w tabelach wartości skali fluktuacji uzyskane przez różnych badaczy. Tabela 3.7, zaczerpnięta z pracy Cherubiniego (1997), podaje przykłady oszacowań pionowej skali fluktuacji dla różnych cech podłoża w kilku przykładowo wybranych gruntach.

Tabela 3.7. Wartości pionowej skali fluktuacji θ_v dla wybranych właściwości gruntów (wg Cherubiniego, 1997)

Właściwość	Autorzy	θ_v [m]
Wilgotność	Vanmarcke (1977a)	1,2
Wskaźnik porowatości e	Vanmarcke (1977a)	3,05
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Vanmarcke (1977a)	5,00
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Wu (1974)*	0,79
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Matsuo i Asaoka (1977)*	1,25
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Matsuo i Asaoka (1977)*	2,50
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Matsuo i Asaoka (1977)*	1,82
Opór stożka sondy (w piasku)	Alonso i Krizek (1975)	2,20
Opór stożka sondy (głina)	Alonso i Krizek (1975)	1,00

Tabela 3.7 cd. Wartości pionowej skali fluktuacji θ_v dla wybranych właściwości gruntów (wg Cherubiniego, 1997)

Właściwość	Autorzy	θ_v [m]
Opór stożka sondy (glina pylasta – <i>silty clay</i>)	Gao i Li (1993)**	0,40 ÷ 0,80
Opór stożka sondy (glina błotnista – <i>muddy clay</i>)	Gao i Li (1993)**	1,00 ÷ 1,50
Opór stożka sondy (glina szarawa – <i>greyish clay</i>)	Gao i Li (1993)**	0,60 ÷ 1,20
Opór stożka sondy resistance (ciemnozielona glina – <i>dark green clay</i>)	Gao i Li (1993)**	0,50 ÷ 0,80
Opór stożka sondy (piasek drobny)	Gao i Li (1993)**	0,25 ÷ 0,60
* Z pracy: Quek i in. (1992)		
** Grunty z Szanghaju		

O innych wynikach dotyczących pionowej skali fluktuacji będzie też mowa w podrozdziale 3.3. W tabeli 3.8 (pochodzącej z tej samej pracy) przedstawiono wartości poziomej skali fluktuacji dla wybranych cech podłoża, dostępne w literaturze.

Tabela 3.8. Wartości poziomej skali fluktuacji θ_h oszacowanej przez różnych badaczy (za Cherubinim, 1997)

Własność	Autorzy	θ_h [m]
Opór stożka sondy (na głębokości 7 m)	Keaveny i in. (1989)	24,62
Opór stożka sondy (na głębokości 9 m)	Keaveny i in. (1989)	66,49
Wskaźnik skonsolidowania c_c	Vanmarcke (1977a)	54,86
Wytrzymałość na ścinanie w warunkach bez odpływu	Vanmarcke (1977a)	46,00
Ciśnienie porowe	Vickremesinghe i Campanella (1993)	17,75

Tabela 3.8 zawiera zaledwie 5 rezultatów, co wynika z trudności określenia poziomej skali fluktuacji oraz z faktu, że we wcześniejszych pracach była ona rzadko stosowana. Dlatego też w kolejnej tabeli 3.9 zaprezentowano zestawienie

nie ostatnio opublikowane przez Te Xiao i współautorów (2018), podające wartości poziomej skali fluktuacji otrzymane poprzez sondowanie CPT.

Tabela 3.9. Wartości poziomej skali fluktuacji θ_h otrzymanej przez kilkunastu badaczy w wyniku badań sondą CPT (za Te Xiao i in., 2018)

Rodzaj gruntu	Parametr	θ_h [m]	Autorzy
Piasek i glina	q_c	35 ÷ 62	Tang (1979)
Piasek i pył	q_c	20	Phoon i in. (1993)
łł morski (<i>marine clay</i>)	q_c	23 ÷ 66	Phoon i in. (1993)
Piasek i pył	q_c	37	Phoon i in. (1993)
Piasek drobny	q_c	13	Wu i in. (1987)
Piasek przybrzeżny	q_c	25 ÷ 67	Lacasse i Nadim (1996)
–	q_c	42 ÷ 80	Phoon i in. (1993)
łł	q_c	2,8 ÷ 3,3	Jaksa (1995)
łł	q_c	0,14	Jaksa (1995)
Depozyty aluwialne	q_c	1,1 ÷ 3,9	O’Neil i Yoon (2003)
Piasek	q_c, f_s	2 ÷ 25; 7 ÷ 19	Akkaya i Vanmarcke (2003)
łł	q_c, f_s	2,5 ÷ 30; 2 ÷ 14	Akkaya i Vanmarcke (2003)
Piasek	q_c	22 ÷ 34	Vrouwenvelder i Calle (2003)
Piasek, pył i łł	q_c, f_s	100 ÷ 200	Liu i Chen (2006)
Piasek, pył i łł	q_c, f_s	286 ÷ 597; 287 ÷ 555	Liu i Chen (2010)
łł i łł pylasty	q_c	283; 255	Ng i Zhou (2010)
łł	q_c	3,0 ÷ 9,9	Stuedlein i in. (2012)
Piasek	q_c	1,7 ÷ 15,9	Lloret-Cabot i in. (2014)
Piasek	q_c	2,4; 2,8	Firouziandbandpey i in. (2014)
Piasek	q_c	4,0; 2,4	Firouziandbandpey i in. (2014)
łł	q_c	20	Müller (2013)
Piasek i glina	q_c	12,2 ÷ 16,1	Bombasaro i Kasper (2016)
łł i piasek	q_c	6 ÷ 13	Lingwanda i in. (2017)
Depozyty aluwialne	q_c	1,1 ÷ 1,5	Cai i in. (2017)

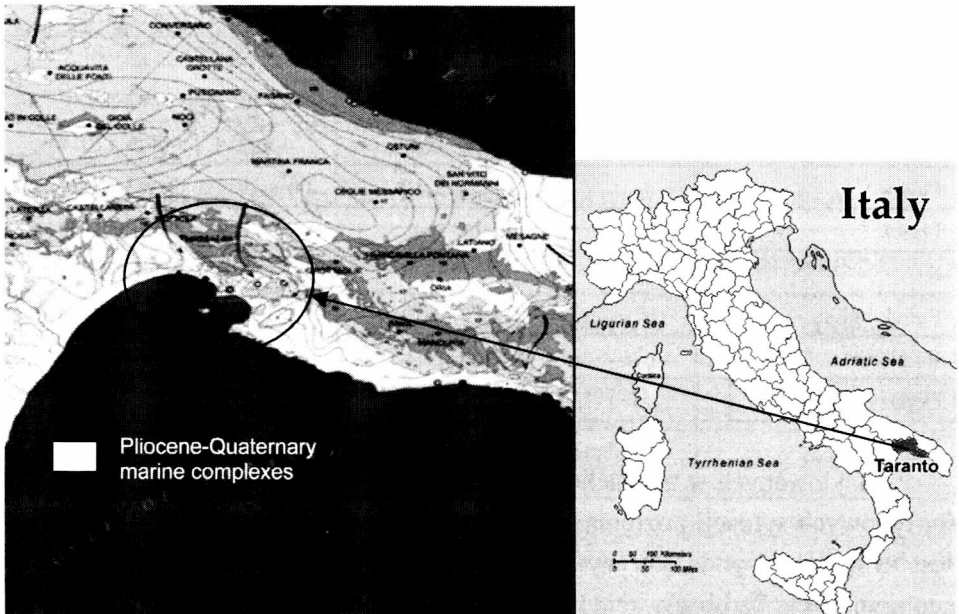
Z zacytowanych w tabelach 3.7–3.9 wyników badań wynika, że w większości typowych sytuacji pozioma skala fluktuacji jest dużo większa od pionowej. Jest to zgodne z podanym wyżej intuicyjnym postrzeganiem cech depozytów geologicznych. Ta obserwacja będzie często wykorzystywana w kolejnych rozdziałach.

3.3. Przykłady statystycznego opisu badań gruntu na potrzeby modelowania parametrów za pomocą pól losowych

Modelowanie cech podłoża za pomocą pól losowych wymaga starannego opracowania danych statystycznych uzyskanych z badania gruntu w terenie i laboratorium. Przede wszystkim liczba wyników, a także właściwe rozmieszczenie miejsc pobierania próbek składają się na to, jak dobrze model skonstruowany w postaci pola losowego odwzorowuje właściwości naturalnej warstwy gruntu. W tym podrozdziale omówione zostaną dwa przykłady obróbki danych pozyskanych z badań polowych dla celów modelowania właściwości przez pola losowe.

3.3.1. Grunty ilaste z okolic Tarentu (*Taranto clays*)

Jako pierwszy przykład zademonstrowany zostanie skrótowy opis badań gruntu z okolicy miasta Tarent w regionie Apulia, w południowych Włoszech (patrz rysunek 3.4). Przedstawiony poniżej opis jest wynikiem badań przeprowadzonych przede wszystkim przez Francesco Cafaro z Politecnico di Bari i opisanych w pracach Cafaro i in. (2000), Cafaro i Cherubini (2002).



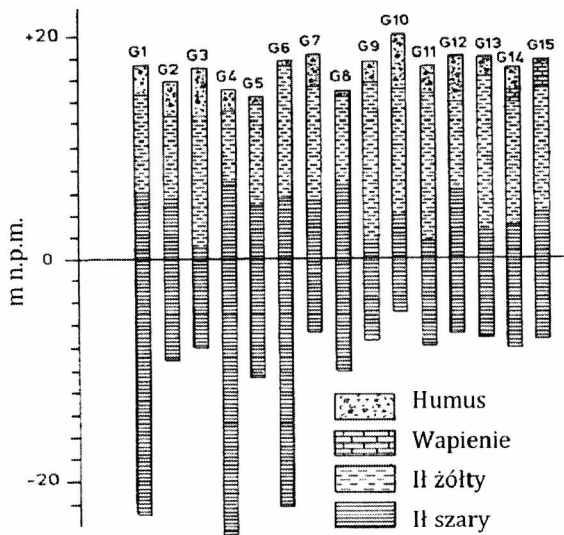
Rys. 3.4. Umiejscowienie geograficzne badań gruntów określanych jako *Taranto clays*

Na znacznym obszarze wierzchnią warstwę gruntów stanowią sztywne prekonsolidowane ły. Na rysunku 3.5 pokazano obraz warstw uzyskany na podstawie badań sondą CPT z piętnastu otworów (punktów pomiarowych). Wyniki te pokazują obecność dwóch pokładów ilastych – górnego, określonego jako ły żółty, oraz dolnego – określonego jako ły niebiesko-szary. Granicę pomiędzy warstwami określono na około 11 m poniżej poziomu terenu. Obserwację tę zweryfikowano za pomocą procedury zaproponowanej przez Wickremesinghe i Campanellę (1991), korzystającej z oszacowania współczynnika korelacji wewnątrzklasowej (*interclass correlation coefficient*, Webster i Beckett, 1968).

Tego typu uwarstwienie jest charakterystyczne dla całego regionu, w którym dominują ły szaro-niebieskie. Wobec stosunkowo poziomego układu warstw (por. rys. 3.5) przyjęto założenie, że probabilistyczna charakteryzacja podłoża może być przyjęta w postaci jednowymiarowego pola losowego o postaci

$$q(x) = t(x) + w(x), \quad (3.20)$$

gdzie x jest współrzędną pionową (głębokością), q – określoną właściwością gruntu, $t(x)$ – zmienną z głębokością wartością średnią właściwości q (funkcja nielosowa), $w(x)$ jednowymiarowym stacjonarnym (w szerszym sensie) polem losowym o zerowej wartości oczekiwanej, charakteryzującym fluktuacje danej cechy wokół średniej $t(x)$. W większości sytuacji $q(x)$ było oporem stożka sondy CPT, $t(x)$ deterministycznym trendem tegoż oporu, zaś $w(x)$ resztkową (rezydualną) wartością oporu.



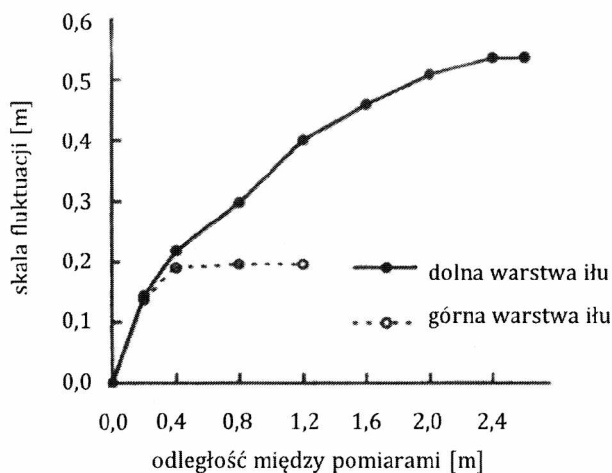
Rys. 3.5. Uwarstwienie podłoża w rejonie Tarentu na podstawie badania sondą CPT w 15 otworach

Dla górnych pokładów ilastych trend $t(x)$ przyjmowano w postaci funkcji kwadratowej, zaś dla pokładów dolnych – w postaci funkcji liniowej. Szczegółowe postaci funkcji $t(x)$ zamieszczono w tabeli 3.10.

Tabela 3.10. Trend $t(x)$ oraz skala fluktuacji dla poszczególnych otworów wskazanych na rys. 3.5

Oznaczenie otworu	Trend	Pionowa skala fluktuacji [m]
Górna warstwa iłu		
G1	$y = 54,671x^2 - 21,21x + 5301$	0,20
G3	$y = 12,44x^2 + 113,06x + 2950$	0,40
G6	$y = 40,713x^2 - 439,7x + 5601$	0,21
G7	$y = 73,690x^2 - 172,2x + 9753$	0,40
G15	$y = 11,027x^2 + 212,3x + 2541$	0,44
Dolna warstwa iłu		
G1	$y = 149,11x + 4732$	0,54
G3	$y = 319,58x + 1722$	0,29
G6	$y = 201,29x + 3700$	0,72
G7	$y = 201,14x + 4036$	0,27
G15	$y = 203,34x + 3699$	0,19

Funkcja $t(x)$ była określana metodą najmniejszych kwadratów poprzez dopasowanie funkcji kwadratowej lub liniowej do wyników uzyskanych z pomiarów oporu stożka sondy. Przyjęcie trendu w postaci funkcji kwadratowej zamiast liniowej ma oczywiście wpływ na wartości skali fluktuacji, która szacowana jest na podstawie wartości reszkowych oporu stożka $w(x)$. Wpływ ten jest szczególnie widoczny przy dużych wahaniami funkcji $w(x)$. Uwidoczniono to w tabeli 3.11, w której porównano wartości skali fluktuacji przy założeniu trendu liniowego oraz trendu kwadratowego w przypadku pierwszej warstwy. Jak widać, różnice wahają się, w zależności od rozpatrywanego otworu, od 0% do 300%. W przypadku drugiej warstwy różnice te nie były duże. Ostatecznie Cafaro zdecydował się na odjęcie trendu kwadratowego w przypadku pierwszej warstwy oraz usunięcie trendu liniowego w przypadku drugiej. Skala fluktuacji wyznaczana była drugą z metod omówionych w podrozdziale 3.2, tj. metodą zaproponowaną przez Wickremesinghe i Campanellę (1993). Na rysunku 3.6 podano przykładowe wykresy prowadzące do oszacowania wartości skali fluktuacji. Dotyczą one otworu G1 – zarówno górnej, jak i dolnej warstwy gliny. Wartość skali przyjęto jako tę, na której wykres funkcji fluktuacji zaczął się stabilizować. Była to wartość $\theta_v = 0,2$ dla warstwy górnej oraz $\theta_v = 0,54$ dla warstwy dolnej.



Rys. 3.6. Wykresy funkcji fluktuacji prowadzące do oszacowania pionowej skali fluktuacji w otworze G1

Ostatecznie zaakceptowane wartości skali fluktuacji dla wszystkich otworów zamieszczono w ostatniej kolumnie tabeli 3.11. Stacjonarność pola losowego wartości resztkowych oporu stożka $w(x)$ została zweryfikowana przez test Cusum (skrót od *cumulative sum*). Szczegółowy opis tego testu można znaleźć w monografii Caulcutta (1983) lub w pracy Cherubiniego, Vessii i Puły (2007).

Tabela 3.11. Wpływ typu trendu $t(x)$ na wartości pionowej skali fluktuacji oporu stożka sondy w warstwie iltu żółtego (górna warstwa)

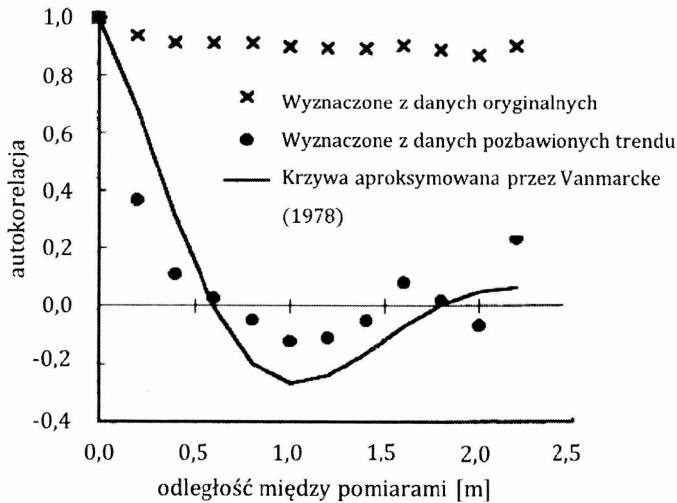
Oznaczenie otworu	Skala fluktuacji [m] po usunięciu trendu liniowego	Skala fluktuacji [m] po usunięciu trendu kwadratowego
G1	0,42	0,20
G3	0,40	0,40
G6	0,60	0,21
G7	0,96	0,40
G15	0,47	0,44

Cafaro wskazywał, że po odjęciu trendu dobrym oszacowaniem funkcji korelacji w polu $w(x)$ może być funkcja postaci (2.40), zapisana przez niego w zmodyfikowanej formie, a mianowicie

$$\rho(\Delta x) = \exp(-a|\Delta x|) \cos(2\pi d \Delta x), \quad (3.21)$$

gdzie stała $2\pi d$ odpowiada parametrowi b we wzorze (2.40). Przykład dopasowania w przypadku otworu G3 w warstwie dolnej demonstruje rysunek 3.7.

Rysunek ten wskazuje, że odjęcie trendu ma bardzo istotny wpływ na ocenę struktury korelacyjnej pola.



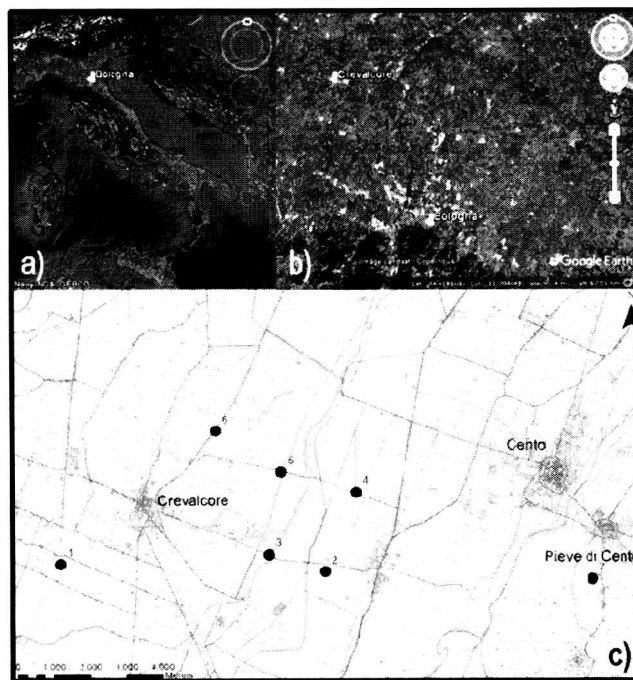
Rys. 3.7. Porównanie współczynników korelacji uzyskanych z badań (bez odjęcia trendu oraz z odjęciem trendu) z hipotetyczną funkcją korelacji postaci (3.21), przy czym $a = 1,18 \text{ m}^{-1}$, $b = 0,419 \text{ m}^{-1}$

W badaniach Cafaro pozioma skala fluktuacji nie była badana.

3.3.2. Grunty z rejonu Emilia-Romania

Badania, których fragment przedstawiony zostanie w tym punkcie, są obecnie prowadzone przez zespół w składzie: dr Giovanna Vessia z Università degli Studi „G. d’Annunzio” Chieti-Pescara (Włochy), dr inż. Joanna Pieczyńska-Kozłowska z Politechniki Wrocławskiej oraz autor niniejszej monografii. Mają one na celu wypracowanie metod skutecznej i szybkiej oceny funkcji korelacji pola odwzorowującego właściwości podłoża oraz oceny skali fluktuacji. W końcowym efekcie ma to służyć opracowaniu baz danych, z których będzie można skorzystać przy ocenie ryzyka awarii związanej z posadowieniem obiektu w danym rejonie. We Włoszech bazy są już w trakcie tworzenia i dla niektórych regionów istnieje bardzo duża baza danych archiwalnych dotyczących badań sondą CPT lub CPTU. Taka sytuacja ma miejsce w przypadku regionu Emilia-Romania, którego stolicą jest Bolonia. Badania, których wyniki wykorzystano w niniejszym punkcie, pochodzą z obszaru oddalonego o około 30 km od centrum Bolonii. W rejonie tym zalegają głównie osady aluwialne Niziny Padańskiej. Przedmiotem poniższej

analizy są wyniki uzyskane z siedmiu punktów sondowania statycznego, które zlokalizowane były na obszarze ok. 25 km². Miejsce usytuowania poszczególnych punktów pokazuje rysunek 3.8.



Rys. 3.8. Lokalizacja punktów sondowania statycznego CPTU w rejonie miejscowości Crevalcore w pobliżu Bolonii. Numery poszczególnych punktów odpowiadają numerom w pierwszej kolumnie tabeli 3.12

Pokłady powierzchniowe gruntów w tym obszarze są mieszaniną iłów i pyłów. Stąd parametrem najbardziej interesującym z punktu widzenia nośności posadowienia bezpośredniego jest wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odplywu c_u . Parametr ten szacowany był według następującej zależności:

$$c_u = \frac{q_c - \sigma_v}{N_k}, \quad (3.22)$$

w której q_c jest oporem stożka sondy, σ_v – całkowitym pionowym naprężeniem, zaś N_k współczynnikiem stożka, zależnym od jego geometrii, który w przypadku opisywanych badań wynosił $N_k = 15$.

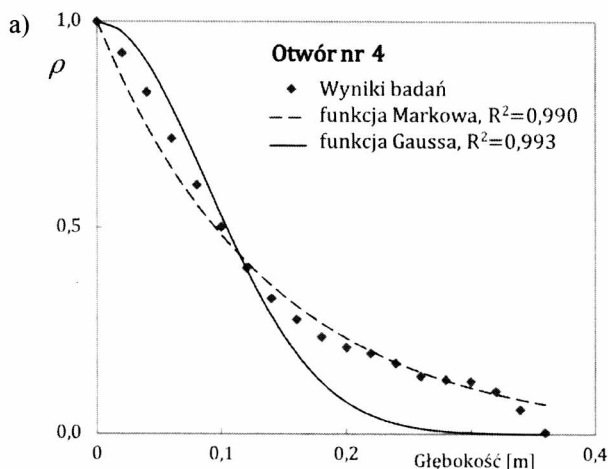
Podstawowe dane statystyczne uzyskane z poszczególnych otworów zebrano w tabeli 3.12, przy czym wartość średnia oraz odchylenie standardowe były obliczane ze wszystkich pomiarów w danym otworze.

Tabela 3.12. Dane uzyskane z poszczególnym miejsc sondowania sondą statyczną CPTU

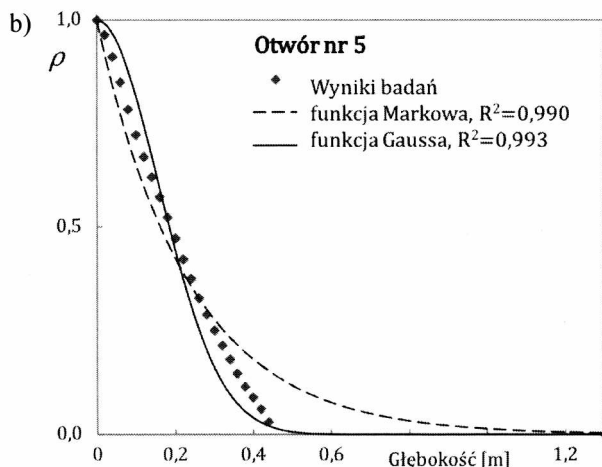
Nr otworu	Głębokość sondowania x [m]	Wartość średnia c_u [kPa]	Odchylenie standardowe c_u [kPa]	Współczynnik zmienności c_u
1	1,7÷26,7	92,92	20,77	0,22
2	1÷16	86,36	21,70	0,25
3	1÷4	42,57	7,22	0,17
4	2,7÷6	23,99	5,51	0,23
5	1,2÷5	71,75	36,39	0,51
6	2,4÷8,9	39,13	9,41	0,24
7	1÷3	61,50	0,97	0,02

Uzyskane wyniki $c_u(x)$ w poszczególnych otworach poddano, podobnie jak w badaniach opisanych w punkcie 3.3.1, procedurze detrendyzacji (wzór (3.20)), przy czym funkcje trendu $t(x)$ przyjmowano w postaci funkcji liniowej, kwadratowej lub potęgowej (por. tabela 3.13). Natomiast wartości rezydualne $c_u(x)$, oznaczane zgodnie ze wzorem (3.20) przez $w(x)$, są traktowane jako pole losowe określone na obszarze jednowymiarowym (zmienna z głębokością). Dla tego pola aproksymowano funkcję korelacji typu Markowa (wzór (2.34)) oraz gaussowską funkcję korelacji (wzór (2.38)), korzystając z estymatora danego wzorem (3.19) – por. podrozdział 3.2. Przykłady tej aproksymacji – dla otworów 4 oraz 5 – pokazano na rysunku 3.9.

Warto zauważyć, że w każdym przypadku uzyskano bardzo wysoką wartość współczynnika determinacji R^2 . Mając analityczne postaci funkcji korelacji, można



Rys. 3.9. Aproxymacja estymowanej na podstawie wyników sondowania funkcji korelacji za pomocą funkcji typu Markowa oraz typu Gaussa: a) otwór nr 4; R^2 – współczynnik determinacji



Rys. 3.9 cd. Aproksymacja estymowanej na podstawie wyników sondowania funkcji korelacji za pomocą funkcji typu Markowa oraz typu Gaussa: b) otwór nr 5; R^2 – współczynnik determinacji

oznaczyć wartości skali fluktuacji, korzystając z zależności (2.51) – por. także podrozdział 3.2. Jak wskazano w podrozdziale 3.2, mając dostatecznie dużą liczbę wartości funkcji $w(x)$ można też oznaczyć skalę fluktuacji na podstawie wzoru Rice'a (3.16). Tak też postąpiono w opisywanych tu badaniach, wyznaczając skalę fluktuacji dla funkcji korelacji typu Gaussa z zastosowaniem oszacowania (3.18). W przypadku funkcji Markowa zastosowanie wzoru Rice'a staje się problematyczne, gdyż funkcja (2.34) nie jest różniczkowalna w punkcie zero. Tym samym dla każdego z siedmiu otworów otrzymano trzy wartości skali fluktuacji. Otrzymane wyniki podano w tabeli 3.13.

Tabela 3.13. Równania trendu $t(x)$ dla wytrzymałości gruntu na ścinanie $c_v(x)$ dla siedmiu otworów zestawione z pionową skalą fluktuacji dla wytrzymałości rezydualnej $w(x)$ w każdym z otworów, przy czym skala fluktuacji wyznaczona była trzema metodami (opis w tekście)

Nr otworu	Równanie trendu $t(x)$	Pionowa skala fluktuacji θ_v		
		Estymacja funkcji korelacji – funkcja Markowa	Estymacja funkcji korelacji – funkcja Gaussa	Metoda Rice'a Funkcja Gaussa
1	$t(x) = 0,51x^{0,462}$	0,75	0,66	1,03
2	$t(x) = 0,55x^{0,48}$	0,87	0,73	0,52
3	$t(x) = -0,11x^2 + 0,49x + 0,24$	0,15	0,13	0,43
4	$t(x) = -0,07x + 0,73$	0,27	0,22	0,40
5	$t(x) = -0,47x + 2,61$	0,47	0,39	0,47
6	$t(x) = 0,026x^2 - 0,3346x + 1,67$	0,40	0,25	0,52
7	$t(x) = 0,04x^2 - 0,16x + 1,1$	0,13	0,20	0,14

Należy odnotować, że różnice w wartościach pionowej skali fluktuacji w danym otworze pomiędzy poszczególnymi metodami są znaczne, zwłaszcza wyniki uzyskane metodą Rice'a odbiegają od tych, które wynikają z dopasowania funkcji korelacji do wartości otrzymanych z estymatora (3.19). Oszacowanie wynikające ze wzoru Rice'a jest z pewnością łatwe w zastosowaniu, gdy posiadamy wyniki sondowania, lecz wydaje się mniej dokładne od dopasowania funkcji korelacji.

4. Szacowanie nośności na podstawie mechanizmów kinematycznych

W rozdziale pierwszym wymieniono kilka przyczyn, dla których modelowanie parametrów podłoża za pomocą pól losowych przy oszacowaniu nośności posadowienia bezpośredniego może mieć uzasadnienie. Niniejszy rozdział poświęcony jest oszacowaniom, które łączą w sobie oszacowanie nośności za pomocą mechanizmów kinematycznych przy jednoczesnym zastosowaniu teorii pól losowych do modelowania parametrów mechanicznych podłoża. Podstawową ideą, łączącą opisane w tym rozdziale podejścia, jest konstatacja, że o wyczerpaniu nośności nie decydują „punktowe” parametry podłoża, ale pewne średnie danej właściwości „zebrane” z określonych obszarów podłoża znajdujących się pod fundamentem. Załóżmy teraz, że określona cecha (właściwość) gruntu jest charakteryzowana przez pole losowe określone na pewnym obszarze pod fundamentem. W konsekwencji dokonanych wyżej założeń naturalnym podejściem wydaje się dokonanie uśrednień lokalnych przyjętego pola. Matematyczne podstawy takiego podejścia sformułowano w podrozdziale 2.8. Mechanizmy kinematyczne opisują wywołane obciążeniami zewnętrznymi deformacje podłoża, zakładając określone powierzchnie poślizgu (ścięcia) w ośrodku gruntowym. W przedstawionych w tym rozdziale oszacowaniach przyjmuje się uśrednienia pól reprezentujących poszczególne właściwości. Obszarami uśrednienia są właśnie powierzchnie poślizgu występujące w rozpatrywanym mechanizmie. W podrozdziale 2.8 wskazano, że w wyniku uśrednienia pola losowego X względem obszaru V uzyskuje się zmienną losową X_V . Zatem uśrednianie danego pola względem poszczególnych elementów rozpatrywanego mechanizmu kinematycznego stanowi formę dyskretyzacji rozpatrywanego pola losowego. W rezultacie otrzymuje się pewien skończony ciąg zmiennych losowych. Każda z tych zmiennych jest elementem formuły określającej nośność posadowienia bezpośredniego,

odpowiadającej rozpatrywanemu mechanizmowi kinematycznemu. Z kolei każda z rozpatrywanych formuł staje się elementem funkcji stanu granicznego (*limit state function, performance function* – Doliński, 1983; Ditlevsen i Madsen, 1996; Puła, 2004), służącej oszacowaniu miar niezawodności. W ramach poniższego rozdziału rozpatrywane jest zagadnienie dwuwymiarowe, czyli oszacowanie nośności fundamentu pasmowego (np. typu ława) w płaskim stanie odkształcenia.

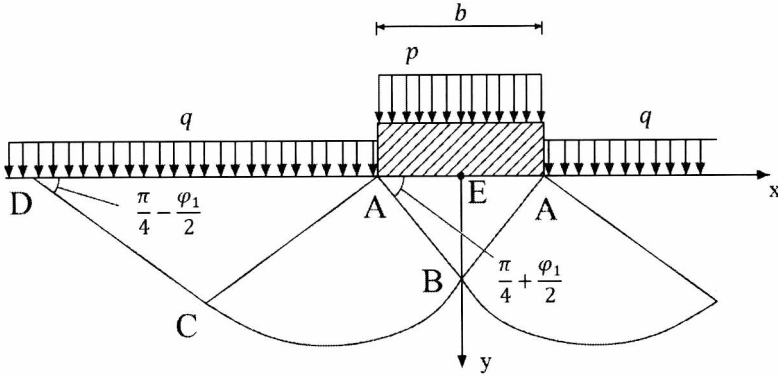
4.1. Lokalne uśrednienia wzdłuż linii poślizgu dla mechanizmu Prandtla

W tym podrozdziale wyprowadzone zostaną wzory na wariancje i kowariancje zmiennych losowych uzyskanych poprzez uśrednienie zadanego pola losowego wzdłuż linii poślizgu występujących w mechanizmie Prandtla (1921). W dalszych podrozdziałach pole losowe X będzie reprezentowało konkretną właściwość gruntu. Jednak na obecnym etapie wyprowadzone zależności mają charakter ogólny i nie ma jeszcze potrzeby precyzowania, o jaki parametr podłoża chodzi. Podobnie jak w podrozdziale 2.8 zakładamy, że wszystkie rozpatrywane dalej pola są stacjonarne w sensie szerszym.

Mechanizm Prandtla (1921) zajmuje szczególne miejsce pośród mechanizmów kinematycznych stosowanych do oceny nośności w geomechanice (Izbicki i Mróz, 1976). Schemat mechanizmu Prandtla wraz z liniami poślizgu pokazano na rysunku 4.1, przy czym szerokość fundamentu oznaczono tu przez b (dla uniknięcia koincydencji oznaczeń z punktem B). Pole losowe danej właściwości gruntu określone jest na obszarze dwuwymiarowym poniżej przyłożonego obciążenia. W sytuacji płaskiego stanu odkształcenia powierzchnie poślizgu redukują się do linii poślizgu. Zgodnie z rysunkiem 4.1 tymi liniami są kolejno: odcinek linii prostej AB, odcinek spirali logarytmicznej BC oraz odcinek linii prostej CD. Stosując wzór (2.105) dokonuje się uśrednienia kolejno wzdłuż odcinków: prostoliniowego AB, odcinka spirali logarytmicznej BC oraz odcinka prostoliniowego CD. Załóżmy, że odcinki krzywoliniowe (lub prostoliniowe) są sparametryzowane w postaci

$$l_i: \quad \begin{aligned} x &= x(t_i), & y &= y(t_i), \\ \text{dla } t_i &\in [a_i, b_i], \end{aligned} \quad (4.1)$$

przy czym i oznacza numer odcinka ($l_1 = AB$, $l_2 = BC$, $l_3 = CD$).



Rys. 4.1. Linie poślizgu w mechanizmie Prandtla. Poziom terenu pokrywa się z o osią poziomą (x), φ_1 jest kątem wewnętrznego gruntu pod podstawą fundamentu. Fundament wraz z konstrukcją przekazuje na podłoże obciążenie p , obok fundamentu obciążenie podłoża ma wartość q

Wówczas kowariancję zmiennych losowych uzyskanych poprzez uśrednienie pola na odcinkach l_i, l_j oblicza się z zależności ogólnej (2.107) – dla przypadku dwuwymiarowego, która w tej sytuacji przyjmuje postać

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_{l_i}, X_{l_j}) &= \\ &= \frac{1}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \text{COV}(x(t_i), y(t_i), x(t_j), y(t_j)) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Gdy $i = j$, to wzór (4.2) określa wariancję zmiennej losowej X_{l_i} . Jako funkcję kowariancji pola przyjęto w tym rozdziale gaussowską funkcję kowariancji, odpowiadającą funkcji korelacji typu (2.45), zapisaną w postaci podanej poniżej:

$$\text{COV}(\Delta x, \Delta y) = \sigma_x^2 \exp \left\{ - \left[\left(\frac{\Delta y}{\omega_1} \right)^2 + \left(\frac{\Delta x}{\omega_2} \right)^2 \right] \right\}. \quad (4.3)$$

W celu uproszczenia zapisów w ramach niniejszego rozdziału dla parametrów funkcji (4.3) zastosowano oznaczenia

$$\omega_1 = \frac{\theta_v}{\sqrt{\pi}}; \quad \omega_2 = \frac{\theta_h}{\sqrt{\pi}}, \quad (4.4)$$

gdzie θ_v jest pionową skalą fluktuacji, zaś θ_h – poziomą skalą fluktuacji.

Przedstawione poniżej modelowanie matematyczne obejmuje dwa przypadki. Pierwszy z nich jest prostszy i zakłada pole losowe zmienne tylko w kierunku pionowym („z głębokością”, czyli wzdłuż osi y). W tym przypadku konieczna jest jedynie znajomość pionowej skali fluktuacji. W drugim przypadku – pola losowego zmiennego zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym – konieczna jest znajomość skali fluktuacji w kierunku pionowym oraz także w kierunku poziomym. Porównywanie rezultatów w odniesieniu do nośności otrzymywanych z obu powyższych schematów jest ważne, gdyż, jak już wspomniano w rozdziale 3, określanie poziomej skali fluktuacji w warunkach połowych przysparza istotnych problemów.

4.1.1. Uśrednienie jednowymiarowe

Na wstępie rozpatruje się przypadek jednowymiarowego uśrednienia wraz z głębokością y . Z punktu widzenia modelowania właściwości podłoża jest to szczególnie istotny przypadek, gdyż własności podłoża na ogół znacznie szybciej zmieniają się wraz z głębokością aniżeli w innych kierunkach, co udokumentowano np. w pracach Cherubiniego (1997) czy Wickremesinghego i Campanelli (1993). Przy założeniu stacjonarnego pola losowego zmiennego w jednym kierunku funkcja kowariancji typu (4.3) redukuje się do postaci

$$\text{COV}(\Delta x, \Delta y) = \text{COV}(\Delta y) = \sigma_x^2 \exp\left[-\left(\frac{\Delta y}{\omega}\right)^2\right]. \quad (4.5)$$

W celu uproszczenia zapisu parametr powyższej funkcji oznaczony jest przez ω , choć dokładnie odpowiada on parametrowi ω_1 we wzorze (4.3). W tej sytuacji wzór (4.2) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_{l_i}, X_{l_j}) &= \\ &= \frac{\sigma_x^2}{|l_i||l_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left[-\left(\frac{y(t_i) - y(t_j)}{\omega}\right)^2\right] \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j, \end{aligned} \quad (4.6)$$

przy czym σ_x^2 jest wariancją punktową stacjonarnego pola losowego X .

Znalezienie kowariancji sprowadza się do obliczenia całek postaci (4.6) dla odcinków AB, BC oraz CD zaznaczonych na rysunku 4.1.

Wariancja zmiennej losowej X_{AB} . Przy oznaczeniach jak na rysunku 4.1 oraz następującej parametryzacji odcinka AB:

$$x(t) = \frac{b}{2} - t \frac{b}{2}; \quad y(t) = t \frac{b}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right); \quad t \in [0, 1], \quad (4.7)$$

wzór (4.6) ma postać

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{AB}\} &= \sigma_X^2 \frac{4 \cos^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)}{b^2} \int_0^1 \int_0^1 \exp \left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega^2} (t_1 - t_2)^2 \right) \frac{b^2}{4} (1 + a^2) dt_1 dt_2 = \\ &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp \left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega^2} (t_1 - t_2)^2 \right) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (4.8)$$

gdzie $a = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$. Zamiana zmiennych w ostatniej całce: $\xi = t_1 - t_2$ oraz $\eta = t_1$ prowadzi do następującej redukcji wyrażenia (4.8):

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{AB}\} &= 2\sigma_X^2 \int_0^1 \exp \left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2} \xi^2 \right) d\xi - 2\sigma_X^2 \int_0^1 \xi \exp \left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2} \xi^2 \right) d\xi = \\ &= 2\sigma_X^2 \left(\frac{\sqrt{\pi}\omega}{ab} \operatorname{erf} \left(\frac{ab}{2\omega} \right) + \frac{2\omega^2}{a^2 b^2} \exp \left(-\frac{a^2 b^2}{4\omega^2} \right) - \frac{2\omega^2}{a^2 b^2} \right) = \\ &= \frac{\sigma_X^2}{h_B} \left(\omega \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{h_B}{\omega} \right) + \frac{\omega^2}{h_B} \exp \left(-\frac{h_B^2}{\omega^2} \right) - \frac{\omega^2}{h_B} \right), \end{aligned} \quad (4.9)$$

gdzie $h_B = \frac{b}{2} \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$, zaś φ oznacza kąt tarcia wewnętrznego gruntu (dla uproszczenia kąt tarcia wewnętrznego φ_1 będzie, do końca podrozdziału 4.1, oznaczany przez φ). Jak łatwo zauważyć, h_B jest pionową współrzędną punktu B. Oznacza to, że uśrednienie wzdłuż odcinka AB jest takie samo jak po pionowym odcinku do głębokości wyznaczonej przez rzędną punktu B. Rezultat ten jest konsekwencją faktu, że przyjęte tu uśrednienie jest jednowymiarowe i odbywa się zgodnie ze współrzędną pionową. Wzór (4.9) daje następującą postać funkcji wariancji (por. podrozdział 2.8):

$$\gamma(h) = \frac{\omega h \sqrt{\pi} \operatorname{erf} \left(\frac{h}{\omega} \right) + \omega^2 \exp \left(-\frac{h^2}{\omega^2} \right) - \omega^2}{h^2}, \quad (4.10)$$

gdzie h jest długością rzutu odcinka AB na kierunek pionowy. Rezultat ten jest identyczny z rezultatem podanym przez Vanmarcke'a dla pola jednowymiarowego (Vanmarcke, 1977a; Rackwitz, 2000). Przy przyjęciu $\frac{1}{\omega^2} = a$ oraz $h = L$, wzór (4.10) jest identyczny ze wzorem (2.124).

Wariancja zmiennej losowej X_{CD} . Uzyskany wyżej rezultat, wyrażony wzorem (4.10), wskazuje, że funkcja wariancji w przypadku uśrednienia względem odcinka CD może być obliczona z (4.10) przy przyjęciu $h = h_C$, gdzie h_C jest pionową współrzędną punktu C (zagłębieniem punktu C względem powierzchni terenu). Współrzędna ta wyraża się następującym wzorem:

$$h_C = \frac{b}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right). \quad (4.11)$$

Wariancja zmiennej losowej X_{BC} . Przy układzie współrzędnych jak na rysunku 4.1 należy wprowadzić współrzędne biegunowe (r, θ) według zależności

$$x(r, \theta) = -r \cos \theta + \frac{b}{2}; \quad y(r, \theta) = r \sin \theta. \quad (4.12)$$

We współrzędnych (4.12) równanie odcinka spirali logarytmicznej BC ma następującą postać:

$$r(\theta) = r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi); \quad \theta \in \left[\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}; \frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right], \quad (4.13)$$

przy czym

$$r_0 = \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \exp\left[-\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi\right]. \quad (4.14)$$

Jak łatwo zauważyć, dla $\theta = \frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}$ otrzymuje się wartości

$$x\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = 0; \quad y\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right), \quad (4.15)$$

które są współrzędnymi punktu B, zaś dla $\theta = \frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}$ – wartości

$$x\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{b}{2} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) \right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) + \frac{b}{2},$$
(4.16)

$$y\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) = r_0 \left(\exp\left(\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}\right) \right) \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)$$

będące współrzędnymi punktu C. Długość odcinka BC spirali wynosi

$$\begin{aligned} |l| &= \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_{\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}}^{\frac{3}{4}\pi + \frac{\varphi}{2}} r_0 \frac{\exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta = \\ &= \frac{b}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right) \sin \varphi} \left(\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1 \right). \end{aligned}$$
(4.17)

Podstawiając zależności (4.12)–(4.17) do wzoru (4.6) otrzymuje się następującą zależność określającą wariancję X_{BC} :

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}[X_{BC}] &= \\ &= \sigma_X^2 \alpha_0 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega^2} \left[(\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) - (\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) \right]^2 \right] \right\} \times \\ &\times \exp(\theta_1 \operatorname{tg} \varphi) \exp(\theta_2 \operatorname{tg} \varphi) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned}$$
(4.18)

gdzie

$$\alpha_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\exp\left[-\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right)(\operatorname{tg} \varphi)\right]}{\left[\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) - 1\right]^2}.$$
(4.19)

Całka w równaniu (4.18) nie ma reprezentacji w postaci zamkniętej. Zatem w celu obliczenia wariancji zmiennej X_{BC} całkę tę należy oszacować numerycznie.

Kowariancja X_{AB} i X_{CD} . Po przyjęciu parametryzacji odcinka AB zgodnej ze wzorami (4.7) oraz następującej parametryzacji odcinka CD:

$$x(t) = \frac{b}{2} \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2}\right)} (1+t) + \frac{b}{2}; \quad y(t) = \frac{b}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right) (1-t);$$

$$t \in [0, 1],$$
(4.20)

wzór (4.6) redukuje się do postaci

$$\begin{aligned} \operatorname{COV}[X_{AB}, X_{CD}] &= \\ &= \sigma_X^2 \frac{4 \cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}{b^2 d} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] \frac{b}{2} ad \sqrt{1 + \frac{1}{a^2}} \frac{b}{2} \sqrt{1 + a^2} dt_1 dt_2 = \\ &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] dt_1 dt_2, \end{aligned}$$
(4.21)

w której $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ oraz $d = \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)$.

Wprowadzając nowe współrzędne

$$\begin{aligned} \xi &= at_1 + dt_2 - d, \\ \eta &= t_1, \end{aligned}$$
(4.22)

otrzymuje się

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 \exp\left[-\frac{b^2}{4\omega^2} (at_1 + dt_2 - d)^2\right] dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{d} \int_{-d}^{a-d} \left[\int_0^{\frac{1-\xi+d}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi + \frac{1}{2} + \\ &+ \frac{1}{d} \int_{a-d}^0 \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi + \frac{1}{d} \int_0^a \left[\int_{\frac{1-\xi}{a}}^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2} \xi^2\right) d\eta \right] d\xi. \end{aligned}$$
(4.23)

Obliczenia poszczególnych całek występujących we wzorze (4.23) prowadzą do następujących rezultatów:

$$\begin{aligned}
& \int_{-d}^{a-d} \left[\int_0^{\frac{1}{a}\xi + \frac{d}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \\
& = \frac{1}{a} \left[-\frac{2\omega^2}{b^2} \exp\left(\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) \right]_{-d}^{a-d} + \frac{d}{a} \int_{-d}^{a-d} \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\xi = \\
& = \frac{2\omega^2}{ab^2} \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}d^2\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}(a-d)^2\right) \right] + \\
& + \frac{d}{a} \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \left[-\operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{db}{2\omega}\right) \right], \tag{4.24}
\end{aligned}$$

$$\int_{a-d}^0 \left[\int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right), \tag{4.25}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^a \left[\int_{\frac{1}{a}\xi}^1 \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) d\eta \right] d\xi = \\
& = \int_0^a \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) \right] d\xi - \frac{1}{a} \int_0^a \xi \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}\xi^2\right) \right] d\xi = \\
& = \frac{\omega\sqrt{\pi}}{b} \operatorname{erf}\left(\frac{ab}{2\omega}\right) - \frac{1}{a} \left[\frac{2\omega^2}{b^2} - \frac{2\omega^2}{b^2} \exp\left(-\frac{b^2a^2}{4\omega^2}\right) \right]. \tag{4.26}
\end{aligned}$$

Ostatecznie wzory (4.21) oraz (4.23)–(4.26) prowadzą do rezultatu w postaci

$$\begin{aligned}
& \operatorname{Cov}[X_{AB}, X_{CD}] = \\
& = \sigma_X^2 \frac{2\omega^2}{ab^2d} \left[\exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}d^2\right) - \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}(a-d)^2\right) - 1 + \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega^2}a^2\right) \right] + \\
& + \sigma_X^2 \frac{\omega\sqrt{\pi}}{bd} \left[\frac{d}{a} \operatorname{erf}\left(\frac{bd}{2\omega}\right) - \frac{d}{a} \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{(d-a)b}{2\omega}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{ab}{2\omega}\right) \right]. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

Kowariancja X_{AB} i X_{BC} . Dla odcinka AB przyjmuje się parametryzację w postaci (4.7), zaś dla odcinka spirali logarytmicznej BC, po wprowadzeniu współrzęd-

ných biegunowych (4.12), parametryzację (4.13). Korzystając ze wzoru (4.6) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_{AB}, X_{BC}) &= \\ &= \frac{\sigma_X^2}{|AB||BC|} \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)} \exp \left\{ -\frac{1}{\omega^2} \left[\frac{b \operatorname{tg} \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)}{2} t - r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) \sin \theta \right]^2 \right\} \frac{r_0 \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi)}{\cos \varphi} d\theta \times \\ &\times \frac{b}{2 \cos \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)} dt, \end{aligned} \quad (4.28)$$

gdzie r_0 określone jest wzorem (4.14). Wprowadzając we wzorze (4.28) długość odcinka AB oraz długość łuku BC (wzór (4.17)) oraz dokonując redukcji wyrażeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_{AB}, X_{BC}) &= \\ &= \sigma_X^2 \alpha_1 \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}\right)} \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega^2} \left(a(1-t) - \frac{\sin \theta}{\cos \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right)} \exp \left(\left(\theta - \left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) \right) \right)^2 \right] \right\} \times \\ &\times \exp(\theta \operatorname{tg} \varphi) d\theta dt, \end{aligned} \quad (4.29)$$

przy czym

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \varphi}{\left[\exp \left(\left(\frac{3\pi+\varphi}{4} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) - \exp \left(\left(\frac{\pi+\varphi}{4} \right) \operatorname{tg} \varphi \right) \right]} \quad (4.30)$$

oraz a jak we wzorze (4.8).

Kowariancja X_{BC} i X_{CD} . Dokonując analogicznych przekształceń jak w poprzednim przypadku, można pokazać, że kowariancję zmiennych losowych X_{BC} oraz X_{CD} wyznacza się według wzoru (4.29) po zastąpieniu w nim stałej a przez stałą $d = \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)$ (identyczną jak we wzorze (4.21)).

4.1.2. Uśrednienie dwuwymiarowe

W poprzednim punkcie wyprowadzone zostały wzory na wariancje i kowariancje parametrów uśrednionych wzdłuż linii poślizgu, przy założeniu, że funkcja kowariancji pola losowego była funkcją jednej zmiennej – oznaczającej zmiany korelacji z głębokością. Obecnie wyniki te zostaną uogólnione dla przypadku zmian pola w kierunku zarówno pionowym, jak i poziomym. Zatem funkcja kowariancji będzie funkcją dwóch zmiennych. Uogólnienie wyników na przypadek dwuwymiarowy pozwoli na zanalizowanie problemu, na ile zmiany pola w kierunku poziomym są istotne przy obliczeniach z założeniem mechanizmu Prandtla. Zgodnie z przyjętymi na początku rozdziału założeniami gaussowska funkcja kowariancji dana jest wzorem (4.3), a jej parametry ω_1 oraz ω_2 związane są z pionową i poziomą skalą fluktuacji poprzez zależności (4.4). Pozostają też aktualne oznaczenia z rysunku 4.1. Przy założeniu dwuwymiarowego, stacjonarnego pola losowego oraz funkcji kowariancji postaci (4.3) wzór (4.2) przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \text{COV}(X_{t_i}, X_{t_j}) &= \\ &= \frac{\sigma_X^2}{|t_i||t_j|} \int_{a_i}^{b_i} \int_{a_j}^{b_j} \exp\left(-\left(\frac{y(t_i)-y(t_j)}{\omega_1}\right)^2\right) \exp\left(-\left(\frac{x(t_i)-x(t_j)}{\omega_2}\right)^2\right) \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_i}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_i}\right]^2} \sqrt{\left[\frac{dx}{dt_j}\right]^2 + \left[\frac{dy}{dt_j}\right]^2} dt_i dt_j. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Wariancja zmiennej losowej X_{AB} . Stosując parametryzację identyczną jak w przypadku jednowymiarowym (wzory (4.7)) do wyrażenia (4.31), uzyskuje się następujący wzór na wariancję:

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X_{AB}\} &= \\ &= \frac{\sigma_X^2}{|AB|^2} \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2}(t_1-t_2)^2\right) \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega_2^2}(t_1-t_2)^2\right) \frac{b^2}{4}(1+a^2) dt_1 dt_2, \end{aligned} \quad (4.32)$$

gdzie $a = \text{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, zaś $|AB|$ jest długością odcinka AB. Identyczna jak w przypadku całki (4.8) zamiana zmiennych prowadzi do następującego wyrażenia:

$$\begin{aligned}
\text{Var}\{X_{AB}\} &= \frac{\sigma_X^2 b^2 (1+a^2)}{|\text{AB}|^2 4} \int_0^1 [1-\xi] \exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right) \xi^2\right) d\xi = \\
&= 2\sigma_X^2 \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{b} \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}} \frac{b}{2}\right] + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2\omega_1^2 \omega_2^2}{b^2 (a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2)} \int_0^1 \left(-2\xi \left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right)\right) \exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right) \xi^2\right) d\xi \right\}, \quad (4.33)
\end{aligned}$$

a stąd po obliczeniu ostatniej całki

$$\begin{aligned}
\text{Var}\{X_{AB}\} &= \\
&= \frac{2\sigma_X^2}{b} \left\{ \sqrt{\pi} \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \operatorname{erf}\left[\sqrt{\frac{a^2 \omega_2^2 + \omega_1^2}{\omega_1^2 \omega_2^2}} \frac{b}{2}\right] + \frac{2\omega_1^2 \omega_2^2}{b(\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2)} \left[\exp\left(-\left(\frac{b^2 a^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2}{4\omega_2^2}\right)\right) - 1 \right] \right\}. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Łatwo zauważyć, że wzorowi (4.34) można nadać postać analogiczną do (4.9). Mianowicie po wprowadzeniu (jak w (4.9)) współrzędnej pionowej punktu B, tj. $h_B = \frac{b}{2} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, uwzględnieniu, że $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$ oraz po wprowadzeniu oznaczenia

$$\omega_{0B} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2 a^2}{\omega_2^2 a^2 + \omega_1^2}} \quad (4.35)$$

wzór (4.34) zapisuje się jako

$$\text{Var}\{X_{AB}\} = \frac{\sigma_X^2}{h_B} \left(\omega_{0B} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{h_B}{\omega_{0B}}\right) + \frac{\omega_{0B}^2}{h_B} \exp\left(-\frac{h_B^2}{\omega_{0B}^2}\right) - \frac{\omega_{0B}^2}{h_B} \right). \quad (4.36)$$

Wzór (4.36) różni się od ostatniego wyrażenia we wzorze (4.9) jedynie stałą ω_{0B} . Ponadto łatwo zauważyć, że

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} \omega_{0B} = \omega_1, \quad (4.37)$$

co w rezultacie daje przypadek jednowymiarowy.

Wariancja zmiennej losowej X_{CD} . Przy założeniach jak na rysunku 4.1 oraz następującej parametryzacji odcinka CD:

$$x(t) = \frac{b}{2} \left(t \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right)} + \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi - \varphi}{4}\right)} + 1 \right); \quad y(t) = (1-t) \frac{b}{2} \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right); \quad t \in [0,1] \quad (4.38)$$

wariancja zmiennej X_{CD} wyraża się wzorem

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{CD}\} &= \\ &= \frac{\sigma_X^2}{|\operatorname{CD}|^2} \frac{b^2}{4} (d^2 a^2 + d^2) \int_0^1 \int_0^1 \exp\left(-\frac{b^2 d^2}{4\omega_1^2} (t_1 - t_2)^2\right) \exp\left(-\frac{b^2}{4\omega_2^2} (t_1 - t_2)^2\right) \frac{b^2}{4} (1+a^2) dt_1 dt_2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dokonując analogicznych przekształceń jak w przypadku obliczania wariancji zmiennej X_{AB} oraz biorąc pod uwagę fakt, że długość odcinka CD wyraża się wzorem

$$|\operatorname{CD}| = \frac{b \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)}{2 \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}, \quad (4.40)$$

wzór (4.39) sprowadza się do postaci

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\{X_{CD}\} &= \\ &= \frac{2\sigma_X^2}{\frac{b}{2}d} \left\{ \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \frac{1}{a^2}}{\sqrt{\frac{\omega_2^2}{a^2} + \omega_1^2}} \operatorname{erf}\left[\frac{b}{2} \sqrt{\frac{d^2}{\omega_1^2} + \frac{d^2}{\omega_2^2}}\right] + \frac{\omega_1^2 \omega_2^2 \frac{1}{a^2}}{bd \left(\frac{\omega_2^2}{a^2} + \omega_1^2\right)} \left[\exp\left(-\left(\frac{b^2 d^2}{4\omega_1^2} + \frac{b^2 d^2}{4\frac{\omega_2^2}{a^2}}\right)\right) - 1 \right] \right\}, \end{aligned} \quad (4.41)$$

gdzie $a = \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)$, zaś $d = \exp\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi\right)$.

Wprowadzając, analogicznie do przypadku jednowymiarowego, pionową współrzędną h_C punktu C, która dana jest wzorem (4.11), otrzymuje się

$$\operatorname{Var}\{X_{CD}\} = \frac{\sigma_X^2}{h_C} \left(\omega_{0C} \sqrt{\pi} \operatorname{erf}\left(\frac{h_C}{\omega_{0C}}\right) + \frac{\omega_{0C}^2}{h_C} \exp\left(-\frac{h_C^2}{\omega_{0C}^2}\right) - \frac{\omega_{0C}^2}{h_C} \right), \quad (4.42)$$

przy czym ω_{0C} , analogiczna do ω_{0B} , dana jest wzorem

$$\omega_{0C} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{a^2}} = \sqrt{\frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_2^2 + a^2 \omega_1^2}}. \quad (4.43)$$

Zatem wzory (4.36) i (4.42) różnią się nie tylko poprzez współrzędne pionowe h_B i h_C , lecz także poprzez stałe typu ω . Podobnie jak poprzednio,

$$\lim_{\omega_2 \rightarrow \infty} \omega_{0C} = \omega_1, \quad (4.44)$$

a więc przy dużych wartościach ω_2 wariancja powinna być zbliżona do otrzymanej z przypadku jednowymiarowego.

Wariancja zmiennej losowej X_{BC} . Wprowadza się współrzędne biegunowe zgodnie ze wzorami (4.12), co daje parametryczną reprezentację odcinka w postaci (4.12) i (4.13). W tym przypadku wzór (4.31) daje następującą formułę na wariancję zmiennej X_{BC} :

$$\begin{aligned} \text{Var}\{X_{BC}\} &= \frac{\sigma_X^2}{|\text{BC}|^2} \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}, \frac{\pi+\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}, \frac{3\pi+\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}, \frac{\pi+\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}, \frac{3\pi+\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_1^2} [(\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) - (\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)]^2\right] \right\} \times \\ &\times \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_2^2} [(\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) - (\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)]^2\right] \right\} r_0^2 \frac{\exp(\theta_1 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} \frac{\exp(\theta_2 \text{tg } \varphi)}{\cos \varphi} d\theta_1 d\theta_2. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Długość odcinka spirali BC wyraża się wzorem (4.17). Uwzględniając (4.17) oraz wydobywając stałe przed znak całki i dokonując redukcji wyrażeń otrzymuje się

$$\begin{aligned} \text{VAR}[X_{BC}] &= \\ &= \sigma_X^2 \alpha_0 \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}, \frac{\pi+\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}, \frac{3\pi+\varphi}{2}\right)} \int_{\left(\frac{\pi+\varphi}{4}, \frac{\pi+\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi+\varphi}{4}, \frac{3\pi+\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp\left[-\frac{r_0^2}{\omega_1^2} [(\sin \theta_1) \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) - (\sin \theta_2) \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi)]^2\right] + \right. \\ &\left. - \frac{r_0^2}{\omega_2^2} [(\cos \theta_1) \times \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) - (\cos \theta_2) \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi)]^2\right\} \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) \exp(\theta_2 \text{tg } \varphi) d\theta_1 d\theta_2, \end{aligned} \quad (4.46)$$

gdzie

$$\alpha_0 = \operatorname{tg}^2 \varphi \frac{\exp \left[-(\operatorname{tg} \varphi) \left(\frac{\pi}{2} + \varphi \right) \right]}{\left[\exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right) - 1 \right]^2} \quad (4.47)$$

oraz

$$r_0 = \frac{b}{2 \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[- \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \operatorname{tg} \varphi \right]. \quad (4.48)$$

Całka we wzorze (4.46) nie ma reprezentacji w postaci zamkniętej i musi być oszacowana numerycznie.

W dalszej części podane zostaną kowariancje zmiennych losowych uzyskanych przez uśrednienia wzdłuż trzech odcinków linii poślizgu.

Kowariancja zmiennej losowej X_{AB} oraz zmiennej losowej X_{CD} . Odcinki AB i CD parametryzuje się według wzorów (4.7) i (4.20), odpowiednio. Po podstawieniu do wzoru (4.31) oraz prostych przekształceniach otrzymuje się następujący wzór:

$$\begin{aligned} \operatorname{COV}(X_{AB}, X_{CD}) &= \\ &= \sigma_X^2 \int_0^1 \int_0^1 \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_1^2} (-dt_2 + d - at_1)^2 \right] \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2} (adt_2 + t_1 + ad)^2 \right] dx dy, \quad (4.49) \end{aligned}$$

w którym $a = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)$ oraz $d = \exp \left(\frac{\pi}{2} \operatorname{tg} \varphi \right)$, tak jak we wzorze (4.21).

W przypadku dwuwymiarowym całka po prawej stronie równości (4.49) nie ma reprezentacji w postaci zamkniętej ani analogicznej do (4.27) i musi być oszacowana numerycznie.

Kowariancja zmiennej losowej X_{AB} oraz zmiennej losowej X_{BC} . Stosując dla odcinka AB parametryzację postaci (4.7) oraz postaci (4.12) i (4.13) dla odcinka spirali BC po podstawieniu do wzoru (4.31), a także po wstawieniu do (4.31) długości odcinka AB oraz długości łuku BC (wzór (4.17)), otrzymuje się

$$\begin{aligned}
& \text{COV}(X_{AB}, X_{BC}) = \\
& = \sigma_X^2 \alpha_1 \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_1^2} \left[ay - \frac{\sin \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right] \right]^2 \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2} \left[1 - y - \frac{\cos \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right] \right]^2 \right] \right\} \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) d\theta_1 dy,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{\text{tg } \varphi}{\left[\exp \left(\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{tg } \varphi \right) - \exp \left(\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \text{tg } \varphi \right) \right]}. \tag{4.51}$$

Kowariancja zmiennej losowej X_{BC} oraz zmiennej losowej X_{CD} . Analogicznie do poprzedniego przypadku, parametryzując łuk spirali BC według zależności (4.12) i (4.13), zaś odcinek CD według (4.38) oraz uwzględniając odpowiednie długości zgodnie z (4.17) i (4.40), otrzymuje się następujący wzór określający żadaną kowariancję:

$$\begin{aligned}
& \text{COV}(X_{AB}, X_{BC}) = \\
& = \sigma_X^2 \alpha_1 \int_0^1 \int_{\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)}^{\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\varphi}{2}\right)} \left\{ \exp \left[\frac{-b^2}{4\omega_1^2} \left[d(1-y) - \frac{\sin \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right] \right]^2 \right] \right\} \times \\
& \times \left\{ \exp \left[-\frac{b^2}{4\omega_2^2} \left[da(1+y) + 1 - \frac{\cos \theta_1}{\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right)} \exp \left[\left[\theta_1 - \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) \right] \text{tg } \varphi \right] \right]^2 \right] \right\} \exp(\theta_1 \text{tg } \varphi) d\theta_1 dy,
\end{aligned} \tag{4.52}$$

przy czym a i d są identyczne jak we wzorze (4.49), zaś α_1 dane jest równaniem (4.51). Oczywiście, zarówno w przypadku wzoru (4.50) jak i wzoru (4.52) całki należy oszacować numerycznie.

W ten sposób wzory na wariancje zmiennych uśrednionych oraz kowariancje pomiędzy nimi zostały uogólnione z przypadku jednowymiarowego opisanego w punkcie 4.1.1 na przypadek dwuwymiarowy.

4.2. Obliczenia funkcji wariancji i współczynników korelacji dla różnych szerokości fundamentu

Wzory uzyskane w podrozdziale 4.1 pozwalają na numeryczne wyznaczenia wartości funkcji wariancji $\gamma(b)$ oraz współczynników korelacji pomiędzy uśrednionymi zmiennymi losowymi jako funkcji szerokości fundamentu b . Zależność od szerokości fundamentu jest najbardziej interesująca z punktu widzenia określania niezawodności (bezpieczeństwa) fundamentu, gdyż to właśnie szerokość b jest parametrem projektowym. Z przedstawionych w podrozdziale 4.1 rozwiązań wynika też, że funkcja wariancji zależy także od postaci funkcji korelacji w polu, a ponadto od parametrów tejże funkcji. Zależność od parametrów funkcji korelacji może być sprowadzona do zależności od pionowej, θ_v , oraz poziomej, θ_h , skali fluktuacji. Jest też rzeczą jasną, że rezultaty związane z lokalnym uśrednieniem muszą być zależne od geometrii obszaru, względem którego następuje uśrednienie. W przypadku rozpatrywanego w podrozdziale 4.1 mechanizmu Prandtla mamy do czynienia z trzema odcinkami linii poślizgu i oczywiście dla każdego z trzech rozpatrywanych odcinków linii poślizgu otrzymujemy inną wartość funkcji wariancji. Długość tych odcinków i ich wzajemne położenie zdefiniowane jest przez wartość kąta tarcia wewnętrznego φ_1 gruntu zalegającego pod fundamentem (por rys. 4.1).

4.2.1. Odchylenia standardowe

W zastosowaniach, które będą pokazane w dalszym ciągu tego rozdziału, redukcji poddawane będą odchylenia standardowe. Dlatego poniżej w formie tabelarycznej podane zostaną wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji dla przykładowych wartości θ_v , θ_h i φ_1 oraz różnych wartości szerokości fundamentu b . Wartości te będą użyte do oszacowań miar bezpieczeństwa posadowienia bezpośredniego obliczanych w kolejnych podrozdziałach. W tabelach od 4.1 do 4.4 przyjęto wartość $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz wartość pionowej skali fluktuacji równą $\theta_v = 0,8$ m, którą można uznać za reprezentatywną dla gruntu niespoistego (por. podroz-

dział 3.2). W przypadku stosowanej w ramach niniejszego rozdziału gaussowskiej funkcji kowariancji (4.3) oznacza to wartość parametru $\omega_1 = \frac{\theta_v}{\sqrt{\pi}} = \frac{0,8}{\sqrt{\pi}} \approx 0,4514$. Dla uśrednienia jednowymiarowego wartości $\sqrt{\gamma(b)}$ na poszczególnych odcinkach linii poślizgu, przy powyższej wartości parametru ω_1 zestawiono w tabeli 4.1.

Tabela 4.1. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji zadaniu jednowymiarowym, przy parametrze $\omega_1 \approx 0,4514$ odpowiadającym pionowej skali fluktuacji $\theta_v = 0,8$ m

Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,752	0,836	0,648
1,4	0,711	0,806	0,608
1,6	0,676	0,779	0,574
1,8	0,645	0,754	0,545
2,0	0,617	0,731	0,520
2,2	0,592	0,710	0,499
2,4	0,571	0,690	0,480
2,6	0,551	0,673	0,462
2,8	0,534	0,656	0,446
3,0	0,517	0,641	0,432
3,2	0,503	0,627	0,419
3,4	0,489	0,614	0,408
3,6	0,478	0,602	0,398
3,8	0,464	0,591	0,387

Dla uśrednień dwuwymiarowych wartości poziomej skali fluktuacji były wielokrotnościami wartości skali pionowej. I tak w tabeli 4.2: $\theta_h = 3\theta_v = 2,4$ m, $\omega_2 = 3\omega_1$ (por zależności (4.4), co daje $\omega_2 \approx 1,3542$; w tabeli 4.3: $\theta_h = 10\theta_v = 8$ m, $\omega_2 = 10\omega_1$, co daje $\omega_2 \approx 4,514$, a w tabeli 4.4: $\theta_h = 30\theta_v = 24$ m, $\omega_2 = 30\omega_1$, co daje $\omega_2 \approx 13,542$.

W wynikach podanych w kolejnych czterech tabelach – od 4.5 do 4.8 – kąt tarcia wewnętrznego miał wartość $\varphi_1 = 18^\circ$, zaś pionowa skala fluktuacji miała wartość $\theta_v = 1,0$ m. Zarówno wartość kąta tarcia wewnętrznego, jak i wartość skali fluktuacji można uznać za dość typowe dla gruntu spoistego. Wynika stąd, że parametr ω_1 funkcji kowariancji pola osiągnął wartość $\omega_1 = \frac{\theta_v}{\sqrt{\pi}} = \frac{1,0}{\sqrt{\pi}} \approx 0,5642$. W tabeli 4.5 podano wartości $\sqrt{\gamma(b)}$ na poszczególnych odcinkach linii poślizgu, przy powyższej wartości parametru ω_1 .

Tabela 4.2. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym.
Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 0,8$ m, pozioma $\theta_h = 3\theta_v = 2,4$ m

$\theta_h = 3\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,747	0,825	0,608
1,4	0,706	0,794	0,569
1,6	0,671	0,766	0,537
1,8	0,640	0,741	0,509
2,0	0,613	0,718	0,485
2,2	0,588	0,697	0,465
2,4	0,567	0,678	0,446
2,6	0,547	0,660	0,430
2,8	0,529	0,644	0,415
3,0	0,513	0,629	0,402
3,2	0,499	0,615	0,390
3,4	0,485	0,602	0,379
3,6	0,473	0,590	0,369
3,8	0,461	0,579	0,359

Tabela 4.3. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym.
Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 0,8$ m, pozioma $\theta_h = 10\theta_v = 8$ m

$\theta_h = 10\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,751	0,834	0,644
1,4	0,710	0,804	0,604
1,6	0,675	0,776	0,570
1,8	0,644	0,751	0,541
2,0	0,616	0,728	0,517
2,2	0,592	0,708	0,495
2,4	0,570	0,688	0,476
2,6	0,551	0,670	0,459
2,8	0,533	0,654	0,443
3,0	0,517	0,639	0,429
3,2	0,502	0,625	0,416
3,4	0,489	0,612	0,405
3,6	0,476	0,600	0,394
3,8	0,464	0,588	0,384

Tabela 4.4. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym. Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 0,8$ m, pozioma $\theta_h = 30\theta_v = 24$ m

$\theta_h = 30\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,751	0,835	0,647
1,4	0,711	0,805	0,607
1,6	0,675	0,777	0,574
1,8	0,644	0,752	0,545
2,0	0,617	0,729	0,520
2,2	0,593	0,708	0,498
2,4	0,571	0,689	0,479
2,6	0,551	0,671	0,461
2,8	0,533	0,655	0,446
3,0	0,517	0,640	0,432
3,2	0,502	0,626	0,419
3,4	0,489	0,613	0,408
3,6	0,476	0,601	0,396
3,8	0,465	0,589	0,386

Dla uśrednień dwuwymiarowych wartości poziomej skali fluktuacji były, jak poprzednio, wielokrotnościami wartości skali pionowej. I tak w tabeli 4.6: $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m, $\omega_2 = 3\omega_1$ (por. zależności (4.4)), co daje $\omega_2 \approx 1,6926$; w tabeli 4.7: $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m, $\omega_2 = 10\omega_1$, co daje $\omega_2 \approx 5,642$, a w tabeli 4.8: $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m, $\omega_2 = 30\omega_1$, co daje $\omega_2 \approx 16,926$.

Wyniki zamieszczone w tabelach od 4.1 do 4.4 wskazują na istotną redukcję odchyłeń standardowych na wszystkich trzech rozpatrywanych odcinkach. Redukcja ta rośnie wraz ze wzrostem szerokości fundamentu. Wzrost ten powoduje wzrost długości poszczególnych odcinków linii poślizgu. Fakt ten jest konsekwencją ogólnych własności funkcji redukcji wariancji. Spośród trzech fragmentów linii poślizgu największą redukcję obserwuje się na odcinku CD.

W przypadku jednowymiarowym decyduje o tym maksymalna różnica rzędnych (współrzędnych pionowych) pomiędzy punktami danego fragmentu linii. W rozpatrywanym tu zadaniu maksymalne rzędne wynoszą przykładowo:

Dla $b = 1,2$ m; odcinek AB: $y_{\max} = 1,082$ m (w punkcie B); odcinek BC: $y_{\max} = 2,036$ m; odcinek CD: $y_{\max} = 1,601$ m (w punkcie C).

Dla $b = 3,8$ m; odcinek AB: $y_{\max} = 3,428$ m (w punkcie B); odcinek BC: $y_{\max} = 6,446$ m;
 odcinek CD: $y_{\max} = 5,07$ m (w punkcie C).

Daje to następujące maksymalne różnice w rzędnych:

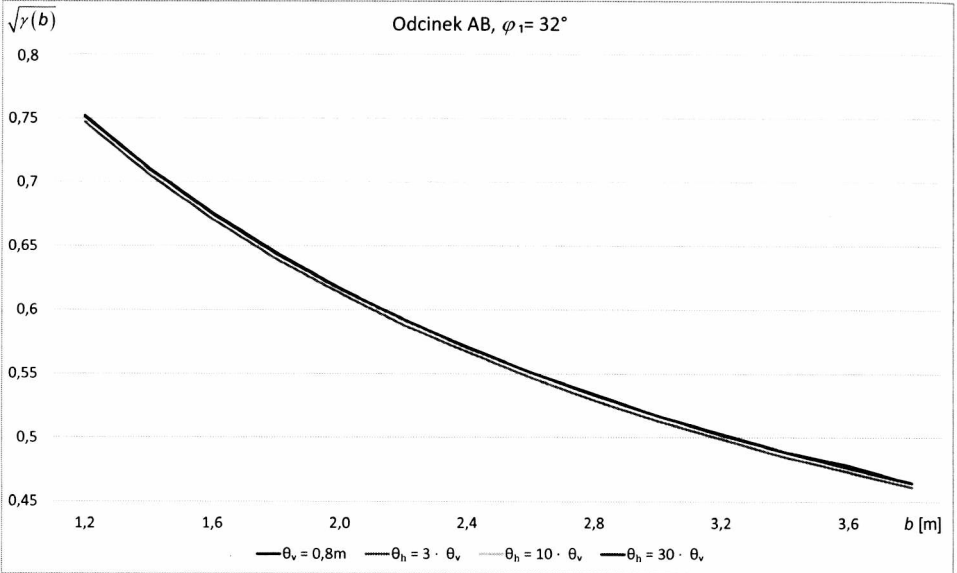
Dla $b = 1,2$ m; odcinek AB: 1,082 m; odcinek BC: 0,954 m; odcinek CD: 1,601 m.

Dla $b = 3,8$ m; odcinek AB: 3,482 m; odcinek BC: 2,964 m; odcinek CD: 5,07 m.

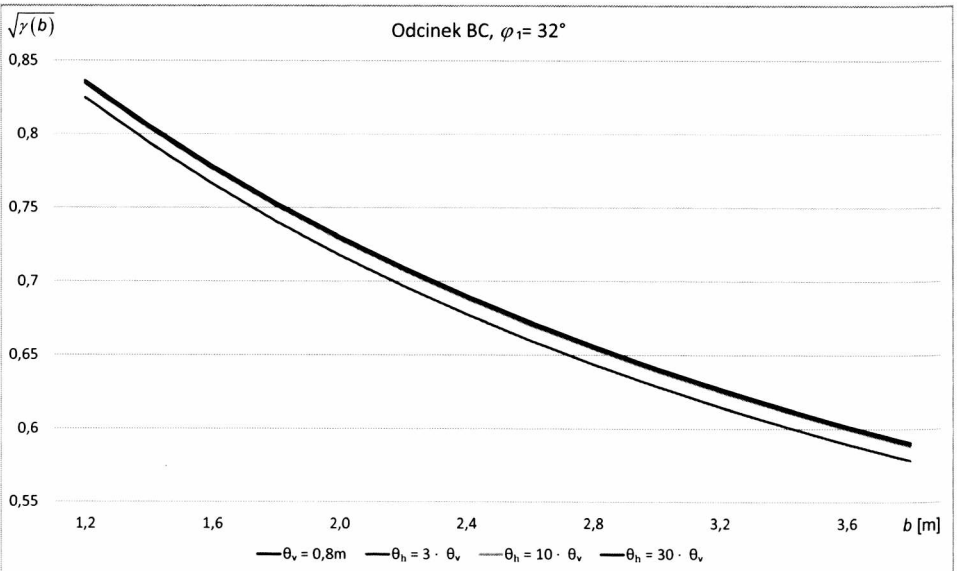
Te wyniki tłumaczą fakt, że największa redukcja występuje na odcinku CD, następnie na AB, najmniejsza zaś na łuku BC.

W przypadku dwuwymiarowym występuje „trend“ poziomy. Jest on jednak mniejszy, gdyż rozważane poziome skale fluktuacji są istotnie większe niż w przypadku poziomym (wolniejsze zmiany pola losowego), co spowodowało, że wzmiankowana wyżej tendencja w wielkości redukcji została zachowana.

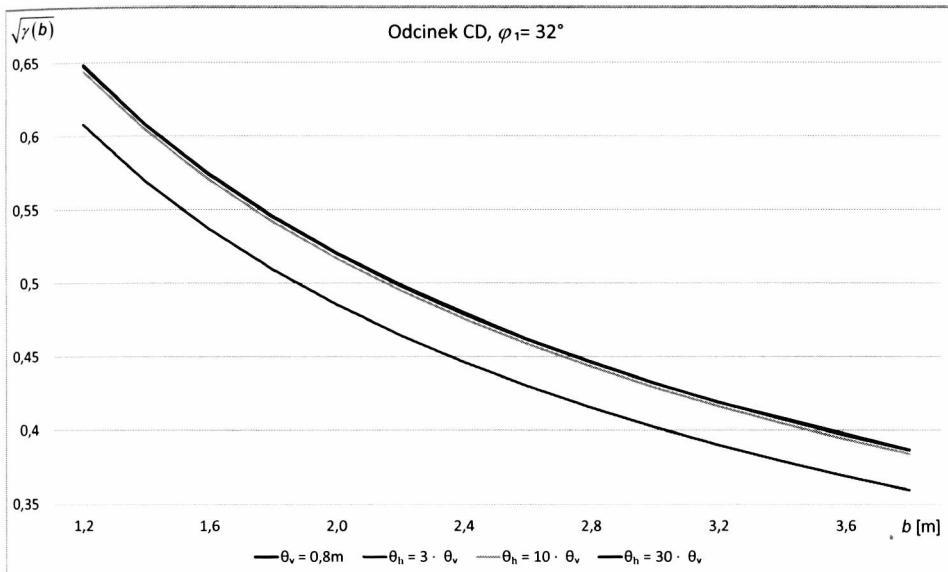
Generalnie jednak różnice pomiędzy wartościami funkcji wariancji (a w zasadzie pierwiastkami kwadratowymi tych wartości), przy ustalonej szerokości fundamentu, występujące na poszczególnych odcinkach linii poślizgu są niewielkie. Efekt ten pokazują rysunki 4.2, 4.3 oraz 4.4, na których pokazano zależność pierwiastka funkcji redukcji wariancji od szerokości fundamentu dla poszczególnych linii poślizgu rozpatrywanego mechanizmu. Rysunki te pokazują jednocześnie szybkość zbieżności redukcji wariancji (na poszczególnych odcinkach) do przypadku jednowymiarowego przy wzroście poziomej skali fluktuacji do nieskończoności. I tak rysunek 4.2 pokazuje zależność na odcinku AB, rysunek 4.3 – zależność na odcinku spirali logarytmicznej BC, zaś rysunek 4.4 – zależność na odcinku CD. Krzywe na kolejnych rysunkach niemal pokrywają się. Jedyne wyjątek stanowi krzywa na rysunku 4.4, odpowiadająca poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 3\theta_v = 2,4$ m. W tym przypadku, także ze względu na większy rozmiar linii, istotna jest stosunkowo niewielka wartość poziomej skali fluktuacji. W pozostałych przypadkach wzrost skali poziomej zbliża wartości funkcji wariancji do tych z przypadku jednowymiarowego. Jak wykazano bowiem w punkcie 4.1.2, dla odcinków prostoliniowych wariancje w przypadku dwuwymiarowym są zbieżne do odpowiednich wariancji z przypadku jednowymiarowego, gdy parametr ω_2 rośnie do nieskończoności (wzory (4.37) i (4.44)). Efekt zbieżności jest także dobrze widoczny, gdy bezpośrednio porówna się odpowiadające sobie (tzn. dla tych samych szerokości fundamentu oraz tych samych odcinków) wartości pierwiastka funkcji wariancji. Są to zatem rezultaty zgodne z oczekiwaniami.



Rys. 4.2. Zależność pierwiastka funkcji wariancji, $\sqrt{\gamma(b)}$, od szerokości fundamentu na odcinku AB



Rys. 4.3. Zależność pierwiastka funkcji wariancji, $\sqrt{\gamma(b)}$, od szerokości fundamentu na odcinku BC



Rys. 4.4. Zależność $\sqrt{\gamma(b)}$ dla odcinka CD odszerokości fundamentu na odcinku BC, dla odcinka CD

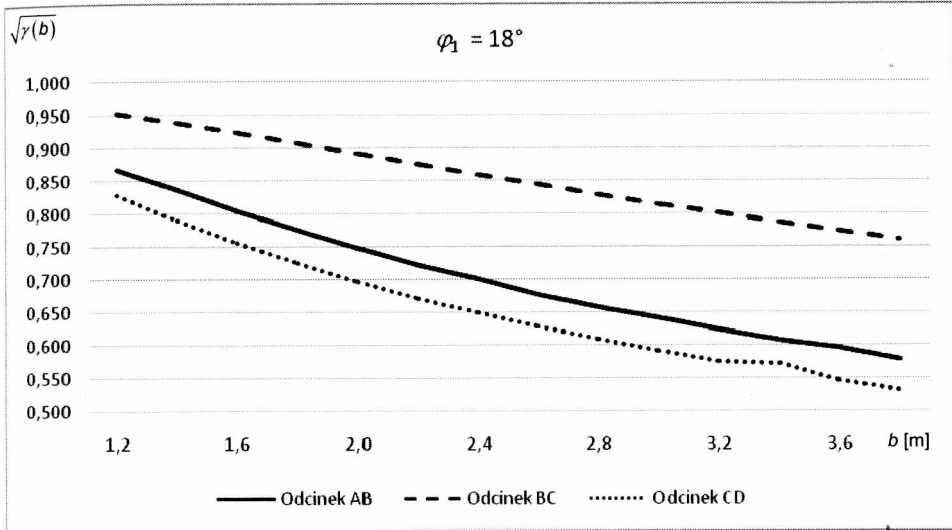
Tabela 4.5. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu jednowymiarowym, przy parametrze $\omega_1 \approx 0,5642$ odpowiadającym pionowej skali fluktuacji $\theta_v = 1,0 m$

Szerokość fundamentu $b [m]$	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,868	0,953	0,828
1,4	0,836	0,939	0,789
1,6	0,804	0,923	0,756
1,8	0,774	0,907	0,726
2,0	0,747	0,891	0,696
2,2	0,721	0,876	0,671
2,4	0,700	0,860	0,649
2,6	0,677	0,844	0,628
2,8	0,658	0,829	0,609
3,0	0,641	0,814	0,592
3,2	0,624	0,800	0,575
3,4	0,607	0,787	0,573
3,6	0,596	0,774	0,546
3,8	0,579	0,761	0,533

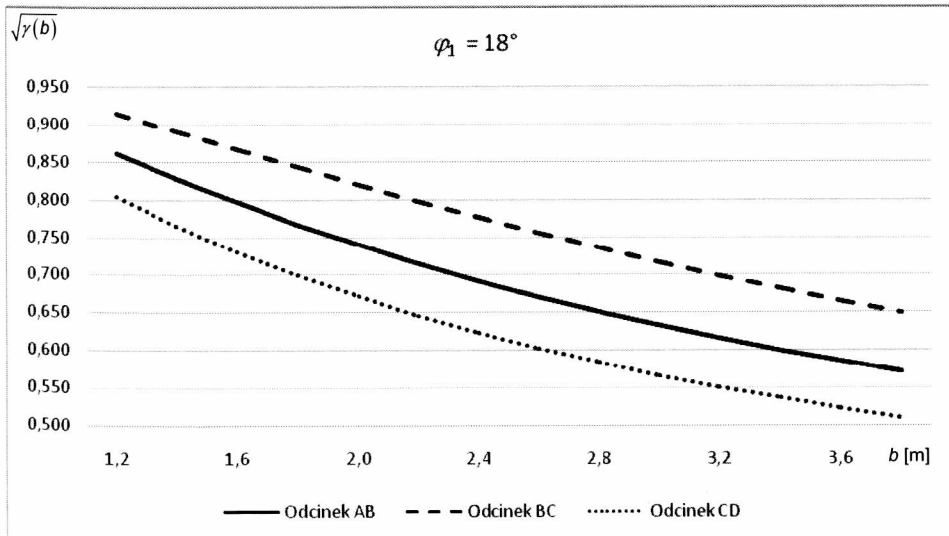
Tabela 4.6. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym. Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m, pozioma $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m ($\omega_1 \approx 0,5642$)

$\theta_h = 3\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,862	0,915	0,804
1,4	0,829	0,891	0,766
1,6	0,797	0,867	0,731
1,8	0,767	0,843	0,700
2,0	0,740	0,820	0,671
2,2	0,715	0,798	0,646
2,4	0,691	0,776	0,624
2,6	0,670	0,756	0,603
2,8	0,651	0,736	0,584
3,0	0,633	0,717	0,567
3,2	0,616	0,699	0,551
3,4	0,600	0,682	0,537
3,6	0,586	0,666	0,523
3,8	0,573	0,650	0,511

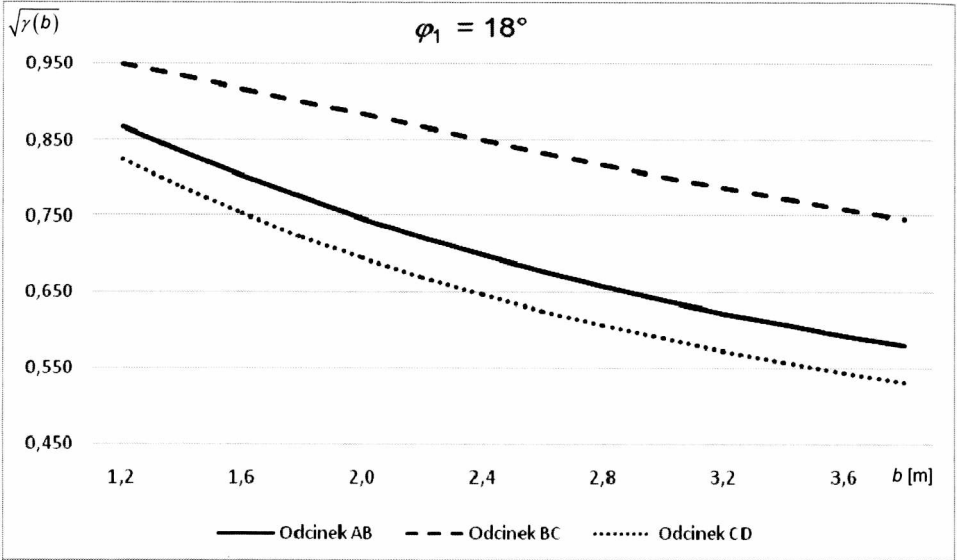
W przypadku skali fluktuacji $\theta_v = 1,0$ mm oraz kąta tarcia wewnętrznego $\varphi_1 = 18^\circ$ uzyskane rezultaty zamieszczono w tabelach od 4.5 do 4.8. Ponadto na rysunkach od 4.5 do 4.8 zamieszczono wykresy pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji, $\sqrt{\gamma(b)}$, w zależności od szerokości fundamentu b , kolejno dla uśrednienia jednowymiarowego $\theta_v = 1,0$ m (rys. 4.5), poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m (rys. 4.6), poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m (rys. 4.7) oraz poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m (rys. 4.8).



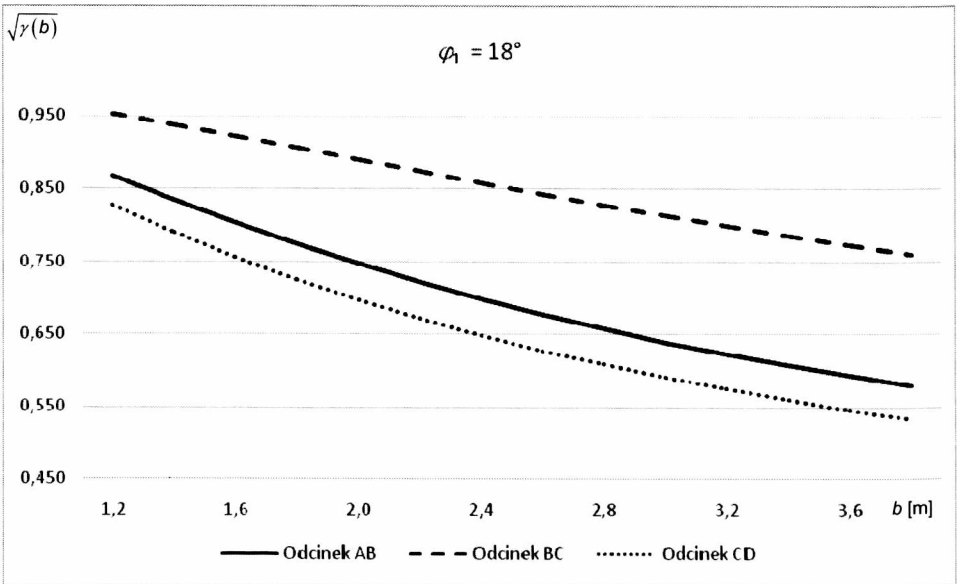
Rys. 4.5. Zależność $\sqrt{\gamma(b)}$ od szerokości fundamentu b dla poszczególnych odcinków linii poślizgu. Przypadek uśrednienia jednowymiarowego, $\theta_v = 1,0$ m



Rys. 4.6. Zależność $\sqrt{\gamma(b)}$ od szerokości fundamentu b dla poszczególnych odcinków linii poślizgu. Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 3\theta_v = 3$ m



Rys. 4.7. Zależność $\sqrt{\gamma(b)}$ od szerokości fundamentu b dla poszczególnych odcinków linii poślizgu. Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m



Rys. 4.8. Zależność $\sqrt{\gamma(b)}$ od szerokości fundamentu b dla poszczególnych odcinków linii poślizgu. Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m

We wszystkich przypadkach funkcja $\sqrt{\gamma(b)}$ jest malejąca. Wszystkie cztery przypadki mają zbliżony do siebie przebieg, choć oczywiście wartości są różne w zależności od przyjętej poziomej skali fluktuacji. W przypadku wyników podanych w tabelach od 4.5 do 4.8 i zilustrowanych na rysunkach od 4.5 do 4.8 można sformułować identyczne wnioski, jak miało to miejsce dla wyników zamieszczonych w tabelach od 4.1 do 4.4. Należy jednak odnotować, że w przypadku gruntu o mniejszej wartości kąta tarcia wewnętrznego (tabele od 4.5 do 4.8) redukcje odchyłeń standardowych są mniejsze (procentowo w stosunku do wartości początkowej) niż w przypadku gruntu o większej wartości kąta tarcia wewnętrznego (tabele od 4.1 do 4.4). Wynika to z faktu, że funkcja wariancji w rozpatrywanych zadaniach zależy od średniej wartości kąta tarcia wewnętrznego, która determinuje geometrię krzywych poślizgu.

Tabela 4.7. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym. Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m, pozioma $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m ($\omega_1 \approx 0,5642$)

$\theta_h = 10\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,867	0,950	0,824
1,4	0,834	0,934	0,787
1,6	0,803	0,918	0,753
1,8	0,774	0,901	0,722
2,0	0,747	0,884	0,694
2,2	0,721	0,867	0,669
2,4	0,699	0,850	0,646
2,6	0,677	0,833	0,625
2,8	0,657	0,817	0,606
3,0	0,639	0,802	0,589
3,2	0,623	0,787	0,573
3,4	0,607	0,773	0,558
3,6	0,593	0,759	0,544
3,8	0,579	0,746	0,531

Tabela 4.8. Wartości pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji w zadaniu dwuwymiarowym. Pionowa skala fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m, pozioma $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m ($\omega_1 \approx 0,5642$)

$\theta_h = 30\theta_v$			
Szerokość fundamentu b [m]	$\sqrt{\gamma(b)}$		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	0,867	0,953	0,827
1,4	0,835	0,938	0,790
1,6	0,804	0,923	0,756
1,8	0,774	0,907	0,724
2,0	0,747	0,891	0,697
2,2	0,722	0,874	0,671
2,4	0,699	0,859	0,648
2,6	0,678	0,843	0,627
2,8	0,658	0,828	0,608
3,0	0,638	0,813	0,591
3,2	0,623	0,799	0,574
3,4	0,607	0,786	0,560
3,6	0,593	0,772	0,546
3,8	0,579	0,760	0,533

4.2.2. Współczynniki korelacji

Wprowadzone w podrozdziale 4.1 wzory dają też, poprzez całkowanie numeryczne, możliwość przybliżonego obliczenia współczynników korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi otrzymanymi w wyniku uśrednienia wzdłuż poszczególnych odcinków linii poślizgu w mechanizmie Prandtla. Dla dalszych obliczeń istotna jest przede wszystkim zależność od szerokości fundamentu b . W tym punkcie zademonstrowane będą wartości współczynników korelacji odpowiadających przypadkom funkcji redukcji wariancji podanym w punkcie 4.2.1. Przyjmując wartość kąta tarcia wewnętrznego równą $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz wartość pionowej skali fluktuacji równą $\theta_v = 0,8$ m, można otrzymać wartości współczynników korelacji $\rho(X_{AB}, X_{BC})$, $\rho(X_{BC}, X_{CD})$ oraz $\rho(X_{AB}, X_{CD})$ korespondujące z wartościami pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji podanymi w tabelach od 4.1 do 4.4.

Tabela 4.9. Współczynniki korelacji w zadaniu jednowymiarowym $\omega_1 \approx 0,4514$ i dwuwymiarowym $\theta_h = 3\theta_v$

Szerokość fundamentu b [m]	$\theta_v = 0,8 \text{ m}; \varphi_1 = 32^\circ$					
	Przypadek jednowymiarowy			Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 3\theta_v$		
	$\rho(X_{AB}, X_{BC})$	$\rho(X_{BC}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{BC})$	$\rho(X_{BC}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{CD})$
1,2	5,534 E-02	0,365	0,896	4,779 E-02	4,308 E-05	3,747 E-05
1,4	4,133 E-02	0,337	0,887	3,585 E-02	2,836 E-06	1,431 E-06
1,6	3,289 E-02	0,314	0,878	2,784 E-02	1,300 E-07	3,664 E-08
1,8	2,738 E-02	0,296	0,871	2,205 E-02	4,117 E-09	6,244 E-10
2,0	2,351 E-02	0,282	0,866	1,766 E-02	8,979 E-11	7,029 E-12
2,2	2,070 E-02	0,269	0,862	1,423 E-02	1,347 E-12	5,202 E-14
2,4	1,843 E-02	0,259	0,857	1,150 E-02	1,387 E-14	2,520 E-16
2,6	1,659 E-02	0,251	0,855	9,293 E-03	9,814 E-17	7,966 E-19
2,8	1,509 E-02	0,243	0,852	7,960 E-03	4,767 E-19	1,640 E-21
3,0	1,384 E-02	0,238	0,851	6,026 E-03	1,590 E-21	2,194 E-24
3,2	1,276 E-02	0,232	0,849	4,824 E-03	3,640 E-24	1,904 E-27
3,4	1,182 E-02	0,227	0,845	3,841 E-03	5,721 E-27	1,071 E-30
3,6	1,100 E-02	0,224	0,842	3,041 E-03	6,175 E-30	3,897 E-34
3,8	1,033 E-02	0,221	0,844	2,391 E-03	4,578 E-33	9,172 E-38

Tabela 4.10. Współczynniki korelacji w zadaniu dwuwymiarowym $\theta_h = 10\theta_v$ i $\theta_h = 30\theta_v$ ($\omega_1 \approx 0,4514$)

Szerokość fundamentu b [m]	$\theta_v = 0,8 \text{ m}; \varphi_1 = 32^\circ$					
	Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 10\theta_v$			Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 30\theta_v$		
	$\rho(X_{AB}, X_{BC})$	$\rho(X_{BC}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{BC})$	$\rho(X_{BC}, X_{CD})$	$\rho(X_{AB}, X_{CD})$
1,2	5,381 E-02	0,113	0,275	5,536 E-02	0,317	0,785
1,4	4,033 E-02	7,483 E-02	0,176	4,131 E-02	0,279	0,737
1,6	3,225 E-02	4,898 E-02	0,106	3,296 E-02	0,247	0,689
1,8	2,687 E-02	3,147 E-02	0,061	2,748 E-02	0,220	0,640
2,0	2,299 E-02	1,976 E-02	0,033	2,359 E-02	0,196	0,590
2,2	2,003 E-02	1,207 E-02	0,017	2,068 E-02	0,175	0,541
2,4	1,769 E-02	7,139 E-03	7,988 E-03	1,839 E-02	0,157	0,493
2,6	1,579 E-02	4,080 E-03	3,665 E-03	1,655 E-02	0,141	0,446
2,8	1,420 E-02	2,249 E-03	1,600 E-03	1,504 E-02	0,126	0,401
3,0	1,286 E-02	1,194 E-03	6,657 E-04	1,376 E-02	0,113	0,357
3,2	1,171 E-02	6,104 E-04	2,641 E-04	1,268 E-02	0,101	0,316
3,4	1,071 E-02	3,002 E-04	9,997 E-05	1,174 E-02	0,090	0,277
3,6	9,835 E-03	1,420 E-04	3,610 E-05	1,092 E-02	0,080	0,242
3,8	9,061 E-03	6,466 E-05	1,244 E-05	1,021 E-02	0,071	0,210

Analizując obliczone wartości współczynników korelacji należy od razu odnotować, że w przypadku stosunkowo niedużej poziomej skali fluktuacji ($\theta_h = 3\theta_v$) korelacje pomiędzy uśrednionymi zmiennymi są bardzo niewielkie (wręcz pomijalne). Jest to konsekwencja szybkiego spadku korelacji ze wzrostem odległości pomiędzy środkami ciężkości poszczególnych fragmentów linii poślizgu. Natomiast w przypadku jednowymiarowym, a także dwuwymiarowym przy dużej wartości parametru ω_2 , warto zwrócić uwagę na znaczne wartości współczynników korelacji pomiędzy kątami tarcia na odcinkach AB i CD. Współczynniki te są istotnie większe od pozostałych, zwłaszcza od współczynników na odcinkach AB i BC. Ten na pozór paradoksalny rezultat staje się jasny, gdy zdamy sobie sprawę z tego, że w przypadku jednowymiarowym o korelacji decyduje nie tyle ich wzajemna odległość, ile wzajemne położenie rzędnych. Łatwo zauważyć (por. rys. 4.1, a także podane w punkcie 4.2.1 wartości rzędnych), że rzędne środków ciężkości odcinków AB oraz CD są do siebie najbardziej zbliżone i stąd ich mocne skorelowanie. Przy niewielkich wartościach parametru θ_h ($\theta_h = 3\theta_v$ w tabeli 4.9) współczynniki korelacji zmiennych X_{AB} , X_{CD} są mniejsze od pozostałych. Sytuacja zmienia się wraz ze wzrostem wartości θ_h , gdyż podobnie jak w przypadku wariancji, także i tu obserwuje się zbieżność do przypadku jednowymiarowego. Stąd dla $\theta_h = 30\theta_v$ tendencja jest już taka sama jak w przypadku jednowymiarowym. Widać też, że zbieżność nie jest już tak szybka jak dla pierwiastka kwadratowego funkcji wariancji, przy czym najszybciej zbiegają współczynniki korelacji $\rho(X_{AB}, X_{BC})$, w dalszej kolejności współczynniki $\rho(X_{BC}, X_{CD})$, a najwolniej współczynniki $\rho(X_{AB}, X_{CD})$. Ponadto zbieżność jest tym szybsza, im mniejsza szerokość fundamentu b . Ze względu na duży rozrzut rezultatów oraz występujące w wielu przypadkach bardzo małe wartości współczynników korelacji, zrezygnowano z ich prezentacji graficznej (w postaci wykresów).

W ostatnich dwóch tabelach (4.11 oraz 4.12) zamieszczono wartości współczynników korelacji $\rho(X_{AB}, X_{BC})$, $\rho(X_{BC}, X_{CD})$ oraz $\rho(X_{AB}, X_{CD})$ przy założeniu, że wartość kąta tarcia wewnętrznego równa jest $\varphi_1 = 18^\circ$, zaś pionowa skala fluktuacji ma wartość $\theta_v = 1$ m.

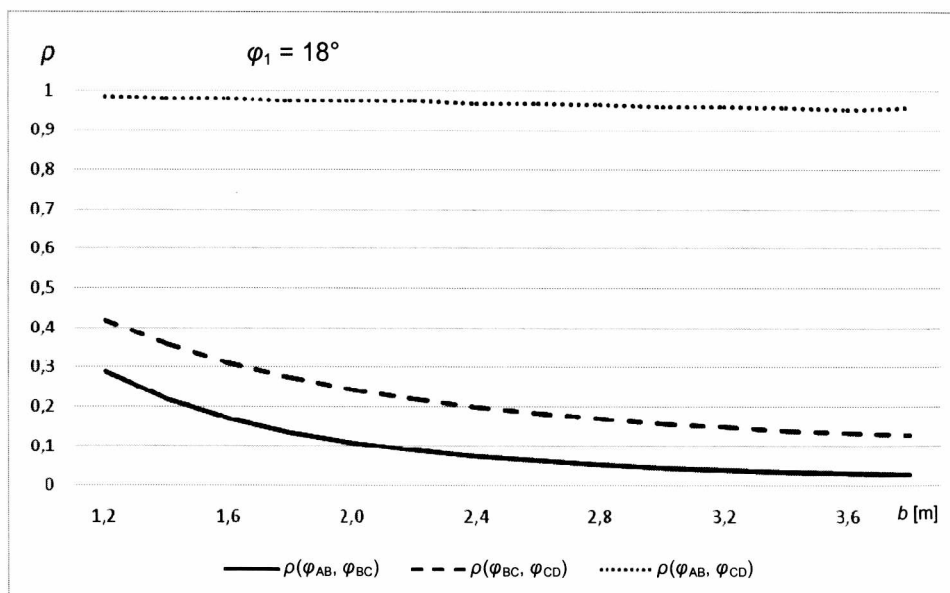
Tabela 4.11. Współczynniki korelacji w zadaniu jednowymiarowym $\omega_1 \approx 0,5642$
i dwuwymiarowym $\theta_h = 3\theta_v$

Szerokość fundamentu b [m]	$\theta_v = 1,0 \text{ m}; \varphi_1 = 18^\circ$					
	Przypadek jednowymiarowy			Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 3\theta_v$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	0,288	0,419	0,984	0,250	0,064	0,1512
1,4	0,220	0,358	0,981	0,184	0,037	7,790 E-02
1,6	0,171	0,310	0,979	0,138	0,021	3,679 E-02
1,8	0,135	0,273	0,975	0,105	0,012	1,590 E-02
2,0	0,109	0,244	0,975	0,082	7,156 E-03	6,312 E-03
2,2	0,089	0,220	0,974	0,065	4,038 E-03	2,306 E-03
2,4	0,074	0,200	0,966	0,052	2,224 E-03	7,772 E-04
2,6	0,063	0,183	0,967	0,042	1,191 E-03	2,421 E-04
2,8	0,054	0,170	0,964	0,035	6,189 E-04	6,986 E-05
3,0	0,047	0,158	0,959	0,029	3,113 E-04	1,868 E-05
3,2	0,041	0,149	0,959	0,025	1,513 E-04	4,635 E-06
3,4	0,037	0,138	0,938	0,021	7,102 E-05	1,067 E-06
3,6	0,033	0,134	0,952	0,018	3,215 E-05	2,280 E-07
3,8	0,030	0,128	0,956	0,015	1,403 E-05	4,518 E-08

Tabela 4.12. Współczynniki korelacji w zadaniu dwuwymiarowym $\theta_h = 10\theta_v$ i $\theta_h = 30\theta_v$ ($\omega_1 \approx 0,5642$)

Szerokość fundamentu b [m]	$\theta_v = 1,0 \text{ m}; \varphi_1 = 18^\circ$					
	Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 10\theta_v$			Przypadek dwuwymiarowy $\theta_h = 30\theta_v$		
	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$	$\rho(\varphi_{BC}, \varphi_{CD})$	$\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$
1,2	0,284	0,336	0,821	0,288	0,409	0,965
1,4	0,216	0,270	0,766	0,220	0,346	0,955
1,6	0,167	0,219	0,706	0,170	0,298	0,944
1,8	0,131	0,179	0,645	0,135	0,260	0,932
2,0	0,104	0,149	0,583	0,108	0,229	0,919
2,2	0,085	0,124	0,521	0,088	0,205	0,906
2,4	0,070	0,105	0,462	0,074	0,184	0,891
2,6	0,059	0,090	0,405	0,062	0,167	0,876
2,8	0,050	0,077	0,351	0,053	0,153	0,860
3,0	0,044	0,067	0,301	0,047	0,141	0,844
3,2	0,038	0,058	0,256	0,041	0,131	0,827
3,4	0,034	0,051	0,216	0,037	0,122	0,809
3,6	0,030	0,045	0,180	0,033	0,115	0,791
3,8	0,028	0,040	0,149	0,029	0,108	0,773

W tym przypadku wyniki pokazano także w postaci wykresów. I tak rysunki od 4.9 do 4.12 przedstawiają wykresy współczynników korelacji pomiędzy zmiennymi losowymi otrzymanymi w wyniku uśrednienia wzdłuż poszczególnych linii poślizgu jako funkcji szerokości fundamentu b , kolejno dla uśrednienia jednowymiarowego $\theta_v = 1$ m (rys. 4.9), poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m (rys. 4.10), poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m (rys. 4.11) oraz poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m (rys. 4.12).

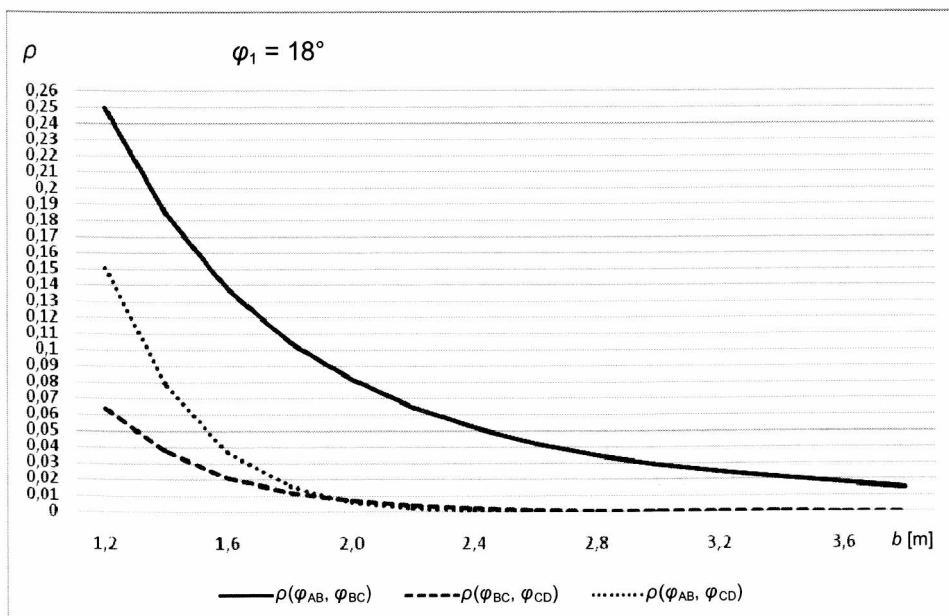


Rys. 4.9. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż poszczególnych odcinków linii poślizgu z zależności od szerokości fundamentu b . Przypadek uśrednienia jednowymiarowego, $\theta_v = 1,0$ m

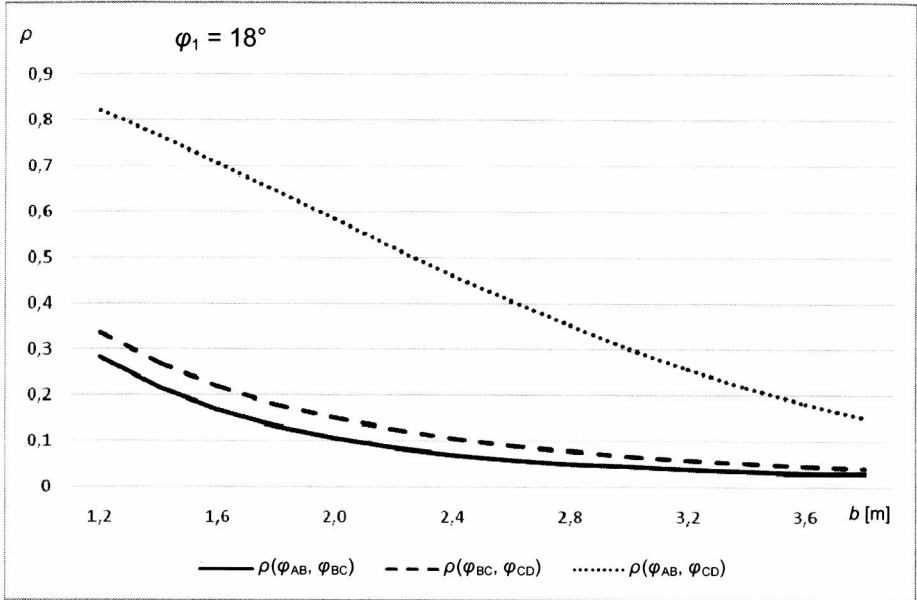
Warto odnotować, że w przypadku uśrednienia jednowymiarowego korelacja pomiędzy uśrednionymi zmiennymi na odcinkach AB oraz CD jest bardzo duża i praktycznie nie zależy od szerokości fundamentu. Wynika to z bliskiego położenia rzędnych środków ciężkości rzędnych odcinków AB i CD, na co zwrócono już uwagę przy analizie wyników dla kąta $\varphi_1 = 32^\circ$ (tabela 4.9). Podobną cechą można zauważyć na rysunku 4.12, co z kolei wynika ze zbieżności rezultatów przy dążącej do nieskończoności poziomej skali fluktuacji, do przypadku jednowymiarowego. Innym interesującym efektem jest zmiana wza-

jemnego położenia krzywych odpowiadających poszczególnym odcinkom widoczna na rysunku 4.10 (przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m) w stosunku do trzech pozostałych przypadków (rysunki: 4.9, 4.11, 4.12). Wynika ona z istotnej różnicy pomiędzy jednowymiarowym uśrednieniem a uśrednieniem dwuwymiarowym o zróżnicowanych skalach fluktuacji (pionowej i stosunkowo niewielkiej poziomej). Widać stąd, że rozpatrywanie anizotropowego pola losowego określonego na obszarze dwuwymiarowym prowadzi do innych rezultatów w stosunku do podejścia jednowymiarowego i może mieć istotne konsekwencje dla analizy bezpieczeństwa fundamentu. Zagadnienie to będzie szerzej analizowane w rozdziale 5.

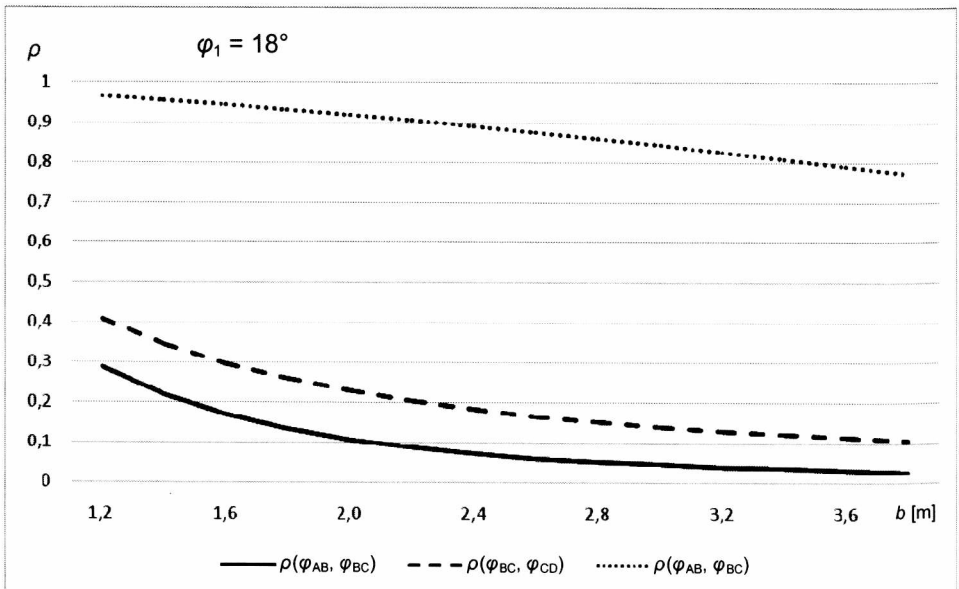
Trzy kolejne rysunki (4.13–4.15) pokazują wykresy współczynnika korelacji w funkcji szerokości fundamentu, przy czym każdy rysunek odpowiada jednemu odcinkowi, a krzywe na nim zamieszczone dotyczą kolejnych wartości poziomej skali fluktuacji. Rysunki te mają na celu pokazanie szybkości zbieżności do przypadku jednowymiarowego, która ma miejsce wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji.



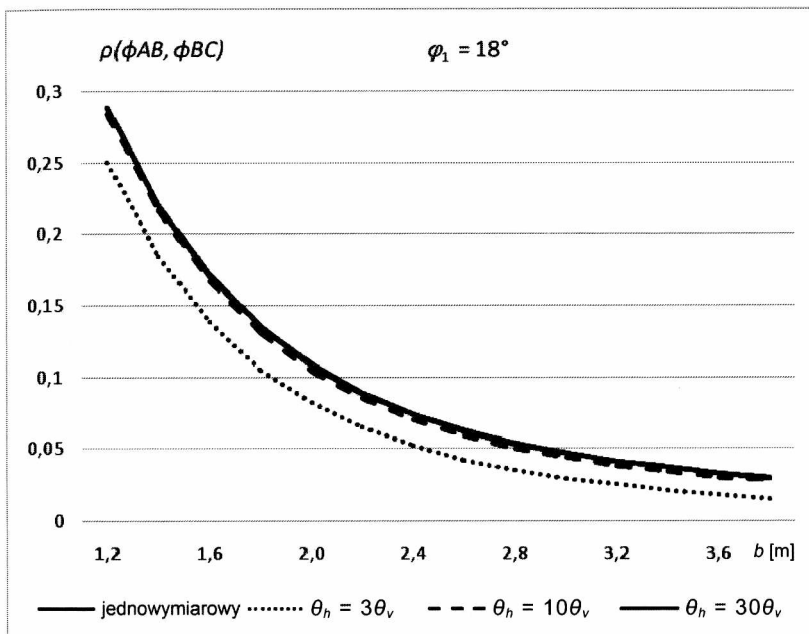
Rys. 4.10. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż poszczególnych odcinków linii poślizgu w zależności od szerokości fundamentu b . Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m



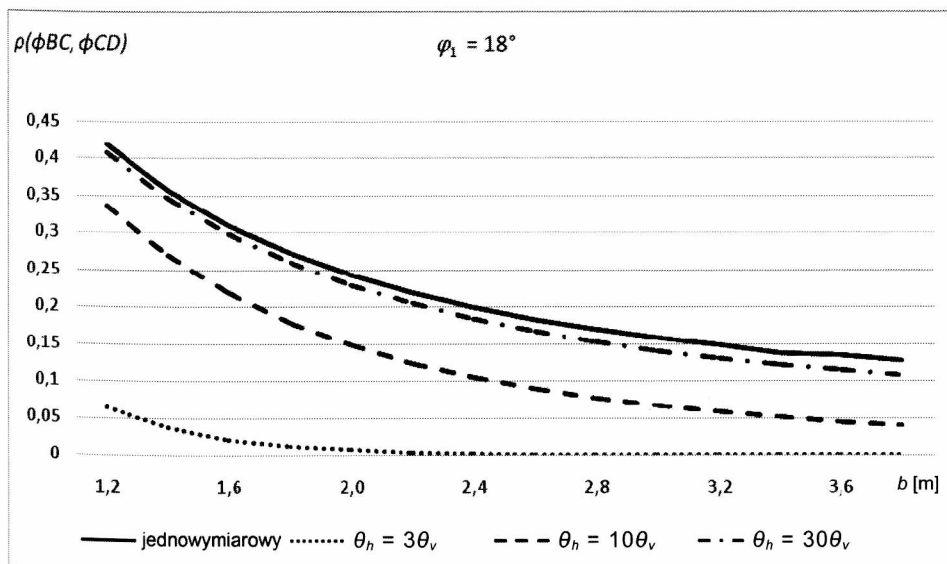
Rys. 4.11. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż poszczególnych odcinków linii poślizgu w zależności od szerokości fundamentu b . Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m



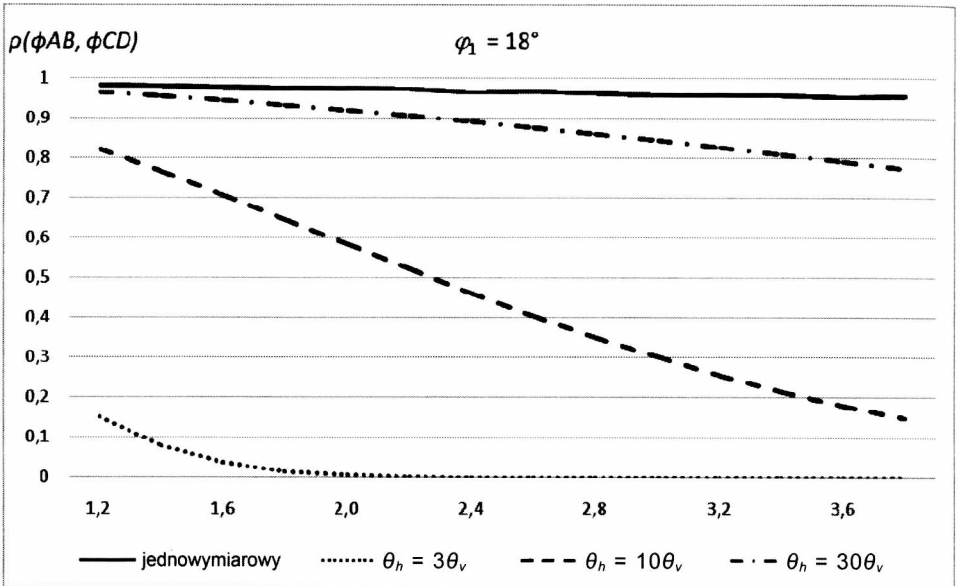
Rys. 4.12. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż poszczególnych odcinków linii poślizgu w zależności od szerokości fundamentu b . Przypadek uśrednienia dwuwymiarowego, $\theta_h = 30\theta_v = 30$ m



Rys. 4.13. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż linii odcinków AB oraz BC w zależności od szerokości fundamentu b dla różnych wartości poziomej skali fluktuacji



Rys. 4.14. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż linii odcinków BC oraz CD w zależności od szerokości fundamentu b dla różnych wartości poziomej skali fluktuacji



Rys. 4.15. Współczynniki korelacji zmiennych losowych, uzyskanych poprzez uśrednienie pola wzdłuż linii odcinków AB oraz CD w zależności od szerokości fundamentu b dla różnych wartości poziomej skali fluktuacji

Rysunki od 4.13 do 4.15 wyraźnie wskazują, że szybkość zbieżności poszczególnych współczynników korelacji do przypadku jednowymiarowego nie jest jednakoowa. Najszybciej zbiegają wartości współczynników $\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$, zaś dużo wolniej współczynniki $\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{CD})$. Podobnie jak poprzednio, najbardziej wyróżniającym się przypadkiem jest przypadek uśrednienia dwuwymiarowego przy $\theta_h = 3\theta_v = 3,0$ m.

Współczynniki korelacji podane w tabelach 4.11 oraz 4.12, uzyskane dla wartości kąta tarcia wewnętrznego równej $\varphi_1 = 18^\circ$ oraz pionowej skali fluktuacji $\theta_v = 1$ m, są większe aniżeli w przypadku podłoża o parametrach $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz $\theta_v = 0,8$ m. Wynika to przede wszystkim z przyjęcia większych wartości skali fluktuacji, a także mniejszej wartości średniej kąta tarcia wewnętrznego. Generalne tendencje zmian są jednak identyczne jak w przypadku $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz $\theta_v = 0,8$ m. W przypadku stosunkowo niedużej poziomej skali fluktuacji $\theta_h = 3\theta_v$ korelacje pomiędzy uśrednionymi zmiennymi są nadal niewielkie, aczkolwiek istotnie większe niż w ośrodku o parametrach $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz $\theta_v = 0,8$ m. Podobnie jak w poprzednim przypadku (i z tej samej przyczyny) obserwuje się efekt bardzo silnej korelacji pomiędzy zmiennymi X_{AB} oraz X_{CD} w przypadku jednowymiarowym.

Szybkość zbieżności wartości współczynników korelacji do współczynników z zadania jednowymiarowego, przy wzrastającej wartości poziomej skali fluktuacji, jest większa niż w przypadku $\varphi_1 = 32^\circ$ oraz $\theta_v = 0,8$ m, $\rho(\varphi_{AB}, \varphi_{BC})$. Podobnie jak poprzednio, zbieżność jest tym szybsza, im mniejsza szerokość fundamentu b .

4.3. Formuła określająca nośność w przypadku stałej linii poślizgu

W wyniku uśrednień parametrów wytrzymałościowych opisanych w poprzednich podrozdziałach otrzymuje się sześć zmiennych losowych: $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przy czym φ_1, c_1 wynikają z uśrednienia wzdłuż linii AB, φ_2, c_2 – wzdłuż BC, zaś φ_3, c_3 – wzdłuż CD (rys. 4.1). Wariancje tych zmiennych i kowariancje pomiędzy nimi wynikają z rezultatów uzyskanych w podrozdziałach 4.1 i 4.2. Kolejnym etapem jest określenie obciążenia granicznego q_f dla fundamentu pasmowego, wynikające z kinematycznie dopuszczalnego mechanizmu Prandtla. W związku z tym, że na każdym z odcinków AB, BC i CD występują inne wartości kąta tarcia wewnętrznego oraz spójności, zadanie różni się więc od klasycznego. Zadanie przebiegać będzie w dwóch etapach. W pierwszym przyjęte będzie założenie, że linia poślizgu jest stała i zdeterminowana przez wartość oczekiwaną $E[\varphi_1]$, czyli kąta tarcia wewnętrznego gruntu znajdującego się bezpośrednio pod fundamentem (por. rys. 4.1). W drugim etapie (podrozdział 4.6) rozpatrzmy zadanie ze zmienną linią poślizgu. Do wyprowadzenia wzoru określającego nośność q_f , przy zadanej linii poślizgu, zastosowana zostanie procedura zaproponowana w monografii Izbickiego i Mroza (1976). Procedurę tę należy jednak zmodyfikować w związku z wystąpieniem różnych zmiennych losowych φ_i, c_i ($i = 1, 2, 3$) wzdłuż poszczególnych linii poślizgu AB, BC, i CD, gdyż procedura podana przez Izbickiego i Mroza dotyczy jednakowych parametrów na wszystkich odcinkach linii poślizgu.

Rozważa się najpierw nieważki ośrodek spoisty, w którym przez porównanie mocy obciążeń zewnętrznych z mocą dyssypacji wewnętrznej, otrzymuje się następujące równanie (oznaczenia jak na rysunku 4.1):

$$\begin{aligned}
 q_f b v_0 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) &= \\
 &= c_1 b v_0 \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + c_2 b v_0 \left[\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) - 1\right] \frac{\operatorname{ctg} \varphi_2}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + \\
 &+ c_3 b v_0 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{\cos \varphi_3}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}, \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

gdzie

$$v_0 = \frac{v_F}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}, \quad (4.54)$$

przy czym v_F jest prędkością przesuwania się sztywnego klina ABA pionowo w dół. Kolejne wyrazy po prawej stronie wzoru (4.53) określają moc dyssypowaną na linii AB, w obszarze ABC wraz z linią BC oraz na linii CD. Dla ważkiego ośrodka Coulomba do lewej strony równania (4.53) należy dodać moce sił ciężkości, według następujących zależności:

$$L_{ABE} = \frac{1}{4} \gamma b^2 v_0 \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right), \quad (4.55)$$

$$L_{ABC} = -\frac{1}{2(1+9\operatorname{tg}^2\varphi_2)} \gamma v_0 \left(\frac{b}{2 \sin\left(\frac{\pi - \varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)^2 \times \\ \times \left\{ \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) + \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \right\}, \quad (4.56)$$

$$L_{ACD} = -\frac{1}{2} \gamma \left(\frac{b}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}\right)^2 v_0 \cos \varphi_3 \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right). \quad (4.57)$$

W przypadku obciążenia q na naziemiu obok fundamentu oraz zagłębienia fundamentu na głębokość D_{\min} i ciężarze objętościowym zasypki γ_1 do lewej strony wzoru (4.53) dodaje się jeszcze moc rozwijaną przez nacisk obok fundamentu (q oraz $D_{\min} \gamma_1$), mianowicie:

$$L_q = -(q + \gamma_1 D_{\min}) b v_0 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}. \quad (4.58)$$

Uwzględniając teraz, zgodnie ze sformułowanymi wyżej sugestiami, zależności (4.55)–(4.58) we wzorze (4.53) oraz przyjmując oznaczenie $Q_f = q_f b$,

a następnie dokonując redukcji wyrażeń, otrzymuje się następujące wyrażenie na nośność graniczną:

$$Q_f = \frac{bQ'_f}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}, \quad (4.59)$$

gdzie

$$\begin{aligned} Q'_f = & c_1 \frac{\cos \varphi_1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + c_2 [\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) - 1] \frac{1}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \operatorname{tg} \varphi_2} + \\ & + c_3 \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \frac{\cos \varphi_3}{2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + \\ & + (q + \gamma_1 D_{\min}) \exp(\pi \operatorname{tg} \varphi_2) \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} + \\ & + b \left[-\frac{1}{4} \gamma \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] + \frac{b\gamma}{2(1+9\operatorname{tg}^2 \varphi_2) 4 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)} \times \\ & \times \left\{ \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \exp\left(\frac{3}{2} \pi \operatorname{tg} \varphi_2\right) + \left[3 \operatorname{tg} \varphi_2 \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right) \right] \right\} + \\ & + b \frac{\gamma \cos \varphi_3 \exp\left(\pi \frac{3}{2} \operatorname{tg} \varphi_2\right) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi_1}{2} - \varphi_3\right)}{8 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_1}{2}\right)}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Podobnie jak w większości wzorów określających nośność posadowienia bezpośredniego, także i we wzorze (4.60) można wyróżnić składniki związane z wpływem spójności – pierwsze trzy składniki wzoru (4.60), z wpływem zagłębienia fundamentu – czwarty składnik, a także składniki związane z efektem ciężaru gruntu pod fundamentem – pozostałe składniki występujące w tym wzorze.

Wzór (4.60) nie uwzględnia wpływu mimośrodu obciążenia oraz nachylenia wypadkowej w stosunku do normalnej do podstawy.

4.4. Miary niezawodności

Modelowanie probabilistyczne w dużej części przypadków służy w konsekwencji obliczaniu miar niezawodności, które z kolei stanowią podstawę analizy bezpieczeństwa konstrukcji czy też probabilistycznego wspomaganie projektowania (*reliability based design*). Najczęściej używanymi miarami są prawdopodobieństwo awarii p_F oraz wskaźnik niezawodności β . Miary te zdefiniowane zostały w ramach matematycznej teorii niezawodności (Gniedenko i inni, 1968; Kopociński, 1973) oraz związanej z budownictwem – teorii niezawodności konstrukcji (*structural reliability*). Obszerne informacje dotyczące wyżej wymienionych i innych miar bezpieczeństwa można znaleźć w licznych monografiach, dotyczących teorii niezawodności konstrukcji, np. autorstwa Melchersa (2018) czy Ditlevsena i Madsena (1996), lub dotyczących bezpieczeństwa w geotechnice – Baechera i Christiana (2003) czy *Risk and Reliability in Geotechnical Engineering* (2015), a także w polskich monografiach (Puła, 2004; Przewłocki, 2006; Rządkowski, 2018). Tu ograniczymy się jedynie do podstawowych faktów, które będą istotne w rozumieniu dalszej części niniejszego opracowania.

W ramach zadań teorii niezawodności konstrukcji rozpatruje się wektor bazowych zmiennych losowych $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, którego współrzędne są zmiennymi losowymi definiującymi te parametry konstrukcji (np. stałe materiałowe, wielkości geometryczne), które w danym zagadnieniu przyjęto jako losowe. Składowymi tego wektora są także oddziaływania (obciążenia), jeśli przyjęto założenie o ich losowości. Wektor ten jest argumentem tzw. *funkcji stanu granicznego*, którą definiuje się następująco:

$$g(\mathbf{x}) = \begin{cases} \geq 0 & \text{dla stanów bezpiecznych konstrukcji,} \\ < 0 & \text{dla stanów awaryjnych konstrukcji.} \end{cases} \quad (4.61)$$

Postać tej funkcji zależy od rozpatrywanego zadania i musi być sprecyzowana jako założenie. Hiperpowierzchnia $\{\mathbf{x} : g(\mathbf{x}) = 0\}$ nazywa się *powierzchnią stanu granicznego*. Obecnie najczęściej stosowane miary oparte są na koncepcji wskaźnika niezawodności zaproponowanego przez Hasofer'a i Lindę (1974), który zdefiniowany jest następującym wzorem:

$$\beta_{HL} = \min_{\mathbf{x} \in \{g(\mathbf{x})=0\}} \sqrt{(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])}, \quad (4.62)$$

przy czym $E[\mathbf{X}]$ jest wartością oczekiwaną wektora bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} , \mathbf{C}_X^{-1} macierzą odwrotną do macierzy kowariancji wektora \mathbf{X} , a $\{\mathbf{x}: g(\mathbf{x}) = 0\}$ powierzchnią stanu granicznego.

Punkt \mathbf{x}^* realizujący minimum (4.62) nazywa się *punktem obliczeniowym*. Z definicji widać, że punkt obliczeniowy należy do powierzchni stanu granicznego, a więc wartość wskaźnika β_{HL} zależy jedynie od kształtu tej powierzchni, co daje własność niezmienniczości ze względu na postać funkcji (4.61). Ponadto wskaźnik ten jest niezmienniczy ze względu na transformacje ortogonalne, tak więc np. zmiana kolejności bazowych zmiennych losowych nie wpływa na jego wartość. Przyjęcie minimum we wzorze (4.62) gwarantuje, że całe koło o środku w początku układu współrzędnych i promieniu β_{HL} znajduje się w „obszarze bezpiecznych stanów konstrukcji”, co przy dużych wartościach β_{HL} oznacza małe prawdopodobieństwo awarii. Hasofer i Lind (1974) podali także algorytm numerycznego znajdowania punktu obliczeniowego, a co za tym idzie, wartości β_{HL} .

W przypadku, gdy funkcja

$$\beta(\mathbf{x}) = \sqrt{(\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])^T \mathbf{C}_X^{-1} (\mathbf{x} - E[\mathbf{X}])} \quad \text{dla } \mathbf{x} \in \{g(\mathbf{x}) = 0\} \quad (4.63)$$

posiada kilka lokalnych minimów β_1, \dots, β_k , należy przyjąć

$$\beta_{HL} = \min_{1 \leq i \leq k} \{\beta_i\}. \quad (4.64)$$

Obszerniejsze komentarze, dotyczące powyższych własności wskaźnika Hasofera-Linda można znaleźć w licznych opracowaniach (np. Puła, 2004) lub bezpośrednio w pracy Hasofera i Linda (1974). Warto też zwrócić uwagę, że wskaźnik β_{HL} może być stosowany w sytuacji ograniczonej informacji o wektorze bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} , na przykład wtedy, gdy nie jest znany rozkład tego wektora, a jedynie jego momenty pierwszego i drugiego rzędu (wartości oczekiwane i macierz kowariancji).

Przy pełnej probabilistycznej informacji o wektorze bazowych zmiennych losowych \mathbf{X} , tzn. gdy jest znany jego łączny rozkład prawdopodobieństwa, najbardziej adekwatna miara niezawodności wyraża się poprzez prawdopodobieństwo awarii. Prawdopodobieństwo to określone jest wzorem

$$p_F = P\{g(\mathbf{X}) < 0\} = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} dF_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}), \quad (4.65)$$

w którym g oznacza funkcję stanu granicznego (wzór (4.61), a $F_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ oznacza dystrybuantę wektora zmiennych bazowych \mathbf{X} .

Jeśli rozkład wektora \mathbf{X} jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a (Feller, 2008), to posiada gęstość łączną prawdopodobieństwa $f_{\mathbf{X}}$, a wówczas wzór (4.65) można zapisać w prostszej postaci

$$p_F = \int_{\{g(\mathbf{x}) < 0\}} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (4.66)$$

Oczywiście prawdopodobieństwo niezawodnej pracy konstrukcji jest prawdopodobieństwem zdarzenia przeciwnego, czyli

$$p_S = 1 - p_F. \quad (4.67)$$

Obecnie wielu badaczy uważa, że termin prawdopodobieństwo awarii (ang. *probability of failure*) powinien być zastąpiony przez inny, np. „prawdopodobieństwo przekroczenia dopuszczalnych wartości”. Wiąże się to z faktem, że termin awaria kojarzy się zwykle z dużymi uszkodzeniami lub wręcz ze zniszczeniem konstrukcji. Tymczasem termin prawdopodobieństwo awarii używany jest też w kontekście np. niespełnienia określonych wymogów, które konstrukcja powinna spełniać (warunki stanu granicznego użyteczności). Na razie jednak termin prawdopodobieństwo awarii jest powszechnie używany zarówno w odniesieniu do stanów granicznych nośności, jak i do stanów granicznych użyteczności. W polskiej literaturze stosowane są też inne określenia na prawdopodobieństwo typu (4.65), np. termin „zawodność” stosowany przez Murzewskiego (2001) lub określenie „awaryjność” proponowane przez Biegusa (1999) oraz stosowane w polskim tłumaczeniu normy ISO 2394 (1998) – PN-ISO 2394 (2000). [Wyjaśnienie: Na język polski przetłumaczone zostało jedynie pierwsze wydanie normy ISO 2394 z 1998 roku. Od 2015 roku obowiązuje czwarte wydanie tejże normy ISO 2394 (2015) i to właśnie do tego wydania odwołuję się w tej monografii. Niestety ta wersja nie została przetłumaczona na język polski]. Z matematycznego punktu widzenia wyżej wymienione terminy mają jednakową ogólną definicję – wzór (4.65), choć w różnych sytuacjach waga i konsekwencje zdarzeń bywają bardzo różne. W dalszym ciągu monografii będzie stosowany termin prawdopodobieństwo awarii, choć w każdym przypadku będzie objaśnione, co jest rozumiane przez sformułowanie „awaria”.

Należy też odnieść się do relacji między prawdopodobieństwem p_F a wskaźnikiem niezawodności Hasofera–Linda (β_{HL}). Jak już wcześniej wspomniano,

zdefiniowanie wskaźnika β_{HL} nie wymaga znajomości rozkładów prawdopodobieństwa wektora bazowych zmiennych losowych. Jeśli jednak rozkład ten jest znany i jest to rozkład normalny, zaś funkcja stanu granicznego $g(\mathbf{X})$ jest funkcją liniową, to zachodzi następująca zależność:

$$p_F = \Phi_0(-\beta_{HL}), \quad (4.68)$$

gdzie Φ_0 jest dystrybuantą jednowymiarowego standardowego rozkładu normalnego. Dowód tego faktu można znaleźć we wcześniejszej monografii autora (2004). Powyższy wzór jest prawdziwy, gdy

$$p_F \leq \frac{1}{2}, \quad (4.69)$$

lecz zwykle o takie prawdopodobieństwo chodzi, gdy badamy bezpieczeństwo konstrukcji (nie projektuje się konstrukcji, które mają duże prawdopodobieństwo awarii). Jako że dystrybuanta Φ_0 jest funkcją ściśle rosnącą, zależność (4.68) może przy założeniu (4.69) zostać odwrócona. Stwarza to możliwość zdefiniowania wskaźnika niezawodności β niezależnie od algorytmu proponowanego przez Hasofer'a i Linda (1974), mianowicie

$$\beta = -\Phi_0^{-1}(p_F). \quad (4.70)$$

Zatem, jeśli znane jest prawdopodobieństwo awarii p_F , to wskaźnik niezawodności β może być obliczony ze wzoru (4.70) i *vice versa*. We współcześnie stosowanych wskazaniach normatywnych, dotyczących bezpieczeństwa konstrukcji, wskaźnik niezawodności β jest zwykle rozumiany w sensie relacji (4.70).

Trudność posługiwania się miarami (4.65) i (4.66) polega na tym, że nawet jeśli łączny rozkład prawdopodobieństwa wektora \mathbf{X} jest znany, to dokładne obliczenie całki (4.65) lub (4.66), ze względu na specyficzny obszar całkowania, możliwe jest w niewielu przypadkach. Całkowanie numeryczne prowadzi do zadowalających rezultatów jedynie w jednowymiarowych przypadkach (wektor \mathbf{X} składa się tylko z jednej zmiennej losowej) lub dwuwymiarowych. Przyczyną jest zwykle bardzo mała wartość prawdopodobieństwa awarii, a więc błąd całkowania numerycznego może w bardzo istotny sposób zniekształcić uzyskiwany wynik. W związku z tym w ramach teorii niezawodności konstrukcji rozwinięto inne metody numerycznego obliczania prawdopodobieństwa p_F . Do najważniejszych należą metody FORM (*First Order Reliability Method*) oraz SORM

(*Second Order Reliability Method*). Rozwój tych metod był zbiorowym wysiłkiem grupy badaczy w latach 1975–1985, dla którego stymulacją była ocena bezpieczeństwa platform wiertniczych na Morzu Północnym. Do najważniejszych prac w zakresie FORM należy zaliczyć prace Rackwitza i Fiesslera (1978), Ditlevsena (1979, 1981), Hohenbichlera i Rackwitza (1981), a w zakresie metody SORM – Breitunga (1984) i Tvedta (1983). Obszerne omówienie tych metod można znaleźć w artykułach podsumowujących Dolińskiego (1983), Hohenbichlera i współautorów (1987) lub monografiach Ditlevsena i Madsena (1996) czy Melchersa (2018), a w polskiej literaturze we wcześniejszej monografii autora (Puła, 2004). Z początku metody FORM i SORM stosowane były jedynie w niewielkim gronie specjalistów, gdyż wymagały zaawansowanego specjalistycznego oprogramowania (STRREL 1997), jednak mniej więcej 20 lat później opracowano proste oprogramowanie w ramach arkuszy kalkulacyjnych, które realizuje większość elementów metod FORM i SORM. Szczególnie efektywną procedurę zaproponowali Low i Tang (2004, 2007). Więcej informacji na ten temat wraz z przykładami zastosowań można znaleźć w pracy Lowa i Phoona (2015). Gotowe procedury wraz z przykładami można znaleźć na stronie internetowej <http://alum.mit.edu/www/bklow>. Prace te niewątpliwie przyczyniły się do coraz częstszego stosowania metod FORM i SORM. Niestety wielu autorów współczesnych prac (zwłaszcza z Azji i Stanów Zjednoczonych) cytując źródła zapomina o twórcach oryginalnych metod, przypisując autorstwo twórcom arkuszy kalkulacyjnych.

Inną grupę metod służących oszacowaniu miar niezawodności stanowią metody symulacyjne oparte na technice Monte Carlo (Rubinstein i Kroese, 2011). Estymator prawdopodobieństwa awarii dogodnie jest zapisać stosując funkcję indykatora zbioru I (zwaną też czasem funkcją charakterystyczną zbioru)

$$I[g(\mathbf{x}) < 0] = \begin{cases} 1 & \text{gdy } g(\mathbf{x}) < 0 \\ 0 & \text{gdy } g(\mathbf{x}) \geq 0 \end{cases}. \quad (4.71)$$

Prawdopodobieństwo awarii (4.65) można zapisać w postaci

$$p_F = P\{g(\mathbf{X}) < 0\} = E_{\mathbf{X}}[I[g(\mathbf{X}) < 0]] = \int_{\mathbf{R}^n} I[g(\mathbf{x}) < 0] f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (4.72)$$

gdzie $E_{\mathbf{X}}[\]$ oznacza operator wartości oczekiwanej względem rozkładu wektora losowego \mathbf{X} . Wobec tego nieobciążony estymator J -tego prawdopodobieństwa, przy liczbie realizacji (prób) N , ma postać

$$p_F \approx \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \mathbf{1}[g(\mathbf{X}) < 0] = J, \quad (4.73)$$

skąd otrzymuje się następujący wzór na jego wariancję:

$$\text{Var}\{J\} = \frac{1}{N^2} \cdot N \cdot \text{Var}\{\mathbf{1}[g(\mathbf{X}) < 0]\} = \frac{1}{N} p_F (1 - p_F). \quad (4.74)$$

Klasyczna metoda Monte Carlo polega na „próbkowaniu” przez komputer wektorów z rozkładu prawdopodobieństwa wektora losowego \mathbf{X} za pomocą numerycznego generatora liczb pseudolosowych (Rubinstein i Kroese, 2011), a następnie obliczaniu przybliżonej wartości prawdopodobieństwa awarii według estymatora (4.73). Równoważny temu prawdopodobieństwu wskaźnik niezawodności β używa się z zależności (4.70). Współczynnik zmienności estymatora J wynosi

$$\nu_J = \frac{\sigma_J}{E[J]} = \sqrt{\frac{1 - p_F}{p_F N}}, \quad (4.75)$$

co oznacza zbieżność rzędu $N^{-\frac{1}{2}}$. Dokładniejsze oszacowanie szybkości zbieżności zaproponował autor niniejszej monografii (Puła, 1985) oraz w zmodyfikowanej formie w późniejszej pracy (Puła, 2004).

W czasach, gdy powstawały metody pierwszego i drugiego rzędu (FORM, SORM), wskazana wyżej szybkość zbieżności na ogół bardzo ograniczała obliczanie małych prawdopodobieństw. Ta sytuacja zmieniła się istotnie dzięki dynamicznemu rozwojowi możliwości procesorów. Obecnie „prosta” metoda Monte Carlo (*crude Monte Carlo*) bardzo często używana jest do oszacowań miar niezawodności. Przymiotnik „prosta” oznacza użycie estymatora postaci (4.73). Istnieje bowiem cały szereg metod redukcji wariancji, które powodują zmniejszenie wariancji w stosunku do oszacowania (4.74), a co za tym idzie, poprawę szybkości zbieżności. Kilka z tych metod omówiono w pracy autora (Puła, 2004). Jedną z nich jest, ostatnio coraz częściej stosowana, metoda symulacji podzbiorowej (*subset simulation*) zaproponowana po raz pierwszy przez Au i Becka (2001).

Na zakończenie tego podrozdziału należy odnotować, że omówione powyżej miary nie są jedynymi, które stosowane są w ramach obliczeń niezawodności konstrukcji. Oryginalne miary wraz z ich obszernymi zastosowaniami do bezpieczeństwa konstrukcji (przede wszystkim metalowych) opracował profesor Janusz Murzewski z Politechniki Krakowskiej wraz z grupą współpracowników.

Szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć w opublikowanych książkach, artykułach i referatach (np. Murzewski 1970, 1989, 2001; Machowski, 1991; Gwóźdź i Machowski 2011).

4.5. Niezawodność posadowienia bezpośredniego.

Analizy numeryczne

Rozwiązania przedstawione w podrozdziałach 4.1–4.3 posłużą obecnie do określenia miar niezawodności (podrozdział 4.4) związanych z posadowieniem bezpośrednim. Podrozdział ten ma dwa zasadnicze cele. Po pierwsze ma pokazać, jak istotny jest wpływ lokalnych uśrednień na wskaźniki niezawodności przy obliczaniu nośności według oszacowania wynikającego z mechanizmu Prandtla. Drugim celem jest porównanie wyników otrzymanych z zastosowaniem uśrednień jednowymiarowych z wynikami obliczeń uwzględniających uśrednienia dwuwymiarowe. Obliczenia będą prowadzone zarówno dla uśrednień jednowymiarowych (omówionych w punkcie 4.1.1), jak i dla dwuwymiarowych (omówionych w punkcie 4.1.2), co umożliwi porównanie wyników. Jak wskazano w podrozdziale 4.4, do obliczenia prawdopodobieństwa awarii lub odpowiadającego mu wskaźnika niezawodności konieczne jest najpierw zdefiniowanie funkcji stanu granicznego. W analizach przedstawionych poniżej funkcja ta ma następującą postać:

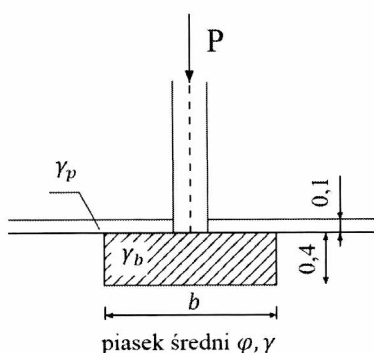
$$g = Q_{mf} - P, \quad (4.76)$$

gdzie P jest obciążeniem normalnym do podstawy fundamentu, przypadającym na jeden metr jego długości, zaś Q_{mf} jest nośnością wyznaczoną na podstawie zależności (4.59), z modyfikacją polegającą na tym, że sumę składników we wzorze (4.60), związanych z efektem ciężaru własnego gruntu pod fundamentem, podzielono przez dwa. Taka procedura związana jest z opinią, że efekt ciężaru własnego gruntu w rozwiązaniu Prandtla wydaje się być nieco zawyżony. Panuje opinia (Izbicki i Mróz, 1976), że bliższe rzeczywistości, a przynajmniej częściej stosowane (w przypadku tego efektu), jest przybliżone rozwiązanie Sokołowskiego (1958). Podzielenie przez dwa sumy składników we wzorze (4.60) związanych z efektem ciężaru gruntu zbliża jej wartości do wartości współczynników N_γ według Sokołowskiego (por. Izbicki i Mróz, 1976). Tak więc zastosowanie opisanej redukcji miało na celu zbliżenie wyników obliczeń do tych, które

mogłyby być uzyskane przy wykonaniu obliczeń według procedur podawanych w normach PN-81/B-03020 (1981) oraz PN-EN 1997-1:2008, Eurokod 7. Pokazane poniżej przykłady numeryczne dotyczą dwóch typów podłoża: niespoistego (tarcowego) oraz spoistego (tarcowo-kohezyjnego). Warto odnotować, iż funkcja stanu granicznego (4.76) jest tak skonstruowana, że stan awaryjny odpowiada przekroczeniu przez obciążenie P nośności Q_{mf} . A zatem prawdopodobieństwo awarii jest tu rozumiane jako prawdopodobieństwo wyparcia gruntu spod podstawy fundamentu.

4.5.1. Fundament pasmowy na podłożu niespoistym

Schemat zadania pokazano na rysunku 4.16, a założenia związane z obliczeniami probabilistycznymi podano w tabeli 4.13.



Rys. 4.16. Schemat fundamentu pasmowego (ławy) na podłożu niespoistym

Tabela 4.13. Charakterystyki probabilistyczne parametrów w zagadnieniu o fundamencie pasmowym na podłożu niespoistym

Parametr	Wartość oczekiwana	Współczynnik zmienności	Rozkład prawdopodobieństwa
Ciężar objętościowy gruntu γ	18,2 kN/m ³	0,06	normalny
Kąt tarcia wewnętrznego φ	32°	0,15	log-normalny
Siła pionowa P	300 kN	0,15	log-normalny
Ciężar objętościowy betonu γ_b	24,0 kN/m ³	–	nielosowy
Ciężar objętościowy posadzki γ_p	23,0 kN/m ³	–	nielosowy

Kąt tarcia wewnętrznego modelowany jest przez log-normalne pole losowe $X = \varphi$ z gaussowską funkcją kowariancji o postaci (4.5) – w przypadku jedno-

wymiarowym oraz (4.3) – w przypadku dwuwymiarowym. Zależności pomiędzy skalami fluktuacji oraz parametrami funkcji kowariancji dane są wzorem (4.4). Jako typową (por. podrozdział 3.2) dla gruntu niespoistego wartość pionowej skali fluktuacji przyjęto $\theta_v = 0,8$ m, natomiast pozioma skala fluktuacji przyjmowała trzy różne wartości: $\theta_h = 3\theta_v$, $\theta_h = 10\theta_v$, $\theta_h = 30\theta_v$, co odpowiada analogicznym relacjom pomiędzy parametrami funkcji kowariancji, mianowicie: $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$, $\omega_2 = 30\omega_1$. Model probabilistyczny dla kąta tarcia wewnętrznego jest taki sam jak stosowany w podrozdziale 4.2, co umożliwi zastosowanie uzyskanych tam wyników.

W związku z tym, że zagadnienia niniejszej monografii skoncentrowane są na losowym charakterze właściwości podłoża gruntowego, obciążenie P modelowane jest w prostszy sposób, a mianowicie przez pojedynczą zmienną losową. Zwykle w takich sytuacjach przyjmuje się, że zmienna ta ma log-normalny rozkład prawdopodobieństwa (Murzewski, 2001; Ditlevsen i Madsen, 1996). Jeśli chodzi o ciężar objętościowy betonu oraz ciężar objętościowy betonowej posadzki, to analizy wrażliwości przeprowadzone przez autora niniejszej monografii (Puła, 2004) pokazały, że wpływ ich losowego charakteru na prawdopodobieństwo awarii w przypadku utraty nośności przez fundament bezpośredni jest znikomy. Natomiast ciężar objętościowy gruntu zgodnie z badaniami wielu autorów (por. podrozdział 3.1) charakteryzuje się istotnie niższym współczynnikiem zmienności w stosunku do parametrów wytrzymałościowych. Dlatego także i w tym przypadku jest on modelowany przez pojedynczą zmienną losową. Zastąpienie pola losowego ciężaru objętościowego przez pojedynczą zmienną jest niewątpliwie uproszczeniem. Należy jednak pamiętać, że każde dodatkowe pole losowe w zadaniu, w którym oblicza się miary niezawodności, to duży dodatkowy wysiłek obliczeniowy.

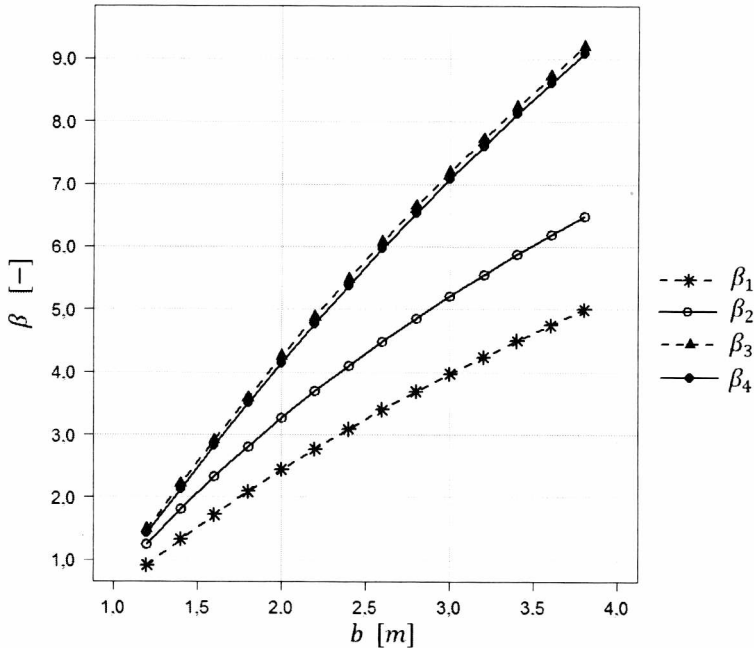
Przy przyjętych powyżej założeniach wykonano obliczenia wskaźników niezawodności dla funkcji staniu granicznego (4.76), w których wykorzystano redukcje wariancji oraz współczynniki korelacji obliczone w podrozdziale 4.2. Obliczenia wykonano metodą SORM wspomaganą techniką symulacji ważonej (*important sampling technique*, por. np. Doliński, 1988), używając do tego celu systemu COMREL (por. STRUREL, 1997). Najpierw wykonano obliczenia w przypadku jednowymiarowym dla czterech różnych opcji charakteryzacji kąta tarcia wewnętrznego:

- Kąt tarcia wewnętrznego jako pojedyncza zmienna losowa w całym obszarze pod fundamentem, bez dokonania uśrednienia przestrzennego.

- Trzy niezależne zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdemu odcinkowi linii poślizgu (AB, BC oraz CD), bez uśrednienia przestrzennego.
- Trzy niezależne zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdemu odcinkowi linii poślizgu (AB, BC oraz CD), z uśrednieniem przestrzennym i wynikającymi z niego redukcjami wariancji według rezultatów przedstawionych w podrozdziale 4.2.
- Trzy skorelowane zmienne losowe, przyporządkowane kolejno każdemu odcinkowi linii poślizgu (AB, BC oraz CD), z uśrednieniem przestrzennym i wynikającymi z niego redukcjami wariancji oraz kowariancjami według wzorów uzyskanych w podrozdziale 4.2.

Rezultaty tych obliczeń przedstawiono w postaci wykresu na rysunku 4.17. Uzyskane wyniki pokazują, że zastosowanie uśrednień bardzo istotnie podnosi wartości wskaźnika niezawodności (krzywe dla β_3 i β_4). Wzrost wskaźnika niezawodności jest tym większy, im większa jest szerokość fundamentu. Niemniej już samo założenie trzech różnych zmiennych charakteryzujących kąt tarcia na trzech poszczególnych odcinkach linii poślizgu zwiększa ich wartości (wskaźnik β_2). Widać zatem, że charakteryzowanie kąta tarcia wewnętrznego podłoża poprzez pojedynczą zmienną losową jest zbyt dużym uproszczeniem. Natomiast porównanie wskaźnika β_3 ze wskaźnikiem β_4 wskazuje, że efekt korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 jest niewielki, mimo istnienia silnej korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 oraz φ_3 (tabela 4.9). Tę sytuację można tłumaczyć faktem, że decydujący wpływ na wskaźnik niezawodności ma tutaj losowy charakter kąta φ_1 , zaś efekt losowości kąta φ_3 jest znacznie mniejszy.

Kolejny etap obliczeń wskaźników niezawodności miał na celu zbadanie efektu zastąpienia uśrednień jednowymiarowych przez bardziej adekwatne do stanu naturalnego uśrednienia dwuwymiarowe. Ze względu na niewielkie różnice pomiędzy wartościami wskaźnika niezawodności w poszczególnych przypadkach tym razem wyniki pokazano zarówno w formie tabelarycznej, jak i graficznej. W tabeli 4.14 podano wartości wskaźników niezawodności uzyskane przy pominięciu korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 , natomiast w tabeli 4.15 – z uwzględnieniem korelacji. Zastosowano zredukowane odchylenia standardowe i współczynniki korelacji obliczone w podrozdziale 4.2. Na rysunkach 4.18 (a i b) wskaźniki niezawodności przedstawiono jako funkcje szerokości fundamentu. Rysunki a i b są umieszczone obok siebie i wykreślone w jednokowej skali, aby umożliwić bezpośrednie porównanie rezultatów dla zmiennych



Rys. 4.17. Wartości wskaźnika niezawodności. Podłoże niespoiste. Przypadek jednowymiarowy. β_1 – jedna zmienna losowa – kąt tarcia wewnętrznego, bez uśrednienia; β_2 – trzy zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ (oznaczenia jak w podrozdziale 4.3) bez uśrednienia; β_3 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z uśrednieniem lokalnym $\theta_v = 0,8$; β_4 – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ z uśrednieniem lokalnym ($\theta_v = 0,8$ m)

niezależnych z wynikami dla zmiennych skorelowanych. Wyniki dotyczą trzech różnych wartości skali fluktuacji poziomej: $\theta_h = 3\theta_v$, $\theta_h = 10\theta_v$, $\theta_h = 30\theta_v$ ($\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$). Dodatkowo, aby ułatwić porównanie rezultatów, w obu tabelach i na obu rysunkach zamieszczono wyniki obliczeń w przypadku jednowymiarowym (rys. 4.17).

Jak łatwo zauważyć, wartości wskaźników niezawodności przy uśrednieniu dwuwymiarowym niewiele odbiegają od tych z uśrednienia jednowymiarowego. Różnice są na tyle niewielkie, że krzywe na rysunkach 4.18 praktycznie pokrywają się. Różnice widoczne są w zasadzie tylko w przypadku, gdy skala pozioma jest trzykrotnie większa od pionowej i to dla większych szerokości fundamentu. Wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji wyniki coraz bardziej zbliżają się do rezultatów jednowymiarowych, co jest konsekwencją własności asymptotycznych wykazanych w punkcie 4.1.2 (wzory (4.37) (4.44)).

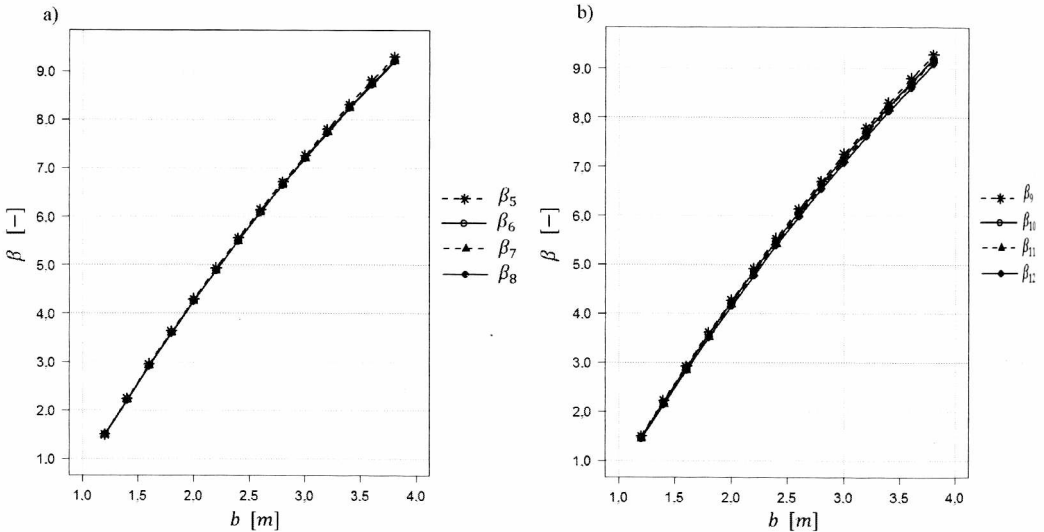
Tabela 4.14. Wartości wskaźników niezawodności. β_5 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 3\omega_1$); β_6 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 10\omega_1$); β_7 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 30\omega_1$); β_8 – trzy niezależne zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne jednowymiarowe ($\beta_8 = \beta_3$). We wszystkich przypadkach przyjmowano $\theta_v = 0,8$ m

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_5	β_6	β_7	β_8
1,2	1,50	1,50	1,49	1,49
1,4	2,24	2,22	2,22	2,21
1,6	2,95	2,92	2,92	2,91
1,8	3,63	3,60	3,60	3,59
2,0	4,29	4,26	4,25	4,25
2,2	4,93	4,89	4,88	4,88
2,4	5,55	5,50	5,49	5,49
2,6	6,14	6,09	6,08	6,08
2,8	6,71	6,66	6,65	6,65
3,0	7,26	7,21	7,20	7,19
3,2	7,80	7,74	7,73	7,72
3,4	8,31	8,25	8,24	8,23
3,6	8,81	8,74	8,73	8,72
3,8	9,29	9,22	9,21	9,20

Tabela 4.15. Wartości wskaźników niezawodności. β_9 – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 3\omega_1$); β_{10} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 10\omega_1$); β_{11} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne dwuwymiarowe ($\omega_2 = 30\omega_1$); β_{12} – trzy skorelowane zmienne losowe $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, uśrednienie lokalne jednowymiarowe ($\beta_{16} = \beta_4$). We wszystkich przypadkach przyjmowano $\theta_v = 0,8$ m

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
1,2	1,49	1,46	1,44	1,43
1,4	2,22	2,18	2,15	2,13
1,6	2,92	2,89	2,84	2,83
1,8	3,61	3,57	3,52	3,50
2,0	4,27	4,23	4,18	4,15
2,2	4,91	4,86	4,81	4,77
2,4	5,53	5,47	5,42	5,38
2,6	6,13	6,07	6,02	5,97
2,8	6,70	6,64	6,59	6,53
3,0	7,26	7,19	7,14	7,08
3,2	7,79	7,72	7,68	7,61
3,4	8,30	8,23	8,19	8,12
3,6	8,80	8,72	8,69	8,61
3,8	9,28	9,20	9,17	9,09

Zwłaszcza w sytuacji pominięcia korelacji wskaźniki niezawodności w czterech przypadkach są niemal identyczne, nawet dla stosunkowo niewielkiej poziomej skali fluktuacji ($\omega_2 = 3\omega_1$), przy czym różnice wzrastają nieco ze wzrostem szerokości fundamentu.



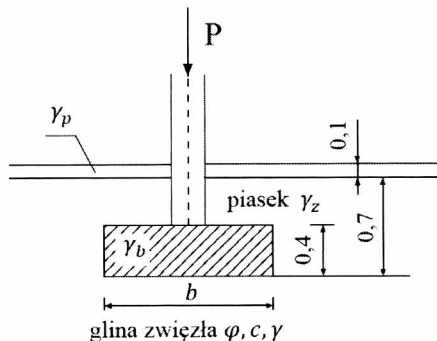
Rys. 4.18. Wykresy wskaźników niezawodności z uwzględnieniem lokalnego uśrednienia w gruncie niespoistym, gdy zmienne są niezależne (a); gdy zmienne są skorelowane (b). Oznaczenia wskaźników jak w tabelach 4.14 i 4.15

Wyniki te nie są zaskakujące w zestawieniu z obliczonymi wcześniej zredukowanymi odchyleniami standardowymi (por. tabele 4.1–4.4), gdyż odchylenia te w niewielkim stopniu odbiegają od przypadku jednowymiarowego dla wszystkich trzech wartości poziomej skali fluktuacji. To właśnie implikuje uzyskanie bardzo zbliżonych wartości prawdopodobieństwa awarii i odpowiadających im według wzoru (4.70) wskaźników niezawodności. W przypadku uwzględnienia korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 różnice są nieco większe, ale w przypadku $\omega_2 = 30\omega_1$ wartości wskaźników bardzo zbliżają się do przypadku jednowymiarowego. Potwierdza to stosunkowo szybką zbieżność wskaźników (prawdopodobieństw awarii) uzyskanych w zadaniu dwuwymiarowym do wartości wskaźników z zadania jednowymiarowego, wraz ze wzrostem wartości poziomej skali fluktuacji. Bezpośrednie porównanie przypadku bez korelacji z przypadkiem uwzględniającym tę korelację (tabele 4.14 i 4.15 oraz rysunek 4.18) pokazuje, że wpływ korelacji pomiędzy zmiennymi φ_1 , φ_2 , φ_3 na wartości wskaźników niezawodności jest niewielki. Podobnie jak w zadaniu jednowymiarowym, przy uwzględnieniu korelacji uży-

skuje się nieco mniejszą wartością wskaźnika niezawodności. Pomimo dużych różnic pomiędzy współczynnikami korelacji dla poszczególnych przypadków: $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$, różnice pomiędzy odpowiadającymi im wskaźnikami niezawodności (przy ustalonej szerokości fundamentu b) są nieomal pomijalne. Zbieżność wyników do rezultatów z przypadku jednowymiarowego jest w przypadku uwzględnienia korelacji nieco wolniejsza niż w przypadku zmiennych niezależnych.

4.5.2. Fundament pasmowy na podłożu spoistym

Teraz zbadamy, czy tendencje dotyczące miar niezawodności zaobserwowane w odniesieniu do gruntu niespoistego potwierdzą się także w przypadku podłoża spoistego (tarciowo-kohezyjnego). Schemat zadania dla tego przypadku podano na rysunku 4.19, a założenia związane z obliczeniami probabilistycznymi zamieszczono w tabeli 4.16. W tym zadaniu parametry wytrzymałościowe podłoża – kąt tarcia wewnętrznego φ oraz spójność c – modelowane są przez dwa stacjonarne, wzajemnie nieskorelowane, log-normalne pola losowe parametrów wytrzymałościowych podłoża – pole kąta tarcia wewnętrznego oraz pole spójności.



Rys. 4.19. Schemat fundamentu pasmowego (ławy) na podłożu spoistym

Tabela 4.16. Charakterystyki probabilistyczne zadania (grunt spoisty)

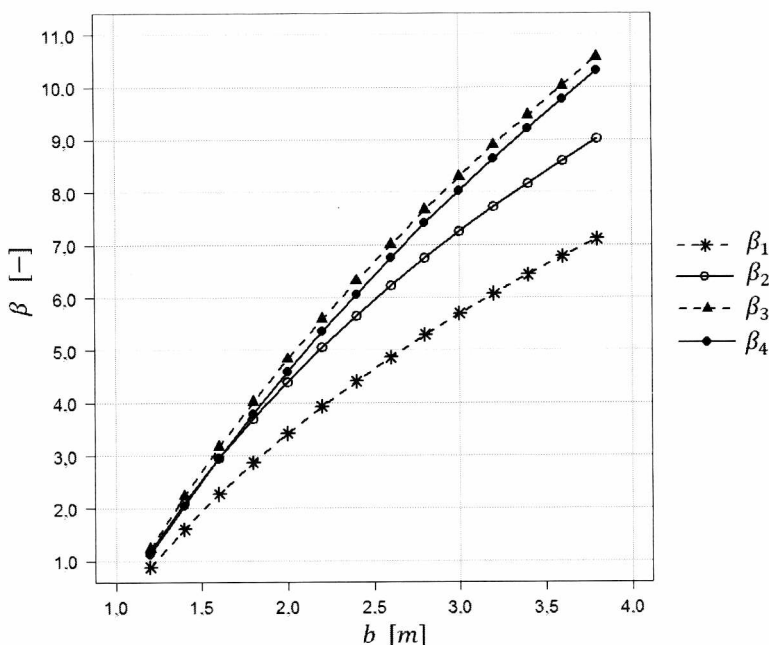
Parametr	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Rozkład
Kąt tarcia φ	18°	2,7°	log-normalny
Spójność c	31 kN/m ²	4,65 kN/m ²	log-normalny
Ciężar objętościowy γ	19,0 kN/m ³	1,9 kN/m ³	normalny
Siła osiowa P	500 kN/m	50 kN/m	log-normalny
Ciężar zasypki γ_z	18,2 N/m ³	1,092 kN/m ³	normalny
Ciężar betonu γ_b	24,0 kN/m ³	–	nielosowy
Ciężar posadzki γ_p	23,0 kN/m ³	–	nielosowy

Podobnie jak miało to miejsce w poprzednim punkcie, w odniesieniu do pola kąta tarcia wewnętrznej funkcja kowariancji (tej samej postaci dla obu pól) dana jest wzorem (4.5) w przypadku jednowymiarowym oraz wzorem (4.3) – w przypadku dwuwymiarowym. Zależności pomiędzy skalami fluktuacji a parametrami funkcji kowariancji są, jak poprzednio, dane wzorem (4.4). W tym jednak przypadku na podstawie danych z literatury (por. podrozdział 3.2) przyjęto dla obu pól jednakową, reprezentatywną dla gruntów spoistych skalę fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m. Identycznie jak w poprzednim podrozdziale założono, że skala fluktuacji w kierunku poziomym przyjmuje trzy różne wartości zależne od skali w kierunku pionowym, mianowicie $\theta_h = 3\theta_v$, $\theta_h = 10\theta_v$, $\theta_h = 30\theta_v$, co odpowiada analogicznym relacjom pomiędzy parametrami funkcji kowariancji, mianowicie $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$, $\omega_2 = 30\omega_1$. Modele probabilistyczne dla kąta tarcia wewnętrznej oraz dla spójności są takie same jak stosowane w podrozdziale 4.2, co umożliwi zastosowanie uzyskanych tam wyników, dotyczących zredukowanych wariancji poszczególnych zmiennych losowych oraz współczynników korelacji pomiędzy nimi. Obliczenia realizowano według analogicznego harmonogramu jak w poprzednim punkcie (4.5.1). Podobnie jak poprzednio, przy przyjętych powyżej założeniach wykonano obliczenia wskaźników niezawodności przy funkcji stanu granicznego (4.76), w których wykorzystano redukcje wariancji oraz współczynniki korelacji obliczone w podrozdziale 4.2. Obliczenia wykonano metodą SORM wspomaganą techniką symulacji ważonej (*important sampling technique*), używając do tego celu wspomnianego wcześniej systemu COMREL. Dla większej przejrzystości, podobnie jak w poprzednim podrozdziale, poniżej podane są jedynie wskaźniki niezawodności, pomijając wartości prawdopodobieństw awarii.

W przypadku jednowymiarowym przeprowadzono obliczenia dla czterech różnych charakterystyki parametrów wytrzymałościowych podłoża:

- dwie niezależne zmienne losowe – kąt tarcia wewnętrznej i spójność, opisujące zmienność losową parametrów wytrzymałościowych w całym obszarze pod fundamentem, bez zastosowania uśrednienia przestrzennego (wskaźnik niezawodności β_1);
- sześć niezależnych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych parami poszczególnym odcinkom linii poślizgu, odpowiednio AB, BC i CD, bez zastosowania uśrednienia przestrzennego (wskaźnik niezawodności β_2);
- sześć niezależnych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych parami poszczególnym odcinkom linii poślizgu, odpowiednio AB,

- BC i CD, z zastosowaniem uśrednienia przestrzennego z pionową skalą fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m (wskaźnik niezawodności β_3);
- sześć skorelowanych zmiennych losowych $\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3$, przyporządkowanych jak wyżej, z zastosowaniem uśrednienia przestrzennego z pionową skalą fluktuacji $\theta_v = 1,0$ m oraz wynikającymi z niego kowariancjami według wzorów uzyskanych w podrozdziale 4.1.2 (wskaźnik niezawodności β_4).
- Wyniki obliczeń w postaci wykresów zależności wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu przedstawiono na rysunku 4.20.



Rys. 4.20. Zależność wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu b . Fundament na podłożu spoistym. Przypadek jednowymiarowy. Oznaczenia wskaźników zgodne z opisem w tekście

Przedstawione rezultaty pokazują, że zastosowanie pojedynczych zmiennych losowych (jednej charakteryzującej kąt tarcia wewnętrznego, drugiej – spójność) do opisu losowej zmienności parametrów wytrzymałościowych w całym obszarze pod fundamentem daje niższe wartości wskaźników niezawodności (wskaźniki β_1) niż w przypadku modelowania przy użyciu większej liczby zmiennych losowych. Największe wartości wskaźników β otrzymano po zastosowaniu uśrednień przestrzennych z pominięciem autokorelacji pola (wskaźniki β_3). Po uwzględnieniu autokorelacji (wskaźniki β_4) wartości wskaźników nieco spadły, osiągając nawet, dla małych szerokości fundamentu, poziomy niższe niż wskaźniki β_2 .

Jednak dla rozsądnych z punktu widzenia projektanta szerokości (2–2,5 m) wskaźniki β_4 są większe od wskaźników β_2 . Widać więc, że modelowanie parametrów wytrzymałościowych za pomocą zdyskretyzowanego pola losowego stanowi istotny element rozpatrywanego zadania. Warto też zwrócić uwagę, że różnice pomiędzy wskaźnikami uwzględniającymi autokorelację (wskaźniki β_4) a wskaźnikami nieuwzględniającymi autokorelacji (wskaźniki β_3) są już zauważalne, w przeciwieństwie do przypadku z podłożem niespoistym, gdzie pozostały one na granicy błędu obliczeń.

Następnym etapem analiz numerycznych było wykonanie obliczeń dla zadania dwuwymiarowego przy zmiennych wartościach poziomej skali fluktuacji i porównanie rezultatów z wynikami zadania jednowymiarowego. Tak jak poprzednio (w przypadku podłoża niespoistego), pominięto korelację wzajemną pomiędzy polami φ oraz c . Analogicznie też do przypadku podłoża niespoistego wykonano obliczenia z pominięciem autokorelacji w polach parametrów wytrzymałościowych – wyniki zamieszczono w tabeli 4.17, oraz z uwzględnieniem tychże autokorelacji – wyniki w tabeli 4.18.

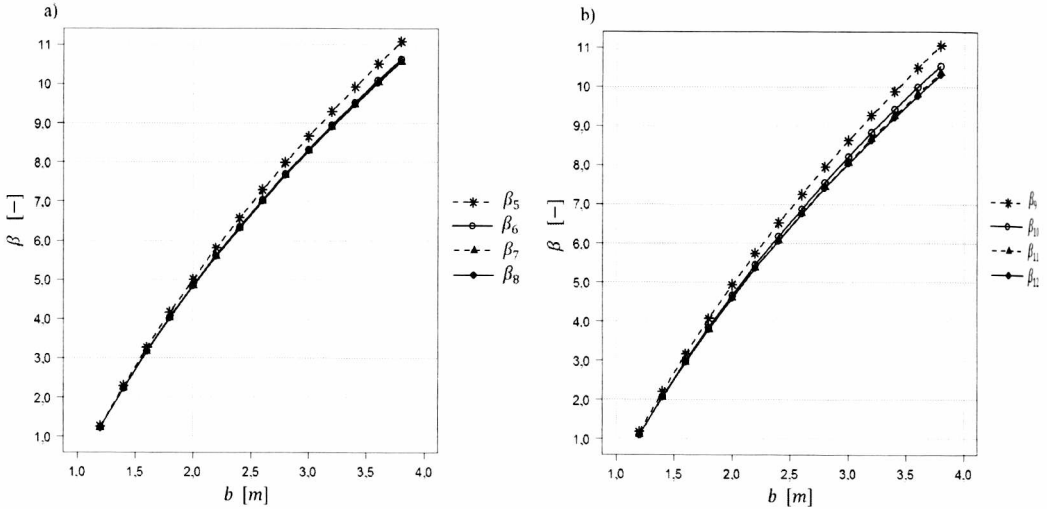
Tabela 4.17. Wskaźniki niezawodności z pominięciem autokorelacji w polach: β_5 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 3\omega_1$; β_6 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 10\omega_1$; β_7 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 30\omega_1$; β_8 – uśrednienie lokalne jednowymiarowe

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_5	β_6	β_7	β_8
1,2	1,26	1,24	1,23	1,23
1,4	2,29	2,24	2,23	2,23
1,6	3,26	3,17	3,16	3,16
1,8	4,16	4,03	4,02	4,02
2,0	5,0	4,85	4,83	4,83
2,2	5,81	5,62	5,59	5,59
2,4	6,57	6,34	6,32	6,31
2,6	7,3	7,04	7,01	7,00
2,8	7,99	7,70	7,66	7,66
3,0	8,66	8,33	8,29	8,29
3,2	9,29	8,94	8,89	8,89
3,4	9,91	9,52	9,47	9,46
3,6	10,50	10,09	10,03	10,02
3,8	11,07	10,63	10,56	10,56

Tabela 4.18. Wskaźniki niezawodności z uwzględnieniem autokorelacji w polach: β_9 – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 3\omega_1$; β_{10} – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 10\omega_1$; β_{11} – uśrednienie lokalne dwuwymiarowe: $\omega_2 = 30\omega_1$; β_{12} – uśrednienie lokalne jednowymiarowe

Szerokość fundamentu b [m]	Wskaźniki niezawodności			
	β_9	β_{10}	β_{11}	β_{12}
1,2	1,18	1,12	1,11	1,11
1,4	2,20	2,08	2,06	2,05
1,6	3,16	2,99	2,96	2,95
1,8	4,07	3,85	3,80	3,79
2,0	4,93	4,67	4,60	4,59
2,2	5,74	5,44	5,36	5,35
2,4	6,52	6,18	6,08	6,06
2,6	7,25	6,88	6,77	6,75
2,8	7,95	7,56	7,43	7,41
3,0	8,62	8,21	8,06	8,03
3,2	9,27	8,83	8,67	8,63
3,4	9,88	9,42	9,25	9,21
3,6	10,48	9,99	9,81	9,76
3,8	11,05	10,54	10,35	10,3

Dla ułatwienia oceny otrzymanych wyników na rysunku 4.21 zestawiono obok siebie wykresy zależności wskaźnika niezawodności od szerokości fundamentu dla przypadku pominięcia autokorelacji pól (rysunek a) oraz z uwzględnieniem autokorelacji (rysunek b). Analizując wyniki należy stwierdzić, że podobnie jak w przypadku podłoża niespoistego wartości wskaźników uzyskanych przy zastosowaniu uśrednienia dwuwymiarowego niewiele różnią się od wartości otrzymanych z zastosowaniem uśrednienia jednowymiarowego. Różnice te jednak są nieco większe niż w przypadku podłoża niespoistego, a zbieżność do rezultatów z zadania jednowymiarowego (wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji) nieco wolniejsza, zwłaszcza dla większych szerokości fundamentu. Takie wyniki są zgodne z zaobserwowaną wcześniej tendencją w zachowaniu się zredukowanych odchyłeń standardowych (tabele 4.5–4.8). Przyjęcie mniejszej wartości poziomej skali fluktuacji daje większe wartości wskaźników niezawodności, gdyż wariancje są silniej redukowane.



Rys. 4.21. Wykresy zależności wskaźników niezawodności od szerokości fundamentu dla podłoża spoistego. Oznaczenia jak w tabelach 4.17 oraz 4.18; a) zmienne niezależne, b) zmienne skorelowane

Uwzględnienie autokorelacji w polach parametrów wytrzymałościowych prowadzi do spadku wartości wskaźników, lecz spadki te nie są duże. Jest to zgodne z tendencją zaobserwowaną w przypadku jednowymiarowym. Pomimo dużych różnic pomiędzy współczynnikami korelacji dla poszczególnych przypadków: $\omega_2 = 3\omega_1$, $\omega_2 = 10\omega_1$ oraz $\omega_2 = 30\omega_1$, różnice pomiędzy odpowiadającymi im wskaźnikami niezawodności (przy ustalonej szerokości fundamentu b) są niewielkie. Zbieżność wyników do rezultatów z przypadku jednowymiarowego jest w przypadku uwzględnienia korelacji nieco wolniejsza niż w przypadku zmiennych nieskorelowanych.

4.6. Losowe linie poślizgu

Jak już wzmiankowano w podrozdziale 4.3, obliczenia miar niezawodności przedstawione w podrozdziale 4.5 dotyczyły stałej linii poślizgu złożonej z trzech odcinków – dwóch prostoliniowych i jednego (pośredniego) będącego fragmentem spirali logarytmicznej. Jak wiadomo, geometria całej linii, a więc rozmiary każdego z trzech odcinków, jest zdeterminowana przez wartość kąta tarcia wewnętrznego (φ_1) gruntu zalegającego bezpośrednio pod fundamentem oraz przez szerokość fundamentu. W poprzednich oszacowaniach prawdopodobieństwa awarii geometria linii poślizgu była wyznaczana na podstawie wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrznego, czyli $E[\varphi_1]$. Można jednak oczekiwać, że w wyniku przestrzennej

zmienności kąta tarcia wewnętrznego podłoża w rzeczywistości linia poślizgu będzie odbiegała od tej określonej na podstawie $E[\varphi_1]$. W czasie dyskusji podczas jednej z konferencji profesor D.V. Griffiths zasugerował, że warto byłoby zbadać, jak zmienność linii poślizgu spowodowana zmiennością losową kąta tarcia wewnętrznego wpływa na wartości miar niezawodności w zagadnieniu przekroczenia losowej nośności podłoża przez losowe obciążenia, czyli w zadaniu dyskutowanym w podrozdziale 4.5. Rozwiązanie tak postawionego problemu autor niniejszej monografii opublikował wraz z dr. Marcinem Chwałą w 2015 roku w czasopiśmie *Computers and Geotechnics* (Puła i Chwała, 2015).

4.6.1. Aproksymacja funkcji wariancji

Jak łatwo stwierdzić na podstawie podrozdziałów 4.1–4.3, redukcje wariancji (pokazane w podrozdziale 4.2) zależą od długości i przebiegu poszczególnych odcinków linii poślizgu. Oznacza to, iż należy określić zależność współczynników redukcji wariancji od kąta φ_1 oraz od szerokości fundamentu b . W tym celu przeprowadzono obliczenia funkcji wariancji oraz kowariancji analogiczne do obliczeń przedstawionych w podrozdziale 4.2, lecz dla różnych wartości kąta tarcia wewnętrznego. Na podstawie tych obliczeń znajdowano przybliżoną zależność funkcji wariancji $\gamma(\varphi, b)$ w postaci kombinacji funkcji elementarnych, mianowicie

$$\gamma_{ii}(\varphi, b) = a_2\varphi^3 + a_3\varphi^2 + a_4\varphi + a_5, \quad (4.77)$$

przy czym $i = 1, 2, 3$ (w przypadku wariancji). W przypadku funkcji kowariancji dla kątów $\varphi > 0,5$ rad (ok. $26,8^\circ$) aproksymacja wielomianowa postaci (4.77) nie była dostatecznie dokładna, dlatego w tym przypadku przyjęto aproksymację w postaci

$$\gamma_{ij}(\varphi, b) = \begin{cases} a_1\varphi^4 + a_2\varphi^3 + a_3\varphi^2 + a_4\varphi + a_5 & \text{dla } \varphi \leq 0,5 \text{ rad} \\ a_6 \exp(a_7\varphi) & \text{dla } \varphi > 0,5 \text{ rad} \end{cases}, \quad (4.78)$$

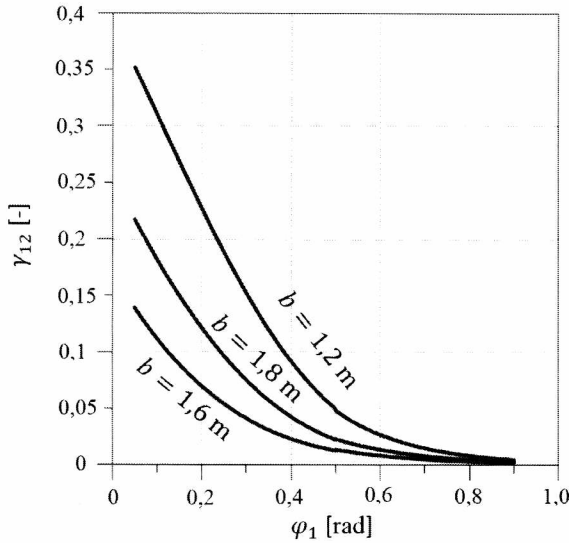
przy czym $i = 1, 2, 3$ oraz $i \neq j$ (w przypadku kowariancji). Współczynniki a_k , $k = 2, \dots, 5$ w przypadku równania (4.77) oraz $k = 1, \dots, 6$ w przypadku równania (4.78) są wyznaczane poprzez nieliniową regresję według algorytmu Lovenberga–Marquardta (Marquardt, 1963). Otrzymane tą drogą wyniki zebrano w tabeli 4.19.

Tabela 4.19. Wartości współczynników a_k do zależności aproksymujących funkcje wariancji – wzór (4.77) i kowariancji – wzór (4.78)

Grunt niespoisty $\omega_2 = 10\omega_1, \delta_v = 0,8 \text{ m}$								
Szerokość fundamentu $b \text{ [m]}$	COV lub VAR	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1,2	γ_{11}		0,0300857	-0,160435	-0,309309	0,782204		
	γ_{22}		0,369066	-1,19455	0,127268	0,932538		
	γ_{33}		0,262618	-0,460097	-0,481787	0,781497		
	γ_{12}	-1,4796	2,62175	-0,812162	-0,746112	0,390633	0,893387	-5,84038
	γ_{13}	0,152056	2,57666	-3,29404	0,0179118	0,696371	67,7438	-11,3566
	γ_{23}	0,294715	-0,148838	0,163938	-0,636302	0,358325	8,54412	-9,13304
1,4	γ_{11}		0,0281515	-0,104651	-0,354074	0,730709		
	γ_{22}		0,493548	-1,25856	0,0630981	0,918262		
	γ_{33}		0,1893	-0,266006	0,565709	0,730779		
	γ_{12}	-0,924973	1,37209	0,0152082	-0,800411	0,315025	0,490336	-5,4552
	γ_{13}	-2,17813	6,32848	-4,86295	0,164517	0,62162	122,65	-13,4226
	γ_{23}	0,103093	0,0759687	0,0897052	-0,519697	0,275183	9,55074	-10,1828
1,6	γ_{11}		0,0164526	-0,0504046	-0,381105	0,681705		
	γ_{22}		0,548673	-1,23166	-0,018786	0,903053		
	γ_{33}		0,127745	-0,123111	-0,609237	0,681783		
	γ_{12}	-0,472797	0,446274	0,543976	-0,789926	0,255217	0,313267	-5,21908
	γ_{13}	-3,50247	8,14502	-5,31958	0,12954	0,559829	234,797	-15,6609
	γ_{23}	-0,021745	0,222323	0,0182908	-0,413529	0,212236	11,3645	-11,3123
1,8	γ_{11}		0,00438038	-0,0077504	-0,393203	0,636217		
	γ_{22}		0,558465	-1,15209	-0,104828	0,886482		
	γ_{33}		0,0821227	-0,0246275	-0,625308	0,636074		
	γ_{12}	-0,147811	-0,171877	0,843493	-0,743134	0,208021	0,222408	-5,08542
	γ_{13}	-4,03213	8,52306	-5,01233	-0,016808	0,508211	477,924	-18,0839
	γ_{23}	-0,097676	0,308159	-0,0383265	-0,324509	0,164724	14,5852	-12,5606
2,0	γ_{11}		-0,0052821	0,0230063	-0,394935	0,594702		
	γ_{22}		0,540612	-1,04618	-0,186788	0,86849		
	γ_{33}		0,0496165	0,0417145	-0,624549	0,594323		
	γ_{12}	0,0664221	-0,548127	0,982854	-0,678127	0,170589	0,168859	-5,01102
	γ_{13}	-4,00664	7,95218	-4,2473	-0,217448	0,464091	1032,39	-20,6888
	γ_{23}	-0,145474	0,362456	-0,0865183	-0,250668	0,128622	20,2765	-13,9504
2,2	γ_{11}		0,346687	-0,499526	-0,187196	0,540698		
	γ_{22}		0,511292	-0,935567	-0,258846	0,849161		
	γ_{33}		0,026564	0,0862264	-0,61412	0,556611		
	γ_{12}	0,195847	-0,750368	1,0173	-0,606229	0,140705	0,133803	-4,96885
	γ_{13}	-3,63311	6,83114	-3,2591	-0,430954	0,425267	2367,62	-23,4768
	γ_{23}	-0,179582	0,405058	-0,131944	-0,189142	0,100956	30,4908	-15,4925

Tabela 4.19 cd. Wartości współczynników a_k do zależności aproksymujących funkcje wariancji – wzór (4.77) i kowariancji – wzór (4.78)

Grunt spoisty $\omega_2 = 10\omega_1$, $\delta_v = 1,0$ m								
b	COV lub VAR	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1,2	γ_{11}		-0,0075112	-0,188349	-0,23774	0,845018		
	γ_{22}		0,0841588	-0,922144	0,151008	0,949932		
	γ_{33}		0,323194	-0,723755	-0,318166	0,841172		
	γ_{12}	-2,0196	4,20653	-2,15747	-0,547214	0,505507	2,24884	-6,44508
	γ_{13}	4,2045	-4,66278	0,355753	-0,475786	0,804837	35,2084	-9,07394
	γ_{23}	0,611754	-0,481861	0,157467	-0,738432	0,489329	7,88323	-7,90657
1,4	γ_{11}		0,0241414	-0,177556	-0,286896	0,803161		
	γ_{22}		0,0841588	-0,922144	0,151008	0,949932		
	γ_{33}		0,290444	-0,549015	-0,434609	0,801734		
	γ_{12}	-1,70235	3,18194	-1,23157	-0,697921	0,425903	1,19137	-6,03614
	γ_{13}	1,378	0,468412	-2,291	-0,106417	0,730326	54,1613	-10,5745
	γ_{23}	0,390183	-0,255356	0,181207	-0,679546	0,398145	8,27883	-8,72426
1,6	γ_{11}		0,031494	-0,139274	-0,329316	0,761396		
	γ_{22}		0,429317	-1,23454	0,105051	0,926876		
	γ_{33}		0,232827	-0,376642	-0,520981	0,761145		
	γ_{12}	-1,25082	2,08746	-0,442291	-0,777933	0,358304	0,688445	-5,66687
	γ_{13}	-0,908632	4,33486	-4,07604	0,102935	0,664763	85,296	-12,1617
	γ_{23}	0,209776	0,0504314	0,136873	-0,589771	0,322357	8,87591	-9,54615
1,8	γ_{11}		0,0261454	-0,0931314	-0,360865	0,720667		
	γ_{22}		0,509272	-1,25903	0,047594	0,91532		
	γ_{33}		0,175723	-0,233348	-0,57723	0,720777		
	γ_{12}	-0,824473	1,16004	0,14292	-0,80241	0,3019	0,443529	-5,39729
	γ_{13}	-2,51816	6,83223	-5,03223	0,169721	0,608308	139,02	-13,8562
	γ_{23}	0,0731764	0,111404	0,0742616	-0,497166	0,261131	9,833	-10,4007
2,0	γ_{11}		0,0164526	-0,0504046	-0,381105	0,681705		
	γ_{22}		0,548673	-1,23166	-0,018786	0,903053		
	γ_{33}		0,127745	-0,123111	-0,609237	0,681783		
	γ_{12}	-0,472797	0,446274	0,543976	-0,789926	0,255217	0,313265	-5,21907
	γ_{13}	-3,50247	8,14502	-5,31958	0,12954	0,559829	234,901	-15,6618
	γ_{23}	-0,021745	0,222323	0,0182907	-0,413529	0,212236	11,3652	-11,3125
2,2	γ_{11}		0,0066569	-0,0153038	-0,391741	0,645002		
	γ_{22}		0,559227	-1,17083	-0,087740	0,88991		
	γ_{33}		0,0900762	-0,0413694	-0,623728	0,64491		
	γ_{12}	-0,203155	-0,0699308	0,798479	-0,754427	0,216599	0,236663	-5,10626
	γ_{13}	-3,97808	8,53812	-5,11934	0,0184385	0,517852	412,575	-17,5845
	γ_{23}	-0,085372	0,294431	-0,0279683	-0,340991	0,1732	13,7869	-12,3001



Rys. 4.22. Wykresy γ_{12} (przypadek kowariancji X_{AB} i X_{BC}) jako funkcji kąta tarcia wewnętrznego φ_1 , dla trzech różnych szerokości fundamentu: $b = 1,2$ m, $b = 1,6$ m oraz $b = 2,0$ m

Przykładowe wykresy uzyskanych zależności pokazano na rysunku 4.22.

4.6.2. Algorytm estymacji prawdopodobieństwa awarii dla losowo zmiennych linii poślizgu

W przypadku zmiennej linii poślizgu nie jest też możliwe bezpośrednie zastosowanie do obliczeń miar niezawodności metod FORM i SORM. Co prawda funkcja stanu granicznego (4.76) ma postać analityczną wyprowadzoną w podrozdziale 4.3, która zależy w sposób jawny od zmiennych losowych φ_1 , c_1 , φ_2 , c_2 , φ_3 , c_3 . Jednak wariancje zmiennych losowych c_1 , φ_2 , c_2 , φ_3 , c_3 zależą od zmiennej losowej φ_1 . W ten sposób mamy do czynienia z rozkładami złożonymi, o których była mowa w punkcie 3.1.1. W tej sytuacji wygodnie jest posłużyć się metodą Monte Carlo. Poniżej przedstawiony jest algorytm numeryczny, korzystający z metody Monte Carlo, prowadzący do znalezienia przybliżonej wartości prawdopodobieństwa awarii, w sytuacji gdy uwzględniona zostaje zmienność losowa linii poślizgu. Istotą tego algorytmu jest to, że w każdej kolejnej realizacji procesu symulacyjnego generowana jest określona wartość kąta tarcia wewnętrznego, na podstawie której znajdowana jest linia poślizgu. Następnie właściwości podłoża uśredniane są na każdym z trzech odcinków tej linii. Procedura ta powtarza się w każdej kolejnej realizacji. W konsekwencji w każdej realizacji

tworzona jest na nowo macierz kowariancji wektora losowego $(\varphi_1, c_1, \varphi_2, c_2, \varphi_3, c_3)$. Wspomniany wyżej algorytm składa się z 14 następujących kroków:

Krok 1. Zgodnie z założeniami parametry wytrzymałościowe podłoża charakteryzowane są przez stacjonarne log-normalne pola losowe kąta tarcia wewnętrznego i spójności: $X = \varphi$, $X = c$. Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe tych pól są oznaczane odpowiednio przez μ_X oraz σ_X , przy czym X oznacza φ lub c . Zakłada się, że skale fluktuacji w obu polach są jednakowe (por. uwagi w podrozdziale 3.2).

Krok 2. Stosując wzory transformacyjne (2.65) i (2.66) znajduje się wartość oczekiwaną $\mu_Y = \mu_{\ln X}$ oraz wariancję $\sigma_Y^2 = \sigma_{\ln X}^2$ rozkładu normalnego $Y = \ln X$ podstawowego względem X (por. podrozdział 2.6).

Krok 3. Znając μ_Y oraz σ_Y^2 generuje się wektor losowy $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)$, tak aby $E[Y_i] = \mu_{\ln \varphi}$ i $\text{VAR}(Y_i) = \sigma_{\ln \varphi}^2$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $E[Y_i] = \mu_{\ln c}$ i $\text{VAR}(Y_i) = \sigma_{\ln c}^2$ dla $i = 4, 5, 6$, przy czym zmienne losowe $Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$ są stochastycznie niezależne.

Krok 4. Zmienną losową Y_1 transformuje się do zmiennej X_1 o rozkładzie lognormalnym stosując odwzorowanie

$$X_1 = \exp(Y_1). \quad (4.79)$$

Na podstawie uzyskanej wartości zmiennej X_1 określana jest geometria bieżącej linii poślizgu.

Krok 5. Na podstawie wartości funkcji wariancji określonych wzorami (4.77) i (4.78) buduje się macierz kowariancji wektora \mathbf{X} o postaci

$$\mathbf{C}_X = \begin{bmatrix} \mathbf{G} & \mathbf{M} \\ \mathbf{H} & \mathbf{N} \end{bmatrix}, \quad (4.80)$$

gdzie \mathbf{G} , \mathbf{H} , \mathbf{M} , \mathbf{N} są następującymi macierzami:

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \sigma_\varphi^2 \gamma_{11}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{12}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{13}(X_1, b) \\ \sigma_\varphi^2 \gamma_{21}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{22}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{32}(X_1, b) \\ \sigma_\varphi^2 \gamma_{31}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{32}(X_1, b) & \sigma_\varphi^2 \gamma_{33}(X_1, b) \end{bmatrix}, \quad (4.81)$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{11}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{21}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{31}(X_1, b) \\ \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{12}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{22}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{32}(X_1, b) \\ \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{13}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{23}(X_1, b) & \rho_{\varphi,c} \sigma_\varphi \sigma_c \gamma_{33}(X_1, b) \end{bmatrix}, \quad (4.82)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{11}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{12}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{13}(X_1,b) \\ \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{21}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{22}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{23}(X_1,b) \\ \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{31}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{32}(X_1,b) & \rho_{\varphi,c}\sigma_{\varphi}\sigma_c\gamma_{33}(X_1,b) \end{bmatrix}, \quad (4.83)$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} \sigma_c^2\gamma_{11}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{12}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{13}(X_1,b) \\ \sigma_c^2\gamma_{21}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{22}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{23}(X_1,b) \\ \sigma_c^2\gamma_{31}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{32}(X_1,b) & \sigma_c^2\gamma_{33}(X_1,b) \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Oczywiście $\mathbf{H} = \mathbf{M}$, gdyż macierz kowariancji jest macierzą symetryczną. Następnie sprawdzana jest dodatnia określoność macierzy \mathbf{C}_X .

Krok 6. Mając daną macierz \mathbf{C}_X znajduje się macierz współczynników korelacji, stosując następujące zależności:

$$A_X(i,j) = \rho(X_i, X_j) = \frac{C_X(i,j)}{\sqrt{[C_X(i,i)][C_X(j,j)]}}, \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (4.85)$$

Krok 7. Konstruuje się macierz korelacji Λ_Y wektora gaussowskiego \mathbf{Y} podstawowego względem \mathbf{X} według zależności (por. wzór (2.69))

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{\ln(1 + \rho(X_i, X_j)v_{X_i}v_{X_j})}{\sqrt{\ln(1 + v_{X_i}^2)\ln(1 + v_{X_j}^2)}}, \quad (4.86)$$

przy czym v_{X_i} oraz v_{X_j} oznaczają współczynniki zmienności odpowiednio zmiennej losowej X_i oraz zmiennej losowej X_j .

Krok 8. Macierz korelacji Λ_Y wektora gaussowskiego \mathbf{Y} jest sprowadzana do macierzy kowariancji \mathbf{C}_Y tegoż wektora za pomocą przekształcenia

$$C_Y(i,j) = \rho(Y_i, Y_j)\sqrt{\text{VAR}[X_i]\text{VAR}[X_j]}, \quad (4.87)$$

gdzie (por. wzór (2.65))

$$\text{VAR}[X_i] = \ln\left(1 + \frac{C_X(i,i)}{\mu_X^2}\right), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.88)$$

Krok 9. Macierz \mathbf{C}_Y poddaje się dekompozycji Choleskiego (Horn, 1985), tzn. przedstawia się macierz \mathbf{C}_Y w postaci

$$\mathbf{C}_Y = \mathbf{L}\mathbf{L}^T, \quad (4.89)$$

przy czym \mathbf{L} jest macierzą dolno-trójkątną o dodatnich wyrazach na przekątnej.

Krok 10. Wektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)$, otrzymany w kroku nr 3, jest poddany standaryzacji, tj. przekształcany w następujący sposób:

$$Y_i^* = \frac{Y_i - E[Y_i]}{\sqrt{\text{VAR}[Y_i]}}, \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.90)$$

Współrzędne wektora \mathbf{Y}^* są stochastycznie niezależnymi zmiennymi losowymi o standardowych rozkładach normalnych.

Krok 11. Stosuje się następujące twierdzenie:

Jeżeli \mathbf{C} jest dodatnio określoną macierzą $n \times n$, wtedy wektor losowy określony jako $\mathbf{Z} = \mathbf{L}\mathbf{U}$, gdzie \mathbf{U} jest n -wymiarowym wektorem, którego współrzędne są niezależnymi gaussowskimi standardowymi zmiennymi losowymi, zaś \mathbf{L} dolno-trójkątną macierzą, taką że $\mathbf{L}\mathbf{L}^T = \mathbf{C}$, jest gaussowskim wektorem losowym o macierzy kowariancji \mathbf{C} , którego współrzędne mają zerowe wartości oczekiwane (por. np. Fenton i Griffiths, 2008).

Korzystając z powyższego twierdzenia tworzy się wektor

$$\mathbf{Z} = \mathbf{L}\mathbf{Y}^*, \quad (4.91)$$

gdzie \mathbf{L} jest macierz otrzymaną w kroku 9, zaś \mathbf{Y}^* wektorem otrzymanym w kroku 10. Zgodnie z powyższym twierdzeniem wektor losowy \mathbf{Z} jest wektorem gaussowskim, którego współrzędne mają zerowe wartości oczekiwane, a jego macierzą kowariancji jest macierz \mathbf{C}_Y .

Krok 12. Definiuje się wektor \mathbf{S} o współrzędnych

$$S_i = Z_i + E[Y_i], \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.92)$$

Wektor \mathbf{S} jest wektorem losowym o rozkładzie normalnym, którego współrzędne mają wartości oczekiwane równe $E[Y_i]$, a macierzą kowariancji jest macierz \mathbf{C}_Y .

Krok 13. Wektor \mathbf{S} transformowany jest do wektora \mathbf{T} o rozkładzie log-normalnym przez zastosowanie przekształcenia (2.61) dla poszczególnych współrzędnych, tj.

$$T_i = \exp(S_i), \quad i = 1, \dots, 6. \quad (4.93)$$

Macierzą kowariancji wektora \mathbf{T} jest macierz \mathbf{C}_X . Ponadto $E[T_i] = \mu_\varphi$ dla $i = 1, 2, 3$ oraz $E[T_i] = \mu_c$ dla $i = 4, 5, 6$.

Krok 14. Współrzędne wektora podstawiane są do wzoru określającego funkcję stanu granicznego (4.76) według następującego porządku: $\varphi_1 = T_1$, $\varphi_2 = T_2$, $\varphi_3 = T_3$, $c_1 = T_4$, $c_2 = T_5$, $c_3 = T_6$.

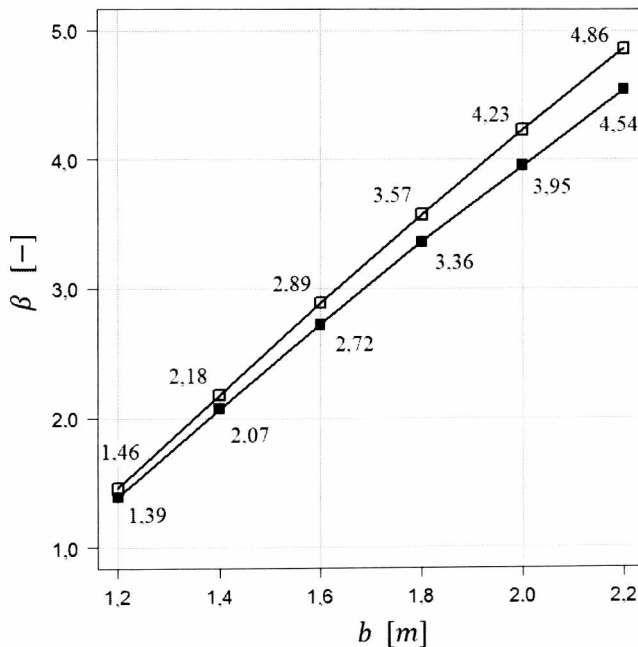
Powtarzając kroki od 3 do 14 N razy, gdzie N jest liczbą realizacji w procesie symulacyjnym, oszacowuje się prawdopodobieństwo awarii p_F według estymatora Monte Carlo – wzór (4.73), a następnie oblicza się wskaźnik niezawodności β , stosując wzór (4.70).

4.6.3. Przykłady obliczeniowe

Opisany w punkcie 4.6.2 algorytm zastosowano do napisania kodu w języku FORTRAN 77. Kod ten włączony został do źródłowej wersji wzmiarkowanego w punkcie 4.5.1 oprogramowania COMERL (STRUREL, 1997), realizującego obliczenia miar niezawodności. Za pomocą tak skonstruowanego oprogramowania przeprowadzono szereg analiz numerycznych. Poniżej przedstawiono te z nich, które są identyczne w zakresie danych wejściowych z przykładami analizowanymi w punktach 4.5.1 oraz 4.5.2. W ten sposób możliwa staje się ocena, na ile zmienność losowa linii poślizgu wpływa na zmianę miar niezawodności w stosunku do obliczeń wykonanych przy założeniu nielosowej (stałej) linii poślizgu podczas analizy nośności posadowienia bezpośredniego.

Fundament pasmowy posadowiony na podłożu niespoistym. Rozpatruje się fundament identyczny z pokazanym na rysunku 4.16 o charakterystykach probabilistycznych takich jak w tabeli 4.13. Pionowa skala fluktuacji dla stacjonarnego log-normalnego pola losowego kąta tarcia wewnętrznego jest równa $\theta_v = 0,8$ m (identycznie jak w punkcie 4.5.1). W przypadku poziomej skali fluktuacji ograniczono się do jednej wartości $\theta_h = 10\theta_v = 8$ m (jednej z trzech wartości analizowanych w punkcie 4.5.1). Liczba realizacji w procesie symulacyjnym była zamienna i wahała się od $N = 10^7$ do $N = 3 \cdot 10^8$. Pozwoliło to utrzymać współczynnik zmienności estymowanego prawdopodobieństwa awarii p_F poniżej 4%, a to z kolei dawało dokładność obliczenia wskaźnika β do dwóch miejsc po przecinku. Otrzymane wyniki pokazano na rysunku 4.23. Rozpatrywany tu przykład jest analogiczny do przykładu, dla którego wskaźniki niezawodności oznaczane są przez β_{10} w punkcie 4.5.1 (patrz tabela 4.15 oraz rysunek 4.18), które dla porównania również naniesiono na wykres (białe kwadraty). Intuicja podpowiada, że uwzględnienie losowych linii poślizgu powinno skutkować mniejszymi wartościami wskaźników niezawodności ze względu na możliwy

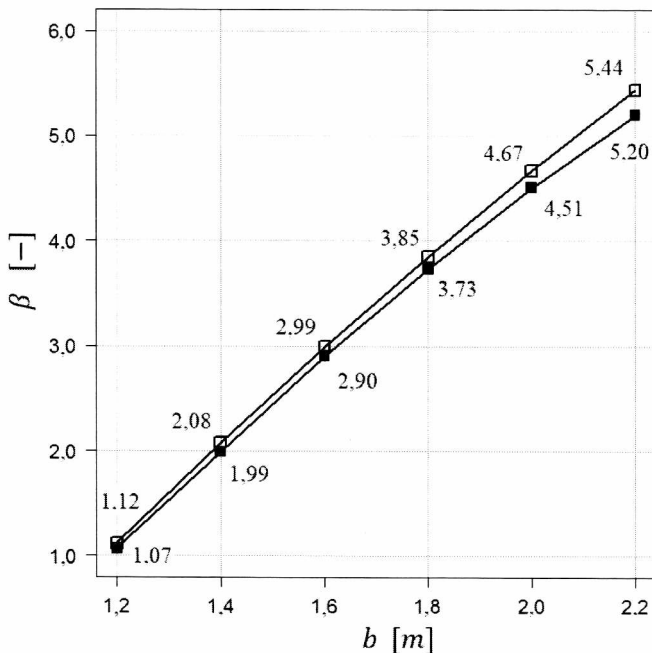
wzrost wariancji nośności posadowienia. I taką właśnie tendencję daje się zaobserwować na rysunku 4.23. Jednak przy małych szerokościach fundamentu różnice pomiędzy wskaźnikami niezawodności odpowiadającymi stałym liniom poślizgu a wskaźnikami otrzymanymi dla losowo zmiennych linii są zaskakująco niewielkie. Wydaje się, że pomimo nieliniowości problemu w przypadku oszacowania nośności odpowiadającej zmiennym losowo liniom poślizgu dochodzi do pewnego rodzaju uśrednienia, które upodabnia uzyskane wyniki do wyników w przypadku stałych linii poślizgu, uzyskanych dla średniej wartości kąta tarcia wewnętrznego. Należy też odnotować, że różnice pomiędzy obydwoimi przypadkami zwiększają się wraz ze wzrostem szerokości fundamentu, co z kolei może być konsekwencją wzrostu długości linii poślizgu.



Rys. 4.23. Wartości wskaźników niezawodności dla fundamentu posadowionego na podłożu niespoistym. Czarne kwadraty – wartości uzyskane w obliczeniach opartych na algorytmie opisanym w punkcie 4.6.2. Białe kwadraty – wartości uzyskane dla stałej linii poślizgu, przedstawione w punkcie 4.5.1 z oznaczeniami β_{10}

Fundament pasmowy posadowiony na podłożu spoistym. Obliczenia dla losowo zmiennych linii poślizgu (według pokazanego wyżej algorytmu) wykonano także dla podłoża spoistego, odnosząc się do przykładów opisanych w punkcie 4.5.2. Rozpatrywano fundament pokazany na rysunku 4.19, o charakterystykach podanych w tabeli 4.16. W tym przypadku mamy do czynienia z dwoma

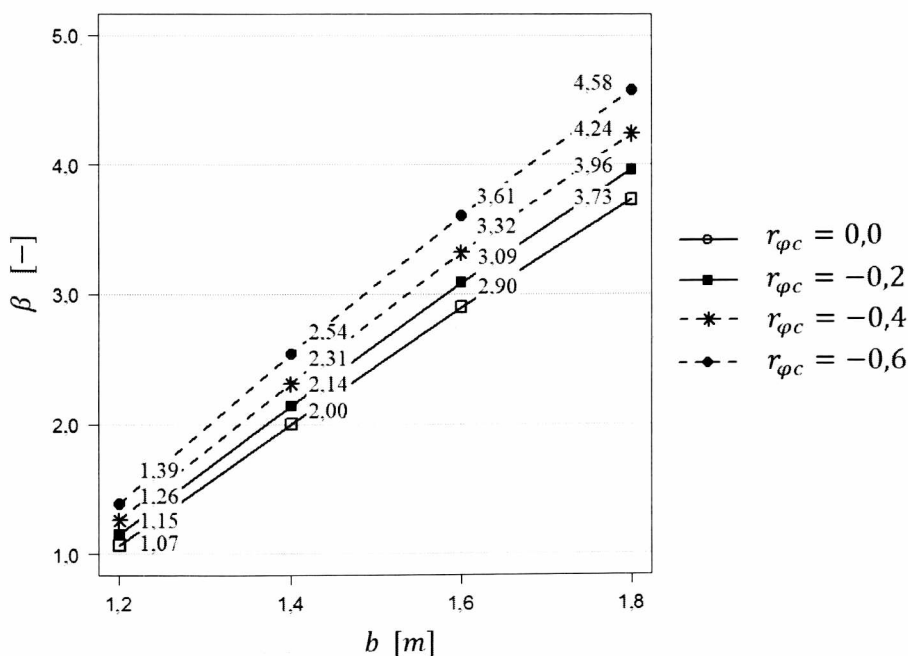
polami losowymi – polem kąta tarcia wewnętrznego oraz polem spójności. W obu przypadkach pionowa skala fluktuacji dla stacjonarnego log-normalnego pola losowego jest równa $\theta_v = 1,0$ m (identycznie jak w punkcie 4.5.2). W przypadku poziomej skali fluktuacji ograniczono się, podobnie jak w przypadku podłoża niespoistego, do jednej wartości $\theta_h = 10\theta_v = 10$ m (jednej z trzech wartości analizowanych w punkcie 4.5.2). Obliczenia wykonano najpierw dla stochastycznie niezależnych pól losowych kąta tarcia wewnętrznego i spójności, których wyniki porównano z wynikami uzyskanymi dla stałych linii poślizgu (punkt 4.5.2). Następnie wykonano serię obliczeń dla skorelowanych ze sobą pól kąta tarcia oraz spójności. Przyjęto ujemne współczynniki korelacji $\rho(\varphi(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})) = -0,2$, $\rho(\varphi(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})) = -0,4$, $\rho(\varphi(\mathbf{x}), c(\mathbf{x})) = -0,6$, a otrzymane wyniki porównano z przypadkiem pól nieskorelowanych. Liczba realizacji w procesie symulacyjnym wahała się od $N = 10^7$ do $N = 3 \cdot 10^8$. Wykres wskaźników niezawodności, dla przypadku stochastycznie niezależnych pól losowych kąta tarcia wewnętrznego i spójności, jako funkcji szerokości fundamentu przedstawia rysunek 4.24.



Rys. 4.24. Wartości wskaźników niezawodności dla fundamentu posadowionego na podłożu spoistym w zależności od szerokości fundamentu. Czarne kwadraty – wartości uzyskane w obliczeniach opartych na algorytmie opisanym w punkcie 4.6.2. Białe kwadraty – wartości uzyskane dla stałej linii poślizgu, przedstawione w punkcie 4.5.2 z oznaczeniami β_{10}

Z wykresów na rysunku 4.24 wynika, że podobnie jak w przypadku gruntu niespoistego, w przypadku uwzględnienia losowej zmienności linii poślizgu otrzymuje się mniejsze wartości wskaźników niezawodności aniżeli w przypadku założenia stałej linii poślizgu. Jednak uzyskane różnice pomiędzy wskaźnikami są znacznie mniejsze niż w sytuacji podłoża niespoistego. Ten efekt można tłumaczyć tym, że w przypadku podłoża niespoistego losowe wahania kąta tarcia wewnętrznego, który ma w tym przypadku dużą wartość średnią, powodują większe wahania nośności aniżeli w przypadku podłoża spoistego.

Na rysunku 4.25 porównano wykresy wskaźników niezawodności w zależności od szerokości fundamentu przy założeniu różnych współczynników korelacji pomiędzy polami losowymi kąta tarcia wewnętrznego i spójności.



Rys. 4.25. Wartości wskaźników niezawodności dla fundamentu posadowionego na podłożu spoistym w zależności od szerokości fundamentu z uwzględnieniem korelacji wzajemnej pomiędzy polami spójności i kąta tarcia wewnętrznego

Wykres przedstawiający wskaźniki dla pól nieskorelowanych na rysunku 4.25 odpowiada wykresowi oznaczonemu przez zaczernione kwadraty z rysunku 4.24. Z przedstawionych wykresów wynika, że im silniejsza ujemna korelacja pomiędzy polami tym mniejsze prawdopodobieństwo wyczerpania nośności podłoża, przy czym różnice pomiędzy wskaźnikami niezawodności są znaczne i rosną

wraz z szerokością fundamentu. Oznacza to, że przyjęcie braku korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi prowadzi do najbardziej konserwatywnego oszacowania losowej nośności posadowienia bezpośredniego (przy założeniu, że dodatnia korelacja nie jest możliwa – por. rozdział 3).

4.7. Uwagi podsumowujące

W rozdziale tym pokazano procedury umożliwiające obliczenia miar niezawodności w przypadku analizy nośności granicznej fundamentów bezpośrednich, których długość znacznie przekracza szerokość. Oszacowania nośności bazują na podejściu kinematycznym, a konkretnie na mechanizmie Prandtla. Aby uwzględnić przestrzenną zmienności właściwości podłoża, zastosowano modelowanie tychże właściwości za pomocą teorii pól losowych z zastosowaniem ich uśrednień lokalnych (przestrzennych). Takie podejście stanowi alternatywę dla prostszego zarówno z matematycznego, jak i obliczeniowego punktu widzenia modelowania poszczególnych właściwości za pomocą pojedynczych zmiennych losowych. Można zatem zadać pytanie, dlaczego warto stosować to bardziej skomplikowane podejście. Najważniejszą przyczyną jest możliwość modelowania przestrzennej zmienności parametrów podłoża. Zmienność ta jest istotą materiału naturalnego, jakim jest grunt. Po drugie, z matematycznego punktu widzenia, przedstawiona tu metoda stanowi bardziej precyzyjne i kompletne rozwiązanie zagadnienia losowego. Jest jednak jeszcze jedna ważna przyczyna, która związana jest z jakością oceny bezpieczeństwa fundamentów bezpośrednich. W kilku wcześniejszych publikacjach autor niniejszej monografii zwracał uwagę, że analiza niezawodności prawidłowo zaprojektowanych fundamentów bezpośrednich wskazywała stosunkowo wysokie prawdopodobieństwo ich awarii (por. np. Doliński i Puła, 1989, 1990; Puła, 1993 oraz 2004). Jednak oszacowanie prawdopodobieństwa w tych analizach zakładało modelowanie parametrów podłoża za pomocą pojedynczych zmiennych losowych. Okazało się więc, że modelowanie tychże parametrów z uwzględnieniem ich przestrzennej zmienności jest niezbędne do prawidłowej oceny miar niezawodności. Uśrednienia przestrzenne prowadzą bowiem do redukcji wariancji w stosunku do wariancji punktowej. Do podobnych konkluzji dochodzili także inni badacze, np. Cherubini (2000b) czy Rackwitz (2004).

Uzyskanie dla bezpiecznie zaprojektowanych fundamentów bezpośrednich wskaźników niezawodności zalecanych przez międzynarodowe normatywy

(np. ISO 2394, 1998 i 2015) ma też tę istotną zaletę, że umożliwia porównywanie wskaźników niezawodności fundamentu ze wskaźnikami niezawodności innych elementów konstrukcji. To z kolei pozwala na rzetelną ocenę niezawodności całej konstrukcji w jednolity sposób.

W związku ze stosowaniem uśrednień pojawia się istotny problem rozmiarów obszarów uśrednienia. Wielkość tego obszaru istotnie wpływa na wartości wskaźników niezawodności. Zdaniem autora konieczne jest zatem dokonywanie uśrednienia wzdłuż powierzchni występujących w mechanizmie zniszczenia, zachodzącego w podłożu. W tym rozdziale pokazano to na przykładzie mechanizmu Prandtla. Bardzo istotny element tego rozdziału stanowi wyprowadzenie zależności opisujących wariancje i kowariancje zmiennych losowych wynikających z zastosowania przestrzennych uśrednień związanych z powierzchniami poślizgu występującymi w mechanizmie Prandtla. Wprowadzenie osobno pionowej i poziomej skali fluktuacji pozwoliło na rezygnację z krępującego założenia o izotropii pól parametrów wytrzymałościowych. Wyprowadzone wzory mają charakter ogólny, dotyczą bowiem dowolnej linii prostej i dowolnego odcinka spirali logarytmicznej. Tak więc uogólnienie na mechanizmy zawierające takie linie, np. mechanizm Hilla czy Terzagiego (por. Izbicki i Mróz, 1976) jest nietrudne, ale wymaga oczywiście modyfikacji funkcji stanu granicznego opisanej w podrozdziale 4.3. Bardzo ważny element stanowi też możliwość uwzględnienia zmieniającej się w sposób losowy linii poślizgu (podrozdział 4.6).

Z wyników przeprowadzonych obliczeń, oprócz wielu szczegółowych wniosków sformułowanych w poprzednich podrozdziałach, na szczególną uwagę zasługuje fakt, że wskaźniki niezawodności uzyskane w podejściu dwuwymiarowym niewiele różnią się od uzyskanych z zadania jednowymiarowego. Przy wartościach poziomej skali fluktuacji nie mniejszych niż 10-krotna wartość skali pionowej oraz istotnych z punktu widzenia projektowego szerokości fundamentu różnice te są na ogół do pominięcia. Jest to istotne z praktycznego punktu widzenia. Jeśli bowiem można ograniczyć się do jednowymiarowego uśrednienia, uwzględniającego jedynie pionową skalę fluktuacji pola losowego, to znika problem określania skali fluktuacji w kierunku poziomym. Jednak nie w każdej sytuacji postępowanie takie jest uprawnione. Na przykład w probabilistycznej analizie stateczności zbczy pozioma skala fluktuacji odgrywa istotną rolę (Hicks i Samy, 2002). Będzie to także pokazane w rozdziale 5 tej monografii. Ostatnie badania prowadzone przez ośrodek w Delft wskazują także, że pozioma skala fluktuacji może w niektórych gruntach przyjmować mniejsze wartości, aniżeli wcześniej przypuszczano (Hicks, 2017).

Ciekawą obserwacją jest także to, że miary niezawodności uzyskane przy założeniu losowo zmiennej linii poślizgu niewiele odbiegają od uzyskanych przy przyjęciu stałej linii określonej na podstawie wartości oczekiwanej kąta tarcia wewnętrznego. Obserwuje się to zwłaszcza w przypadku podłoża o niewielkiej wartości kąta tarcia wewnętrznego, np. w gruntach spoistych.

5. Ocena losowej nośności posadowienia bezpośredniego za pomocą losowej metody elementów skończonych

Pod koniec lat siedemdziesiątych i w latach osiemdziesiątych ubiegłego stulecia stochastyczna metoda elementów skończonych, która wprowadzała elementy analizy probabilistycznej do klasycznej (deterministycznej) metody elementów skończonych (np. Vanmarcke i Grigoriu, 1983), została zastosowana do zagadnień geotechnicznych. Warto tu wymienić prace Beachera i Ingry (1981) oraz Righettiego i Harrop-Williamsa (1981), które dotyczyły analizy naprężeń oraz osiadań fundamentów, Ishii i Suzuki (1987) dotyczące stateczności zboczy czy też dedykowane zagadnieniom filtracji prace Smitta i Freeze'a (1979a, 1979b). Stochastyczna metoda elementów skończonych może być realizowana na różne sposoby. Najprościej rzecz ujmując, można wyodrębnić dwa następujące nurty. Pierwszy z nich skupia metody, w których charakterystyki probabilistyczne są uwzględnione w równaniach MES. Przykładem takiego sformułowania jest tu wspomniana wyżej praca Vanmarcke'a i Grigoriu (1983), a także późniejsze, stosujące tzw. chaos wielomianowy, prace Ghanema i Spanosa (1991), Brząkały i Ghanema (1993) oraz Ghanema i Brząkały (1996). Drugi nurt to metody bazujące na analizie statystycznej wielu przypadków, z których każdy jest pewną realizacją określonego pola losowego. Najczęściej używana jest w tym celu metoda Monte Carlo. Rozwój tego drugiego nurtu możliwy był dzięki bardzo intensywnemu wzrostowi mocy obliczeniowej komputerów, który nastąpił pod koniec ubiegłego stulecia i trwa nadal. Dzięki niemu możliwe stały się rozwiązania zagadnień brzegowych za pomocą metody elementów skończonych dla tysięcy realizacji pola (pól) losowego uzyskiwane w stosunkowo rozsądnych ramach czasowych.

W zadaniach związanych z geotechniką intensywny rozwój tego typu podejścia zapoczątkowany został pracami Griffithsa i Fentona (1993) oraz Fentona i Griffithsa

(1993). Autorzy ci, dla odróżnienia od podejścia pierwszego nurtu, wprowadzili określenie: losowa metoda elementów skończonych (ang. *Random Finite Element Method*), w skrócie oznaczana jako RFEM, w odróżnieniu od SFEM (*Stochastic Finite Element Method*). W dalszym ciągu niniejszego opracowania skrót RFEM będzie często stosowany. Można by rzec, że metoda RFEM łączy w sobie klasyczną (deterministyczną) metodę elementów skończonych, modelowanie parametrów za pomocą pól losowych oraz symulację Monte Carlo. Prace Griffithsa i Fentona zapoczątkowały intensywny rozwój metody RFEM i jej zastosowań do różnych zagadnień geotechniki. Jako przykład mogą tu służyć prace dotyczące osiadania podłoża gruntowego (Paice, Griffiths i Fenton, 1996 oraz Fenton i Griffiths, 2002, 2005), nośności podłoża (Griffiths i Fenton, 2001, 2002; Fenton i Griffiths, 2003; Pieczyńska-Kozłowska i inni, 2015 oraz Puła i Zaskórski, 2015). Stateczności zboczy dotyczą prace Griffithsa i Fentona (2004), Choka i innych (2007) oraz Griffithsa i innych (2010), zaś parcia gruntu – prace Fentona i innych (2005) oraz Griffithsa i innych (2008). Stworzono też specjalną stronę internetową www.engmath.dal.ca/rfem, na której zamieszczane są informacje o kolejnych publikacjach. Z tejże strony można też pozyskiwać (bezpłatnie) kody źródłowe dotyczące wybranych rozwiązań metodą RFEM.

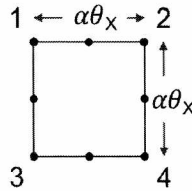
Warto odnotować, że w większości prac z zakresu RFEM stosowane są sprężysto-plastyczne modele gruntu. Ponadto w większości prac autorzy stosują algorytm LAS (opisany w podrozdziale 2.10) do generowania pól losowych. Parametr gruntu (modelowany przez pole losowe) jest „dopasowywany” do elementu poprzez lokalne uśrednienie (por. podrozdziały 2.8 oraz 2.10). Ilustruje to poniższy przykład.

Przykład 5.1. Załóżmy, że pole X , modelujące określoną właściwość podłoża, jest izotropowe i posiada strukturę korelacyjną typu Markowa z funkcją korelacji o postaci (2.43). Wówczas, korzystając z zależności (2.51) oraz (2.130), funkcję wariancji na obszarze kwadratu o boku L można zapisać w postaci

$$\gamma(L, L) = \frac{4}{LL} \int_0^L \int_0^L \left(1 - \frac{x'}{L}\right) \left(1 - \frac{y'}{L}\right) \exp \left(- \sqrt{ \left(\frac{2}{\theta_x} x' \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_x} y' \right)^2 } \right) dx' dy'. \quad (5.1)$$

W schemacie RFEM uśrednienie odbywa się względem obszaru elementu siatki MES. Przykładowo dla elementu kwadratowego ośmiowęzłowego, jak na rysunku 5.1, „dopasowanie” do elementu polega na takim doborze parametru α , aby spełniony był warunek (rys. 5.1)

$$L = \alpha \theta_x. \quad (5.2)$$



Rys. 5.1. Synchronizacja skali fluktuacji (promienia korelacyjnego) θ_x z elementem siatki MES

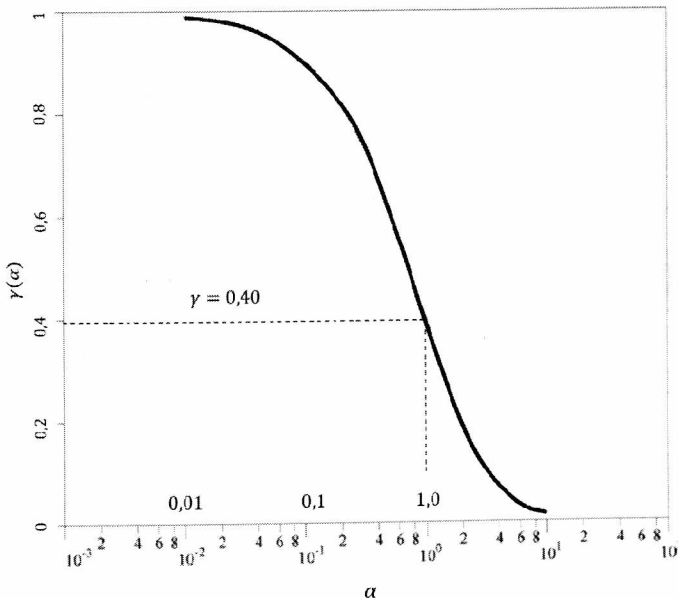
Podstawiając warunek (5.2) do wzoru (5.1), a następnie dokonując zamiany współrzędnych w całce podwójnej, według transformacji

$$x = \frac{x'}{\theta_x}, \quad y = \frac{y'}{\theta_x}, \quad (5.3)$$

otrzymuje się

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha) &= \frac{4}{(\alpha\theta_x)^2} \int_0^{\alpha\theta_x} \int_0^{\alpha\theta_x} \left(1 - \frac{x\theta_x}{\alpha\theta_x}\right) \left(1 - \frac{y\theta_x}{\alpha\theta_x}\right) (\theta_x)^2 \exp\left(-2\sqrt{(x^2 + y^2)}\right) dx dy = \\ &= \frac{4}{\alpha^4} \int_0^\alpha \int_0^\alpha (\alpha - x)(\alpha - y) \exp\left(-2\sqrt{(x^2 + y^2)}\right) dx dy. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Zależność funkcji $\gamma(\alpha)$ redukującej wariancję na skutek uśrednienia pokazano na rysunku 5.2.



Rys. 5.2. Zależność redukcji wariancji od parametru α dla pola z przykładu 5.1

Warto odnotować, że w przypadku, gdy $\alpha = 1$, co oznacza długość boku elementu (rozmiar elementu) równą skali fluktuacji, wartość współczynnika redukcji $\gamma(1)$ wynosi około 0,4. Jeśli rozmiar elementu przekroczy wartość skali fluktuacji, to redukcja staje się bardzo silna i wariancja szybko zbiega do zera. Taka sytuacja w modelowaniu nie powinna mieć miejsca.

5.1. Prace inicjujące zagadnienie

Przechodząc do zagadnień nośności posadowienia bezpośredniego warto przyrzeć się nieco dokładniej pierwszym opracowaniom w ramach metody RFEM przedstawionym przez Griffithsa i Fentona.

5.1.1. Podłoże idealnie spoiste

Pierwsze z nadmienionych opracowań (Griffiths i Fenton, 2001) dotyczy zagadnienia analogicznego do rozwiązania Prandtla w płaskim stanie odkształcenia w gruncie idealnie spoistym, charakteryzowanym przez wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu c_u . Ten właśnie parametr modelowany był przez stacjonarne izotropowe log-normalne pole losowe omówione w podrozdziale 2.6 (uzyskane z pola gaussowskiego poprzez transformację postaci (2.61), $Y = c_u$). Konsekwencją założenia izotropii było przyjęcie jednakowej skali fluktuacji w obu kierunkach – pionowym i poziomym ($\theta_v = \theta_h$). W związku z tym funkcja korelacji pola była funkcją jednej zmiennej. Przyjęto założenie, że jest to funkcja typu Markowa (wzór (2.88)). Obliczenia nośności realizowane były metodą elementów skończonych przy założeniu modelu sprężysto-idealnie plastycznego z kryterium Treski. Szczegółowy algorytm obliczeń deterministycznych MES podany jest w książce Smitha i Griffithsa (1998) lub nowszej wersji tej pozycji opracowanej przez Smitha, Griffithsa i Margetsa (2014).

Model obliczeniowy zawierał trzy parametry: moduł Younga E , współczynnik Poissona ν oraz wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu c_u (do końca opisu tego zadania używane będzie skrócone określenie – wytrzymałość gruntu na ścinanie), których charakterystyki probabilistyczne podano w tabeli 5.1. Jedynie parametr c_u modelowany był za pomocą pola losowego, dwa pozostałe były natomiast traktowane jako nielosowe i przyjmowały stałą wartość. Pole losowe wytrzymałości c_u było generowane za pomocą algorytmu LAS

(por. podrozdział 2.10) z uwzględnieniem lokalnych uśrednień i odwzorowane do siatki MES według schematu pokazanego wyżej (por. rys. 5.1 i objaśnienia).

Tabela 5.1. Parametry zadania nośności posadowienia w gruncie idealnie spoiwym (Griffiths i Fenton, 2001)

Parametr	Wartość średnia	Rozkład prawdopodobieństwa
Wytrzymałość na ścinanie c_u	100 kPa	log-normalny
Moduł Younga (E)	100 MPa	parametr niełosowy
Współczynnik Poissona (ν)	0,3	parametr niełosowy

Zmienną losową poddaną analizie statystycznej był bezwymiarowy współczynnik nośności

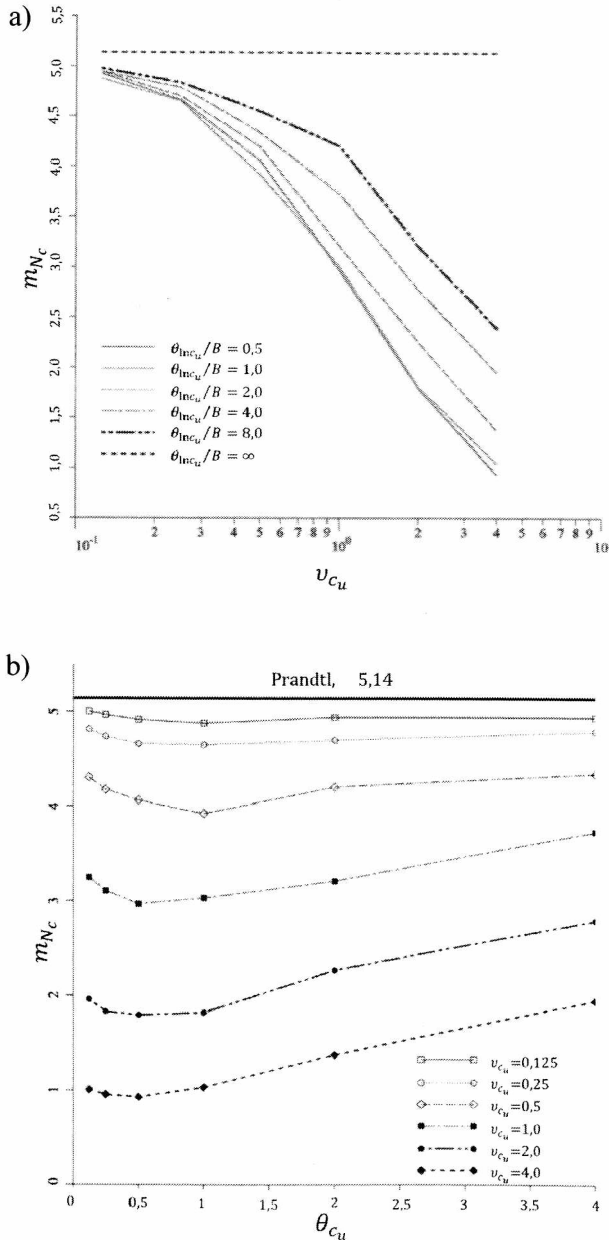
$$N_c = \frac{q_f}{\mu_{c_u}}, \quad (5.5)$$

którego rozkład prawdopodobieństwa estymowano na podstawie symulacji Monte Carlo przy liczbie realizacji $N = 1000$. W celu uniknięcia zależności od wymiaru skali fluktuacji $\theta_{\ln c_u}$ (która zwykle określana jest w metrach) w ramach prowadzonych analiz autorzy wprowadzili bezwymiarową skalę fluktuacji w odniesieniu do szerokości fundamentu B , tj.

$$\Theta_{c_u} = \frac{\theta_{\ln c_u}}{B}. \quad (5.6)$$

Uzyskane wartości średnie współczynnika nośności N_c w zależności od współczynnika zmienności wytrzymałości na ścinanie oraz wartości skali fluktuacji θ_{c_u} przedstawiono na rysunku 5.3.

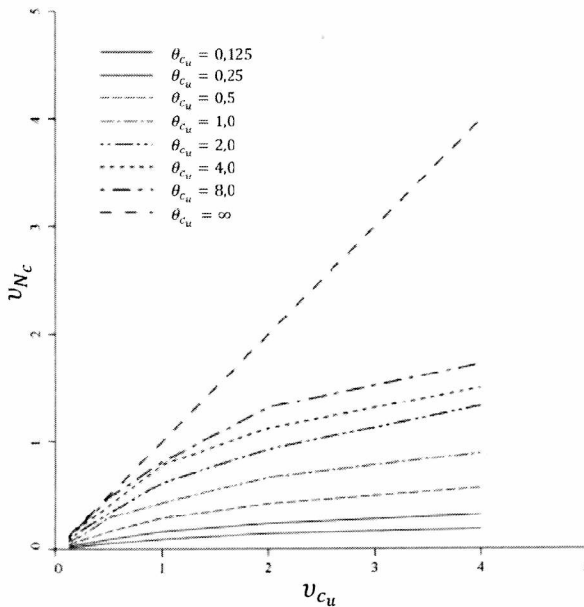
Wykresy pokazują, że wartość średnia współczynnika nośności m_{N_c} dąży do deterministycznego rozwiązania Prandtla $N_c = 2 + \pi \approx 5,14$, gdy współczynnik zmienności pola maleje do zera (rys. 5.3b), a także gdy skala fluktuacji dąży do nieskończoności (rys. 5.3a). Jednak wraz ze wzrostem wartości współczynnika zmienności ν_{c_u} średnia m_{N_c} szybko maleje, zwłaszcza przy małych wartościach bezwymiarowej skali fluktuacji Θ_{c_u} . Uzyskane krzywe wskazują, że w ośrodku o przestrzennej zmienności wytrzymałości wartość średnia nośności może być istotnie mniejsza od nośności uzyskanej z deterministycznego rozwiązania Prandtla. Na rysunku 5.3b można też zaobserwować, że największą „redukcję” w stosunku do rozwiązania Prandtla uzyskuje się (praktycznie niezależnie od wartości ν_{c_u})



Rys. 5.3. Wartość średnia m_{N_c} współczynnika nośności N_c jako funkcja współczynnika zmienności v_{c_u} pola c_u (rysunek a) oraz bezwymiarowej skali fluktuacji θ_{c_u} (rysunek b). Za pracą Griffithsa i Fentona (2001)

dla $\theta_{c_u} \approx 0,5$. Warto też zwrócić uwagę na to, że wpływ skali fluktuacji na wartość średnią (rozumiany jako skutkujący większą zmiennością) jest tym większy im większy jest współczynnik zmienności v_{c_u} wytrzymałości na ścinanie.

Na rysunku 5.4 przedstawiono wykresy współczynnika zmienności ν_{N_c} zmiennej losowej N_c jako funkcję współczynnika zmienności ν_{c_u} dla różnych wartości bezwymiarowej skali fluktuacji θ_{c_u} . Wykresy wskazują na rosnący charakter współczynnika ν_{N_c} zarówno względem współczynnika zmienności wytrzymałości na ścinanie ν_{c_u} , jak i względem wielkości skali fluktuacji θ_{c_u} . Warto też odnotować, że wpływ wartości skali fluktuacji na ν_{N_c} jest znaczący. Wraz ze wzrostem θ_{c_u} krzywe zdążają do „prostej granicznej” wyznaczonej przez zależność $\nu_{N_c} = \nu_{c_u}$.



Rys. 5.4. Zależność współczynnika zmienności ν_{N_c} współczynnika nośności N_c od współczynnika zmienności wytrzymałości na ścinanie ν_{c_u} oraz bezwymiarowej skali fluktuacji θ_{c_u} . Za pracą Griffithsa i Fentona (2001)

Przedstawione przez autorów rezultaty w jasny sposób ukazują, że uwzględnienie przestrzennej zmienności wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez odpływu w bardzo istotny sposób wpływa na nośność posadowienia bezpośredniego i ma istotne implikacje przy ocenie jego bezpieczeństwa. Wykazanie wyżej omówionych efektów było możliwe dzięki modelowaniu wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez odpływu za pomocą pola losowego.

Powyższe rezultaty, uzupełnione kilkoma dodatkowymi ilustracjami, dotyczącymi generowania pola losowego spójności, zamieszczono także w pracy Griffithsa i współautorów (2002).

5.1.2. Podłoże tarciowo-kohezyjne (typu φ - c)

W przypadku podłoża tarciowo-kohezyjnego pierwsze rozwiązanie, dotyczące losowej nośności posadowienia bezpośredniego w ramach metody RFEM, zaproponowali Fenton i Griffiths (2003). Problem rozpatrywano przyjmując następujące założenia:

1. Sztywny fundament o szerokości $B = 1,0$ m (fundament niezagłębiony) spoczywa na powierzchni podłoża nieważkiego. Według tradycyjnego analitycznego opisu odpowiada to obliczaniu nośności w postaci

$$q_f = cN_c, \quad (5.7)$$

gdzie

$$N_c = \frac{\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi) \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi}{2} \right) - 1}{\operatorname{tg} \varphi} \quad (5.8)$$

(rozwiązanie Prandtla (1921)).

2. Rozpatruje się płaski stan odkształcenia.
3. Spójność (kohezja) modelowana jest za pomocą izotropowego log-normalnego pola losowego z funkcją korelacji typu Markowa o postaci

$$\rho_{\ln c}(\tau) = \exp\left(-\frac{2|\tau|}{\theta_{\ln c}}\right), \quad (5.9)$$

przy czym $\rho_{\ln c}(\tau)$ określa korelację w polu gaussowskim o skali fluktuacji $\theta_{\ln c}$ podstawowym względem pola c .

4. Kąt tarcia wewnętrznego charakteryzuje izotropowe pole o rozkładach jednowymiarowych o nośniku ograniczonym, otrzymanych z rozkładu normalnego przez transformację typu tangens hiperboliczny (por. podrozdział 2.6):

$$\varphi(\mathbf{x}) = \varphi_{\min} + \frac{1}{2}(\varphi_{\max} - \varphi_{\min}) \left[1 + \operatorname{tgh} \left(\frac{sG_\varphi(\mathbf{x})}{2\pi} \right) \right] \quad (5.10)$$

(parametr m występujący we wzorze (2.70) ma tu wartość zero). $G_\varphi(\mathbf{x})$ jest izotropowym polem gaussowskim o zerowej wartości oczekiwanej i jednostkowej wariancji z funkcją korelacji tej samej postaci, co w przypadku

poła spójności. Przyjęto, że $\theta_\varphi = \theta_{inc}$, co oznacza, że skale fluktuacji w obu polach są jednakowe (dalej oznaczane jako θ).

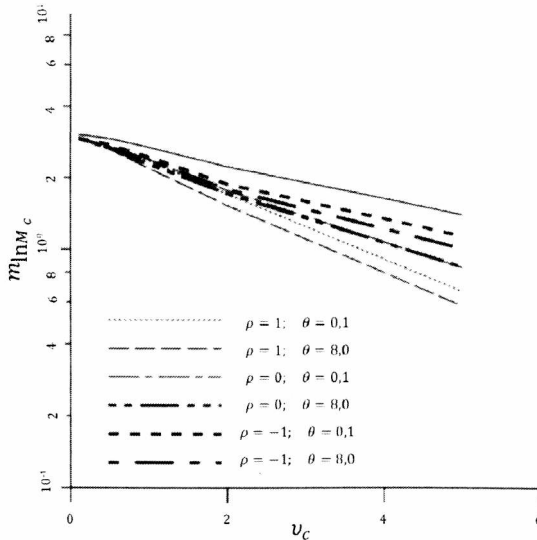
5. Wartość nośności q_f w każdej realizacji procesu symulacyjnego była obliczana metodą elementów skończonych z zastosowaniem modelu sprężysto-idealnie plastycznego z kryterium zniszczenia Coulomba–Mohra. Moduł Younga E , współczynnik Poissona ν oraz kąt dylatacji ψ traktowano jako własności nielosowe o wartościach odpowiednio $E = 100$ MPa oraz $\nu = 0,3$ i $\psi = 0$. Obliczenia wykonywano dla trzech różnych wartości współczynnika korelacji pomiędzy polami losowymi parametrów wytrzymałościowych $\rho(c(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = -1, 0, +1$. Wartości oczekiwane pól losowych spójności i kąta tarcia wewnętrznego były stałe i wynosiły odpowiednio $\mu_c = 100$ kPa, $\mu_\varphi = 25^\circ$ ($\varphi_{\min} = 5^\circ$, $\varphi_{\max} = 45^\circ$).
6. Współczynnik zmienności w polu spójności c przyjmował kolejno sześć następujących wartości: $(\nu_c)_1 = 0,1$; $(\nu_c)_2 = 0,2$; $(\nu_c)_3 = 0,5$; $(\nu_c)_4 = 1,0$; $(\nu_c)_5 = 2,0$; $(\nu_c)_6 = 5,0$. Natomiast współczynnik zmienności w polu kąta tarcia wewnętrznego φ przyjmowano kolejno zmieniając parametr s : $s_1 = 0,1$; $s_2 = 0,2$; $s_3 = 0,5$; $s_4 = 1,0$; $s_5 = 2,0$; $s_6 = 5,0$ rozkładu (por. wzór (5.10)) w ten sposób, że w danym przykładzie stosowano pola z parametrami o odpowiadających sobie indeksach, tj. $(\nu_c)_i$ oraz s_i , $i = 1, \dots, 6$. Stosując zależność (2.73) łatwo stwierdzić, że odpowiadające kolejnym parametrom s_i współczynniki zmienności w polu kąta tarcia wewnętrznego wynosiły odpowiednio: $(\nu_\varphi)_1 = 0,012$; $(\nu_\varphi)_2 = 0,023$; $(\nu_\varphi)_3 = 0,058$; $(\nu_\varphi)_4 = 0,116$; $(\nu_\varphi)_5 = 0,223$; $(\nu_\varphi)_6 = 0,458$. Zatem współczynniki zmienności w polu kąta tarcia wewnętrznego wzrastały wraz ze wzrostem współczynników zmienności pola spójności.
7. Liczba realizacji w procesie symulacyjnym dla każdego z analizowanych przypadków wynosiła $N = 1000$.

Podobnie jak dla podłoża idealnie spoiwego (punkt 5.1.1) obliczano bezwymiarowy współczynnik nośności (wzór (5.5)), który w cytowanej tu pracy (Fenton i Griffiths, 2003) oznaczany był przez M_c , zaś wyniki prezentowane były dla logarytmu naturalnego tej wielkości, czyli $\ln M_c$. Ponieważ szerokość fundamentu $B = 1,0$ m, zatem bezwymiarowa skala fluktuacji θ/B jest równa co do wartości skali Θ mierzonej w metrach. Dlatego dalej stosuje się symbol θ , nie komentując, czy jest to skala bezwymiarowa. Najważniejsze wnioski wynikające z obliczeń można streścić następująco:

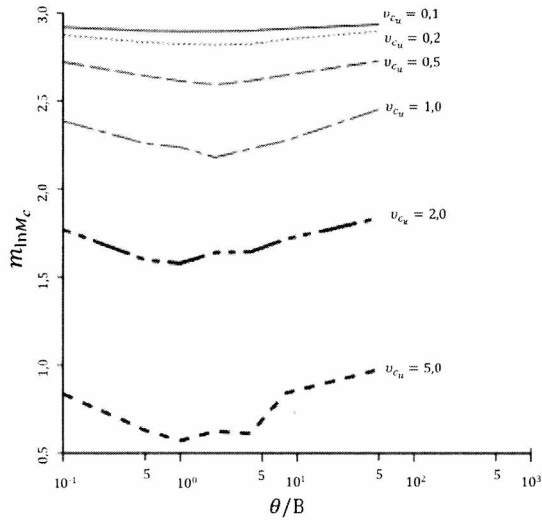
1. Wartość średnia bezwymiarowego współczynnika nośności jest istotnie mniejsza od wartości deterministycznej tegoż współczynnika obliczonej według

rozwiązania Prandtla, w którym przyjęto wartości wszystkich parametrów losowych równe ich wartościom oczekiwany. Największą „redukcję” w stosunku do rozwiązania Prandtla uzyskano w przypadku pełnej korelacji, tj. $\rho(c(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = 1$, zaś najmniejszą dla $\rho(c(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = -1$. Ilustruje to rysunek 5.5. Z kolei na rysunku 5.6 pokazano wartość średnią jako funkcję skali fluktuacji θ . Początkowo średnia jest funkcją malejącą skali fluktuacji, ale przy większych wartościach (w zależności też od współczynnika zmienności spójności ν_c) charakter zmienia się na rosnący z tendencją do stabilizacji. W przybliżeniu można stwierdzić, że minimalna wartość logarytmu średniej jest osiągnięta dla skali fluktuacji równej szerokości fundamentu.

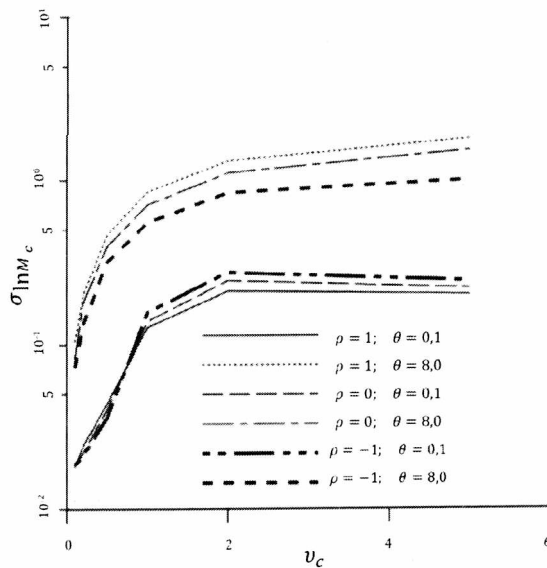
2. Odchylenie standardowe logarytmu bezwymiarowego współczynnika nośności praktycznie nie zależy od współczynnika korelacji pomiędzy polami. Natomiast zależy w sposób bardzo znaczący od skali fluktuacji θ , odchylenie standardowe zmniejsza się wraz z malejącą wartością θ . Powyższe efekty pokazano na rysunku 5.7.
3. Autorzy wskazali, że przyjęcie założenia izotropii obu pól losowych, co skutkowało jednakową wartością skali fluktuacji θ , zarówno w kierunku pionowym, jak i poziomym, stanowi uproszczenie (wpływające zapewne w sposób istotny na wyniki) i powinno zostać rozszerzone o analizę przypadków anizotropowych.



Rys. 5.5. Zależność wartości średniej logarytmu współczynnika nośności $m_{\ln M_c}$ od współczynnika zmienności pola spójności ν_c przy różnych wartościach skali fluktuacji θ oraz różnych wartościach współczynnika korelacji pomiędzy polami. Za pracę Fentona i Griffithsa (2003)



Rys. 5.6. Zależność wartości średniej logarytmu współczynnika nośności od skali fluktuacji θ w polach φ i c przy różnych wartościach współczynnika zmienności pola spójności v_c . Za pracę Fentona i Griffithsa (2003)



Rys. 5.7. Zależność odchylenia standardowego logarytmu współczynnika nośności od współczynnika zmienności pola spójności v_c przy różnych wartościach skali fluktuacji θ oraz różnych wartościach współczynnika korelacji pomiędzy polami. Za pracę Fentona i Griffithsa (2003)

Wnioski dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa sformułowane w pracy Fentona i Griffithsa (2003) zostaną przedstawione w podrozdziale 5.3, który w całości poświęcony jest estymacji rozkładów. Warto też wspomnieć, że w omawianej pracy autorzy sformułowali hipotezę, iż w związku z przebie-

giem linii poślizgu poprzez obszary o najmniejszej wytrzymałości (najłabsze) bardziej adekwatnym estymatorem wartości średnich dla parametrów wytrzymałościowych wydaje się być średnia geometryczna. Korzystając z tego założenia opracowali przybliżoną procedurę do predykcji probabilistycznych charakterystyk współczynnika nośności M_c . Do tych przybliżonych charakterystyk autorzy odnosili rezultaty z procesu symulacyjnego. Procedura ta zawiera jednak sporo kontrowersyjnych założeń i nie będzie tu komentowana. Zainteresowanych czytelników odsyłam bezpośrednio do pracy Fentona i Griffithsa (2003).

5.2. Uogólnienie zagadnienia. Pole anizotropowe, fundament zagłębiony, uwzględnienie ciężaru własnego gruntu

Zagadnienia, których rozwiązania omówiono w podrozdziale 5.1, zarówno dotyczące podłoża idealnie spoistego, jak i podłoża tarciowo-kohezyjnego, obarczone były założeniami upraszczającymi. W niniejszym podrozdziale zostaną przedstawione rozwiązania, które rezygnują z kilku „krępujących” założeń i w ten sposób stanowią uogólnienie rozwiązań w zakresie ośrodka tarciowo-kohezyjnego oraz gruntu niespoistego. Przedstawione tu uogólnienia są dwojakiej natury – odnoszą się do sposobu modelowania właściwości podłoża gruntowego oraz założeń dotyczących obliczeń nośności posadowienia bezpośredniego. W zakresie modelowania właściwości podłoża uogólnienie polega na rezygnacji z założenia izotropii pól losowych opisujących poszczególne parametry podłoża. Powyższy postulat zrealizowano poprzez wprowadzenie w strukturze korelacyjnej pola X dwóch skal fluktuacji: pionowej $\theta_{(x)v}$ oraz poziomej $\theta_{(x)h}$. Skale, jak już wcześniej wskazywano, cytując różnych autorów (por. głównie rozdział 3), w naturalnym środowisku przyjmują różne wartości. W szczególności przyjęcie jednakowej wartości dla obu skal fluktuacji prowadzi najczęściej do izotropii pola, czyli badanego wcześniej zagadnienia. Zróżnicowanie skali fluktuacji w zależności od kierunku przybliży niewątpliwie modele przestrzennej zmienności właściwości podłoża do warunków naturalnych. Taki postulat, odnoszący się do przyszłych badań, sugerowali już Fenton i Griffiths (2003) – por. wniosek 3 w punkcie 5.1.2.

Gdy chodzi o założenia dotyczące obliczeń nośności posadowienia bezpośredniego, to uogólnienie wcześniejszych rozwiązań polega na wprowadzeniu dwóch następujących modyfikacji:

1. Umożliwieniu obliczeń nośności przy różnych zagłębieniach fundamentu – we wcześniejszych pracach w ramach RFEM zakładano fundament powierzchniowy.
2. Uwzględnieniu w obliczeniach nośności ciężaru objętościowego gruntu pod fundamentem – we wcześniejszych pracach zakładano grunt nieważki.

5.2.1. Modelowanie przestrzennej zmienności parametrów wytrzymałości podłoża

W ramach bieżącego podrozdziału jedynie parametry wytrzymałości podłoża modelowane będą za pomocą pól losowych. Pozostałe właściwości gruntu traktowane będą jako nielosowe (deterministyczne), gdyż wpływ ich zmienności losowej na losową nośność jest pomijalny w porównaniu z parametrami wytrzymałości, na co wskazano w ramach obszernej analizy w pracy Puły i Zaskórskiego (2015).

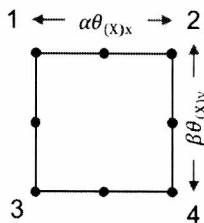
Do generowania pól losowych używano algorytmu LAS, scharakteryzowanego w podrozdziale 2.10. Nietrudno zauważyć, że w przypadku anizotropowym funkcja wariancji, wynikająca z uśrednienia pola losowego o elipsoidalnej strukturze korelacyjnej typu Markowa (2.44) przy założonej symetrii ćwiartkowej (por. wzór (2.129)), może być zapisana w postaci analogicznej do tej z przypadku izotropowego (wzór (5.1)), a więc

$$\begin{aligned} \gamma(B, L) &= \frac{4}{LB} \int_0^B \int_0^L \left(1 - \frac{x}{B}\right) \left(1 - \frac{y}{L}\right) \exp \left(- \sqrt{ \left(\frac{2}{\theta_{(x)x}} x \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_{(x)y}} y \right)^2 } \right) dx dy = \\ &= \frac{4}{L^2 B^2} \int_0^B \int_0^L (B-x)(L-y) \exp \left(- \sqrt{ \left(\frac{2}{\theta_{(x)x}} x \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_{(x)y}} y \right)^2 } \right) dx dy, \end{aligned} \quad (5.11)$$

przy czym $\theta_{(x)x}$ jest skalą fluktuacji pola X w kierunku zgodnym osią x , zaś $\theta_{(x)y}$ jest skalą fluktuacji pola X w kierunku zgodnym osią y . Ponadto B oraz L to, odpowiednio, wysokość i długość elementu siatki MES. Powyższe uśrednienie „dopasowuje” pole X do wielkości elementu, zgodnie z warunkami

$$L = \alpha \theta_{(x)x}, \quad B = \beta \theta_{(x)y}. \quad (5.12)$$

Dopasowanie to zilustrowano na rysunku 5.8.



Rys. 5.8. Synchronizacja promieni korelacyjnych (skali fluktuacji) $\theta_{(x)x}$, oraz $\theta_{(x)y}$ z elementem siatki MES w przypadku anizotropowym

Oznaczając we wzorze (5.11) funkcję korelacji przez $\rho_x(x, y)$ otrzymuje się

$$\gamma(B, L) = \frac{4}{L^2 B^2} \int_0^B \int_0^L (B-x)(L-y) \rho_x(x, y) dx dy. \quad (5.13)$$

Całkę podwójną we wzorze (5.13) można w efektywny sposób numerycznie oszacować stosując 5-punktowe kwadratury Gaussa według następującego schematu:

$$\gamma(B, L) \approx \frac{1}{4} \sum_{i=1}^5 w_i (1-z_i) \sum_{j=1}^5 w_j (1-z_j) \rho_x(\xi_i, \eta_j), \quad (5.14)$$

gdzie

$$\xi_i = \frac{B}{2}(1+z_i), \quad \eta_j = \frac{L}{2}(1+z_j). \quad (5.15)$$

Wagi w_i oraz punkty Gaussa z_i podano w tabeli 5.2.

Tabela 5.2. Wagi i punkty Gaussa użyte do numerycznego obliczenia całki podwójnej we wzorze (5.13)

Numer i	Waga w_i	Punkt Gaussa z_i
1	0,236926855056189	-0,906179845938664
2	0,478628670499366	-0,538469310105683
3	0,568888888888889	0,000000000000000
4	0,478628670499366	0,538469310105683
5	0,236926885056189	0,906179845938664

Głównym elementem kodu komputerowego służącego do obliczeń był program RBEAR2D napisany w języku FORTRAN. Program ten, opracowany przez Griffithsa i Fentona, jest dostępny na stronie internetowej <http://www.engmath.dal.ca/rfem>. Moduł dotyczący deterministycznego obliczania nośności metodą elementów skończonych pochodzi z monografii Smitha i Griffithsa (2004), dostępny jest także w rozszerzonej wersji tej książki autorstwa Smitha, Griffithsa i Margetsa (2014).

W powyższym programie wprowadzono dodatkowy moduł dotyczący funkcji korelacyjnych charakteryzujących pola anizotropowe. Wprowadzono także funkcje wariancji postaci (5.13), które w polu anizotropowym są odpowiednikiem funkcji wariancji postaci (5.4) dla pola izotropowego. Oprócz tego moduł dotyczący obliczeń nośności został rozbudowany tak, aby umożliwiał wyznaczenie nośności fundamentu zagłębionego z uwzględnieniem ciężaru własnego podłoża.

5.2.2. Podłoże idealnie spoiste. Porównanie wyników z modelowania izotropowego z wynikami modelowania anizotropowego

Dla modelu i danych zaproponowanych w pracy Griffithsa i Fentona (2001), której charakterystykę podano w punkcie 5.1.1, przeprowadzono obliczenia zmieniając jedynie model pola losowego charakteryzujący wytrzymałość gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu c_u . Izotropową strukturę korelacyjną, opisaną przez funkcję typu Markowa – wzór (2.88), zastąpiono przez strukturę anizotropową o elipsoidalnej strukturze korelacyjnej typu Markowa (2.44), która przy wyrażeniu parametrów a_1 oraz a_2 odpowiednio przez poziomą skalę fluktuacji θ_h oraz pionową skalę fluktuacji θ_v (por. zależności (2.51)) przyjmuje postać

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left(- \sqrt{ \left(\frac{2}{\theta_h} \Delta x \right)^2 + \left(\frac{2}{\theta_v} \Delta y \right)^2 } \right). \quad (5.16)$$

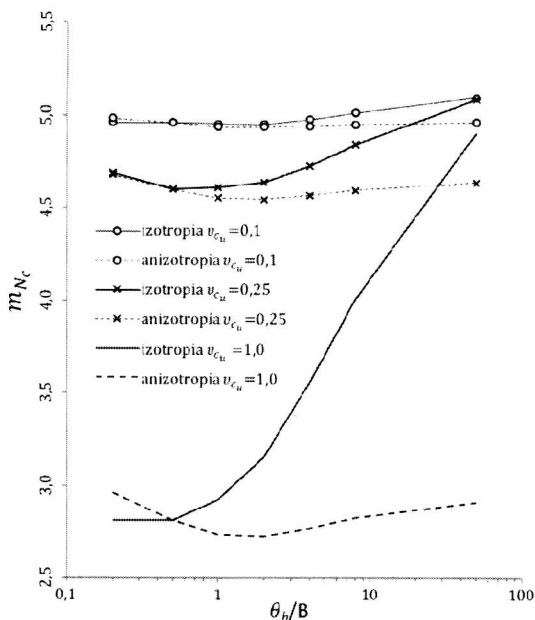
W przypadku, gdy $\theta_v = \theta_h = \theta$, funkcja (5.16) redukuje się do postaci

$$\rho(\Delta x, \Delta y) = \exp \left(- \frac{2}{\theta} \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \right), \quad (5.17)$$

która charakteryzuje strukturę izotropową. Przedstawione poniżej obliczenia wartości średnich i wariancji zostały wykonane i przedstawione w ramach pracy doktorskiej Joanny Pieczyńskiej (Pieczyńska, 2012), przygotowanej pod opieką naukową i promotorstwem autora niniejszej monografii.

Wartości średnie nośności uzyskane z symulacji Monte Carlo w funkcji skali fluktuacji θ_h , przy różnych wartościach współczynnika zmienności wytrzymałości gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu v_{c_u} , przedstawiono na rysunku 5.9. Podobnie jak w punkcie 5.1.1 stosowana była bezwymiarowa skala fluktuacji θ_h/B .

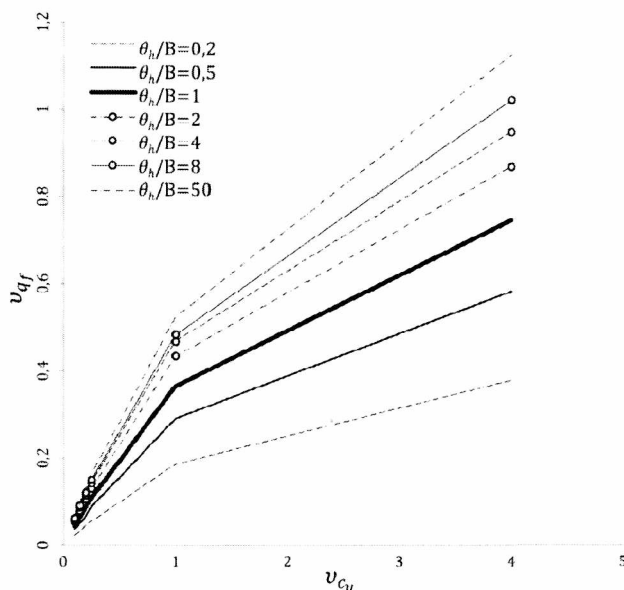
Przebieg krzywych na rysunku 5.9 pokazuje w ewidentny sposób duży wpływ anizotropii modelu na uzyskane wartości średnie. Po pierwsze, różnice



Rys. 5.9. Wartość średnia m_{N_c} współczynnika nośności N_c w funkcji bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji θ_h/B dla $v_{c_u} = 0,1$; $v_{c_u} = 0,25$; $v_{c_u} = 1,0$. W przypadkach anizotropowych bezwymiarowa wartość skali pionowej wynosiła $\theta_v/B = 0,5$ (wg Pieczyńskiej, 2012)

wzrastają wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Po drugie, różnice są tym większe, im większy jest współczynnik zmienności v_{c_u} pola wytrzymałości gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu ($X = c_u$). I po trzecie, widać że średnie m_{N_c} współczynnika nośności mają, w przypadku pola anizotropowego, od pewnego momentu mniejsze wartości w stosunku do wartości z przypadku izotropowego. Stąd wniosek, że modelowanie izotropowe może prowadzić do przeszacowania wartości średnich, a to z kolei może skutkować zawyżeniem miar niezawodności przy analizie bezpieczeństwa. Warto też zwrócić uwagę na wykresy współczynnika zmienności v_{q_f} nośności q_f uzyskane w tych obliczeniach. Rezultaty pokazano na rysunku 5.10.

Wykresy na rysunku 5.10 dotyczą różnych wartości bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji θ_h/B . W każdym anizotropowym przypadku pionowa (bezwymiarowa) skala fluktuacji miała wartość $\theta_v/B = 0,5$. Wykresy pokazują, że współczynnik zmienności nośności v_{q_f} wzrasta wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Ponieważ w gruntach naturalnych obserwuje się wartości θ_h znacznie przekraczające θ_v , zatem przypadek izotropowy skutkuje niedoszacowaniem współczynnika zmienności v_{q_f} . Zatem, podobnie do sytuacji z wartością średnią,



Rys. 5.10. Zależność współczynnika zmienności nośności v_{qf} od współczynnika zmienności v_{cu} wytrzymałości gruntu na ścinanie w warunkach bez odpływu c_u . Pogrubioną linią ciągłą zaznaczono wyniki dla przypadków izotropowych (wg Pieczyńskiej, 2012)

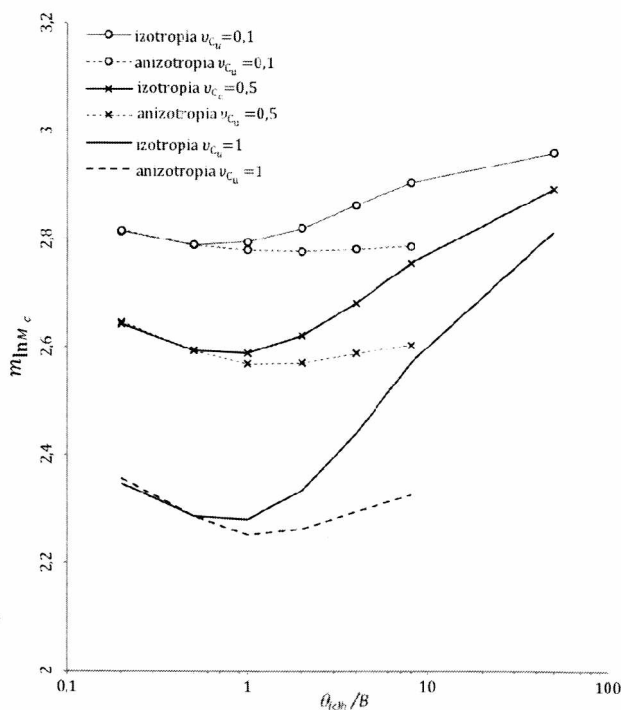
także i tu opieranie analizy jedynie na przypadku izotropowym może skutkować zawyżeniem miar niezawodności przy analizie bezpieczeństwa.

5.2.3. Podłoże tarciowo-kohezyjne. Porównanie wyników z modelowania izotropowego i anizotropowego

Analogiczne do poprzedniego punktu porównania modelowania izotropowego z anizotropowym przeprowadzono analizy dla ośrodka tarciowo-kohezyjnego. W tym celu odtworzono przykład z publikacji Fentona i Griffithsa (2003), wykonując dodatkowo obliczenia dla anizotropowych pól parametrów wytrzymałościowych. W tym przypadku mamy do czynienia z dwoma polami losowymi – polem losowym spójności $X = c(\mathbf{x})$ oraz polem losowym kąta tarcia wewnętrznego $X = \varphi(\mathbf{x})$. Wcześniejsze analizy, przeprowadzone przez Fentona i Griffithsa (2003), zostały dodatkowo uzupełnione o badanie zmienności momentów statystycznych współczynnika nośności, bądź też samej nośności, jako funkcji dwóch zmiennych – pionowej skali fluktuacji $\theta_{(x)v}$ oraz skali fluktuacji poziomej $\theta_{(x)h}$. Podobnie jak w punkcie 5.2.2, tak i w punkcie 5.2.3 wyniki obliczeń pochodzą z pracy doktorskiej J. Pieczyńskiej (2012), przygotowanej pod opieką naukową autora niniejszej monografii.

Po pierwsze, tak jak to miało miejsce w pracy Fentona i Griffithsa (2003), założono, że odpowiednie skale fluktuacji (pionowa, pozioma) są takie same, tzn. skala pionowa $\theta_{(x)v}$ jest jednakowa w obu polach (spójności $c(\mathbf{x})$ i kąta tarcia wewnętrznego $\varphi(\mathbf{x})$) i to samo dotyczy skali poziomej $\theta_{(x)h}$. Po drugie, pokazane poniżej wyniki były uzyskane przy założeniu, że pola $c(\mathbf{x})$ oraz $\varphi(\mathbf{x})$ są nieskorelowane, tzn. $\rho(c(\mathbf{x}), \varphi(\mathbf{x})) = 0$. Aby odnieść się do rezultatów uzyskanych w pracy Fentona i Griffithsa (2003) na początku pokazane będą rezultaty przy zmieniającej się poziomej skali fluktuacji spójności. Natomiast pozioma skala fluktuacji w polu $\varphi(\mathbf{x})$ była stała i wynosiła $\theta_{(\varphi)h}/B = 0,5$. Podobnie jako stałe przyjęto pionowe skale fluktuacji $\theta_{(\varphi)v}/B = \theta_{(c)v}/B = 0,5$ w przypadkach anizotropowych. Z kolei w symulacjach dla pola izotropowego skale pionowa i pozioma w polu spójności były jednakowe.

Na rysunku 5.11 przedstawiono porównanie wartości średnich $m_{\ln M_c}$ (z procesu symulacyjnego) jako funkcji bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(c)h}/B$ dla modelu izotropowego oraz modelu anizotropowego przy różnych wartościach współczynnika zmienności pola spójności v_c .



Rys. 5.11. Wartość średnia $m_{\ln M_c}$ jako funkcja bezwymiarowej skali fluktuacji $\theta_{(c)h}/B$ dla różnych wartości współczynnika zmienności pola spójności v_c . Podłoże tarcio-kohezyjne (wg Pieczyńskiej, 2012)

Wykresy na rysunku 5.11 wykazują podobne tendencje do analogicznych z rysunku 5.9. Co prawda kształt wykresu jest nieco inny, ale wynika to z faktu, że na osi pionowej odkładane są wartości średnie z logarytmów współczynnika nośności, a nie samego współczynnika, jak to ma miejsce na rysunku 5.9. Jednocześnie różnica pomiędzy przypadkami izotropowymi oraz anizotropowymi jest widoczna. Analogicznie jak w przypadku podłoża idealnie spoiściego, różnice między przypadkami izotropowymi a przypadkami anizotropowymi rosną wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji i są tym większe, im większy jest współczynnik zmienności pola spójności ν_c . Zatem, tak jak to miało miejsce w przypadku gruntu idealnie spoiściego, modelowanie izotropowe może prowadzić do przeszacowania wartości średnich nośności.

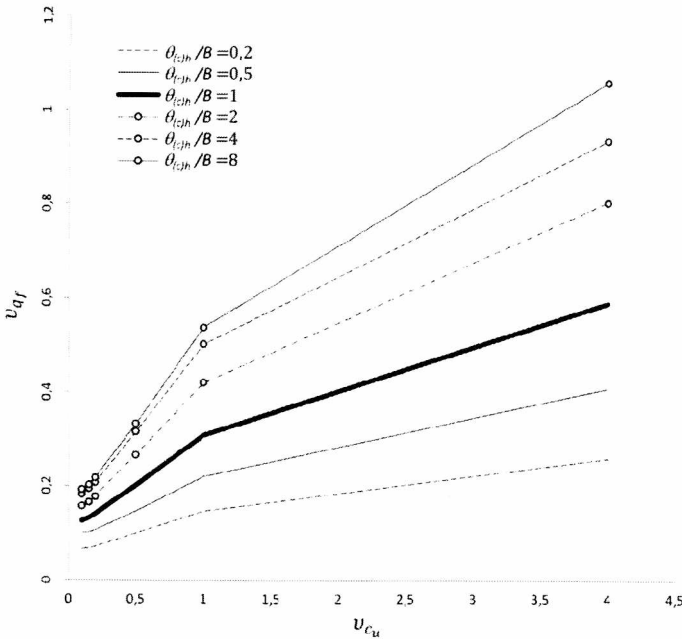
Z kolei na rysunku 5.12 zamieszczono wykresy współczynnika zmienności nośności q_f jako funkcji współczynnika zmienności pola spójności ν_c przy zmieniających się wartościach poziomej skali fluktuacji spójności $\theta_{(c)h}/B$. Pokazane wykresy są bardzo zbliżone do analogicznych z rysunku 5.10. Podobnie do przypadku nośności gruntu idealnie spoiściego przypadek izotropowy skutkuje niedoszacowaniem współczynnika zmienności ν_{q_f} , co z kolei implikuje zawyżenie wskaźnika niezawodności (zaniżenie prawdopodobieństwa awarii) w analizie bezpieczeństwa. Także w sytuacji podłoża tarciowo-kohezyjnego wzrost poziomej skali fluktuacji w polu powoduje wzrost współczynnika zmienności ν_{q_f} .

Obecnie przyjrzymy się zależnościom uzyskanym przy założeniu, że obie skale, tj pionowa i pozioma, zmieniają się równocześnie. Każdy z przypadków obliczeniowych (prowadzących do jednej wartości średniej lub współczynnika zmienności) realizowany był przy założeniach: $\theta_{(\varphi)v}/B = \theta_{(c)v}/B$ oraz $\theta_{(\varphi)h}/B = \theta_{(c)h}/B$. Na początku zwróćmy uwagę na zależność wartości średniej $m_{\ln M_c}$ od pionowej i poziomej skali fluktuacji.

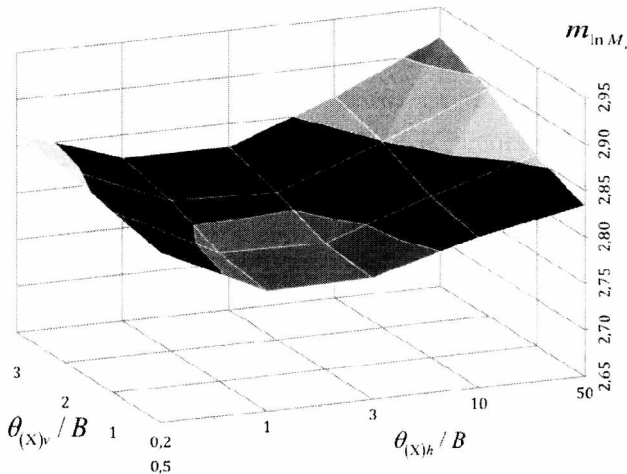
Współczynnik zmienności nośności ν_{q_f} zwiększa się wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Zatem w przypadku obserwowanych w gruntach naturalnych poziomych skalach fluktuacji dość znacznie przewyższających skale poziome, przypadek izotropowy (linia ciągła) w bardzo znacznym stopniu pomniejsza współczynnik zmienności nośności. Stąd, podobnie jak to miało miejsce przy oszacowaniu wartości średniej, wartości wskaźnika niezawodności będą zawyżone (błąd w stronę niebezpieczną).

Wykres wartości średniej $m_{\ln M_c}$ jako funkcji dwóch zmiennych (bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(x)v}/B$ i bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(x)h}/B$) w postaci powierzchni pokazano na rysunku 5.13. Wykres ma

charakter wolnozmienny. Najmniejsze wartości pojawiają się w otoczeniu punktu $(\theta_{(x)v}/B, \theta_{(x)h}/B) = (1, 3)$.

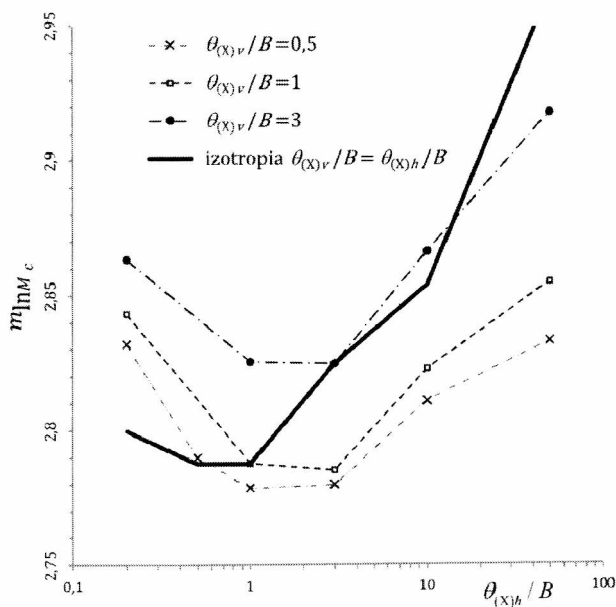


Rys. 5.12. Zależność współczynnika zmienności nośności v_{qf} od współczynnika zmienności v_{cu} pola spójności przy różnych wartościach poziomej skali fluktuacji spójności $\theta_{(c)h}/B$. Ośrodek tarciowo-kohezyjny. Pogrubioną linią ciągłą zaznaczono wyniki dla przypadków izotropowych (wg Pieczyńskiej, 2012)



Rys. 5.13. Wykres wartości średniej $m_{in M_c}$ jako funkcji dwóch zmiennych: bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(x)v}/B$ i bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(x)h}/B$, przy czym $X = c$ lub $X = \varphi$ (wg Pieczyńskiej, 2012)

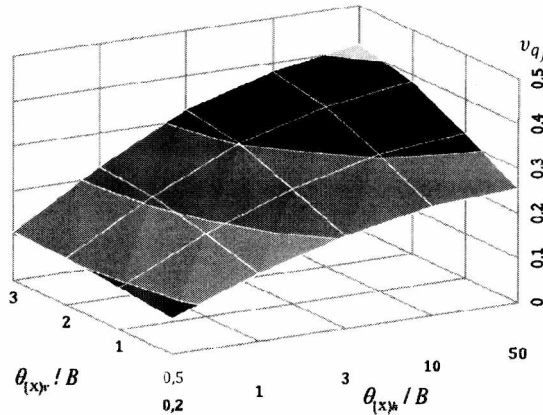
Różnicę pomiędzy wynikami uzyskanymi przy zastosowaniu pól anizotropowych w stosunku do modelowania parametrów przez pola izotropowe zilustrowano na rysunku 5.14. Przypadki wykresów wynikających z modelowania anizotropowego są przekrojami wykresu trójwymiarowego (rys. 5.13) uzyskanymi przy ustalonych wartościach $\theta_{(X)v}/B$. Linia wyników „przypadków izotropowych”, będąca przekrojem wykresu na rysunku 5.13 płaszczyzną prostą do przekątnej $\theta_{(X)v}/B = \theta_{(X)h}/B$, przecina te wykresy. Stąd widać, że od pewnego miejsca „średnie izotropowe” zaczynają przewyższać średnie uzyskane poprzez modelowanie anizotropowe. Potwierdza to obserwację poczynioną w kontekście analizy rysunku 5.11, dając jednocześnie lepsze uzasadnienie postawionej hipotezy.



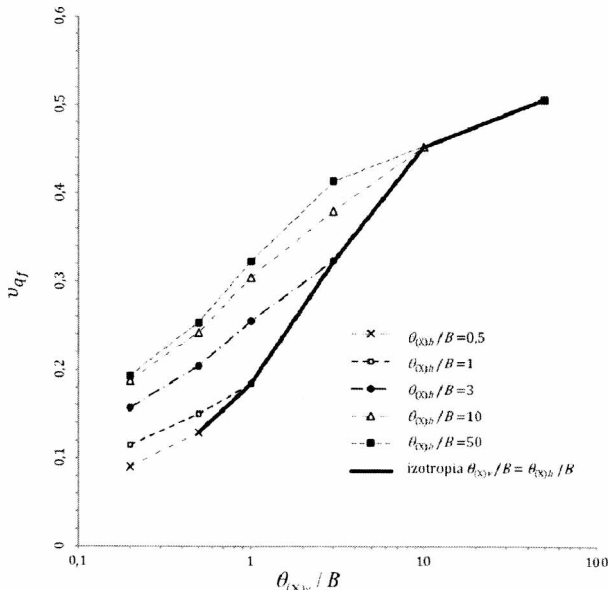
Rys. 5.14. Wykres wartości średniej $m_{in M_c}$ jako funkcji bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(X)h}/B$, (przy czym $X = c$ lub $X = \varphi$) dla różnych wartości bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(X)v}/B$. Pogrubiona linia ciągła oznacza wyniki z modelowania polami izotropowymi (wg Pieczyńskiej, 2012)

Na obu rysunkach: 5.13 oraz 5.14 można zaobserwować, że istnieje pewien obszar wartości skali poziomej, dla których wartości średnie logarytmu współczynnika nośności osiągają wartości minimalne. Może to oznaczać istnienie tzw. „najgorszego przypadku” skali fluktuacji, tzn. takiej, przy której wartość średnia nośności osiąga minimum.

Na rysunkach 5.15 oraz 5.16 pokazano w sposób analogiczny do rysunków 5.13 i 5.14 wykresy współczynnika zmienności nośności ν_{qf} jako funkcji dwóch zmiennych ($\theta_{(X)v}/B, \theta_{(X)h}/B$). Wykres aksonometryczny (rys. 5.15) pokazuje tendencję wzrostową współczynnika zmienności względem obu zmiennych.



Rys. 5.15. Wykres współczynnika zmienności nośności ν_{qf} jako funkcji dwóch zmiennych: bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(X)v}/B$ i bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(X)h}/B$, przy czym $X = c$ lub $X = \varphi$ (wg Pieczyńskiej, 2012)



Rys. 5.16. Wykres współczynnika zmienności nośności ν_{qf} jako funkcji bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(X)v}/B$ (przy czym $X = c$ lub $X = \varphi$) dla różnych wartości bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(X)h}/B$. Pogrubiona linia ciągła oznacza wyniki z modelowania polami izotropowymi (wg Pieczyńskiej, 2012)

Na rysunku 5.16 naniesiono linie odpowiadające „przypadkom izotropowym” (przekrój płaszczyzną prostopadłą do przekątnej $\theta_{(x)v} / B = \theta_{(x)h} / B$). „Linia izotropowa” do pewnego momentu znajduje się poniżej „linii anizotropowych”, co oznacza zniżenie wartości współczynnika zmienności (potwierdzenie obserwacji z rysunku 5.12). Od pewnego punktu (ok. $\theta_{(x)v} / B \approx 10$) „linia izotropowa” zaczyna znajdować się ponad „liniami anizotropowymi”. Trzeba jednak pamiętać (por. rozdział 3), że tak duże wartości pionowej skali fluktuacji raczej nie pojawiają się w gruntach naturalnych.

5.2.4. Uogólnienia dotyczące posadowienia bezpośredniego

Zmodyfikowany program RBEAR2D (por. punkt 5.2.1) został dodatkowo uzupełniony o moduł obliczający nośność fundamentu zagłębnionego z możliwością uwzględnienia ciężaru objętościowego gruntu pod fundamentem. Zachowano algorytm LAS z możliwością uwzględnienia anizotropowej struktury korelacyjnej pól losowych odpowiadających poszczególnym właściwościom podłoża gruntowego (por. punkt 5.2.1). W ten sposób deterministyczny sposób wyznaczania nośności metodą elementów skończonych stał się analogiczny do obliczeń według klasycznego wzoru Terzagiego (1943) dla podłoża w warunkach z odplywem w płaskim stanie odkształcenia:

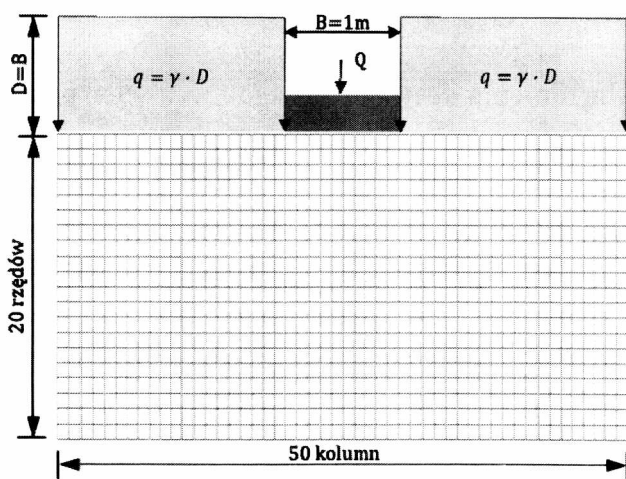
$$q_f = c'N_c + qN_q + \frac{1}{2}\gamma BN_\gamma, \quad (5.18)$$

gdzie c' oznacza efektywną spójność, N_c , N_q , N_γ – współczynniki nośności, γ – ciężar objętościowy gruntu, a B – szerokość fundamentu. Założono sprężysto-idealnie plastyczny model podłoża z kryterium wytrzymałościowym (Coulomba–Mohra (stowarzyszone prawo płynięcia). Podłoże gruntowe, dla którego przeprowadzono obliczenia, było dobrze zbadanym podłożem z okolic Tarentu w regionie Apulii we Włoszech – *Taranto clays*. Szersze informacje na temat tego podłoża i jego badań podano w podrozdziale 3.3. Podstawowe charakterystyki podłoża, niezbędne do obliczeń, podano w tabeli 5.3.

Przyjęty do obliczeń numerycznych metodą elementów skończonych schemat pokazuje rysunek 5.17. Siatka składa się z kwadratowych elementów o ośmiu węzłach.

Tabela 5.3. Parametry statystyczne właściwości mechanicznych podłoża *Taranto clay*

Parametr podłoża	Wartość średnia	Odchylenie standardowe
Spójność (c)	36 kPa	20 kPa
Kąt tarcia wewnętrznego (φ)	20°	4,8°
Ciężar objętościowy (γ)	19 kN/m ³	nielosowy
Moduł Younga (E)	36 000 kPa	nielosowy
Współczynnik Poissona (ν)	0,29	nielosowy

Rys. 5.17. Schemat anlizowanego zadania z siatką elementów skończonych. Szerokość fundamentu $B = 1\text{ m}$

Liczba elementów w siatce jest w tym przypadku przedmiotem pewnego kompromisu. Z jednej strony bowiem powiększanie schematu sprzyja dokładności rozwiązania w zakresie metody elementów skończonych. Z drugiej strony jednak wzrost liczby elementów i rozmiaru obszaru powoduje szybki wzrost czasu obliczeń. Czas obliczeń w ramach pojedynczego obliczenia nośności nabiera znaczenia w kontekście powtarzania procedury w ramach metody Monte Carlo, gdzie liczba realizacji (powtórzeń) decyduje o „statystycznej jakości” otrzymanych rezultatów. W związku z tym postanowiono skalibrować wielkość obszaru i liczbę elementów tak, aby wynik obliczeń nośności metodą elementów skończonych, uzyskany dla wartości oczekiwanych (średnich) poszczególnych parametrów podłoża, był możliwie bliski wartości obliczonej według wzoru Terzagiego (5.18). Takie podejście zbliża też wykonywane obliczenia do rozwiązań stosowanych w projektowaniu. Współczynnik N_γ we wzorze (5.18), który nie posiada reprezentacji analitycznej, obliczano tu według zależności

$$N_{\gamma} = 2 \left[\exp(\pi \operatorname{tg} \varphi') \operatorname{tg}^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varphi'}{2} \right) - 1 \right] \tan \varphi'. \quad (5.19)$$

Spośród testowanych schematów podany na rysunku 5.17 okazał się najkorzystniejszy. W wyniku zastosowania schematu z rysunku 5.17 otrzymano wartości nośności podane w tabeli 5.4. Aby uzyskać większą wiarygodność rezultatów, nośność była obliczana dla czterech wariantów zadania: [1] powierzchniowy fundament na gruncie nieważkim, [2] fundament powierzchniowy z uwzględnieniem ciężaru objętościowego podłoża, [3] fundament zagłębiony w gruncie nieważkim, [4] fundament zagłębiony z uwzględnieniem ciężaru objętościowego podłoża. Jak pokazują rezultaty podane w tabeli, nośność obliczona z zastosowaniem metody elementów skończonych oraz obliczona według wzoru (5.18) nie różnią się znacząco.

Tabela 5.4. Wartości nośności dla czterech przypadków uzyskane w obliczeniach MES oraz ze wzoru (5.18)

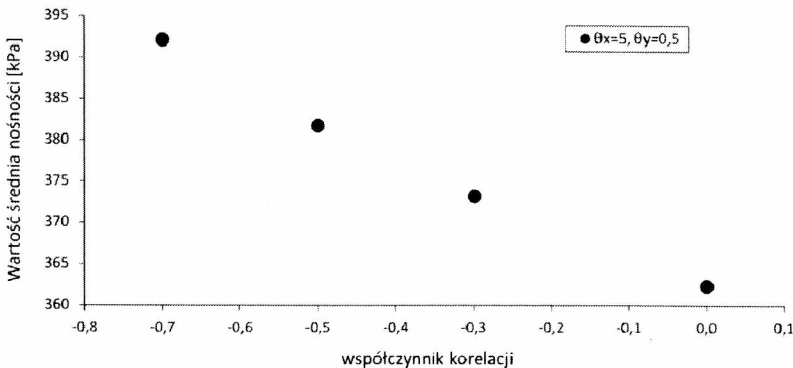
Nr zadania	Opis zadania	q_f [kPa] wzór (5.18)	q_f [kPa] MES
[1]	Fundament powierzchniowy, grunt nieważki	538,50	528,49
[2]	Fundament powierzchniowy, uwzględniony ciężar objętościowy	575,84	572,78
[3]	Fundament zagłębiony, grunt nieważki	660,09	647,99
[4]	Fundament zagłębiony, uwzględniony ciężar objętościowy	697,43	694,88

Ostatni przypadek obejmuje nośność fundamentu, z uwzględnieniem wszystkich elementów. W tym przypadku różnica wynosi zaledwie 0,4%. Dopasowanie można zatem uznać za wystarczające.

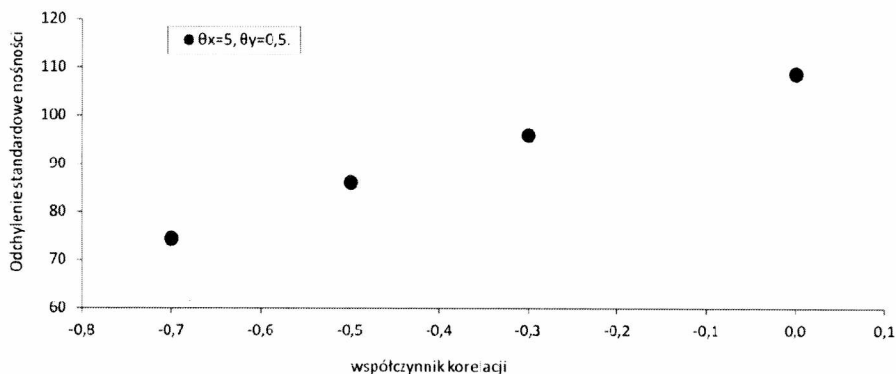
W opisywanym tu rozwiązaniu uwzględniono dwa stacjonarne pola losowe – log-normalne pole losowe spójności $X = c'$ oraz pole kąta tarcia wewnętrznego $X = \varphi'$, które było polem z rozkładami o nośnikach ograniczonych, uzyskanym z pola gauusowskiego poprzez zastosowanie transformacji typu tangens hiperboliczny. Pod względem matematycznym obydwie pola szczegółowo scharakteryzowano w podrozdziale 2.6 (wzory (2.60)–(2.74)). Wartości oczekiwane i odchylenia standardowe obu pól podane zostały w tabeli 5.3 (zgodnie z badaniami gruntów *Taranto clays*). Przyjęto, że pole spójności oraz pole kąta tarcia wewnętrznego są nieskorelowane. To założenie może budzić pewne kontro-

wersje, gdyż z uwag podanych w rozdziale 3 (punkt 3.1.2) wynika, że obserwowany współczynnik korelacji pomiędzy parametrami wytrzymałościowymi jest ujemny. Z drugiej strony, jak pokazano w omówionej w punkcie 5.1.2 pracy Fentona i Griffithsa (2003), jest to założenie najbardziej konserwatywne (zakładając, że odrzucamy dodatnie wartości korelacji), prowadzące do mniejszej wartości średniej nośności aniżeli przy ujemnej wartości współczynnika korelacji. Wniosek ten potwierdził się także w obliczeniach przedstawionych w artykule Vessii, Cherubiniego, Pieczyńskiej oraz autora niniejszej monografii (2009), w którym pokazano także, że wartość średnia nośności jest funkcją malejącą współczynnika korelacji (w przedziale ujemnych jego wartości), natomiast odchylenie standardowe nośności jest jego funkcją rosnącą (także w przedziale ujemnych jego wartości). Wykresy tych funkcji pokazano odpowiednio na rysunkach 5.18 oraz 5.19. Z powyższych faktów wynika, że największa wartość współczynnika zmienności nośności zostanie osiągnięta przy zerowej wartości współczynnika korelacji pomiędzy polami parametrów wytrzymałościowych. Do podobnych wniosków doszli też badacze w pracy Kaveha i współautorów (Kaveh i in., 2014).

Struktura korelacyjna w obydwóch polach była jednakowa. Funkcja korelacji miała postać (5.16), co dało możliwość modelowania anizotropowego, poprzez zadanie różnych wartości dla skali fluktuacji pionowej oraz skali fluktuacji poziomej. W związku z tym różniła się od tej zaproponowanej w badaniach Cafaro i współautorów (2000) – por wzór (3.21). Podobnie do poprzedniego punktu, także i tu przyjęto założenie, że skala fluktuacji nie zależy od wyboru właściwości podłoża, co oznacza, że pionowa skala fluktuacji w polu spójności jest taka sama jak w polu kąta tarcia wewnętrznego i to samo dotyczy skali poziomej.



Rys. 5.18. Wartość średnia nośności jako funkcja współczynnika korelacji w zakresie ujemnych jego wartości



Rys. 5.19. Odchylenie standardowe nośności jako funkcja współczynnika korelacji w zakresie ujemnych jego wartości

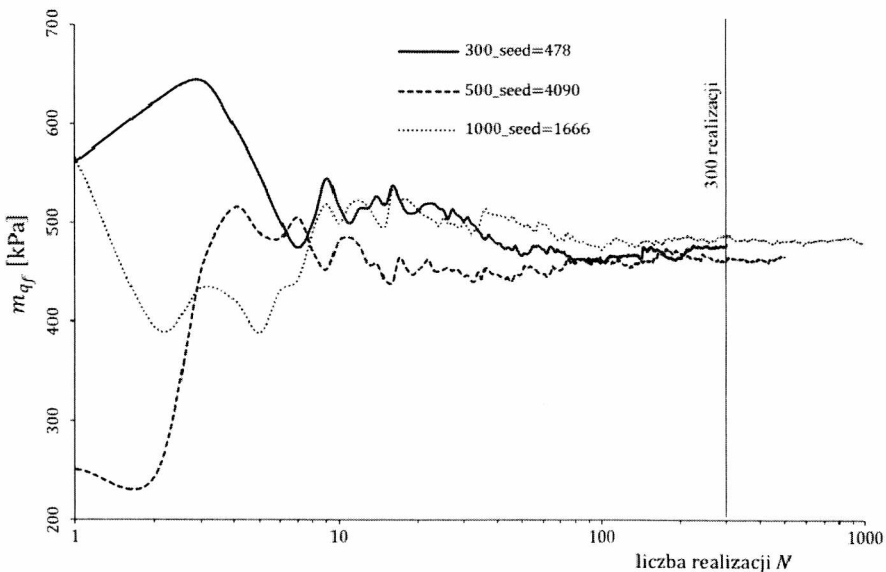
Przyjęte wartości pionowej skali fluktuacji wynikały z badań podłoża *Taranto clays* (por rozdział 3) i w poszczególnych przykładach były równe: $\theta_{(x)_v} = 0,2$ m; $\theta_{(x)_v} = 0,5$ m; $\theta_{(x)_v} = 0,7$ m oraz $\theta_{(x)_v} = 1,0$ m. W badaniach *Taranto clays* pozioma skala fluktuacji nie była wyznaczana. W związku z tym stanowiła tu ona parametr o zmiennej wartości w poszczególnych przykładach.

Do numerycznego generowania pól losowych użyto dwuwymiarowej wersji algorytmu LAS (podrozdział 2.10), za pomocą którego generowano pole gaussowskie. Następnie pole gaussowskie było przekształcane do pola log-normalnego poprzez transformację (2.61) – w przypadku pola spójności, zaś w przypadku kąta tarcia wewnętrznego poprzez przekształcenie (2.70) do pola z rozkładami o nośnikach ograniczonych (por podrozdział 2.6). Zgodnie z oszacowaniami uzyskanymi w podrozdziale 2.7 różnice w skalach fluktuacji dla podstawowego pola gaussowskiego oraz pola po transformacji są w tym przypadku bardzo niewielkie. Z tego też powodu przyjęto jednakową skalę fluktuacji w polu podstawowym oraz polu uzyskanym w wyniku stosowanych tu transformacji.

Kolejnym istotnym zagadnieniem jest określenie liczby realizacji w procesie symulacyjnym. Ponieważ, jak już wcześniej wspomniano, obliczenia te są bardzo czasochłonne, zatem liczba realizacji powinna być zależna od tego, jakie charakterystyki probabilistyczne nośności chcemy uzyskać. I tak, jeśli estymowane mają być jedynie dwa pierwsze momenty (wartość średnia i wariancja), to liczba realizacji będzie z pewnością mniejsza niż w przypadku, gdy celem jest estymacja rozkładu prawdopodobieństwa.

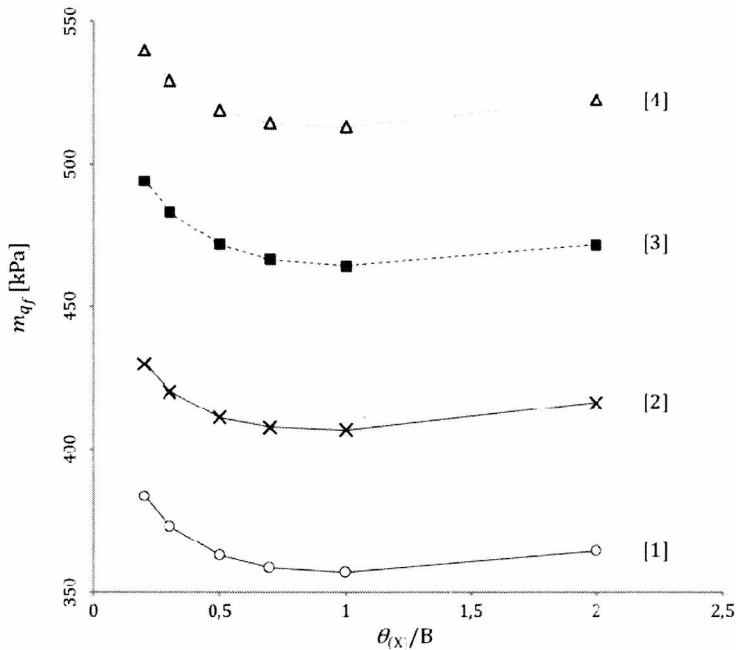
W bieżącym podrozdziale ocena dokładności ograniczona jest do nośności z uwzględnieniem wpływu wprowadzanej wartości początkowej. Pod tym kątem przeprowadzono testowanie niezbędnej liczby realizacji. W tym celu wykonano

obliczenia wartości średniej oraz odchylenia standardowego nośności dla różnych liczb realizacji, starając się zaobserwować liczbę, po której następuje stabilizacja rezultatów. Obliczenia przeprowadzono dla trzech różnych wartości początkowych generatora, gdyż, jak wiadomo (Rubinstein i Kroese, 2011), numeryczne generatory liczb pseudolosowych wymagają wprowadzenia wartości początkowej (tzw. ziarna), od której zależą kolejne wyniki. Jednak przy dobrze „skonstruowanym” generatory, wraz ze wzrostem liczby realizacji N , wyniki powinny się stabilizować i być do siebie zbliżone pomimo różnych wartości początkowych. Test przeprowadzono dla trzech długości serii: $N = 300$ (wartość początkowa $x_0 = 748$), $N = 500$ (wartość początkowa $x_0 = 4090$) oraz $N = 1000$ (wartość początkowa $x_0 = 1666$). Wyniki obliczeń dla wartości średniej przedstawiono na rysunku 5.20. Jak łatwo zauważyć, wartość średnią m_{qf} przy liczbie realizacji $N = 300$ można uznać za ustabilizowaną. Podobny efekt zaobserwowano też w przypadku odchylenia standardowego. Stąd do dalszych obliczeń pierwszych dwóch momentów przyjęto liczbę realizacji $N = 300$.



Rys. 5.20. Zmienność wartości średniej nośności wraz z liczbą realizacji w procesie symulacji dla trzech różnych wartości początkowych generatora

Przechodząc do wyników związanych z nośnością należy oczekiwać, że uwzględnienie zagłębienia oraz ciężaru objętościowego z pewnością powiększy wartość średnią nośności w stosunku do fundamentu powierzchniowego. Aby zaobserwować efekt ilościowy, przeprowadzono na wstępie obliczenia nośności przy założeniu izotropii pól kąta tarcia wewnętrznego i spójności. Otrzymane wyniki pokazuje rysunek 5.21.

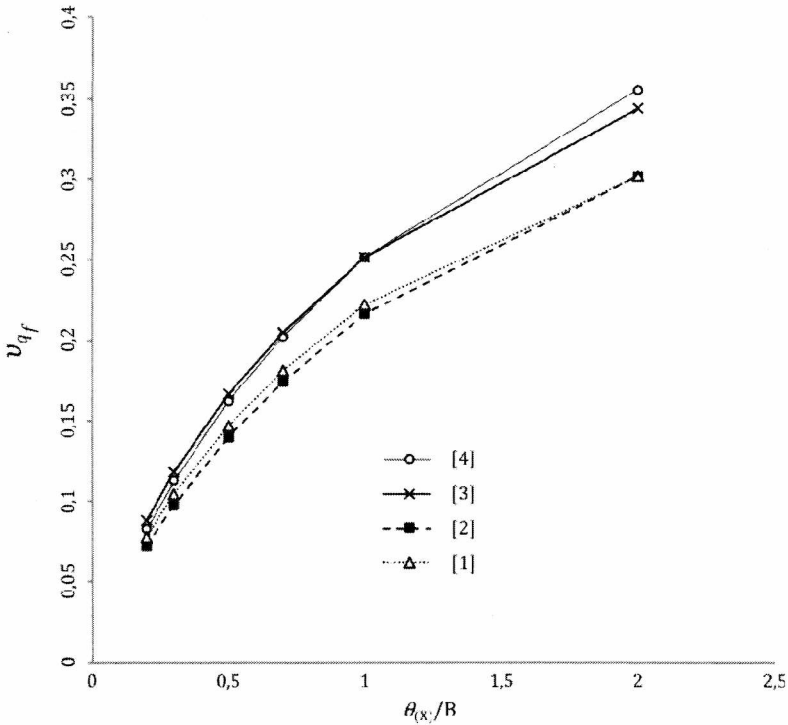


Rys. 5.21. Wartość średnia nośności jako funkcja skali fluktuacji (przypadek pól izotropowych) dla czterech przypadków obliczeniowych. Numery przypadków odpowiadają oznaczeniom w tabeli 5.4

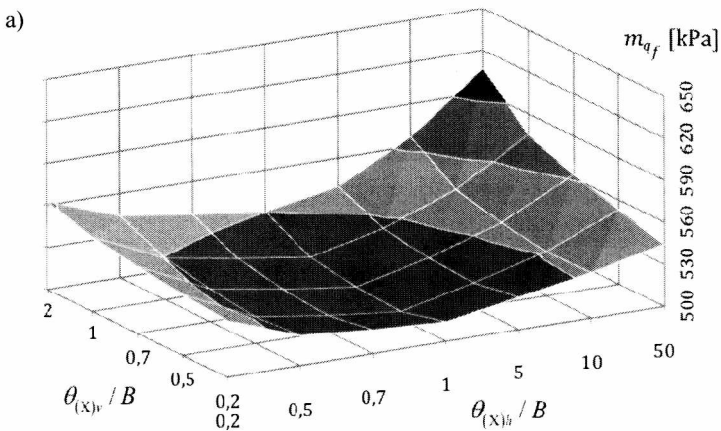
Porównanie wartości z wykresów na rysunku 5.21 z wartościami podanymi w tabeli 5.4 wskazuje na fakt, że uzyskane wartości średnie są istotnie mniejsze aniżeli wartości uzyskane z obliczeń deterministycznych, co jest ważnym spostrzeżeniem z punktu widzenia bezpieczeństwa fundamentu. Warto też zwrócić uwagę na to, że charakter zmienności (przebieg krzywych) jest we wszystkich czterech przypadkach bardzo zbliżony. Począwszy od skali fluktuacji $\theta_x/B \sim 0,9$ wartości średnie stabilizują się. Na rysunku 5.22 pokazano uzyskane w tych samych obliczeniach współczynniki zmienności dla nośności.

Wszystkie krzywe na rysunku 5.22 są do siebie zbliżone pod względem kształtu. Współczynnik zmienności jest funkcją rosnącą bezwymiarowej skali fluktuacji. Na pozór może dziwić, że mniejsze wartości współczynnika zmienności otrzymano dla przypadków [3] oraz [4] w porównaniu z przypadkami [1] i [2]. Jest to jednak konsekwencją dużych wartości średnich uzyskanych w tych przypadkach.

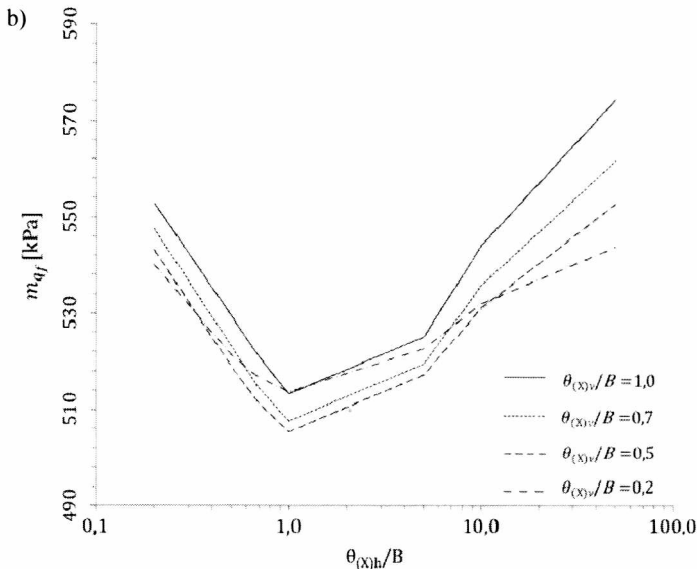
Jak już wcześniej wskazano, ważnym elementem wiarygodności oceny nośności jest uwzględnienie anizotropii pól losowych modelujących parametry wytrzymałościowe. Wykres wartości średniej jako funkcji dwóch zmiennych: bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(x)v}/B$ oraz bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(x)h}/B$ pokazano na rysunku 5.23a.



Rys. 5.22. Współczynnik zmienności ν_{qf} nośności jako funkcja skali fluktuacji (przypadek pól izotropowych) dla czterech przypadków obliczeniowych. Numery przypadków odpowiadają oznaczeniom w tabeli 5.4



Rys. 5.23. Wartość średnia nośności w przypadku modelowania polami anizotropowymi: a) aksonometryczny wykres średniej jako funkcji dwóch zmiennych bezwymiarowej pionowej skali fluktuacji $\theta_{(x)v}/B$ oraz bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(x)h}/B$, gdzie $X = c$ lub $X = \varphi$



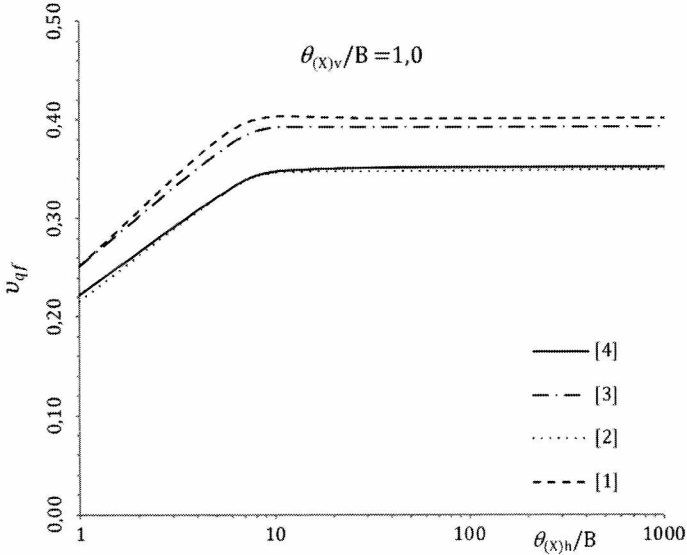
Rys. 5.23 cd. Wartość średnia nośności w przypadku modelowania polami anizotropowymi: b) przekroje powierzchni $m_{q_f}(\theta_{(x)v}/B, \theta_{(x)h}/B)$ wybranymi płaszczyznami określonymi przez wartości $\theta_{(x)v}/B$

Kształt powierzchni na rysunku 5.23a jest podobny do kształtu powierzchni z rysunku 5.13, z tym że średnie wartości są odpowiednio większe. Jak wskazuje rysunek 5.23b, lokalne minima wartości średniej nośności przy ustalonych wartościach pionowej skali fluktuacji pojawiają się przy wartości poziomej skali fluktuacji w przybliżeniu równej szerokości fundamentu (lub nieco większych wartościach). Powyżej tych wartości wartość średnia nośności m_{q_f} jest funkcją rosnącą poziomej skali fluktuacji.

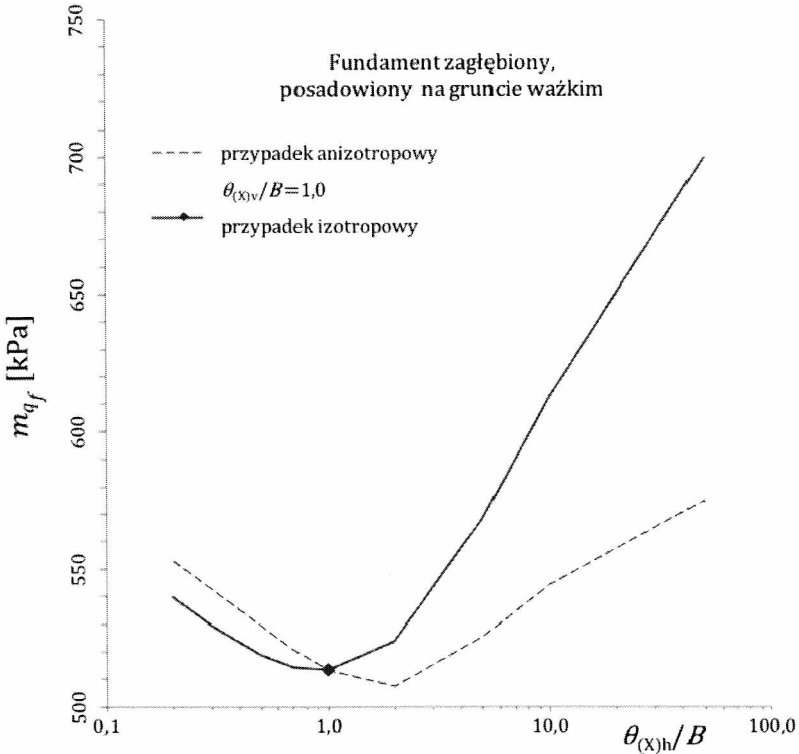
Trend współczynnika zmienności nośności ν_{q_f} w czterech przypadkach (por. tabela 5.4) pokazano na rysunku 5.24.

We wszystkich czterech przypadkach współczynnik zmienności rośnie wraz ze wzrostem poziomej skali fluktuacji. Jednak po osiągnięciu przez poziomą skalę fluktuacji wartości równej około dziesięciu szerokościom fundamentu wartości ν_{q_f} stabilizują się. Różnice w wartościach pomiędzy poszczególnymi przypadkami mają charakter analogiczny jak w przypadku izotropowym, czyli mniejsze wartości współczynnika zmienności otrzymano dla przypadków [3] oraz [4] w porównaniu z przypadkami [1] i [2].

Porównanie wartości średnich dla przypadków izotropowych oraz przypadków anizotropowych pokazano na rysunku 5.25.

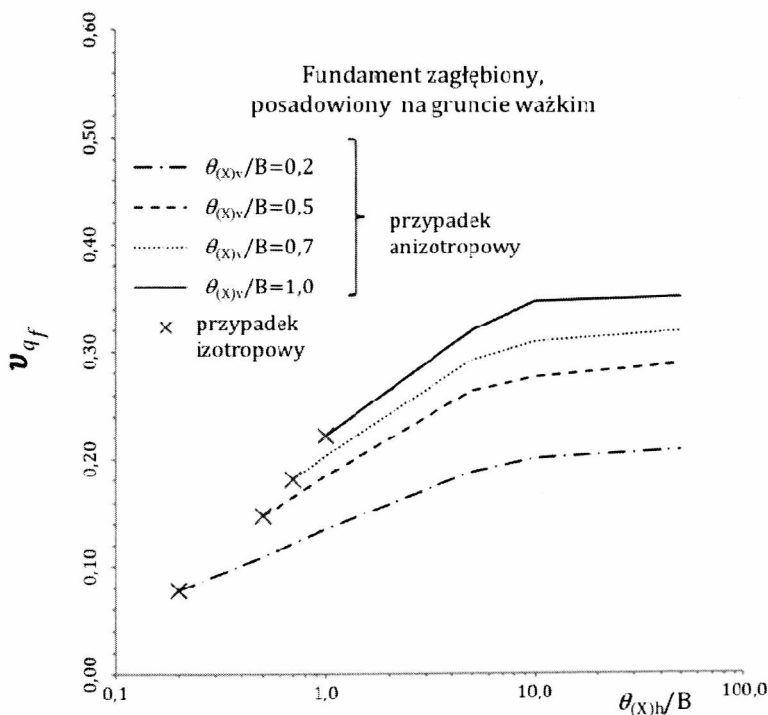


Rys. 5.24. Współczynnik zmienności nośności v_{qf} dla czterech przypadków (numeracja przypadków jak w tabeli 5.4)



Rys. 5.25. Zestawienie wartości średnich dla przypadków izotropowych oraz anizotropowych. Bezwymiarowa pionowa skala fluktuacji ma wartość jeden (w przypadku anizotropowym)

Zarówno w izotropowych, jak i anizotropowych przypadkach wartość średnia nośności rośnie ze wzrostem poziomej skali fluktuacji, po przekroczeniu wartości około jednej szerokości fundamentu. Jednak przy modelowaniu izotropowym wzrost ten jest znacznie szybszy niżeli przy modelowaniu anizotropowym. Wynika stąd, że modelowanie izotropowe może prowadzić do zawyżenia wartości średniej nośności, co jest błędem „po niebezpiecznej stronie” w przypadku oceny bezpieczeństwa.



Rys. 5.26. Zestawienie współczynników zmienności nośności dla modelowania izotropowego oraz anizotropowego dla czterech różnych wartości pionowej skali fluktuacji

Na zakończenie niniejszego podrozdziału zwróćmy jeszcze uwagę na porównanie współczynników zmienności pomiędzy przypadkami modelowania izotropowego oraz anizotropowego. Przedstawiono je na rysunku 5.26. Jak łatwo zauważyć, w przypadkach anizotropowych współczynniki zmienności przekraczają wartości odpowiadających im sytuacji izotropowych. Zatem, podobnie jak to miało miejsce przy analizie wartości średniej, modelowanie izotropowe może prowadzić do błędu po „stronie niebezpiecznej” w sytuacji oceny niezawodności.

5.3. Rozkłady prawdopodobieństwa nośności

W zagadnieniu oceny nośności wynikiem obliczeń metodą RFEM są charakterystyki statystyczne opisujące nośność jako zmienną losową q_f (lub Q_f). Według zasad teorii prawdopodobieństwa z pełną informacją o zmiennej losowej mamy do czynienia wówczas, gdy znany jest rozkład prawdopodobieństwa tej zmiennej. Ze względu na specyfikę metody elementów skończonych znalezienie dokładnego rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej q_f jest na ogół niemożliwe. Możliwa jest natomiast estymacja rozkładu prawdopodobieństwa na podstawie ciągu rezultatów otrzymanych z symulacji Monte Carlo, będącej elementem składowym algorytmów RFEM. Najłatwiej jest szacować kolejne momenty statystyczne na podstawie ich estymatorów nieobciążonych (Cramer, 1999). Dla pierwszych czterech momentów centralnych wzory są następujące (Cramer, 1999):

$$M_1 = m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^N x_i, \quad (5.20)$$

$$M_2 = \frac{n}{n-1} m_2, \quad (5.21)$$

$$M_3 = \frac{n^2}{(n-1)(n-2)} m_3, \quad (5.22)$$

$$M_4 = \frac{n(n^2 - 2n + 3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_4 - \frac{3n(2n-3)}{(n-1)(n-2)(n-3)} m_2^2, \quad (5.23)$$

przy czym

$$m_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - m)^j \quad j = 2, 3, 4, \quad (5.24)$$

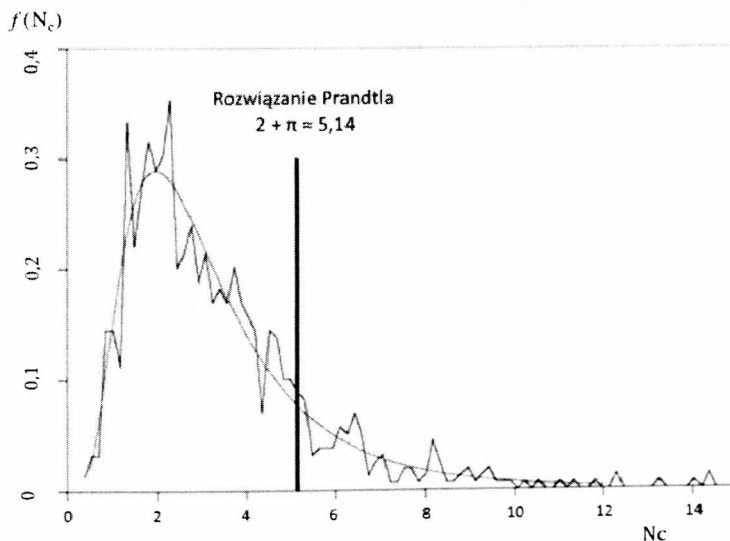
zaś N jest liczebnością próby (liczba realizacji w procesie symulacyjnym).

Na podstawie pierwszych czterech momentów statystycznych można określić podstawowe cechy rozkładu prawdopodobieństwa, a mianowicie wartość oczekiwaną (pierwszy moment), wariancję (drugi moment), skośność (trzeci moment) i kurtozę (czwarty moment). Znajomość momentów wyższego rzędu pozwala na przybliżanie gęstości poszukiwanego rozkładu prawdopodobieństwa za pomocą sum częściowych rozwinięcia Grama-Charliera lub Edgewortha (por. Cramer, 1999 lub Sobczyk, 1973). Rozwinięć tych dokonuje się względem kolejnych pochodnych

gęstości rozkładu normalnego (przykład aproksymacji tego typu można znaleźć w pracy autora (1984)). Jednak istotną wadą tego podejścia jest mała szybkość zbieżności szeregu Grama-Charliera, a także szeregu Edgewortha. W związku z tym konieczna jest estymacja wielu kolejnych momentów statystycznych, co z kolei wymaga bardzo dużej liczby realizacji N w procesie symulacji Monte Carlo.

Najczęściej zatem estymacja rozkładu prawdopodobieństwa odbywa się na drodze dopasowania gęstości rozkładu hipotetycznego do otrzymanego w wyniku symulacji histogramu albo – lepiej – przez dopasowanie dystrybuanty hipotetycznego rozkładu do dystrybuanty empirycznej otrzymanej na drodze symulacji. W takich przypadkach stawiane hipotezy co do typu rozkładu weryfikowane są najczęściej przez statystyczne testy zgodności. Trzeba jednak pamiętać, że testy zgodności dają mocne podstawy wnioskowania jedynie przy negatywnym wyniku, który upoważnia do zdyskwalifikowania proponowanego rozkładu. W przeciwnym przypadku nie ma jedynie podstaw do odrzucenia hipotezy, że proponowany rozkład jest rzeczywiście rozkładem badanej zmiennej losowej (w tym przypadku nośności).

W analizowanej w podrozdziale 5.1 pracy Griffithsa i Fentona (2001) autorzy dopasowali do wygenerowanego (na podstawie liczby realizacji $N = 1000$) histogramu rozkład log-normalny, jak to pokazano na rysunku 5.27 (parametry rozkładu podano w opisie pod rysunkiem).

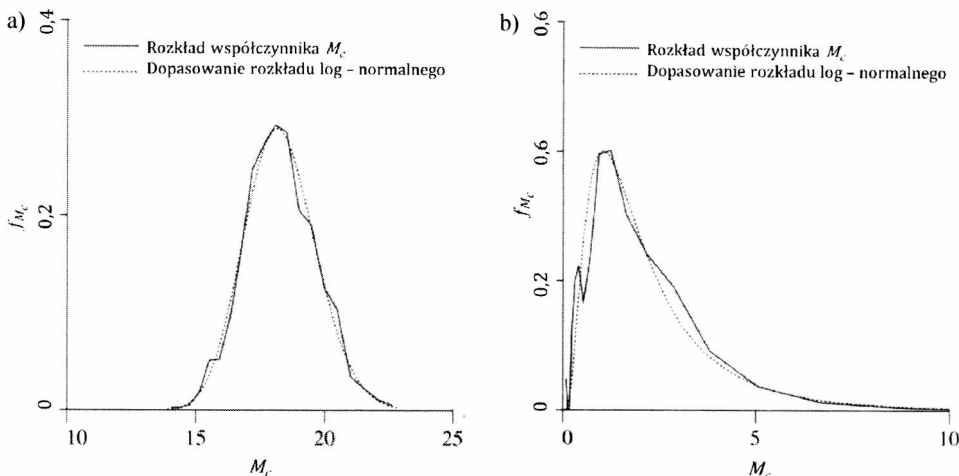


Rys. 5.27. Histogram współczynnika nośności N_c dla gruntu idealnie spoiстого, przy parametrach wejścia $\Theta_{c_u} = \theta_{\ln c_u} / B = 2$ oraz $\nu_{c_u} = 1$ (pozostałe parametry jak podrozdziale 5.1) z dopasowaną do niego funkcją gęstości prawdopodobieństwa hipotetycznego rozkładu log-normalnego o wartości oczekiwanej $m_{N_c} = 3,31$ oraz odchyleniu standardowym $\sigma_{N_c} = 2,08$ (za pracą Griffithsa i Fentona, 2001)

Na rysunku 5.27 zaznaczono wartość współczynnika nośności $N_c = 2 + \pi$, która wynika z rozwiązania Prandtla. Stosując rozkład hipotetyczny można łatwo znaleźć (w oparciu o wzory transformacyjne – będzie o tym mowa w podrozdziale 6.2) prawdopodobieństwo zdarzenia, że współczynnik nośności ma wartość mniejszą, tj. $P\{N_c < 2 + \pi\} \approx 0,85$. Jak widać, prawdopodobieństwo to jest znaczne. Za przyjęciem rozkładu log-normalnego jako rozkładu zmiennej losowej N_c przemawia też następująca argumentacja. Jak wspomniano w podrozdziale 5.1, gdy $\Theta_{c_u} \rightarrow \infty$, wówczas wartość średnia współczynnika nośności dąży do $m_{N_c} \rightarrow 2 + \pi$ (por. rysunek 5.3 i komentarz poniżej). Z drugiej strony przy $\Theta_{c_u} \rightarrow \infty$, na skutek uśrednienia, pole losowe redukuje się do pojedynczej zmiennej losowej o rozkładzie takim, jaki ma zmienna c_u , czyli rozkładzie log-normalnym. Pomnożenie takiej zmiennej przez stałą wartość $2 + \pi$ nie zmienia oczywiście typu rozkładu, a jedynie modyfikuje jego parametry. Stąd można wnioskować, że rozkład prawdopodobieństwa współczynnika nośności N_c jest w przybliżeniu log-normalny.

Analizę rozkładów prawdopodobieństwa przeprowadzono także w pracy Fentona i Griffithsa (2003), dotyczącej podłoża tarciowo-kohezyjnego, której rezultaty, bazujące na modelowaniu izotropowym, przedstawiono w punkcie 5.1.2. Autorzy – jako hipotetyczny dla bezwymiarowego współczynnika nośności M_c (por. punkt 5.1.2) – przyjęli rozkład log-normalny. Rozkład ten był dopasowywany do histogramów uzyskanych w $N = 1000$ realizacji symulacji Monte Carlo w kolejno rozpatrywanych przypadkach, a następnie weryfikowany testem zgodności chi-kwadrat (Fisz, 1980). W niektórych przypadkach uzyskiwano dobrą zgodność (wartość $p = 33\div 43\%$), w innych stosunkowo słabą ($p = 0,01\%$). Przykładowe dopasowania pokazuje rysunek 5.28. Jak zatem widać, log-normalny rozkład prawdopodobieństwa nie w każdej sytuacji sprawdził się jako rozkład prawdopodobieństwa współczynnika nośności. Z drugiej strony, obserwując rozkłady pokazane na rysunku 5.28b, odnosi się wrażenie, że mogły tam wystąpić „niedokładności numeryczne” albo liczba realizacji ($N = 1000$) była zbyt mała do wiarogodnej oceny rozkładu. Autorzy (Fenton i Griffiths, 2003) zamieszczają w pracy jedynie te dwa przypadki, trudno jest więc o bardziej wnikliwą analizę.

W obliczeniach dotyczących nośności fundamentu zagłębionego z uwzględnieniem ciężaru własnego gruntu pod nim zalegającego, które opisano w punkcie 5.2.4, analizowano też zagadnienie rozkładu prawdopodobieństwa nośności takiego posadowienia. Estymacji rozkładu dokonano na podstawie wyników symulacji o liczebności $N = 2000$, dających dość rzetelny obraz rozkładu w jego



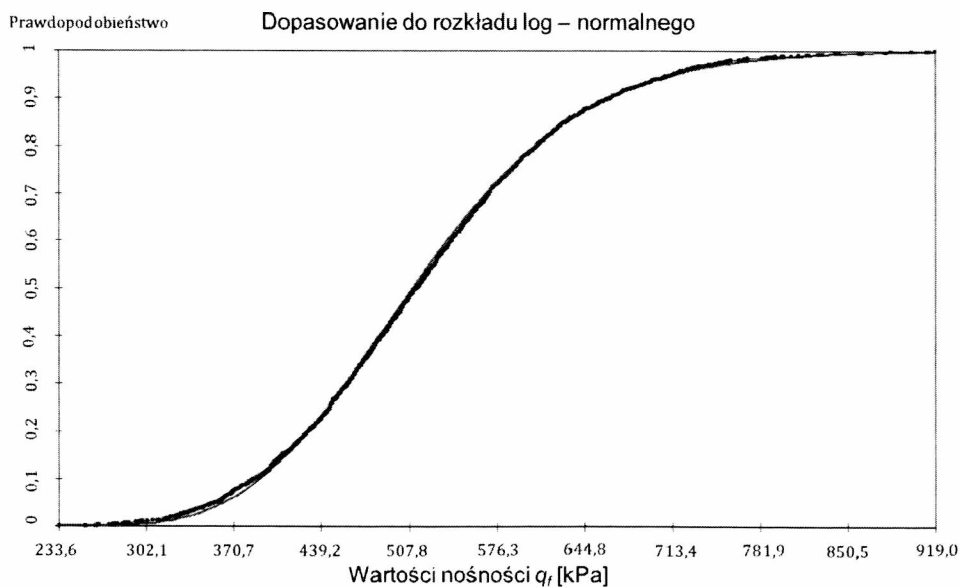
Rys. 5.28. Rozkład prawdopodobieństwa współczynnika nośności M_c dla gruntu tarciowo-kohezyjnego z dopasowanym hipotetycznym rozkładem log-normalnym: a) przykład dopasowania o wysokim prawdopodobieństwie $p = 43\%$, otrzymany przy założeniach $\nu_c = 0,1$; $\theta = 4$ i $\rho(\varphi, c) = 0$, b) przykład dopasowania o niskim prawdopodobieństwie $p = 0,01\%$, otrzymany przy założeniach $\nu_c = 5$; $\theta = 1$ i $\rho(\varphi, c) = 0$ (za pracą Fentona i Griffithsa, 2003, por. pkt 5.1.2)

centralnej części. Uzyskane dla fundamentu o szerokości $B = 1,0$ m, posadowionego na gruncie o cechach podanych w tabeli 5.3 (*Taranto clay*), charakterystyki statystyczne zamieszczono w tabeli 5.5. Podobnie jak w pracy Fentona i Griffithsa (2003) jako hipotetyczny przyjęto rozkład log-normalny.

Tabela 5.5. Charakterystyki statystyczne rozkładu prawdopodobieństwa nośności (model anizotropowy, fundament zagłębiony z uwzględnieniem ciężaru objętościowego gruntu, $\theta_{(x)v} = 0,7$ m, $\theta_{(x)h} = 30$ m)

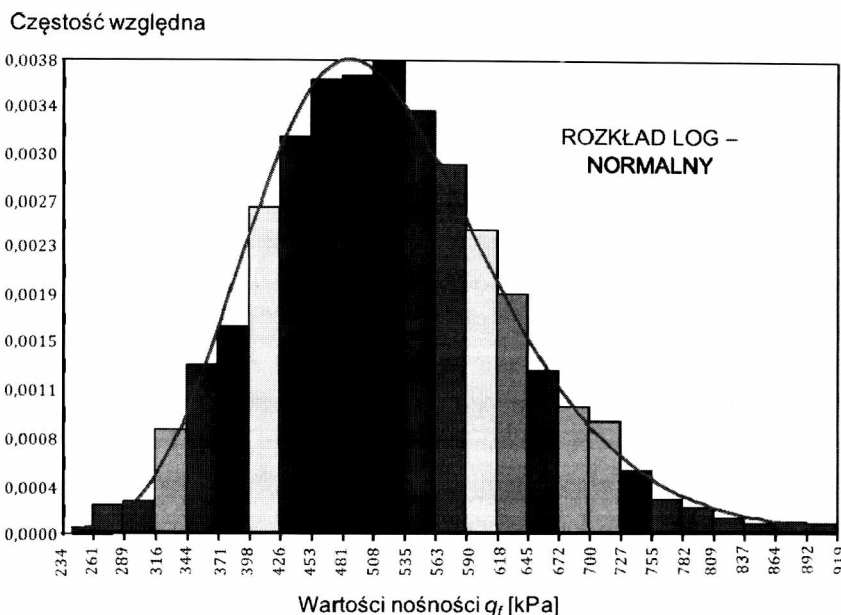
Mediana	513 kPa
Średnia arytmetyczna	520,7 kPa
Średnia geometryczna	509,5 kPa
Wariancja	11 689 (kPa) ²
Odchylenie standardowe	108,1 kPa
Współczynnik zmienności	0,2076 [-]
Trzeci moment	5,31E+05 (kPa) ³
Współczynnik skośności	0,4204 [-]
Czwarty moment	4,43E+08 (kPa) ⁴
Współczynnik spłaszczenia (kurtoza)	3,243 [-]

Dopasowania rozkładu prawdopodobieństwa dokonano dwoma sposobami: metodą momentów (Murzewski, 2001), czyli przez porównanie dwóch pierwszych statystycznych, oraz przez dopasowanie dystrybuanty teoretycznej do dystrybuanty empirycznej, otrzymanej z procesu symulacyjnego, metodą najmniejszych kwadratów. Obie metody dały bardzo zbliżone rezultaty. Do dalszych analiz (także kalibracji pokazanej w podrozdziale 6.2) przyjęto rozkład otrzymany metodą porównywania dystrybuant. Uzyskaną dystrybuantę rozkładu log-normalnego wraz z dystrybuantą empiryczną uzyskaną z symulacji przedstawia rysunek 5.29. Jak łatwo zauważyć, dopasowanie jest bardzo dobre. Trzeba mieć jednak na uwadze, że przy zastosowaniu większej skali pojawiają się różnice. Dla porównania na rysunku 5.30 zestawiono gęstość prawdopodobieństwa odpowiadającą dopasowanej dystrybuancie teoretycznej z histogramem otrzymanym w wyniku symulacji. Tu także zgodność można uznać za wystarczającą. Dodatkowo hipotezę dotyczącą dopasowanego rozkładu log-normalnego zweryfikowano statystycznymi testami zgodności: testem chi-kwadrat oraz testem Kołmogorowa–Smirnowa (Fisz, 1980). Wyniki testów zestawiono w tabeli 5.6.



Rys. 5.29. Rozkład prawdopodobieństwa nośności q_f . Dopasowanie dystrybuanty teoretycznej rozkładu log-normalnego do dystrybuanty empirycznej otrzymanej poprzez symulację Monte Carlo

Obydwa testy nie dały podstawy do odrzucenia postawionej hipotezy dotyczącej postaci rozkładu prawdopodobieństwa nośności. Oczywiście przedstawione powyżej argumenty nie stanowią matematycznego dowodu, że nośność



Rys. 5.30. Rozkład prawdopodobieństwa nośności q_f . Gęstość prawdopodobieństwa teoretycznego rozkładu log-normalnego w zestawieniu z histogramem otrzymanym w wyniku symulacji Monte Carlo

Tabela 5.6. Wyniki testów zgodności dla dwóch zaproponowanych rozkładów log-normalnych: estymowanego metodą momentów oraz estymowanego metodą najmniejszych kwadratów

Metoda estymacji	Parametry estymacji	
	Metoda momentów	Metoda najmniejszych kwadratów
Wybrany rozkład X	log-normalny	
Parametr 1 – $\mu_{\ln X}$	6,234	6,234
Parametr 2 – $\sigma_{\ln X}$	0,2055	0,2107
Testowanie		
Test nr 1	Test Kołmogorowa–Smirnowa	
Poziom istotności	0,4768	0,4842
Krytyczny poziom istotności	0,05	0,05
Brak podstaw do odrzucenia hipotezy		
Test nr 2	Test chi-kwadrat	
Liczba klas przyjętych do testowania	44	44
Poziom istotności	0,3382	0,3728
Krytyczny poziom istotności	0,05	0,05
Brak podstaw do odrzucenia hipotezy		

rozpatrywanego podłoża typu *Taranto clay* traktowana jako zmienna losowa ma rozkład log-normalny. Z drugiej strony przeprowadzone przez autora analizy dla

innych wartości poziomych skali fluktuacji w tym samym podłożu wykazywały bardzo zbliżone rezultaty co do kształtu rozkładu. Podobnie zresztą jak rezultaty Fentona i Griffithsa pokazane na początku niniejszego podrozdziału.

Wydaje się zatem, że w przypadku podłoża tarciowo-kohezyjnego o dużej wartości spójności, a także znacznym współczynniku zmienności, oraz przy założeniu, że pole losowe spójności ma charakter log-normalny, można przyjąć, że nośność podłoża ma rozkład zbliżony do log-normalnego.

Jednakże powyższa konkluzja nie potwierdza się w przypadku podłoża niespoistego. Analizy przeprowadzone w pracy Puły i Zaskórskiego (2015) przy założeniu, że kąt tarcia wewnętrznego modelowany jest przez pole losowe o rozkładach jednowymiarowych o nośniku ograniczonym, otrzymanych z rozkładu normalnego przez transformację typu tangens hiperboliczny (por. podrozdział 2.6), pokazały, że rozkład prawdopodobieństwa nośności w tego typu podłożu odbiega w większości analizowanych przypadków od rozkładu log-normalnego i jest raczej zbliżony do rozkładu Weibulla. Gęstość prawdopodobieństwa tego rozkładu wyraża się wzorem

$$f_q(x) = \begin{cases} \frac{k}{w-\tau} \left(\frac{x-\tau}{w-\tau} \right)^{k-1} \exp\left(-\left(\frac{x-\tau}{w-\tau} \right)^k \right), & \tau \leq x < \infty, \\ 0, & -\infty < x < \tau, \end{cases} \quad (5.25)$$

gdzie τ jest kresem dolnym nośnika rozkładu, zaś k oraz w są parametrami kształtu, związanymi z wartością oczekiwaną i odchyleniem standardowym poprzez następujące zależności:

$$\mu_q = (w - \tau) \Gamma(1 + 1/k) + \tau, \quad (5.26)$$

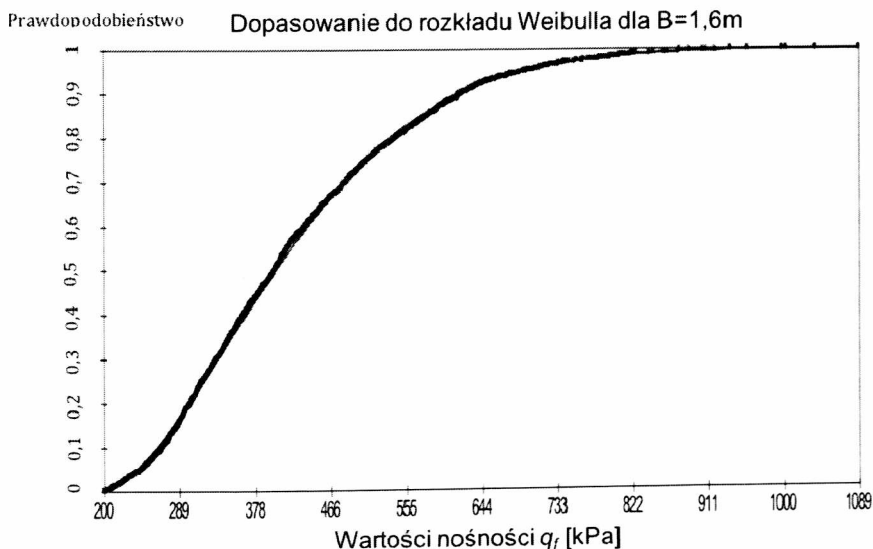
$$\sigma_q = (w - \tau) \sqrt{\Gamma\left(1 + \frac{2}{k}\right) - \Gamma^2\left(1 + \frac{1}{k}\right)}, \quad (5.27)$$

w których Γ oznacza funkcję gamma Eulera. Obliczenia prowadzące do oszacowania rozkładu prawdopodobieństwa nośności dokonano metodą RFEM (z zastosowanym do symulacji dwuwymiarowym algorytmem LAS, liczba realizacji $N = 2000$). W obliczeniach MES posłużono się modelem sprężysto-idealnie plastycznym z kryterium Coulomba–Mohra. Podstawowe parametry podłoża podano w tabeli 5.7.

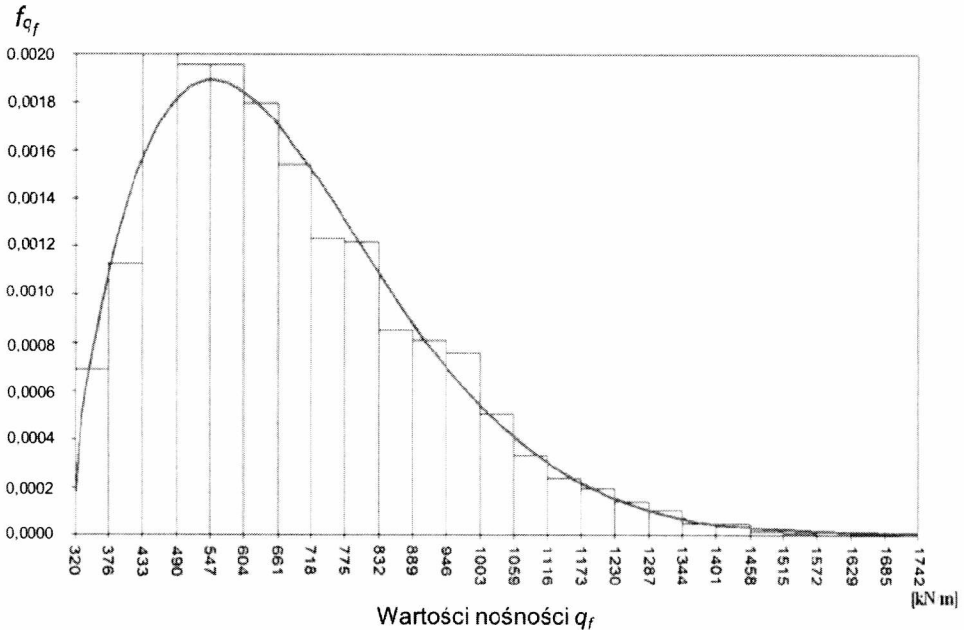
Tabela 5.7. Parametry podłoża niespoistego przyjęte w pracy Puły i Zaskórskiego (2015). Oznaczenia parametrów rozkładu kąta tarcia wewnętrznego zgodne z oznaczeniami we wzorze (2.71)

Moduł Younga (wielkość deterministyczna)	E	[kPa]	93 000
Współczynnik Poissona (wielkość deterministyczna)	ν	[-]	0,3
Kąt tarcia wewnętrznego (pole losowe)	φ_{\min}	[°]	20
	φ_{\max}	[°]	40
	μ_{φ}	[°]	30
	s	[-]	4,08
	σ_{φ}	[°]	5,0
Kąt dylatacji (wielkość nielosowa)	ψ	[°]	12
Głębokość posadowienia	h_z	[m]	1,0
Pionowa skala fluktuacji	$\theta_{(\varphi)\nu}$	[m]	0,8
Pozioma skala fluktuacji	$\theta_{(\varphi)h}$	[m]	10,0
Liczba realizacji N 2000	N	[-]	2000

Przykładowe dopasowania, zaczerpnięte ze wspomnianej wyżej pracy, pokazano na rysunku 5.31 – dla dystrybuanty, oraz na rysunku 5.32 – dla gęstości prawdopodobieństwa.



Rys. 5.31. Dopasowanie dystrybuanty teoretycznej rozkładu Weibulla do dystrybuanty empirycznej otrzymanej poprzez symulację Monte Carlo. Szerokość fundamentu $B = 1,6$ m. Parametry dopasowanego, hipotetycznego rozkładu Weibulla: $w = 725,41$; $k = 1,66$; $\tau = 315,74$



Rys. 5.32. Gęstość prawdopodobieństwa rozkładu Weibulla o parametrach $w = 725,41$; $k = 1,66$; $\tau = 315,74$ wraz z histogramem uzyskanym z symulacji Monte Carlo. Szerokość fundamentu $B = 1,6 \text{ m}$

Na obu rysunkach widać dobrą zgodność rozkładu empirycznego i hipotetycznego rozkładu teoretycznego. Wynik testu Kołmogorowa-Smirnowa wskazał, iż nie ma podstaw do odrzucenia postawionej hipotezy. We wspomnianej wyżej pracy (Puła i Zaskórski, 2015) aproksymowano rozkłady prawdopodobieństwa nośności dla 5 różnych szerokości fundamentu oraz dla 4 różnych głębokości posadowienia – w sumie 20 przypadków, przy czym warunki gruntowe były jednakowe (jak w tabeli 5.7). W każdym z 20 przypadków rozkład Weibulla dał lepsze przybliżenie empirycznego rozkładu nośności aniżeli rozkład log-normalny.

Podane w niniejszym podrozdziale estymacje rozkładów mają zastosowanie do zagadnień kalibracji wartości obliczeniowych nośności, o których będzie mowa w podrozdziale 6.2.

6. Przykłady kalibracji wartości charakterystycznych i obliczeniowych

Jak wspomniano w rozdziale pierwszym, wielu badaczy oraz inżynierów konsultantów dostrzega coraz większe znaczenie projektowania wspomagane niezawodnością (*reliability based design*) w projektowaniu geotechnicznym. Na taką konieczność zwraca uwagę najnowsze, czwarte wydanie normy ISO 2394:2015. *General principles on reliability for structures* (ISO 2015), które opatrzone zostało specjalnym załącznikiem napisanym przez K.K. Phoona, odnoszącym się do zagadnień geotechniki (ISO 2394:2015, *Annex D*). Załącznik ten podkreśla konieczność uwzględnienia w szacowaniu bezpieczeństwa w geotechnice przestrzennej zmienności właściwości podłoża, sugerując skalę fluktuacji jako podstawową charakterystykę tej zmienności. W tej sytuacji metody pól losowych stają się adekwatnym narzędziem modelowania parametrów gruntu. W dominującej większości przepisów normalizacyjnych sugerowana jest metoda stanów granicznych, zgodnie z którą każdemu parametrowi dotyczącemu czy to własności gruntu, czy też obciążenia przypisuje się odpowiednie wartości charakterystyczne oraz odpowiednie wartości obliczeniowe. Właściwy dobór tychże wartości ma bezpośrednie przełożenie na bezpieczeństwo konstrukcji. Takie podejście zawierają wszystkie Eurokody, a w szczególności Eurokod 0 (PN-EN 1990:2004) oraz Eurokod 7 (PN-EN 1997-1:2008. Eurokod 7). Kalibracja zarówno wartości charakterystycznych, jak i obliczeniowych może odbywać się na drodze probabilistycznej, co zresztą sugerują Eurokody. W tym rozdziale będą zaproponowane metody takich kalibracji, związane z posadowieniem bezpośrednim, które jednocześnie są rezultatem modelowania parametrów podłoża za pomocą pól losowych. Na początku podmiotem opisu będą wartości charakterystyczne.

6.1. Wartości charakterystyczne parametrów podłoża

Z historycznego punktu widzenia warto odnotować, że jednym z pierwszych (w skali światowej) podejść normatywnych do kalibracji wartości charakterystycznych i obliczeniowych w geotechnice, konsekwentnie opartych na metodach statystycznych, były wytyczne polskiej normy PN-81/B-03020 (PN-81/B-03-20, 1981). W normie tej jako wartość charakterystyczną $x^{(n)}$ (stosuję w tym przypadku oryginalne oznaczenia normy PN-81/B-03020) parametru podłoża X przyjmuje się średnią arytmetyczną wyników pomiarów parametru X . Zależność pomiędzy wartością charakterystyczną $x^{(n)}$ a wartością obliczeniową $x^{(r)}$ jest następująca:

$$x^{(r)} = \gamma_m x^{(n)}, \quad (6.1)$$

przy czym γ_m jest współczynnikiem materiałowym (cząstkowym współczynnikiem bezpieczeństwa) obliczanym według następującego wzoru:

$$\gamma_m = 1 \pm \frac{\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x^{(n)})^2 \right)^{\frac{1}{2}}}{x^{(n)}} = 1 \pm \nu_X, \quad (6.2)$$

w którym x_i są wynikami testowania właściwości X , zaś ν_X jej współczynnikiem zmienności.

Ze wzorów (6.1) i (6.2) wynika, że

$$x^{(r)} = x^{(n)} \pm \sigma_X, \quad (6.3)$$

gdzie σ_X oznacza odchylenie standardowe właściwości X . Norma PN-81/B-03020 wprowadza jeszcze dodatkowe ograniczenia na współczynniki materiałowe, mianowicie: $0,8 \leq \gamma_m \leq 0,9$ lub $1,1 \leq \gamma_m \leq 1,25$. Warto zwrócić uwagę na to, że współczynniki materiałowe proponowane przez normę uwzględniają w sposób statystyczny naturalną niepewność właściwości podłoża i prowadzą do wartości obliczeniowej zależnej od wielkości rozrzutu wyników uzyskanych z badań podłoża. Nie jest to co prawda propozycja oparta na modelowaniu właściwości przez pola losowe, ale ma konsekwentnie statystyczny charakter, co jak na czas powstawania wzmiankowanej normy należy uznać za podejście nowatorskie. Opisane wyżej podejście odnosiło się do tzw. metody A (najdokładniejszej)

oznaczania parametrów geotechnicznych. W przypadku tego podejścia sposób wyznaczenia wartości charakterystycznej oraz obliczeniowej był precyzyjnie określony. Istotne wątpliwości zaczęły pojawiać się wraz z wprowadzeniem Eurokodu 7 (PN-EN 1997-1:2008), który w Polsce (w roku 2011) zastąpił normę PN-81/B-03020. Bowiem zgodnie z PN-EN 1997-1:2008 wartość charakterystyczna to ostrożne oszacowanie wielkości danej właściwości gruntu, która jest związana z wystąpieniem określonego stanu granicznego. Taka definicja określa jedynie dość ogólne ramy określenia wartości charakterystycznej, bez podania precyzyjnego algorytmu. Nic zatem dziwnego, że od momentu opublikowania Eurokodu 7 zaczęły pojawiać się propozycje, oparte na metodach probabilistycznych, które starały się w sposób znacznie bardziej precyzyjny podać sposób określania wartości charakterystycznych (niektóre z tych prac będą zacytowane w dalszej części tego rozdziału). Po pierwsze można odnieść się do sformułowań Eurokodu 0 (PN-EN 1990:2004). Wskazuje on, że wartość charakterystyczna parametru X powinna być wyznaczona jako pięcioprocentowy kwantyl z rozkładu prawdopodobieństwa tego parametru. Zakładając, że parametr X jest zmienną losową o rozkładzie normalnym, otrzymuje się następujący wzór na wartość charakterystyczną:

$$X_k = \mu_X - 1,645\sigma_X = \mu_X(1 - 1,645\nu_X), \quad (6.4)$$

w którym μ_X , σ_X , ν_X oznaczają odpowiednio wartość oczekiwaną, odchylenie standardowe oraz współczynnik zmienności zmiennej losowej X . Wzór (6.4) ma zastosowanie, gdy rozkład badanej właściwości można uznać za normalny. Ponadto wielkość projektowanego elementu, gdzie używa się danego parametru, powinna być porównywalna z elementem poddanym testowaniu. Z taką sytuacją spotykamy się zazwyczaj przy projektowaniu konstrukcji stalowych lub żelbetonowych. W projektowaniu geotechnicznym oba powyższe warunki na ogół nie są spełnione. Jak już wskazano w rozdziale 1, wyniki testowania większości parametrów podłoża charakteryzują się dużymi współczynnikami zmienności, co w przypadku zastosowania wzoru (6.4) może prowadzić do „niefizycznych” wartości X_k . Zwłaszcza w przypadku spójności czy wytrzymałości na ścinanie w warunkach bez odpływu, gdzie współczynniki zmienności są rzędu kilkudziesięciu procent, wzór (6.4) może prowadzić do ujemnych lub bardzo małych wartości charakterystycznych. Warto też odnotować, że w materiałach takich jak stal czy beton problem ten nie występuje, gdyż w przypadku tych materiałów współczynniki zmienności są zwykle mniejsze niż 10%. Drugą przyczyną bardzo

ograniczonej stosowalności wzoru (6.4) do projektowania geotechnicznego jest to, że obszar podłoża związany z konkretną awarią jest zwykle znacznie większy od obszaru pojedynczego testowania. Z uwagi na fakt, że nawet jednorodna warstwa gruntu wykazuje naturalną przestrzenną zmienność losową, wartość związana z powstaniem określonego stanu granicznego jest pewną wartością średnią danego parametru względem odpowiadającej temu stanowi powierzchni ścięcia, a nie lokalnie zmierzoną wartością, na co zwrócono już uwagę w rozdziale 4. Taka wartość jest zazwyczaj różna od pięcioprocentowego kwantyla uzyskanego w wyniku rutynowego testowania podłoża.

Kolejnym istotnym czynnikiem jest fakt, że w projektowaniu geotechnicznym wykorzystuje się zwykle niewielką liczbę wyników testowania (z uwagi na wysokie koszty). W konsekwencji wartość średnia i odchylenie standardowe danego parametru otrzymane w wyniku rozpoznania geotechnicznego mogą nie być zbliżone do, odpowiednio, wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego dla parametru związanego z obszarem podłoża odpowiedzialnym za powstanie stanu granicznego.

Ze względu na przytoczone wyżej argumenty często proponuje się (np. Orr i Breyse, 2008) wyznaczanie wartości charakterystycznej na podstawie wzoru na przedział ufności dla wartości oczekiwanej. W przypadku, gdy odchylenie standardowe populacji nie jest znane, wzór ten przyjmuje następującą postać (np. Fisz, 1980):

$$X_k = m_X - \frac{t}{\sqrt{N}} s_X, \quad (6.5)$$

gdzie N jest liczebnością próby,

$$m_X = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \quad (6.6)$$

estymatorem wartości oczekiwanej, zaś

$$s_X = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - m_X)^2} \quad (6.7)$$

estymatorem odchylenia standardowego (estymator nieobciążony). Wartość t otrzymuje się z dystrybuanty rozkładu Studenta (Student, 1909) w zależności od liczebności próby N oraz przyjętego poziomu ufności. W nawiązaniu do 5%

kwantyla, sugerowanego przez Eurokod 7 [PN-EN 1990:2000] poziom ufności należy przyjąć jako 95%.

Jako uproszczoną formę wzoru (6.5) można potraktować formułę Schneidera (1997)

$$X_k = m_X - 0,5s_X, \quad (6.8)$$

przy czym zastosowano oznaczenia jak we wzorze (6.5). Inną, uproszczoną propozycję podał Duncan (2000). Propozycja ta opiera się na tzw. regule 3-sigma, która stwierdza, że prawdopodobieństwo pojawiania się wartości spoza przedziału $[\mu_X - 3\sigma_X, \mu_X + 3\sigma_X]$ jest małe (w przypadku rozkładu normalnego wynosi ono w przybliżeniu 0,0027). W związku z tym dla ograniczonych zmiennych losowych, których wartości koncentrują się w przedziale $[X_{\min}, X_{\max}]$, można w przybliżeniu przyjąć, że

$$\sigma_X \approx \frac{1}{6}(X_{\max} - X_{\min}). \quad (6.9)$$

Według Duncana można wartość charakterystyczną X_k obliczyć ze wzoru (6.4), szacując jednocześnie odchylenie standardowe zgodnie ze wzorem (6.9). Łatwo domyślić się, że obliczenia według wzorów (6.4), (6.5), (6.8) oraz propozycji Duncana prowadzą do różnych wartości charakterystycznych. W pracy Orra i Breysse'ego (2008) pokazano przykład, w którym obliczono wartości charakterystyczne wytrzymałości na ścinanie c_u (badania trójosiowe w warunkach bez odplywu). Obliczenia wykonano na podstawie 10 prób, które pochodziły z różnych otworów i różnych głębokości z miejsca, w którym planowano wykonanie pali o długości 10 m, wyznaczając osobno wartość charakterystyczną dla strefy wokół pobocznicy planowanego pala oraz osobno dla strefy pod podstawą pala. Otrzymane według wzoru (6.4) (propozycja Eurokodu) wartości charakterystyczne: $c_{u,s;k} = 37,5$ kPa w okolicy pobocznicy pala oraz $c_{u,t;k} = 39,2$ kPa w okolicy podstawy pala autorzy uznali za niewłaściwe, gdyż każda z nich jest mniejsza od najmniejszej wartości uzyskanej z pomiarów. Można podejrzewać, że obliczone wartości są niewłaściwe z dwóch powodów. Po pierwsze liczebność próby była zbyt mała. Po drugie – obszar podłoża, z którego pobierane były próby, mógł być zbyt mały w stosunku do obszaru, który obejmowałyby strefy awarii (linie poślizgu). Natomiast stosując kolejno przedstawione wyżej propozycje otrzymuje się:

$c_{u,s;k} = 50,5$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 42,3$ kPa, dla oszacowania według wzoru (6.5);

$c_{u,s;k} = 53,9$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 46,7$ kPa, dla propozycji Schneidera (wzór (6.8));
 $c_{u,s;k} = 50,86$ kPa oraz $c_{u,t;k} = 45,61$ kPa, według propozycji sformułowanej przez
 Duncana.

Są to wartości istotnie większe w stosunku do oszacowanie według wzoru (6.4). Widać też, że oszacowania wartości charakterystycznych według wzorów (6.5), (6.8) i propozycji Duncana są do siebie zbliżone. Znacznie jednak odbiegają od oszacowania według wzoru (6.4).

Oszacowania wartości charakterystycznych według wzorów (6.5), (6.8) oraz według Duncana można określić mianem „oszacowań statystycznych”. Jednak oszacowania statystyczne mogą okazać się wątpliwe, gdy liczba wyników badań danego parametru jest mała. W takiej sytuacji wcześniej uzyskana wiedza dotycząca charakterystyk podłoża w lokalnych warunkach może być wykorzystana jako informacja *a priori* zastosowania procedury „bayesowskiej”, jak to zaproponowano w pracach Ovesena i Denvera (1994) czy Cherubiniego i Orra (1999). Jak to wynika ze wzoru (6.4), zasadniczą informacją dla statystycznego oszacowania wartości charakterystycznej jest znajomość współczynnika zmienności v_X rozpatrywanego parametru X . W związku z tym Cherubini i Orr (1999) podali orientacyjne wartości takich współczynników, które mogą być przyjęte jako współczynniki zmienności *a priori* w sytuacji, gdy nie ma żadnych informacji, dotyczących warunków lokalnych, a które mogłyby być pomocne przy określaniu wartości charakterystycznych. Wartości zaproponowane przez tych autorów dla wybranych właściwości podłoża zamieszczono w tabeli 6.1. Jak już wcześniej zauważono, istotny wpływ na oszacowanie wartości charakterystycznej ma wielkość obszaru, z którego pobierane są próby gruntu. Obszar ten powinien obejmować strefy uczestniczące w mechanizmie zniszczenia (powierzchnie poślizgu) prowadzącym do awarii. Taka sytuacja jest odzwierciedleniem przestrzennej zmienności właściwości podłoża. Koncepcję uwzględniającą przestrzenną zmienność parametru w pewnym obszarze V , z zastosowaniem mode-

Tabela 6.1. Typowe zakresy współczynnika zmienności dla wybranych parametrów gruntu

Parametr X	Typowy zakres v_X	Rekomendowana wartość $V(X)$ w przypadku małej liczby wyników badań
$\text{tg } \phi'$	0,05 ÷ 0,15	0,1
c'	0,20 ÷ 0,40	0,4
c_u	0,20 ÷ 0,40	0,3
γ (ciężar objętościowy)	0,01 ÷ 0,10	0

lowania polem losowym, przy wyznaczaniu wartości charakterystycznej zaproponował Schneider (2011). Przedstawiając tę propozycję zauważmy najpierw, że jeśli rozkład prawdopodobieństwa danej właściwości jest różny od rozkładu normalnego, wówczas wzór (6.4) powinien być napisany w postaci

$$X_k = \mu_X(1 - k\nu_X), \quad (6.10)$$

gdzie k jest czynnikiem definiującym pięcioprocentowy kwantyl z rozkładu tej właściwości. Schneider (2011) zaproponował, aby we wzorze (6.10) współczynnik zmienności ν_X rozpatrywanego rozkładu zastąpić przez „globalny” współczynnik zmienności ν_{Xt} zdefiniowany wzorem

$$\nu_{Xt} = \sqrt{\gamma(V)(\nu_{Xin})^2 + (\nu_{Xm})^2 + (\nu_{Xtr})^2 + (\nu_{Xs})^2}, \quad (6.11)$$

przy czym ν_{Xin} jest współczynnikiem zmienności związanym z niepewnością naturalną (por. rysunek 1.1 w rozdziale 1), ν_{Xm} – współczynnikiem zmienności związanym z błędami pomiarów (rys. 1.1), ν_{Xtr} – współczynnikiem zmienności związanym z niepewnością transformacji danych (rys. 1.1), ν_{Xs} – współczynnikiem zmienności związanym z ograniczoną liczbą danych (niepewność statystyczna, rys. 1.1), zaś $\gamma(V)$ – funkcją redukcji wariancji (wzór (2.106) i kolejne). Warto zauważyć, że tak zdefiniowany „globalny” współczynnik zmienności uwzględnia wszystkie podstawowe rodzaje niepewności związane z właściwościami gruntu wymienione w rozdziale 1, a ponadto bierze pod uwagę uśrednienie właściwości ze względu na obszar mechanizmu awarii poprzez zastosowanie funkcji redukcji wariancji, związane z modelowaniem właściwości za pomocą pól losowych. Podstawienie współczynnika ν_{Xt} w miejsce ν_X we wzorze (6.10), a także zastąpienie wartości oczekiwanej μ_X przez średnią z próby m_X , prowadzi do następującej formuły na określenie wartości charakterystycznej:

$$X_k = m_X \left(1 - k \sqrt{\gamma(V)(\nu_{Xin})^2 + (\nu_{Xm})^2 + (\nu_{Xtr})^2 + (\nu_{Xs})^2} \right). \quad (6.12)$$

Ponadto Schneider proponuje zastosowanie uproszczonej formuły do oceny funkcji redukcji wariancji (por. wzór (2.115), proponowanej też w pracach Vanmarcke’a (1977a, 1977b) i stosowanej później w pracy Phoona i Kulhawy’ego (1999), który przy stosowanych wyżej oznaczeniach ma postać

$$\gamma(V) = \begin{cases} 1 & \text{dla } |V| \leq \theta_x, \\ \frac{\theta_x}{|V|} & \text{dla } |V| > \theta_x, \end{cases} \quad (6.13)$$

przy czym θ_x jest skalą fluktuacji pola losowego X , opisującego rozpatrywany parametr podłoża. Aby otrzymać przybliżoną formułę do celów projektowania proponuje się kolejne uproszczenia. Jeśli założyć, że $\nu_{Xtr} = 0$, co ma miejsce np. w przypadku bezpośredniego pomiaru danej cechy w laboratorium, a także $\nu_{Xs} = \frac{\nu_{Xin}}{n}$, gdzie n jest liczebnością próby, to w przypadku rozkładu normalnego danej cechy ($k = 1,645$), wówczas wzór (6.12) redukuje się do postaci

$$X_k = m_X \left(1 - 1,645 \sqrt{\left(\frac{\theta_x}{|V|} + \frac{1}{n} \right) [\nu_{Xin}]^2 + [\nu_{Xm}]^2} \right). \quad (6.14)$$

Jeśli ponadto błąd pomiarowy oraz błąd statystyczny są do pominięcia, to formuła staje się jeszcze prostsza:

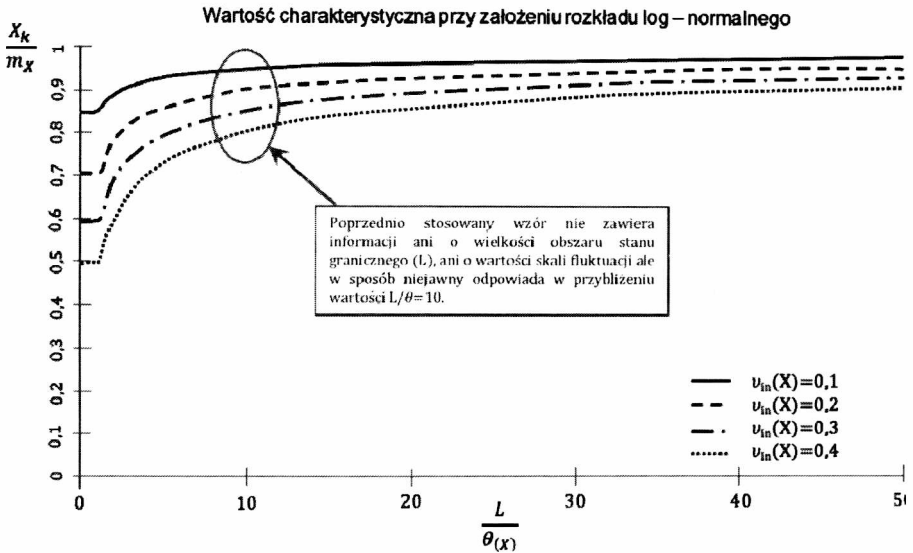
$$X_k = m_X \left(1 - 1,645 \nu_{Xin} \sqrt{\frac{\theta_x}{|V|}} \right). \quad (6.15)$$

Zdaniem Schneidera akceptowanie rozkładu normalnego dla właściwości gruntu jest możliwe tylko wówczas, gdy $\nu_{Xin} < 0,3$. W przypadku większych współczynników zmienności lepiej jest przyjąć rozkład log-normalny, a wówczas wzór (6.15) przyjmie następującą postać:

$$X_k = m_X \frac{0,193 \sqrt{\ln \left(1 + \frac{\theta}{|V|} (\nu_{Xin})^2 \right)}}{\sqrt{1 + \frac{\theta}{|V|} (\nu_{Xin})^2}}. \quad (6.16)$$

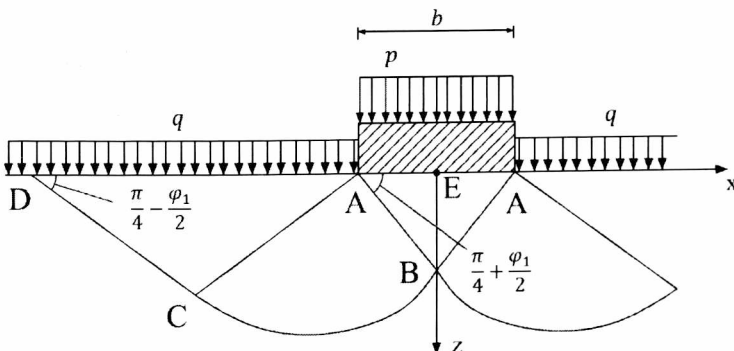
W zakresie współczynników zmienności $\nu_{Xin} \leq 0,15$ wzory (6.15) i (6.16) dają zbliżone rezultaty. Wzory (6.15) i (6.16) z pewnością wychodzą naprzeciw postulatowi uwzględnienia zmienności rozpatrywanej właściwości w obszarze podlegającym mechanizmowi awarii. Trzeba jednak pamiętać, że aby z nich skorzystać, konieczna jest znajomość objętości (powierzchni, długości) obszaru związanego z postacią awarii, a także skali fluktuacji θ_x . Wpływ obu tych czyn-

ników na wartość charakterystyczną właściwości w przypadku rozkładu log-normalnego pokazano na rysunku 6.1.



Rys. 6.1. Nomogram do wyznaczania wartości charakterystycznych wg wzoru (6.16) (Schneider, 2011).
W tym przypadku $L = |V|$ oznacza długość (jednowymiarową miarę objętości)

Przykład 6.1. Aby zorientować się, jakie wartości charakterystyczne otrzymuje się według podanej wyżej propozycji Schneidera, rozpatrzmy następujący przykład. Na potrzebę obliczenia nośności fundamentu posadzonego na glinie poszukuje się wartości charakterystycznych kąta tarcia wewnętrznego i spójności (w warunkach z odpływem). Jeśli oceny nośności dokonywać na podstawie mechanizmu Prandtla (por. rozdział 4), to lokalne uśrednienia należy przeprowadzić z uwzględnieniem linii poślizgu, co pokazano na rysunku 6.2.



Rys. 6.2. Linie poślizgu w mechanizmie Prandtla; b oznacza szerokość fundamentu, φ_1 – kąt tarcia wewnętrznego pod podstawą fundamentu

Założmy, że pole losowe spójności i pole losowe kąta tarcia wewnętrznego są stacjonarne i normalne o wartościach oczekiwanych i odchyleniach standardowych równych odpowiednio: $\mu_{\varphi_1} = 18^\circ$, $\mu_c = 31$ kPa, $\sigma_{\varphi_1} = 2,7^\circ$, $\sigma_c = 4,65$ kPa (współczynniki zmienności równe 0,15). Założmy dalej, że skala fluktuacji w kierunku pionowym wynosi w obu przypadkach $\theta_{(x)v} = 1,0$ m (por. podrozdział 3.2). Jeśli do oszacowania wartości charakterystycznej przyjmie się wzór (6.15) i jeśli zastosuje się jedynie skalę fluktuacji w kierunku pionowym, to uśrednienia należy dokonać także tylko w pionowym kierunku. Oznacza to, że miara obszaru uśrednienia $|V|$ będzie równa maksymalnej rzędnej spirali logarytmicznej na odcinku BC. Rzędna ta w przybliżeniu jest równa $1,7b$, gdzie b jest szerokością fundamentu. Wobec tego mnożnik redukcyjny we wzorze (6.15) jest równy

$$\sqrt{\frac{\theta_{(x)v}}{|V|}} = \frac{1}{\sqrt{1,7b}}. \quad (6.17)$$

Tym samym wartości charakterystyczne będą zależne od szerokości fundamentu b . Wartości te podano w tabeli 6.2.

Tabela 6.2. Wartości charakterystyczne spójności i kąta tarcia wewnętrznego otrzymane według oszacowania (6.15)

Szerokość fundamentu b [m]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Wartość charakterystyczna spójności c_k [kPa]	25,64	26,04	26,36	26,63	26,85	27,04	27,21
Wartość charakterystyczna kąt tarcia wewnętrznego φ_k [°]	14,89	15,12	15,31	15,46	15,59	15,70	15,80

Zmiany wartości charakterystycznych w zależności od szerokości fundamentu są konsekwencją tego, że wraz ze wzrostem szerokości rośnie miara obszaru uśrednienia, co powoduje coraz mniejszą wartość funkcji redukcji wariancji. Ten fakt jednak dobrze koresponduje ze sformułowaną w Eurokodzie 7 ideą, że przy oszacowaniu wartości charakterystycznej powinien być brany pod uwagę obszar, w którym powstaje stan graniczny. W tym przypadku obszar ten zwiększa się wraz ze wzrostem rozmiaru fundamentu. Wraz ze wzrostem szerokości fundamentu otrzymane wartości charakterystyczne parametrów wytrzymałościowych zbliżają się do wartości średnich w polu.

Powyższe oszacowanie wartości charakterystycznych może jednak budzić wątpliwości z dwóch powodów. Po pierwsze ze względu na uproszczoną funkcję redukcji wariancji (wzór (6.13)), a po drugie ze względu na jednowymiarowy charakter uśrednienia, który nie pozwala na uwzględnienie anizotropii pola losowego. Bowiem, jak już wcześniej nadmieniano, pozioma skala fluktuacji $\theta_{(X)h}$ może być istotnie większa od skali fluktuacji w kierunku pionowym $\theta_{(X)v}$. Dlatego warto zanalizować powyższy przykład przy bardziej adekwatnych założeniach, mianowicie takich, jakie były przyjęte w podrozdziale 4.1.

Przykład 6.2. Załóżmy teraz, że rozpatrywane pola losowe są anizotropowe, a struktura korelacyjna określona jest przez funkcję gaussowską, czyli funkcje postaci (4.3). Tak jak to miało miejsce w punkcie 4.1.2, uśrednienia dokonywane będą wzdłuż linii poślizgu, a więc kolejno po liniach AB, BC i CD (rys. 6.2). W tym przypadku funkcja redukcji wariancji nie da się przedstawić w zamkniętej postaci, a więc mnożnik redukujący współczynnik zmienności będzie inny niż we wzorze (6.15). Redukcje wariancji przyjęte będą zgodnie z rezultatami podanymi w podrozdziałach 4.1 oraz 4.2. Podobnie jak w przykładzie 6.1 załóżmy, że pionowa skala fluktuacji $\theta_{(X)v}$ w przypadku obu parametrów wytrzymałościowych wynosi 1 m, tj. $\theta_{(X)v} = 1$ m, natomiast skalę poziomą przyjmijmy 10-krotnie większą, tj. $\theta_{(X)h} = 10$ m. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe pozostają takie same jak w przykładzie 6.1. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego i spójności obliczone na podstawie współczynników redukcyjnych (pierwiastek z funkcji wariancji, por. tabela 4.7) podanych w podrozdziale 4.2 pokazano w tabeli 6.3. Zredukowana wartość odchylenia standardowego po podzieleniu przez początkową wartość odchylenia

Tabela 6.3. Zredukowane odchylenia standardowe kąta tarcia wewnętrznego i spójności

Szerokość fundamentu b [m]	Zredukowane odchylenie standardowe kąta φ [°]			Zredukowane odchylenie standardowe spójności c [kPa]		
	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD	Odcinek AB	Odcinek BC	Odcinek CD
1,2	2,341	2,564	2,226	4,031	4,415	3,834
1,4	2,253	2,522	2,126	3,880	4,343	3,662
1,6	2,169	2,478	2,034	3,735	4,267	3,503
1,8	2,090	2,432	1,950	3,599	4,188	3,359
2,0	2,016	2,386	1,875	3,472	4,109	3,229
2,2	1,948	2,340	1,806	3,355	4,030	3,111
2,4	1,886	2,294	1,744	3,248	3,951	3,004

standardowego (bez redukcji) będzie współczynnikiem redukcyjnym, który zastąpi mnożnik $\sqrt{\frac{\theta_x}{|V|}}$ we wzorze (6.15). Ponieważ na każdym z odcinków AB, BC, CD zredukowane odchylenie jest inne, przyjęto do dalszych obliczeń odchylenia największe (największy współczynnik redukcyjny), czyli te dla odcinka BC (spirała logarytmiczna). Jest to podejście konserwatywne, gdyż w tym przypadku otrzymuje się najmniejsze wartości charakterystyczne (por. wzór (6.15)). Obliczone wartości charakterystyczne zamieszczono w tabeli 6.4.

Tabela 6.4. Wartości charakterystyczne spójności i kąta tarcia wewnętrznego otrzymane poprzez uśrednienie dwuwymiarowe (przykład 6.2)

Szerokość fundamentu b [m]	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4
Współczynnik redukcyjny	0,9496	0,9341	0,9178	0,9007	0,8837	0,8667	0,8496
Wartość charakterystyczna spójności c_k [kPa]	23,74	23,85	23,98	24,11	24,24	24,37	24,5
Wartość charakterystyczna kąta tarcia wewnętrznego φ_k [°]	13,78	13,85	13,92	14,0	14,08	14,15	14,23

Otrzymane wartości charakterystyczne są mniejsze niż w przypadku oszacowania według wzoru Schneidera (tabela 6.3). Różnice nie przekraczają 11%. W przypadku uśrednienia dwuwymiarowego „szybkość zmian” wartości charakterystycznej od szerokości fundamentu jest mniejsza w stosunku do przypadku oszacowania uzyskanego w przykładzie 6.1.

Oszacowanie konserwatywne, polegające na przyjęciu do obliczeń największego z trzech współczynników redukcyjnych, można zastąpić oszacowaniem, w którym współczynnik redukcyjny będzie średnią ważoną współczynników na poszczególnych odcinkach z wagami w postaci długości poszczególnych odcinków. W tym przypadku wartości charakterystyczne mieszczą się w przedziałach:

- dla spójności: 24,19 ÷ 25,28 kPa (w zależności od szerokości fundamentu),
- dla kąta tarcia wewnętrznego: 14,05 ÷ 14,68 [°].

Te wartości są bliższe wartościom oszacowanym uzyskanym w przykładzie 6.1.

Podsumowując niniejszy podrozdział warto zwrócić uwagę, że stosując modelowanie parametrów podłoża za pomocą pól losowych, w szczególności uwzględniając ich przestrzenną zmienność poprzez wprowadzenie skali fluktu-

acji oraz funkcji wariancji, można uzyskać klarowny i racjonalny sposób kalibrowania wartości charakterystycznych właściwości gruntu zgodny z ideą Eurokodu 7, bez uciekania się od przyjmowania wartości „ad hoc”, jako tzw. ostrożnego oszacowania średniej. Również zastosowanie metod omówionych w rozdziale 4 prowadzi do wyznaczenia wartości charakterystycznych, które uwzględniają zmienność przestrzenną oraz uśrednienia parametrów wzdłuż linii (powierzchni) poślizgu, a także pozwalają na uwzględnienie anizotropii (poprzez zróżnicowanie skali fluktuacji pionowej oraz poziomej), której istotną rolę w ocenie bezpieczeństwa fundamentów wykazano w rozdziale 5 oraz w innych publikacjach, np. w pracy Vessii i innych (2009). Pośród polskich autorów pogląd o konieczności uwzględnienia skali fluktuacji przy określaniu wartości charakterystycznych parametrów podłoża propagowany jest także przez Brząkałę (2013, 2018).

Odnotujmy na koniec, że polska norma PN-81/B-03020, opublikowana w 1981 roku podawała znacznie bardziej precyzyjne, oparte na podejściu statystycznym, zasady wyznaczania wartości charakterystycznych i obliczeniowych aniżeli obecna wersja Eurokodu 7.

6.2. Wartości obliczeniowe nośności

W tym podrozdziale w centrum uwagi będą zagadnienia związane z wyznaczeniem wartości obliczeniowej nośności posadowienia bezpośredniego. Są różne podejścia do znajdowania wartości obliczeniowych. Na przykład w Eurokodzie 7 sposób wyznaczenia wartości obliczeniowej zależy od stosowanego podejścia obliczeniowego. Najczęściej wiąże się to z przyjęciem określonego zestawu częściowych współczynników bezpieczeństwa, przez które mnoży się (lub dzieli) wartości charakterystyczne parametrów podłoża oraz obciążenia. Ale może być też tak (jak ma to miejsce w polskim aneksie do Eurokodu 7), że nośność jest obliczana poprzez podstawienie wartości charakterystycznych, a następnie wartość obliczeniową uzyskuje się poprzez pomnożenie wartości charakterystycznej nośności przez jeden współczynnik cząstkowy. W Eurokodzie 7 współczynniki cząstkowe są zadane w sposób arbitralny. Oczywiście zależą one od podejścia obliczeniowego, ale ani nie są oznaczane na drodze statystycznej, ani też nie są powiązane z prawdopodobieństwem awarii czy też wskaźnikiem niezawodności β , który jest powszechnie akceptowalną miarą niezawodności (por. rozdział 1, a także wzór (4.70)) sugerowaną też do stosowania przez Eurokod 0

(PN-EN 1990:2004. Eurokod). W kontraście do tego właśnie podejście probabilistyczne zostanie pokazane w tym podrozdziale.

Ponieważ większość pokazanych poniżej oznaczeń związana będzie z rozkładem log-normalnym, na początku odnotujemy prostą zależność pomiędzy dystrybuantą rozkładu log-normalnego a dystrybuantą rozkładu normalnego. Jeśli przez F_Y oznaczymy dystrybuantę rozkładu log-normalnego zmiennej Y , a przez F_X dystrybuantę podstawowego względem Y rozkładu normalnego X , to w myśl zależności (2.61) można napisać

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P\{Y < y\} = P\{\exp(X) < y\} = \\ &= P\{X < \ln y\} = F_X(\ln y) = \Phi_0\left(\frac{\ln y - \mu_{\ln Y}}{\sigma_{\ln Y}}\right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Powyższy ciąg równości pozwala na łatwe wyznaczanie prawdopodobieństw, gdy zmienna losowa ma rozkład log-normalny za pomocą dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego, która jest stabilizowana, i której wartości znajdują się w każdym oprogramowaniu służącym do obliczeń statystycznych.

Niech q_d oznacza wartość obliczeniową nośności. Ponadto niech q_f oznacza zmienną losową odpowiadającą nośności fundamentu. Zauważmy, że jeżeli znamy rozkład prawdopodobieństwa zmiennej q_f , to wartość q_d można wyznaczyć tak, aby prawdopodobieństwo zdarzenia, że nośność osiągnie wartość mniejszą niż q_d , było zadaną z góry określoną wartością powiązaną w sposób jednoznaczny ze wskaźnikiem niezawodności, mianowicie

$$p_f = P\{q_f \leq q_d\} = \Phi_0(-\beta). \quad (6.19)$$

Taki sposób wyznaczenia wartości q_d można nazwać kalibracją wartości obliczeniowej na określony z góry poziom niezawodności (bezpieczeństwa). Oczywiście podstawowym problemem jest tu znajomość rozkładu prawdopodobieństwa zmiennej q_f , bez której nie da się obliczyć prawdopodobieństwa we wzorze (6.19). Jednak rozkład ten może być w sposób przybliżony estymowany przy zastosowaniu metody RFEM, jak to pokazano w podrozdziale 5.3. Rozkładem nośności q_f , który najczęściej pojawiał się w przykładach demonstrowanych w tym podrozdziale, był rozkład log-normalny. Jeśli q_f ma rozkład log-normalny, to prawdopodobieństwo p_f może być obliczone poprzez zastosowanie ciągu równości (6.18), mianowicie

$$\begin{aligned}
 p_f &= P\{\ln q_f \leq \ln q_d\} = \\
 &= P\left\{\frac{\ln q_f - m_{\ln q_f}}{s_{\ln q_f}} \leq \frac{\ln q_d - m_{\ln q_f}}{s_{\ln q_f}}\right\} = \Phi_0\left(\frac{\ln q_d - m_{\ln q_f}}{s_{\ln q_f}}\right). \quad (6.20)
 \end{aligned}$$

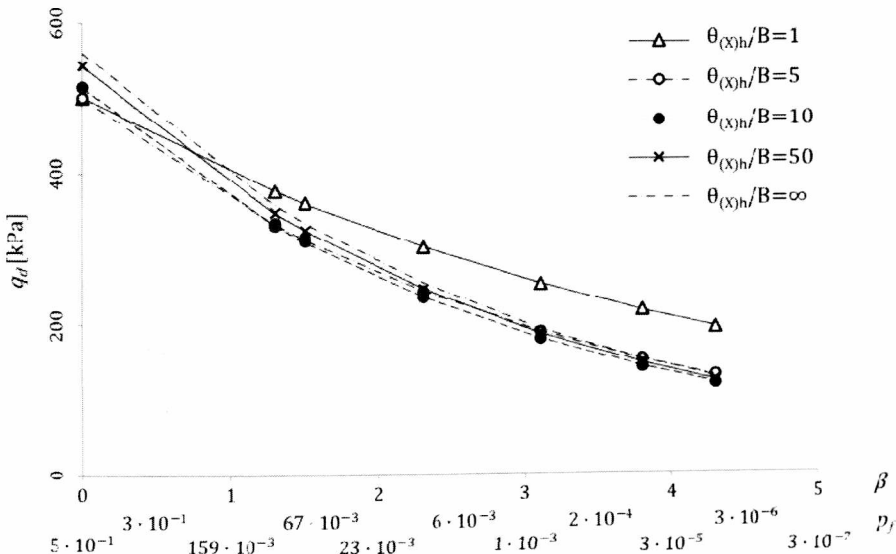
W powyższych wyrażeniach $m_{\ln q_f}$ oraz $s_{\ln q_f}$ oznaczają odpowiednio wartość średnią i odchylenie standardowe rozkładu normalnego podstawowego względem log-normalnego rozkładu q_f . Wartości te uzyskuje się poprzez wzory transformacyjne (2.65) i (2.66) z estymowanej poprzez symulacje Monte Carlo wartości średniej oraz odchylenia standardowego nośności. Porównując (6.19) i (6.20) otrzymuje się

$$\frac{\ln q_d - m_{\ln q_f}}{s_{\ln q_f}} = -\beta, \quad (6.21)$$

a stąd

$$q_d = \exp\{m_{\ln q_f} - \beta s_{\ln q_f}\}. \quad (6.22)$$

Przyjmując we wzorze (6.22) postulowaną wartość wskaźnika niezawodności β otrzymuje się wartość obliczeniową nośności odpowiadającą postulowanemu poziomowi bezpieczeństwa. Na rysunku 6.3 pokazano zależności wartości



Rys. 6.3. Wartość obliczeniowa nośności jako funkcja wskaźnika niezawodności β (lub prawdopodobieństwa p_f wyrażonego w procentach) przy różnych wartościach bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(X)h}/B$

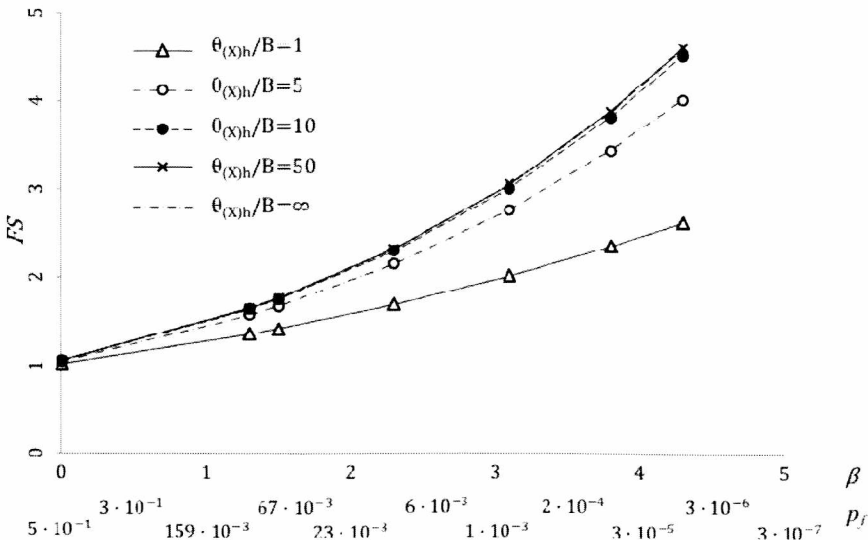
obliczeniowej nośności dla obliczeń nośności metodą RFEM przedstawionych w punkcie 5.2.4 (dla fundamentu zagłębionego z uwzględnieniem ciężaru własnego gruntu – podłoże: *Taranto clay*) od postulowanej wartości wskaźnika niezawodności β .

Warto odnotować, że dla wartości wskaźnika β przekraczającej 3 (a takie zwykle postuluje się przy obliczaniu nośności), jeśli przyjąć poziomą skalę fluktuacji przekraczającą pięciokrotnie szerokość fundamentu, to dalszy wzrost poziomej skali fluktuacji praktycznie nie ma już wpływu na wartość obliczeniową nośności. Jest też oczywiste, że postulowanie coraz większej wartości wskaźnika niezawodności skutkuje bardzo szybkim spadkiem wartości obliczeniowej q_d .

Jeśli stosuje się bardziej „klasyczne” miary w postaci współczynnika bezpieczeństwa, jak ma to miejsce np. w metodzie naprężeń dopuszczalnych, to w tym przypadku będzie miał on postać

$$FS = \frac{m_{\ln q_f}}{q_d}, \quad (6.23)$$

gdzie wartość q_d dana jest wzorem (6.22). Dla tych samych danych jak wyżej (obliczenia dla *Taranto clay* – punkt 5.2.4) sporządzono wykres zależności współczynnika bezpieczeństwa od postulowanej wartości wskaźnika niezawodności β , który pokazuje rysunek 6.4. Generalna tendencja jest oczywista. Obni-

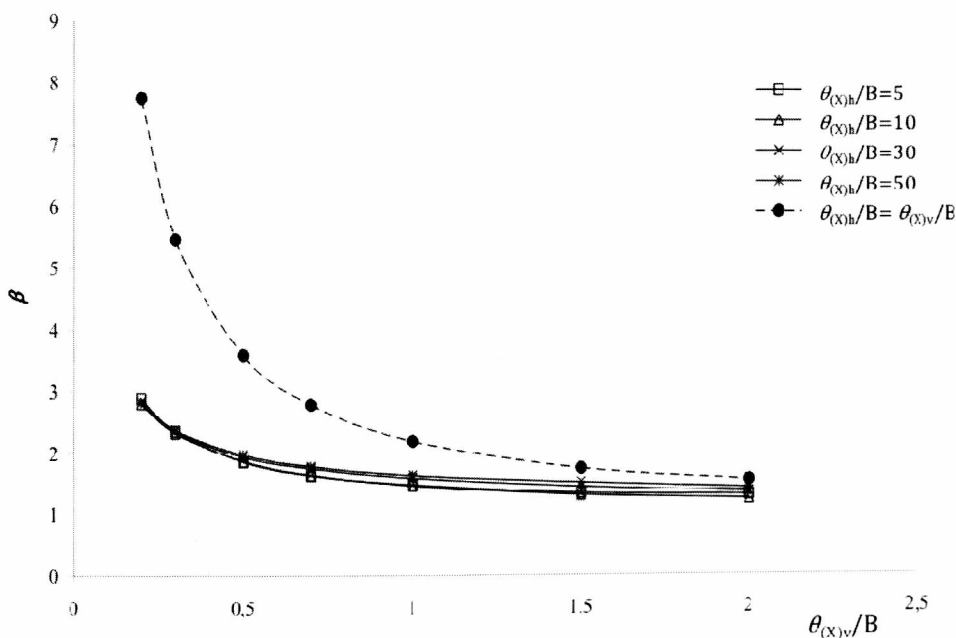


Rys. 6.4. Wartość obliczeniowa nośności jako funkcja wskaźnika niezawodności β (lub prawdopodobieństwa p_f) przy różnych wartościach bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(x)h}/B$

żenie postulowanego prawdopodobieństwa awarii wpływa na wzrost współczynnika bezpieczeństwa FS .

Jednak w przypadku współczynnika bezpieczeństwa efekt wzrostu poziomej skali fluktuacji zanika wolniej, niż to miało miejsce dla obliczeniowej wartości nośności i jest jeszcze widoczny dla $\theta_{(X)h}/B = 5$.

W związku z zaobserwowaną na rysunkach 6.3 oraz 6.4 stabilizacją wartości obliczeniowej oraz współczynnika bezpieczeństwa dla dużych wartości poziomej skali fluktuacji nasuwa się pytanie o to, jak intensywny jest wpływ pionowej i poziomej skali fluktuacji na wskaźnik niezawodności β (a tym samym na prawdopodobieństwo awarii p_f). Poniżej (rys. 6.5) przedstawiono wykres zależności wskaźnika niezawodności β jako funkcji pionowej $\theta_{(X)v}/B$ przy różnych wartościach skali poziomej $\theta_{(X)h}/B$.



Rys. 6.5. Wskaźnik niezawodności β jako funkcja pionowej bezwymiarowej skali fluktuacji $\theta_{(X)v}/B$ przy różnych wartościach bezwymiarowej poziomej skali fluktuacji $\theta_{(X)h}/B$. Wyniki obliczeń dla fundamentu powierzchniowego

Jak widać, podobnie jak to ma miejsce na rysunku 6.3, począwszy od wartości poziomej skali $\theta_{(X)h}/B = 5$, różnice w wartości wskaźnika niezawodności są już mało istotne. Gdy chodzi o skalę pionową, to stabilizacja wskaźników β następuje powyżej wartości $\theta_{(X)h}/B = 1$. Jednak najważniejszą informacją pochodzącą

z tego rysunku jest to, że modelowanie izotropowe ($\theta_{(x)v}/B = \theta_{(x)h}/B$) zawyża wskaźniki niezawodności. Potwierdza to konkluzje sformułowane w rozdziale 5, że przyjęcie założenia o izotropii pól losowych charakteryzujących parametry wytrzymałościowe podłoża prowadzi do oszacowań losowej nośności „po stronie niebezpiecznej” z punktu widzenia bezpieczeństwa posadowienia.

Prezentowane dotąd (w ramach podrozdziału 6.2) metody kalibracji dotyczyły przypadku, gdy nośność q_f była zmienną losową o rozkładzie log-normalnym. Jak jednak pokazano w podrozdziale 5.3, rozkład log-normalny nie zawsze stanowi najlepszą estymację rozkładu prawdopodobieństwa nośności, zwłaszcza gdy mamy do czynienia z podłożem niespoistym. Wówczas kalibracji można dokonać posługując się bezpośrednio wzorem (6.19), pod warunkiem, że znany jest rozkład prawdopodobieństwa q_f . Jeśli dystrybuanta $F_{q_f}(x)$ jest funkcją ściśle rosnącą, to wówczas wzór (6.19) może być przekształcony do postaci

$$q_d = F_{q_f}^{-1} \left[\Phi_0(-\beta) \right], \quad (6.24)$$

gdzie $F_{q_f}^{-1}$ oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty zmiennej q_f . Jeśli nośność ławy w płaskim stanie odkształcenia wyrażona jest w kN/m, to oznaczając tę nośność przez Q_f , zapisujemy wzór (6.24) jako

$$Q_d = F_{Q_f}^{-1} \left[\Phi_0(-\beta) \right]. \quad (6.25)$$

Oznaczmy teraz przez Q_{det} deterministyczną wartość nośności uzyskaną dla określonej szerokości oraz określonego zagłębienia fundamentu przy wartościach poszczególnych parametrów podłoża równych ich wartościom oczekiwanym (średnim). Częściowy współczynnik bezpieczeństwa dla nośności można wówczas zapisać jako

$$\gamma_R = \frac{Q_{\text{det}}}{Q_d}. \quad (6.26)$$

W pracy Puły i Zaskórskiego (2015) przeprowadzono kalibrację wartości obliczeniowej nośności dla podłoża niespoistego. Na podstawie estymacji opisanej w podrozdziale 5.3 niniejszej monografii wskazano na rozkład Weibulla jako dobrze dopasowany do rozkładu empirycznego uzyskanego poprzez symulację Monte Carlo. Następnie, dla zadanego poziomu bezpieczeństwa wyrażonego przez wskaźnik niezawodności β , skalibrowano częściowe współczynniki bezpieczeństwa γ_R dla nośności według wzoru (6.26) dla pięciu różnych szerokości

fundamentu oraz czterech różnych poziomów jego zagłębienia. Wyniki zestawiono w tabeli 6.5.

Tabela 6.5. Współczynniki bezpieczeństwa jako funkcja wskaźnika niezawodności β przy różnych szerokościach fundamentu B w zależności od szerokości fundamentu

h_z [m]	Q_{det} [kN/m] z MES	B [-]	2	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0	3,2	3,4	3,6	3,8
		B [m]	γ_R [-]									
1,0	368,50	0,8	2,15	2,27	2,38	2,47	2,55	2,62	2,67	2,70	2,73	2,75
	472,00	1,0	2,14	2,25	2,36	2,45	2,53	2,59	2,64	2,68	2,71	2,73
	595,03	1,2	2,18	2,40	2,40	2,49	2,57	2,53	2,68	2,72	2,75	2,77
	704,84	1,4	2,15	2,36	2,36	2,44	2,52	2,58	2,63	2,67	2,69	2,71
	848,11	1,6	2,19	2,37	2,37	2,45	2,51	2,56	2,60	2,63	2,65	2,66
1,5	501,14	0,8	2,13	2,34	2,34	2,43	2,50	2,56	2,60	2,64	2,66	2,68
	648,22	1,0	2,15	2,36	2,36	2,44	2,52	2,57	2,62	2,66	2,68	2,70
	804,44	1,2	2,16	2,37	2,37	2,46	2,53	2,59	2,64	2,68	2,71	2,72
	950,47	1,4	2,14	2,34	2,34	2,42	2,49	2,55	2,60	2,63	2,66	2,68
	1126,78	1,6	2,19	2,38	2,38	2,47	2,54	2,60	2,65	2,69	2,71	2,73
1,75	573,54	0,8	2,15	2,37	2,37	2,45	2,53	2,59	2,63	2,67	2,69	2,71
	737,80	1,0	2,16	2,37	2,37	2,46	2,54	2,60	2,64	2,68	2,71	2,71
	899,86	1,2	2,14	2,35	2,35	2,43	2,50	2,56	2,61	2,65	2,67	2,69
	1081,64	1,4	2,17	2,36	2,36	2,43	2,50	2,56	2,60	2,63	2,66	2,67
	1274,22	1,6	2,19	2,37	2,37	2,45	2,52	2,57	2,61	2,65	2,67	2,68
2,0	673,42	0,8	2,16	2,37	2,37	2,46	2,53	2,59	2,64	2,68	2,70	2,72
	862,27	1,0	2,16	2,36	2,36	2,44	2,52	2,57	2,62	2,65	2,68	2,69
	1047,82	1,2	2,14	2,34	2,34	2,42	2,49	2,55	2,60	2,63	2,66	2,68
	1253,70	1,4	2,16	2,35	2,35	2,43	2,50	2,56	2,61	2,64	2,67	2,68
	1470,66	1,6	2,18	2,38	2,38	2,46	2,53	2,59	2,63	2,67	2,70	2,71

Warto zwrócić uwagę na fakt, że dla ustalonej wartości wskaźnika niezawodności β współczynniki bezpieczeństwa γ_R odpowiadające różnym szerokościom fundamentu oraz różnym poziomom jego zagłębienia różnią się pomiędzy sobą nieznacznie i mogłyby być pominięte w projektowaniu. Można by zatem dla ustalonej wartości β wybrać największą wartość γ_R spośród odpowiadających wartości dla różnych szerokości i głębokości. W ten sposób jednej wartości wskaźnika β odpowiadałaby jedna wartość częściowego współczynnika bezpieczeństwa dla nośności.

Przykłady kalibracji wartości obliczeniowych nośności według podanych powyżej procedur podano także w pracy Pieczyńskiej-Kozłowskiej i Puły (2017).

7. Podsumowanie i perspektywy rozwoju

Niniejsza monografia dotyczy zagadnień losowej nośności posadowienia bezpośredniego. Jest rzeczą oczywistą, że oszacowania probabilistycznych charakterystyk tejsze nośności wymagają odpowiedniego narzędzia matematycznego. Takim narzędziem, w opinii wielu badaczy (podzielanej tejsze przez autora niniejszej monografii), jest teoria pól losowych. Można wymienić trzy główne przyczyny przemawiające za powyższym stwierdzeniem.

Po pierwsze pola losowe bardzo dobrze nadają się do modelowania przestrzennej zmienności poszczególnych właściwości gruntu. Jak wspomniano w rozdziale pierwszym, to właśnie zmienność przestrzenną należy uznać za najważniejszą przyczynę niepewności związanej z rozpoznaniem podłoża gruntowego. Adekwatność teorii pól losowych do modelowania przestrzennej zmienności poszczególnych parametrów gruntu wynika przede wszystkim z możliwości korelowania ze sobą zmienności danego parametru w różnych punktach obszaru istotnego z punktu widzenia posadowienia obiektu. Takiej możliwości nie daje prostsze podejście, którym jest modelowanie poszczególnych parametrów przez pojedyncze zmienne losowe.

Po drugie, jak wskazano we wcześniejszych pracach, randomizacja parametrów gruntu w taki sposób, aby jednemu parametrowi odpowiadała dokładnie jedna zmienna losowa, bez uprzedniej procedury usrednienia przestrzennego prowadzi do zaniżenia wartości wskaźnika niezawodności (co odpowiada przeszacowaniu wartości prawdopodobieństwa awarii), gdy badane jest ryzyko wypięrania gruntu spod podstawy fundamentu. Usrednienie przestrzenne prowadzi bowiem (poprzez zastosowanie funkcji wariancji) do redukcji wariancji punktowej, a co za tym idzie, do bardziej realistycznej oceny miar niezawodności. Jest to bardzo istotne zwłaszcza wtedy (por. rozdział 4), gdy stosunkowo duży obszar podłoża uczestniczy w powstaniu stanu granicznego nośności.

Wreszcie po trzecie, modelowanie właściwości gruntu za pomocą pól losowych w naturalny sposób wpasowuje się w modelownie numeryczne zagadnień brzegowych geotechniki za pomocą metody elementów skończonych, prowadząc w konsekwencji do losowej metody elementów skończonych lub równolegle rozwijającej stochastycznej metody elementów skończonych.

W rozdziale 2 zamieszczono krótkie omówienie pojęć z zakresu teorii pól losowych. Wyboru zagadnień dokonano pod kątem zastosowań omawianych w kolejnych rozdziałach. Szczególną uwagę zwrócono na uśrednienia przestrzenne oraz zagadnienia związane z pojęciem skali fluktuacji. W podrozdziale 2.5 wprowadzono pojęcie skali fluktuacji w dowolnym kierunku (α, β) . Jest to pojęcie nowe, bardzo przydatne w charakteryzacji anizotropowych pól losowych – dotąd było stosowane przez innych autorów jedynie w szczególnym przypadku, mianowicie jako pozioma skala fluktuacji. Ponadto w podrozdziale 2.7 opracowano zagadnienie przeliczania skal fluktuacji przy transformacjach pól losowych. W dotychczasowych publikacjach zagadnienie to nie było omawiane w sposób precyzyjny. Ograniczano się zwykle do stwierdzeń, że wielkość skali fluktuacji w polu podstawowym i polu uzyskanym w wyniku transformacji powinny być do siebie zbliżone (Fenton i Griffiths, 2004). Precyzyjne rozwiązanie tego zagadnienia, dla transformacji pola gaussowskiego na pole log-normalne (podane także dla kierunkowych skal fluktuacji), zamieszczono w podrozdziale 2.7. To rozwiązanie, które udało mi się wyprowadzić pod koniec ubiegłego roku, nie było dotąd nigdzie publikowane ani przedstawiane w referatach konferencyjnych.

Można z całą pewnością stwierdzić, że zastosowanie teorii pól losowych do zagadnień modelowania właściwości podłoża będzie nadal rozwijane. W ostatnich latach pojawiły się prace stosujące tzw. warunkowe pola losowe (*conditional random fields*). Koncepcja ta polega na generowaniu pól losowych w sposób warunkowy z uwzględnieniem kolejno uzyskiwanych rezultatów badania gruntu (por. np. Lloret-Cabot i in., 2014; Li i in., 2016; Lei-Lei Liu i in., 2017).

Nieco inne podejście stanowią modele krigingowe (Chilès i Delfiner, 2012), które też stanowią pewną część teorii funkcji losowych. Kriging, rodzaj estymacji liniowej, powstał z potrzeb oszacowań objętości rozmaitych depozytów geologicznych. Rozwój tej metody zapoczątkował Krige (1951, por także Krige, 1962) – stąd nazwa tej techniki oszacowania. Później rezultaty Krigeego zostały uogólnione przez Matherona (1963), który w konsekwencji stworzył nową dziedzinę zastosowań matematyki, zwaną geostatystyką. Modele krigingowe początkowo nie były zbyt chętnie stosowane do probabilistycznego modelowania w geotechnice. Wynikało to przede wszystkim z faktu niewielkiej liczby otwo-

rów badawczych w prowadzonych badaniach podłoża dla potrzeb konkretnych inwestycji. Obecny rozwój badań polowych, przede wszystkim dzięki zastosowaniu sondy CPT oraz rozpowszechnieniu badań dylatometrycznych, daje możliwość pozyskania coraz większej liczby danych, które mogą być wykorzystane przy tworzeniu modeli krigingowych, nadających się do analiz probabilistycznych w geotechnice, w tym także do badania losowych własności posadowień bezpośrednich. Wskazują na to ostatnio publikowane prace, np. Li i współautorów (Li i in., 2016) oraz Vessii, Castrignana, Di Curzia i autora niniejszej monografii (Vessia i in., 2018). W stosunku do „klasycznego” modelowania stacjonarnymi polami losowymi modele krigingowe pozwalają na uniknięcie tzw. „detryndyzacji” (odfiltrowania trendu), czyli usunięcia z opisu zmieniającej się w przestrzeni wartości średniej modelowanego parametru. Procedura „detryndyzacji” w analizie pozyskanych danych nie jest jednoznaczna i może implikować gorszą jakość opisu probabilistycznego.

Jednak prawdziwym wyzwaniem wydaje się być rezygnacja z założenia o stacjonarności pola losowego. Zróżnicowanie naturalnych depozytów geologicznych jest tak duże, że jedynie wyjątkowo jednorodne warstwy gruntowe (np. osady rzeczne lub jeziorne) spełniają warunki stałości średniej parametrów oraz translacyjnej niezmienniczości funkcji korelacji tychże parametrów. Stosowanie stacjonarnych pól losowych jest więc kompromisem, wynikającym po pierwsze ze zbyt małej liczby danych pochodzących z badań parametrów gruntu, po drugie z czasu trwania obliczeń numerycznych związanych z określonym typem modelowania. W przypadku pola niestacjonarnego funkcja korelacji dla zagadnienia trójwymiarowego jest funkcją sześciu zmiennych, a nie trzech, jak to ma miejsce przy założeniu stacjonarności. Jednak modelowanie niestacjonarnymi funkcjami losowymi jest rozwijane w ramach innych dziedzin inżynierii, np. w dynamice stochastycznej (por. np. Jarczewska i in., 2011). Stąd nadzieja na możliwość zastosowania takiego modelowania w geotechnice. Osobny problem stanowi numeryczne generowanie pól niestacjonarnych – znacznie bardziej skomplikowane niż w przypadku pól stacjonarnych. Istnieją już jednak gotowe procedury generowania takich pól (por. np. Sakamoto i Ghanem, 2002).

Oczywiście użyteczne z inżynierskiego (geotechnicznego) punktu widzenia modelowanie probabilistyczne musi zawierać poprawną identyfikację parametrów modelu opartą na terenowych badaniach podłoża (*in situ*). Zagadnienie to zasygnalizowano w rozdziale trzecim monografii. Zdaniem autora najważniejszym zagadnieniem wymagającym poprawienia jest opracowanie precyzyjnej metody wyznaczania poziomej skali fluktuacji. Do tej pory zagadnienie to było

traktowane w literaturze najczęściej dość marginalnie (często raczej bazowano na intuicji badaczy). Wraz z rozwojem modeli anizotropowych musi być ono opracowane dokładniej – z precyzyjnie określonymi procedurami oszacowania. W 2018 roku pojawiły się dwie nowe publikacje na ten temat – Te Xiao i in. (2018) oraz Ching i in. (2018).

Probabilistyczne oszacowanie nośności w ramach tej monografii bazowało na dwóch podstawowych podejściach: losowych mechanizmach kinematycznych oraz oszacowaniach w ramach losowej metody elementów skończonych. W ramach pierwszego podejścia (przedstawionego w rozdziale 4 monografii) opracowano procedury polegające na uśrednieniu pola losowego reprezentującego daną właściwość (parametr) gruntu wzdłuż linii poślizgu występujących w mechanizmie Prandtla. Wyprowadzono wzory określające wariancje zmiennych losowych powstałych w wyniku uśredniania pola oraz kowariancje pomiędzy nimi. Te rezultaty zastosowano do opracowania procedur numerycznych służących wyznaczaniu miar niezawodności w postaci wskaźnika niezawodności lub prawdopodobieństwa awarii dla potrzeb oszacowania bezpieczeństwa posadowienia lub oceny ryzyka awarii. Opracowane algorytmy pozwalają na zastosowanie anizotropowych pól losowych do modelowania przestrzennej zmienności właściwości podłoża, co koresponduje z obserwowaną w badaniach polowych szybszą zmiennością właściwości podłoża w kierunku pionowym w stosunku do poziomego. Oprócz tego algorytmy te umożliwiają analizy z uwzględnieniem losowego położenia linii poślizgu w mechanizmie kinematycznym. Są elementem, który może być używany w projektowaniu geotechnicznym wspomagającym teorią niezawodności (*reliability based design*) oraz przy analizie bezpieczeństwa (np. w działalności eksperckiej lub dla potrzeb ubezpieczeniowych). Podstawowym kierunkiem dalszego rozwoju losowych mechanizmów kinematycznych jest niewątpliwie opracowanie analogicznych metod dla zagadnień trójwymiarowych (stopy fundamentowe). Prace na ten temat zostały już rozpoczęte i pierwsze interesujące rezultaty uzyskane zostały w pracy doktorskiej Marcina Chwały (Chwała, 2018) opracowanej pod opieką naukową autora niniejszej monografii. Algorytmy zaproponowane w pracy Chwały (2018) oparte są na trójwymiarowych wieloblokowych mechanizmach wykorzystujących powierzchnie stożkowe. Mechanizmy te zaproponowane zostały do analizy deterministycznej w pracy Michałowskiego (2001).

Drugie podejście zaprezentowane w monografii to oszacowanie losowej nośności za pomocą losowej metody elementów skończonych (oznaczanej dalej skrótowo jako RFEM). Jak wcześniej wspomniano, metoda ta, zaproponowana

przez Fentona i Griffithsa (Griffiths i Fenton, 1993; Fenton i Griffiths, 2008), jest połączeniem modelowania właściwości gruntów za pomocą pól losowych, rozwiązania zagadnienia brzegowego za pomocą deterministycznej metody elementów skończonych oraz symulacji Monte Carlo prowadzącej do uzyskania charakterystyk statystycznych poszukiwanej odpowiedzi. W zakresie nośności posadowienia bezpośredniego wcześniejsze prace w ramach RFEM przedstawiły rozwiązanie dla fundamentów powierzchniowych posadowionych na gruntach idealnie spoistych oraz spoistych (tarciowo-kohezyjnych). Dotyczyły one jednak modelowania wyłącznie za pomocą pól izotropowych, zakładając identyczną zmienność właściwości podłoża w każdym kierunku rozpatrywanego obszaru. Jak jednak wiadomo, grunty naturalne wykazują na ogół inny charakter zmienności w kierunku pionowym, a inny w kierunku poziomym. Dlatego w rozdziale 5 zbadano wpływ modelowania anizotropowego parametrów podłoża na charakterystyki losowej nośności posadowienia bezpośredniego. Oczywiście modelowanie anizotropowe w sposób bardziej precyzyjny odwzorowuje właściwości podłoża gruntowego. Co więcej, zademonstrowano na licznych przykładach, że modelowanie izotropowe zawyża wartość średnią losowej nośności posadowienia bezpośredniego, zaniżając jednocześnie jej współczynnik zmienności, co w rezultacie prowadzi do zaniżenia wartości prawdopodobieństwa wyczerpania tejże nośności na skutek oddziaływań zewnętrznych. Zatem stosując modelowanie izotropowe czy to w analizie bezpieczeństwa, czy też w procesie projektowania wspomaganego metodami niezawodności, popełnia się błąd „po stronie niebezpiecznej”. Oprócz uogólnienia polegającego na zastosowaniu modelowania anizotropowego w rozdziale 5 przedstawiono też uogólnienie w stosunku do zaproponowanych przez Fentona i Griffithsa (2003) algorytmów dla przypadków fundamentów zagłębionych oraz algorytm uwzględniający w oszacowaniach losowej nośności ciężar własny gruntu, na którym posadowiony jest fundament. Ponadto przeprowadzono estymację rozkładów prawdopodobieństwa nośności, wskazując, że w przypadku gruntów spoistych dobrze dopasowanym rozkładem jest rozkład log-normalny, podczas gdy w przypadku gruntów niespoistych lepsze dopasowanie daje rozkład Weibulla. Dalszy rozwój zastosowań metody RFEM w odniesieniu do nośności posadowienia bezpośredniego to przede wszystkim uogólnienia na użytek analiz trójwymiarowych (stopy fundamentowe) z zastosowaniem pól losowych o obszarach określoności zawartych w przestrzeni trójwymiarowej (\mathbf{R}^3). Prace nad tym zagadnieniem są już w toku, a pierwsze rezultaty zostały przedstawione w referacie na konferencji ComGeo IV (Kawa i Puła, 2018). Ważnym zagadnieniem jest także analiza nośności posadowienia

bezpośredniego na podłożu uwarstwionym. Jest to zagadnienie skomplikowane obliczeniowo, gdyż na przykład w przypadku dwóch warstw gruntu spoistego trzeba zastosować cztery pola losowe do modelowania parametrów wytrzymałościowych podłoża. Wstępne prace i wyniki dotyczące tego zagadnienia przedstawiono w referacie na konferencji Geo-Risk 2017 (Zaskórski, Puła i Griffiths, 2017).

Równolegle prowadzone są prace nad implementacją do metody bardziej zaawansowanych modeli podłoża, w szczególności modelu *hardening soil*, który stosowany jest w kilku komercyjnych systemach komputerowych. W tym przypadku jednak poważnym ograniczeniem jest bardzo długi czas obliczeń potrzebny do uzyskania choćby jednego tysiąca realizacji. Takiej implementacji poświęcony jest referat Kawy, Puły i Trutego (2019) zgłoszony na Europejską Konferencję Mechaniki Gruntów i Inżynierii Geotechnicznej (ESSMGE).

Rezultaty przedstawione w powyższych rozdziałach stanowią istotny wkład w rozwój badania losowych zjawisk w obrębie geomechaniki i geotechniki. Jednak ich nadrzędnym celem jest polepszenie istniejących metod służących ocenie niezawodności fundamentów bezpośrednich oraz ocenie ryzyka wyczerpania ich nośności. Ponadto mają też służyć udoskonalaniu metod projektowania poprzez odpowiednią kalibrację wartości charakterystycznych i obliczeniowych parametrów geotechnicznych. O tych zagadnieniach jest mowa w rozdziale 6 niniejszej monografii. Pokazane tam sposoby kalibracji mogą być bezpośrednio zastosowane dla potrzeb projektowania na podstawie teorii niezawodności, ale także innych podejść projektowych, na co wskazuje podrozdział 6.1.

Na zakończenie chciałbym jeszcze raz podkreślić, że modelowanie przestrzennej zmienności właściwości gruntu za pomocą anizotropowych pól losowych wydaje się być konieczne w kontekście oceny bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych wznoszonych w coraz bardziej skomplikowanych warunkach gruntowych i współpracujących z coraz większymi obszarami podłoża. Tradycyjnie stosowane modelowanie za pomocą pojedynczych zmiennych losowych jest już bowiem w większości przypadków niewystarczające. Uwaga ta dotyczy nie tylko posadowień bezpośrednich, ale także innych rodzajów fundamentów, konstrukcji oporowych, a szczególnie stateczności skarp i zboczy.

Bibliografia

- [1] AKKAYA A.D., VANMARCKE E.H. (2003), *Estimation of spatial correlation of soil parameters based on data from the Texas A&M University NGES*. In: *Probabilistic Site Characterization at the National Geotechnical Experimentation Sites (GSP 121)*, E.H. Vanmarcke and G.A. Fenton (eds.), ASCE, Reston, VA, 29–40.
- [2] ALONSO E. (1976), *Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays*. *Geotechnique*, 26(3), 453–472.
- [3] ALONSO E., KRIZEK R.J. (1975), *Stochastic formulation of soil properties*. In: Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), vol. II, Aachen, 9–32.
- [4] ATHANASIOU-GRIVAS D., HARR M.E. (1979), *A reliability approach to the design of soil slopes*. In: Proc. of the 7th European Conf. On Soil Mechanics and Foundation Engineering, Brighton, 95–99.
- [5] ATHANASIOU-GRIVAS D., HARROP-WILIAMS K. (1979), *Joint Distribution of the Components of Soil Strength*. In: Proc. 3rd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Vol. 3, Sydney, 427–430.
- [6] AU S.-K., BECK J.L. (2001), *Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation*. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 16, 262–277.
- [7] BAECHER G.B., INGRA T.S. (1981), *Stochastic FEM in settlement predictions*. *J. of Geotechnical Engineering*, ASCE, 107(4), 449–463.
- [8] BAGHERY S., MAGNAN J.P. (1983), *Analyse probabiliste de la stabilite et des tassements des remblais du site experimental de Cubzac-les-Ponts*. Ministere de l'Urbanisme et du Logement Ministere des Transports. Laboratoire Central des Ponts et Chaussées. Raport de recherche. LPC, No. 122.
- [9] BAECHER G.B., CHRISTIAN J.T. (2003), *Reliability and Statistics in Geotechnical Engineering*. J. Wiley & Sons, Chichester.
- [10] BAUER J., PUŁA W. (2000), *Reliability with respects to settlement limit-states of shallow foundation on linearly-deformable subsoil*. *Computers & Geotechnics*, 25 (3–4), 281–308.
- [11] BECKER D. (1996), *Eighteen Canadian Geotechnical Colloquium: Limit States Design for Foundations*. Part II. *Development for the National Building Code of Canada*. *Canadian Geotechnical Journal*, 33, 984–1007.
- [12] BENJAMIN J.R., CORNELL C.A. (1977), *Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów*. WNT, Warszawa.

- [13] BIEGUS A. (1999), *Probabilistyczna analiza konstrukcji stalowych*. Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa–Wrocław.
- [14] BIERNATOWSKI K. (1966a), *Stateczność fundamentów*. Cz. I. *Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa dla oceny współczynników bezpieczeństwa przy sprawdzaniu fundamentów*. Archiwum Hydrotechniki, 13(2), 239–262.
- [15] BIERNATOWSKI K. (1966b), *Stateczność fundamentów*. Cz. II. *Stateczność na obrót i przesunięcie w ujęciu probabilistycznym*. Archiwum Hydrotechniki, 13(2), 283–302.
- [16] BIERNATOWSKI K. (1972), *Stability of rigid structures in probabilistic formulation*. In: Proc. of the 5th European Conf. On Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 1, Madrid, 111–116.
- [17] BIERNATOWSKI K. (1981), *Parametry geotechniczne w metodzie stanów granicznych*. W: Materiały VI Krajowej Konferencji Mechaniki Gruntów i Fundamentowania, Warszawa, 17–25.
- [18] BIERNATOWSKI K. (1982), *Metody statystyczne w geotechnice*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [19] BIERNATOWSKI K., PUŁA W. (1988), *Probabilistic analysis of the stability of massive bridge abutments using simulation methods*. Structural Safety, 5(1), 1–15.
- [20] BOX G.E.P., JENKINS G.M. (1983), *Analiza szeregów czasowych*. PWN, Warszawa.
- [21] BREITUNG K. (1984), *Asymptotic approximation for multinormal integrals*. J. Engng. Mech., ASCE, 110(3), 357–366.
- [22] BRZAKAŁA W. (1981), *Losowość parametrów podłoża gruntowego*. Archiwum Inżynierii Lądowej, 28(4), 599–606.
- [23] BRZAKAŁA W., GHANEM R. (1994), *Stochastic Finite Element Analysis of soil layers with random interface*. In: Structural Safety and Reliability. Proc. of ICOSSAR'93. G.I. Schuëller, M. Shinozuka, J.T.P. Yao (eds.), Vol. I, A.A. Balkema, Rotterdam, 333–339.
- [24] BRZAKAŁA W. (2013), *Bezpieczeństwo i niezawodność w geotechnice. Kalibracja częściowych współczynników bezpieczeństwa według Eurokodu EC7-1*. Inżynieria Morska i Geotechnika, 2, 118–124.
- [25] BRZAKAŁA W. (2018), *Eurokod 7 jako element w systemie bezpieczeństwa budowli*. Acta Sci. Pol. 17(3), 3–15.
- [26] CAFARO F., CHERUBINI C., COTECCHIA F. (2000), *Use of the scale of fluctuation to describe the geotechnical variability of an Italian clay*. In: Proceeding of the 8th International Conference on Applications of Statistics and Probability in Civil Engineering (ICASP), Melchers & Stewart (eds.), Balkema, Rotterdam, 481–486.
- [27] CAFARO F., CHERUBINI C. (2002), *Large sample spacing in evaluation of vertical strength variability of clayey soil*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 128(7), 558–568.
- [28] CAULCUTT R. (1983), *Statistics in Research and Development*. Chapman and Hall.
- [29] CHERUBINI C. (1992), *Collecting coefficients of variations of some geotechnical properties*. Unpublished report. Komunikat prywatny.
- [30] CHERUBINI C. (1997), *Data and consideration on the variability of geotechnical properties of soils*. In: Proc. of the ESREL Conf. Lisboa, 1538–1591.
- [31] CHERUBINI C. (1998), *Poisson's ratio variability*. Komunikat prywatny.

- [32] CHERUBINI C. (2000a). *Reliability evaluation of shallow foundation bearing capacity on c' , ϕ' soils*. Canadian Geotechnical Journal, 37, 264–269.
- [33] CHERUBINI C. (2000b). *Probabilistic approach to the design of anchored sheet pile walls*. Computers and Geotechnics, 26(3–4), 309–330.
- [34] CHERUBINI C., GIASI C., RETHATI L. (1993). *The coefficients of variations of some geotechnical parameters*. In: *Probabilistic methods in geotechnical engineering*, K.S. Li, S.C.R. Lo (eds.), Balkema, Rotterdam, 179–184.
- [35] CHERUBINI C., ORR T.L.L. (1999). *Considerations on the applicability of semi-probabilistic Bayesian methods to geotechnical design*. In: *Proceedings XX Convegno Nazionale di Geotecnica*, Parma, Associazione Geotecnica Italiana, 421–426.
- [36] CHERUBINI, C., VESSIA, G., PULA W. (2007). *Statistical soil characterization of Italian sites for reliability analysis*. In: *Proc. Characterization and Engineering properties of natural soils*, Tan, Phoon, Hight and Lerouell (eds.), Singapore, 2681–2706.
- [37] CHILÈS, J. P. AND DELFINER, P. (2012). *Geostatistics: Modeling Spatial Uncertainty*. Wiley Series in Probability and Statistics, John Wiley & Sons, Hoboken, New Jersey, 2nd edition.
- [38] CHING J., WU T.-S., STUDELIN A., BONG T. (2018). *Estimating horizontal scale of fluctuation with limited CPT soundings*. Geoscience Frontiers, 9, 1597–1608.
- [39] CHOK Y.H., JAKSA M.B., GRIFFITHS D.V., FENTON G.A., KAGGWA W.S. (2007). *A parametric study on reliability of spatially random cohesive slopes*, Australian Geomechanics, 42(2), 79–85.
- [40] CHUNG K.L. (1974). *A course in Probability Theory*. Academic Press, New York.
- [41] CHWAŁA M. (2018). *Ocena losowej nośności posadowienia bezpośredniego metodą kinematyczną* (praca doktorska). Raport serii PRE nr 4/2018, Politechnika Wrocławska, Wrocław.
- [42] COROTIS R.B., AZZOUC A.S., KRIZEK R.I. (1975). *Statistical Evaluation of Soil Index Properties and Constrained Modulus*. In: *Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP)*, vol. II, Aachen, 273–293.
- [43] CRAMER H. (1999). *Mathematical Methods of Statistics*. 19th ed., Princeton University Press, Princeton.
- [44] CROW E.L., SHIMIZU K. (1988). *Lognormal distributions: theory and applications*. Seria: Statistics, textbooks and monographs, 88, M. Dekker, New York.
- [45] DITLEVSEN O. (1979). *Generalized second-moment reliability index*. Journal of Structural Mechanics, 7(4), 435–451.
- [46] DITLEVSEN O. (1981). *Principle of Normal Tail Approximation*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 107(EM6), 1191–1208.
- [47] DITLEVSEN O., MADSEN H.O. (1996). *Structural Reliability Methods*. John Wiley & Sons, Chichester.
- [48] DOLIŃSKI K. (1983). *First-order second-moment approximation in reliability of structural systems: Critical review and alternative approach*. Structural Safety, 1, 211–231.
- [49] DOLIŃSKI K. (1988). *Importance sampling techniques in reliability calculation*. Reports of the Institute Foundational Technological Research (IPPT), 37/1988, Warszawa.
- [50] DOLIŃSKI K., PUŁA W. (1989). *Zastosowanie metod niezawodności konstrukcji do obliczeń fundamentów posadowionych bezpośrednio*. W: *Materiały XXXV Konf.*

- Naukowej Komisji Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komisji Nauki PZITB, Wrocław-Krynica, 1989, t. 1, 37–42.
- [51] DOLIŃSKI K., PUŁA W. (1990), *Posadowienie bezpośrednio na podłożu o cechach losowych*. Inżynieria i Budownictwo, 4–5, 161–163.
- [52] DUNCAN J.M. (2000), *Factors of safety and reliability in geotechnical Engineering*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, ASCE, 126(4), 307–316.
- [53] EVANGELISTA A., PELLEGRINO A., VIGOGONI C. (1975), *The influence of the variability of coarse grained material properties on the stability of earth dams*. In: Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), vol. 2, Aachen, 71–87.
- [54] FELLER W. (2008), *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa*. Tom 2, wyd. 6, PWN, Warszawa.
- [55] FENTON G.A., GRIFFITHS D.V. (1993), *Statistics of block conductivity through a simple bounded stochastic medium*. Water Resources Research, 29(6), 1825–1830.
- [56] Fenton G.A., Griffiths D.V. (2002), *Probabilistic foundation settlement on spatially random soil*. ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 128(5), 381–390.
- [57] Fenton G.A., Griffiths D.V. (2003), *Bearing capacity prediction of spatially random $c - \phi$ soils*, Canadian Geotechnical Journal, 40(1), 54–65.
- [58] FENTON G.A., GRIFFITHS D.V. (2004), *Reply to discussion by R. Popescu on, Bearing capacity prediction of spatially random $c - \phi$ soils*. Canadian Geotechnical Journal, 41(2), 368–369.
- [59] FENTON G.A., GRIFFITHS D.V. (2005), *Three-dimensional probabilistic foundation settlement*. ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 131(2), 232–239.
- [60] FENTON G.A., GRIFFITHS D.V., WILLIAMS M.B. (2005), *Reliability of traditional retaining wall design*, Géotechnique, 55(1), 55–62.
- [61] FENTON G.A., GRIFFITHS D.V. (2008), *Risk assessment in geotechnical engineering*. John Wiley & Sons, Hoboken, N.J.
- [62] FENTON G.A., VANMARCKE E.H. (1990), *Simulation of random fields via local average subdivision*. Journal of Engineering Mechanics, 116(8), 1733–1749.
- [63] FISZ M. (1967), *Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna*. PWN, Warszawa.
- [64] FISZ M. (1980), *Probability theory and mathematical statistics*. Krieger Publ. Co.
- [65] FÖRSTER W., WEBER E. (1982), *Influences on the probability of failure of slopes*. In: Proc. of the 10th Int. Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Vol. 3, Stockholm, 127–130.
- [66] FREDLUND D.G., DAHLMAN A.E. (1972), *Statistical geotechnical properties of glacial Lake Edmonton sediments*. In: Proc. 1st Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Hong-Kong Univ. Press, Hong-Kong, 203–228.
- [67] GADDUM J.H. (1945), *Lognormal distributions*. Nature, 156, 463–466.
- [68] GAO A.Z., LI J.P. (1993), *Reliability analysis on pile bearing capacity*. In: Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, 295–301.

- [69] GHANEM R., SPANOS P. (1991), *Stochastic Finite Elements: A Spectral Approach*. Springer-Verlag, New York.
- [70] GHANEM, R., BRZĄKAŁA W. (1996), *Stochastic finite-element analysis of soil layers with random interface*. Journal of Mechanical Engineering, ASCE, 122(4), 361–369.
- [71] GICHMAN I.I., SKOROCHOD A.W. (1968), *Wstęp do teorii procesów stochastycznych*. Warszawa, PWN.
- [72] GNIEDENKO B.W., BIELAJEW J.K., SOŁOWIEW A.D. (1968), *Metody matematyczne w teorii niezawodności*. WNT, Warszawa.
- [73] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A. (1993), *Seepage beneath water retaining structures founded on spatially random soil*. Geotechnique, 43(4), 577–587.
- [74] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A. (2001), *Bearing capacity of spatially random soil: The undrained clay Prandtl problem revisited*. Géotechnique, 54(4), 351–359.
- [75] GRIFFITHS D.V., HUANG J., FENTON G.A. (2010), *Probabilistic infinite slope analysis*. Computers and Geotechnics, 38(4), 577–584.
- [76] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A. (2004), *Probabilistic slope stability by finite elements*. ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 130(5), 507–518.
- [77] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A., MANOHARAN N. (2002), *Bearing capacity of a rough rigid strip footing on cohesive soil: a probabilistic study*. ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 128(9), 743–755.
- [78] GRIFFITHS D.V., FENTON G.A., ZIEMANN H.R. (2008), *Reliability of passive earth pressure*. Georisk: Assessment and Management of Risk for Engineered Systems and Geohazards, 2(2), 113–121.
- [79] GROLIMUND J.P., RECORDON E. (1972), *Étude statistique sur les resultants d'essais de laboratoire effectués sur un sol considéré comme homogène*. Laboratoire de Géotechnique de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- [80] GWÓZDŹ M., MACHOWSKI A. (2011), *Wybrane badania i obliczenia konstrukcji budowlanych metodami probabilistycznymi*. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, Kraków.
- [81] HASOFER A.M., LIND N.C. (1974), *An Exact and Invariant First-Order Reliability Format*. Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, 100(EM1), 111–121.
- [82] HICKS M. (2017), *O doświadczalnym wyznaczaniu poziomej skali fluktuacji*. Komunikat prywatny. Przekazany podczas dyskusji na konferencji GeoRisk w Denver, 2017.
- [83] HICKS M.A., SAMY K. (2002), *Influence of anisotropic spatial variability on slope reliability*. In: Proc. of the Eighth Int. Symposium on Numerical Models in Geomechanics, Rome, Pande G., Pietruszczak S. (eds.), Balkema, Rotterdam, 535–539.
- [84] HOHENBICHLER M., RACKWITZ R. (1981), *Non-normal dependent Vectors in Structural Safety*. Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 107(EM6), 1227–1237.
- [85] HOHENBICHLER M., GOLLWITZER S., KRUSE W., RACKWITZ R. (1987), *New light on first and second-order reliability methods*. Structural Safety, 4, 267–284.

- [86] HOLTZ R.D., KRIZEK R.J. (1972), *Statistical evaluation of soil data*. In: Proc. of the First Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), P. Lumb (ed.), Hong-Kong University Press, Hong-Kong, 230–278.
- [87] HORN R.A., JOHNSON C.R. (1985), *Matrix analysis*. Cambridge University Press.
- [88] INGLES O. (1980), *Soil variability, construction quality control and performance reliability*. Proceedings of the Univ. of New South Wales, Sydney.
- [89] ISHII K., SUZUKI M. (1987), *Stochastic finite element method for slope stability analysis*. Structural Safety, 4, 111–129.
- [90] ISO 2394 (1998), *General principles on reliability of structures*. International Standard.
- [91] ISO 2394 (2015), *General principles on reliability for structures*. Fourth edition. International standard.
- [92] IZBICKI R., MRÓZ Z. (1976), *Metody nośności granicznej w mechanice gruntów i skal*. PWN, Warszawa–Poznań.
- [93] JAKSA M.B. (1995), *The influence of spatial variability on the geotechnical design properties of a stiff, overconsolidated clay*. Ph.D thesis, Univ. Of Adelaide, Adelaide, Australia.
- [94] JAKSA M.B., KAGGWA W.S., BROOKER P.I. (1999), *Experimental evaluation of the scale of fluctuation of a stiff clay*. In: Proceedings of the 8th International Conference on Application of Statistics and Probability, AA Balkema, Rotterdam, 415–422.
- [95] JARZEWSKA K., KOSZELA P., ŚNIADY P., KORZEC A. (2011), *Identification of the structure parameters using short-time non-stationary stochastic excitation*. Journal of Sound and Vibration, 330(14), 3352–3367 .
- [96] JOHNSON N.L., KOTZ S. (1976), *Distributions in Statistics – Continuous Multivariate Distributions*. John Wiley and Sons, New York.
- [97] KAVEH RANJBAR POUYA, NEGIN ZHALEHJOO, REZA JAMSHIDI CHENARI (2014), *Influence of random heterogeneity of cross-correlated strength parameters on bearing capacity of shallow foundations*. Indian Geotechnical Journal, 44(4), 427–435.
- [98] KAWA M., PUŁA W., SUSKA M. (2016), *Random analysis of bearing capacity of square footing using the LAS procedure*. Studia Geotechnica et Mechanica, 38(3), 3–13.
- [99] KAWA M., PUŁA W. (2018), *Reliability analysis of bearing capacity of square footing on spatially variable cohesive-frictional soil*. In: Proc. of ComGeo IV, Assisi, 93–94.
- [100] KAWA M., PUŁA W., TRUTY A. (2019), *Reliability analysis of a sheet pile wall embedded in spatially variable soil*. In: Proc. of the XVIIth Conf. on Soil Mechanics and Foundation Engineering, Reykjavik, Sept. 2019 (praca przyjęta do druku).
- [101] KEAVENY J.M., NADIM F., LACASSE G. (1989), *Autocorrelation functions for off-shore geotechnical data*. In: Proc. of the 5th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability ICOSSAR, 263–270.
- [102] KOLMOGOROV A.N. (1941), *Über das logarithmisch normale Verteilungsgesetz der Dimensionen der Teilchen bei Zerstückelung*. Dok. Akad. Nauk SSSR, 31(1), 99–101.

- [103] KOPOCIŃSKI B. (1973), *Zarys teorii niezawodności i odnowy*. PWN, Warszawa.
- [104] KRIGE D.G. (1951), *A statistical approach to some basic mine valuation problems on the Witwatersrand*. J. Chem. Metall and Min. Soc. South Afrca, 52(6), 119–139.
- [105] KRIGE D.G. (1962), *Statistical applications in mine valuation*. Journal Inst. Mine Survey S. Afr. 12(2), 45–84, 12(3), 95–136.
- [106] KULHAWY F.H. (1992), *On evaluation of static soil properties*. In: Proceedings of the ASCE specially symposium: Stability and performance of slopes and embankments, New York, Vol. 2, 95–115.
- [107] KULHAWY F.H., ROTH N.J., GRIGORIU M.D. (1991), *Some statistical evaluations of geotechnical properties*. In: Proc. of the 6th Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Mexico City, 705–712.
- [108] LACASSE S., NADIM F. (1996), *Uncertainties in characterising soil properties*. In: *Uncertainty in the geologic Environment: From Theory to Practice* (GSP 58), C.D. Shackelford et al. (eds.), ASCE, Reston, VA, 49–75.
- [109] LEI-LEI LIU, YUNG-MING CHENG, SHAO-HE ZHANG (2017), *Conditional random field reliability analysis of a cohesion-frictional slope*. Computers and Geotechnics, 82, 173–186.
- [110] LEJA F. (2018), *Rachunek różniczkowy i całkowity*. PWN, Warszawa.
- [111] LI Y.J., HICKS M.A., VARDON P.J. (2016), *Uncertainty reduction and sampling efficiency in slope design using 3D conditional random fields*. Computers and Geotechnics, 79, 159–172.
- [112] LIU P.-L., DER KIUREGHIAN A. (1986), *Multivariate distributions models with prescribed marginals and covariances*. Probabilistic Engineering Mechanics, 1(2), 105–112.
- [113] LLORET-CABOT M., FENTON G.A., HICKS M.A. (2014), *On the estimation of scale of fluctuation in geostatistics*. Georisk: Assessment and Management of Risks Engineered Systems and Geohazards, 8(2), 129–140.
- [114] LOW B.K., PHOON K.K. (2015), *Reliability based design and its complementary role to Eurocode 7 design approach*. Computers and Geotechnics, 65, 30–44.
- [115] LOW B.K., TANG W.H. (2004), *Reliability analysis using object-oriented constrained optimization*, Structural Safety, 26(1), 69–89.
- [116] LOW B.K., TANG W.H. (2007), *Efficient spreadsheet algorithm for first-order reliability method*. Journal Eng. Mech, ASCE, 133(12), 1378–87.
- [117] LUMB P. (1966), *The variability of natural soils*. Canadian Geotechnical Journal, 3(2), 74–97.
- [118] LUMB P. (1970), *Safety factors and the probability distributions of soil strength*. Canadian Geotechnical Journal, 7(3), 225–242.
- [119] LUMB P. (1972), *Precision and accuracy of soil properties*. In: Proc. 1st Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Hong-Kong Univ. Press, Hong-Kong, 329–345.
- [120] LUMB P. (1974), *Application of Statistics in Soil Mechanics*. In: *Soil Mechanics – New Horizons*, I.K. Lee (ed.), Newness-Butterworths. London, 44–111.
- [121] LUMB P. (1975), *Spatial variability of soil properties*. In: Proc. 2nd Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Aachen, Vol. II, 397–422.

- [122] MACHOWSKI A. (1991), *Losowa nieliniowość słupów w szkieletach stalowych*. W: XXXVII Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Łódź–Krynica, T. 4. *Konstrukcje metalowe, technologia i organizacja budownictwa*, M. Łukowiak (red.), PŁódź, Łódź, 61–66.
- [123] MARQUARDT D. (1963), *An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters*. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 11 (2): 431–441.
- [124] MATERN B. (1960), *Spatial variation: Stochastic models and their application to some problems in forest surveys and other sampling investigations*. *Swedish Forestry Res. Inst.*, 49(5).
- [125] MATHERON G. (1963), *Principles of Geostatistics*. *Economic Geology*, 58, 1246–1266.
- [126] MATSUO M., ASAOKA A. (1977), *Probability models of undrained strength of marine clay*. *Soils and Foundations*, 17(3), 53–68.
- [127] MCANALLY P.A. (1983), *Reliability of the bearing capacity design of shallow footings in sands*. In: Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Florence, 1545–1556.
- [128] MELCHERS R.E. (2018), *Structural Reliability. Analysis and Prediction*. 3rd edition, John Wiley & Sons.
- [129] MEYERHOF G.G. (1993), *Development of geotechnical limit state design*. In: Proceedings of the international symposium on limit state design in geotechnical engineering, Copenhagen, Vol. 1, 1–12.
- [130] MEYERHOF G.G. (1995), *Development of geotechnical limit state design*. *Canadian Geotechnical Journal*, 32, 128–136.
- [131] MICHALOWSKI R.L. (2001), *Upper-bound load estimates on square and rectangular footings*. *Geotechnique*, 51(9), 789–798.
- [132] MURZEWSKI J. (1970), *Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych*. Arkady, Warszawa.
- [133] MURZEWSKI J. (1989), *Niezawodność konstrukcji inżynierskich*. Arkady, Warszawa.
- [134] MURZEWSKI J. (2001), *Podstawy projektowania i niezawodność konstrukcji*. Politechnika Krakowska, Kraków.
- [135] NAMYSŁOWSKA-WILCZYŃSKA B. (1993), *Zmienność złóż rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej w świetle badań geostatystycznych*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [136] NATAF A. (1962). *Determination des Distribution dont les Marges sont Donnees*. *Comptes Rendus de l'Academie des Scences*, 225, 42–43.
- [137] NELSEN RB. (2006), *An introduction to copulas*. 2nd ed., Springer, New York.
- [138] OBONI F., BOURDEAU P.L. (1983), *Determination of the critical slip surface in stability problems*. In: Proc. 4th Int. Conf. on Appl. of Statistics and Probability in Soil and Struct. Eng. (ICASP), Florence, 1413–1424.
- [139] O'NEILL M.W., YOON G.L. (2003), *Spatial variability of CPT parameters at University of Houston NGES*. In: *Probabilistic Site Characterization at the National Geotechnical Experimentation Sites* (GSP 121), E.H. Vanmarcke and G.A. Fenton (eds.), ASCE, Reston, VA, 1–12.
- [140] ORR T.L.L., BREYSSE D. (2008), *Eurocode 7 and reliability-based design*. In: *Reliability Based Design in Geotechnical Engineering*, Chapt. 8, Taylor and Francis, London–New York, 298–343.

- [141] OVESEN N.K., DENVER H. (1994), *Assesment of characteristic values of soil parameters for design*. In: Proceedings XIII Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering, New Delhi, Balkema, 1, 427–460.
- [142] PAGE E.S. (1954), *Continuous inspection scheme*. Biometrika, 41(1/2), 100–115.
- [143] PAICE G.M., GRIFFITHS D.V., FENTON G.A. (1996), *Finite element modeling of settlements on spatially random soil*. ASCE Journal of Geotechnical Engineering, 122(9), 777–779.
- [144] PAPOULIS A. (1991), *Probability, random variables and stochastic processes*, third edition, McGraw-Hill.
- [145] PAPOULIS A. (1972), *Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne*. WNT, Warszawa.
- [146] PHOON K.K., KUHWAY F.H. (1999), *Characterizations of geotechnical variability*. Canadian Geotechnical Journ., 36(4), 612–624.
- [147] PHOON K.K., KUHWAY F.H., GRIGORIU M.D. (1993), *Observations on reliability-based design foundation for electrical transmission line structures*. In: Proceedings of the international symposium on limit state design in geotechnical engineering, Copenhagen, Vol. 2, 351–362.
- [148] PHOON K.K., KUHWAY F.H. (1999), *Evaluation of geotechnical property variability*. Canadian Geotechnical journal, 36(4), 625–639.
- [149] PIECZYŃSKA J. (2012), *Losowa metoda elementów skończonych w analizie nośności posadowienia bezpośredniego*. Praca doktorska, Politechnika Wrocławska, Wrocław.
- [150] PIECZYŃSKA-KOZŁOWSKA J., PUŁA W. (2017), *Zastosowanie losowej metody elementów skończonych w geotechnice*. W: *Analizy i doświadczenia w geoinżynierii*, J. Bzówka i M. Łupieżowiec (red.), Wydawnictwo Politechniki Śląskiej, Gliwice, 393–406.
- [151] PIECZYŃSKA J., PUŁA W., GRIFFITHS D.V., FENTON G.A. (2011), *Probabilistic characteristics of strip footing bearing capacity evaluated by random finite element method*. In: Proc. of ICASP11, Applications of Statistics and Probability in Civil Eng., M.H. Faber et al. (eds.), CRC Press/Balkema, 1673–1682
- [152] PIECZYŃSKA-KOZŁOWSKA J., PUŁA W., GRIFFITHS D., FENTON G. (2015), *Influence of embedment, self-weight and anisotropy on bearing capacity reliability using the random finite element method*. Computers and Geotechnics, 67, 229–238.
- [153] PN-EN 1990:2004. *Eurokod: Podstawy projektowania konstrukcji*. CEN, Europejski Komitet Normalizacyjny, Bruksela.
- [154] PN-EN 1997-1:2008. *Eurokod 7: Projektowanie geotechniczne, Część 1: Zasady ogólne*. CEN, Europejski Komitet Normalizacyjny, Bruksela.
- [155] PN-81/B-03020 (1981), *Grunty budowlane. Posadowienie bezpośrednie budowli. Obliczenia statyczne i projektowanie*. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa.
- [156] PN-ISO 2394 (2000), *Ogólne zasady niezawodności konstrukcji budowlanych*. Polski Komitet Normalizacyjny, Warszawa.
- [157] PRANDTL L. (1921), *Über die Eindringungsfestigkeit (Härte) plastischer Baustoffe und die Festigkeit von Scheiden*. Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, 1(1), 15–20.

- [158] PRZEWŁÓCKI J. (1998), *Losowość w wybranych zagadnieniach mechaniki gruntów*. Instytut Budownictwa Wodnego PAN, Gdańsk.
- [159] PRZEWŁÓCKI J. (2000), *Two-dimensional random fields of mechanical soil properties*. Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering, 126, 373–377.
- [160] PRZEWŁÓCKI J. (2006), *Problemy stochastycznej mechaniki gruntów. Ocena niezawodności*. Dolnośląskie Wydawnictwo Edukacyjne, Wrocław.
- [161] PUŁA W. (1984), *Probabilistyczna analiza stateczności masywnych przyczółków mostowych metodą symulacyjną*. Rozprawa doktorska. Raport serii PRE Nr 308, Instytut Geotechniki, Politechnika Wroclawska, Wrocław.
- [162] PUŁA W. (1985), *O ocenie dokładności obliczania prawdopodobieństw metodą symulacji cyfrowej*. Zeszyty Naukowe Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Opolu, Nr 109, Konferencje Matematyka, z. 9, t. 2, 433–438.
- [163] PUŁA W. (1987), *Statistical distributions of soil properties for the investigation of the reliability of geotechnical structures*. In: Proceedings of the 1st Conf. on Mechanics, Praha, Czechosl. Acad. Sc., Slov. Acad. Sc, Praha, Vol. 6, 134–137.
- [164] PUŁA W. (1993), *Ocena niezawodności fundamentów bezpośrednich techniką symulacyjną*. W: Materiały XXXIX Konf. Naukowej Komitetu Inżynierii Lądowej i Wodnej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Wrocław–Krynica, 147–154.
- [165] PUŁA W. (2004), *Zastosowanie teorii niezawodności konstrukcji do oceny bezpieczeństwa fundamentów*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [166] PUŁA W., CHWAŁA M. (2015), *On spatial averaging along random slip lines in the reliability computations of shallow strip foundations*. Computers and Geotechnics, 68, 128–136.
- [167] PUŁA W., STILGER-SZYDŁO E. (1990), *An analysis of embankment shape with random soil parameters based on the theory of limit states*. Studia Geotechnica et Mechanica, 12(3–4), 53–68.
- [168] PUŁA W., TRACZYK R. (1988), *Methods of determining design strength parameters for dump soil blends*. Archiwum Górnictwa, 33(1), 137–148.
- [169] PUŁA W., ZASKÓRSKI Ł. (2015), *Estimation of the probability distribution of the random bearing capacity of cohesionless soil using the random finite element method*. Structure and Infrastructure Engineering, 11(5), 707–720.
- [170] QUECK S.T., CHOW Y.K., PHOON K.K. (1992), *Further Contribution to Reliability – Based Pile – Settlement Analysis*. Journal of Geotechnical Engineering ASCE, 118(5), 726–742.
- [171] RACKWITZ R. (2000), *Reviewing probabilistic soils modeling*. Computers & Geotechnics, 25(3–4), 199–223.
- [172] RACKWITZ R. (2004), *O modelowaniu przestrzennej zmienności parametrów gruntu budowlanego*. Komunikat prywatny.
- [173] RACKWITZ R., FIESSLER B. (1978), *Structural reliability under combined random loads sequences*. Computers and Structures, 9, 489–494.
- [174] RICE S.O. (1944), *Mathematical Analysis of Random Noise*. Bell System Technical Journal, 23, 282.

- [175] RIGHETTI G., HARROP-WILLIAMS K. (1981), *Finite element analysis of random soil media*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 114(GT1), 59–75.
- [176] *Risk and reliability in geotechnical engineering* (2015), K.K. Phoon, J. Ching (eds.), CRC Press Taylor and Francis Group.
- [177] RUBINSTEIN R.Y., KROESE D.P. (2011), *Simulation and the Monte Carlo Method*. John Wiley, New York.
- [178] RZĄDKOWSKI J. (2018), *Miary bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [179] SAKAMOTO S., GHANEM R. (2002), *Simulation of multi-dimensional non-gaussian non-stationary random fields*. Probabilistic Engineering Mechanics, 17, 167–176.
- [180] SAMY K. (1998), *Stochastic analysis of soils*. MEng Thesis, University of Manchester.
- [181] SCHNEIDER H.R. (1997), *Definition and determination of characteristic soil properties*. In: Proc. XII Intern. Conf. on Soil Mech. and Geotech. En., Hamburg, Balkema, Rotterdam, 2271–2274.
- [182] SCHNEIDER H.R. (2011), *Dealing with uncertainties in EC7 with emphasis on characteristic values*. In: Proc. of Workshop on Safety Concepts and Calibration of Partial Factors in European and North American Codes of Practice, Delft.
- [183] SCHULTZE E. (1972), *Frequency distributions and correlations of soil properties*. In: Proc. of the First Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), P. Lumb (ed.), Hong-Kong University Press, Hong-Kong, 372–387.
- [184] SCHULTZE E. (1975), *Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures*. In: Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen, 457–494.
- [185] SINGH A. (1972), *How reliable is the safety factor in foundation engineering?* In: Proc. 1st Int. Conf. Application of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP 1), Hong-Kong, 389–424.
- [186] SMITH L., FREEZE R.A. (1979a), *Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 1. One-dimensional simulations*. Water Resources Research, 15(3), 521–528.
- [187] SMITH L., FREEZE R.A. (1979b), *Stochastic analysis of steady state groundwater flow in a bounded domain, 2. Two-dimensional simulations*. Water Resources Research, 15(6), 1543–1559.
- [188] SMITH I.M., GRIFFITHS D.V. (2004), *Programming the finite element method*. 4th ed., John Wiley and Sons, Chichester/New York.
- [189] SMITH I.M., GRIFFITHS D.V., MARGETTS L. (2014), *Programming the finite element method*. 5th ed., John Wiley and Sons.
- [190] SOBCZYK K. (1973), *Metody dynamiki statystycznej*. PWN, Warszawa.
- [191] SOFIANOS A.I., NOMIKOS P.P., PAPANTONOPOULOS G. (2014), *Distribution of the factor of safety, in geotechnical engineering, for independent piecewise linear capacity and demand density functions*. Computers and Geotechnics, 55, 440–447.
- [192] SOKOŁOWSKI W.W. (1958), *Statyka ósrodków sypkich*. PWN, Warszawa.

- [193] SPENCER W. A. (2007), *Parallel Stochastic and Finite Element Modelling of Clay Slope Stability in 3D*. PhD Thesis, University of Manchester.
- [194] STRUREL (1997), *A Structural Reliability Analysis Program System. Comrel & Sysrel Users Manual*. RCP Consult, München.
- [195] STUDENT (1908), *The probable error of a mean*. Biometria, 6, 1–25.
- [196] SZCZEPANKIEWICZ E. (1985), *Zastosowania pól losowych*. PWN, Warszawa.
- [197] ŚNIADY P. (2000), *Podstawy stochastycznej dynamiki konstrukcji*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław.
- [198] TANG W.H. (1979), *Probabilistic evaluation of penetration resistances*. J. Geotech. Eng. Div., 105(10), 1173–1191.
- [199] TERZAGHI K. (1943), *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley & Sons, New York.
- [200] TE XIAO S.M., DIAN-QING LI, ZI-JUN CAO, LI-MIN ZHANG (2018), *CPT-Based Probabilistic Characterization of three-dimensional spatial variability using MLE*. Journal of Geotech. Geoenviron. Eng. ASCE, 144 (5), DOI: 10.1061/(ASCE)G.T.1943-5606.0001875.
- [201] THAO N.T.P. (1984), *Parametry statystyczne parametrów geotechnicznych wybranych warstw geologicznych podłoża gruntowego określonego rejonu m. Wrocławia*. Prace Naukowe Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej, Nr 44 (praca doktorska), Wrocław.
- [202] TVEDT L. (1983), *Two second-order approximations to the failure probability*. Det Norske Veritas. RDIV/20-004-83.
- [203] VANMARCKE E.H. (1977a), *Probabilistic Modeling of Soil Profiles*. Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, 103(GT11), 1227–1246.
- [204] VANMARCKE E.H. (1977b), *Reliability of earth slopes*. Journal of Geotechnical Division, ASCE, 103 (GT11), 1247–1265.
- [205] VANMARCKE E.H. (1983), *Random Fields – Analysis and Synthesis*. MIT Press, Cambridge.
- [206] VANMARCKE E.H., GRIGORIU M. (1983), *Stochastic Finite Element Analysis of Simple Beams*. Journ. Eng. Mech. Div., ASCE, 109(EM5), 1203–1214.
- [207] VESSIA, G., CHERUBINI C., PIECZYŃSKA J., PUŁA W. (2009), *Application of random finite element method to bearing capacity design of strip footing*. Journal of GeoEngineering, 4(3), 103–112.
- [208] VESSIA G., CASTRIGNANO A., DI CURZIO D., PUŁA W. (2018), *3D spatial variability of mechanical properties of Emilia Romagna alluvial deposits and its implications in geotechnical designing of foundations*. In: ComGeo IV: 2–4 May 2018, Assisi, Italy: book of extended abstracts. IC2E, International Centre for Computational Engineering, Rhodes, Swansea, 87–88.
- [209] WEBSTER R., BECKETT P.H.T. (1968), *Quality and usefulness of soil maps*. Nature, 219, 680–682.
- [210] WENTZELL A.D. (1980), *Wykłady z teorii procesów stochastycznych*. PWN, Warszawa.
- [211] WICKREMESINGHE D., CAMPANELLA R.G. (1991), *Statistical methods for soil layer boundary location using the cone penetration test*. In: Proc., ICASP6, Mexico City, 2, 636–643.

- [212] WICKREMESINGHE D., CAMPANELLA R.G. (1993), *Scale of fluctuation as a description of soil variability*. In: Proc. of the Conf. on Probabilistic Methods in Geotechnical Engineering, Canberra, 233–239.
- [213] WILDE P. (1977), *Modele dyskretne pól losowych podłoża*. Prace Naukowe Instytutu Geotechniki PWr Nr 24, seria Konferencje Nr 9, 5–16.
- [214] WILDE P. (1981), *Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich*. PWN, Warszawa.
- [215] WILKS S. (1962), *Mathematical Statistics*. Wiley, New York.
- [216] WILUN Z. (2013), *Zarys getechniki*. WKiŁ, Warszawa.
- [217] WU T.H. (1974). *Uncertainty, safety, and decision in soil engineering*. Journal of Geotechnical Engineering Division, ASCE, 100(3), 329–348.
- [218] WU T.H., KRAFT L.M. (1967), *The Probability of Foundation Safety*. Journ. of the Soil Mechanics and Foundation Engineering, ASCE, 93(SM3), 213–231.
- [219] Wu T.H., LEE I.M., POTTER J.C., KJEKSTAD O. (1987), *Uncertainties in evaluation of strength of marine sand*. J. Geotech. Eng., DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9410(1987)113:7(719), 719–738.
- [220] YARDENKO M.I. (1983), *Spectral theory of random fields*. Springer, Optimization Software Publ., New York.
- [221] YÜCEMEN M.S., TANG W.H. (1975), *Long Term Stability of Soil Slopes: A Reliability Approach*. In: Proc. of the 2nd Int. Conf. of Statistics and Probability in Soil and Structural Engineering (ICASP), Aachen, 215–229.
- [222] ZASKÓRSKI Ł., PUŁA W., GRIFFITHS D.V., (2017), *Bearing Capacity Assessment of a Shallow Foundation on a Two-Layered Soil Using the Random Finite Element Method*. In: Geo-Risk 2017. Geotechnical Risk Assessment and Management, ASCE Geotechnical Special Publication No. 285, 468–477.
- [223] ZIELIŃSKI R. (1979), *Generatory liczb losowych*. WNT, Warszawa.
- [224] ZUBRZYCKI S. (1957), *O szacowaniu parametrów złóż geologicznych*. Zastosowania Matematyki, 3, 105–153.

Strony internetowe

www.issmge.org/committees/technical-committees/applications/safety-and-serviceability
www.issmge.org/committees/technical-committees/impact-on-society/risk
<http://alum.mit.edu/www/bklow.o>
www.engmath.dal.ca/rfem





W monografii przedstawiono wybrane zagadnienia bezpośredniego. Uwzględniono przestrzenną zmianę modelowaną z zastosowaniem metod teorii pól losowych. Modelowanie przedstawiono oryginalne, niepublikowane wcześniej rezultaty prac autorskich dotyczące oszacowań skali fluktuacji przy transformowaniu pola losowego. Poświęcono też uwagę identyfikacji parametrów pola losowego na podstawie badań geotechnicznych. Oszacowania nośności przedstawiono w ramach dwóch ogólnych podejść: za pomocą losowych mechanizmów kinematycznych, gdzie ważnym elementem było zbadanie przypadku zmiennych losowo powierzchni poślizgu, oraz za pomocą losowej metody elementów skończonych. W drugim podejściu szczególny nacisk położono na modelowanie za pomocą anizotropowych pól losowych, w których pozioma skala fluktuacji jest znacznie większa od pionowej. Oprócz nowych elementów poznawczych w monografii zawarto ważne aspekty praktyczne, wskazując na przykładach, jak przedstawione koncepcje można zastosować do probabilistycznego wspomagania projektowania.

Monografia dra hab. inż. Wojciecha Puły ma charakter pracy teoretycznej, wnoszącej bardzo istotny wkład do teorii bezpieczeństwa konstrukcji budowlanych w zakresie opracowania oryginalnych metod i procedur oceny miar niezawodności posadowień bezpośrednich.

(z recenzji prof. dr hab. inż. Elżbiety Stilger-Szydło)



Wojciech Puła od roku 1984 jest związany z Politechniką Wrocławską, gdzie w 2005 roku uzyskał stopień doktora habilitowanego w dyscyplinie budownictwo. Pracował też na zagranicznych uniwersytetach, m.in. we Francji (Université de Lille) oraz w Iraku (Al-Mustansiriya University w Bagdadzie i University of Baghdad). Był również wykładowcą w International Centre for Mechanical Science (CISM) w Udine we Włoszech, a na Politecnico di Bari we Włoszech prowadził kurs dla doktorantów. Ponadto wygłosił wiele referatów na prestiżowych międzynarodowych konferencjach naukowych. Obecnie jest zatrudniony na stanowisku profesora w Katedrze Geotechniki, Hydrotechniki, Budownictwa Podziemnego i Wodnego na Wydziale Budownictwa Politechniki Wrocławskiej. Zainteresowania naukowe autora dotyczą niezawodności konstrukcji, modelowania numerycznego w geotechnice, mechaniki gruntów oraz zagadnień fundamentowania. Opublikował ponad sto prac naukowych, w tym kilkanaście obszernych artykułów w czasopismach indeksowanych w *Journal Citation Reports*. Od roku 2013 pełni funkcję redaktora naczelnego czasopisma *Studia Geotechnica et Mechanica*. Uczestniczy w radach wydawniczych kilku prestiżowych czasopism naukowych, takich jak *Computers and Geotechnics* czy *Georisk*. Jest członkiem International Society for Soil Mechanics and Geotechnical Engineering, a także członkiem Zarządu Krajowego Polskiego Komitetu Geotechniki obecnej kadencji.



Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej są do nabycia w księgarni ul. C.K. Norwida 9, 50-374 Wrocław, tel. 71 328 08 95

Prowadzimy sprzedaż wysyłkową: zamawianie.ksiazek@pwr.edu.pl

ISBN 978-83-7493-052-9