INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport serii PRE

PROBABILISTYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI MASYWNYCH PRZYCZÓŁKÓW MOSTOWYCH METODĄ SYMULACYJNĄ

Wojciech Puła

P r a c a   d o k t o r s k a

Słowa kluczowe:

przyczółek mostowy,
zapas stateczności,
wielokątny rozkład prawdopodobieństwa,
generator liczb losowych,
prawdopodobieństwo utraty stateczności

Promotor:
prof. dr hab. inż. Kazimierz Biernatowski

Wrocław 1984

SPIS RZECZY

OZNACZENIA

a, b, d, e -odcięte wierzchołka gęstości wielokątnej

a, b, c -współczynniki trójmianu kwadratowego /tylko w podrozdziale 6.1/

a_1, a_2, a_3 -ramiona sił względem najbardziej obciążonej krawędzi przyczółka

a_h -współczynnik do obliczania siły od hamowania pojazdów

b_a -ramię wypadkowej sił pionowych względem najbardziej obciążonej krawędzi przyczółka

b_B, b_D, b_c -współczynniki wpływu kąta nachylenia podstawy

c -spójność

c_i, $/i=1,\ldots,n/$ -spójność przy podstawie i-tego paska /tylko w podrozdziale 3.6/, spójność w i-tej warstwie /w pozostałych rozdziałach/.

c_o -współczynnik klasy bezpieczeństwa

d_B, d_D, d_c -współczynniki wpływu zagłębienia fundamentu

e -mimośród działania wypadkowej obciążeń /tylko w podrozdziale 3.7/

f_t -współczynnik tarcia betonu o baton

$f(x_1,\ldots,x_n)$ -funkcja określająca kryterium bezpieczeństwa

g_B, g_D, g_c -współczynniki wpływu nachylenia naziomu /tylko w podrozdziale 3.7/

$g(x), g_Y(x), g(x_1,\ldots,x_n)$ -gęstości prawdopodobieństwa

$g_o(x)$ -gęstość prawdopodobieństwa standaryzowanego rozkładu normalnego

h_o -wysokość przyczółka

h_1, h_2 -rzędne punktu początkowego i końcowego gęstości wielokątnej /tylko w podrozdziale 4.3/

h_i, $/i=1,2,\ldots,n/$ -miąższość i-tej warstwy

h_a -ramię wypadkowej sił poziomych względem najbardziej obciążonej krawędzi przyczółka

i_B, i_D, i_c -współczynniki wpływu nachylenie wypadkowej obciążeń

k -stała związana z przybliżoną dystrybuantą rozkładu normalnego

k_1 -współczynnik redukcyjny dla kąta tarcia wewnętrznego

k_2 -współczynnik redukcyjny dła obliczania oporu spójności

k_F, u_F -parametry rozkładu Frecheta

l_o -długość przekroju powierzchni cylindrycznej

l_i, $/i=1,\ldots,n/$-długość podstawy i-tégo paska

m_1, m_2, m_3 -współczynniki kierunkowe gęstości wielokątnej

n, n_1 -liczebność ciągu

p -prawdopodobieństwo

p_i, q_i, r_i, $/i=1,2,3/$-pomocnicze parametry dystrybuanty /tylko w rozdz. 4/

p_{ob} -parametr obciętego rozkładu Frecheta

p_i,/i=1,...5/ - prawdopodobieństwo utraty stateczności w i-tym przypadku /oprócz rozdziału 4/,

p_o - ogólne prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przyczółek

p_M -prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnego momentu przy obrocie wokół powierzchni cylindrycznej

q_o -równomierne obciążenie naziomu- część nielosowa

q_1 -równomierne obciążenie naziomu-część losowa

q - iloraz ciągu geometrycznego /rozdział 8/ norma prawdopodobieństwa /podrozdział 2.1/,obciążenie naziomu /w pozostałych rozdziałach/

$q(x)$ -intensywność obciążenia na przęśle

r_R, r_S-miary bezpieczeństwa poziomu czwartego

s_B, s_D, s_c -współczynniki kształtu

t -czas

w_1, w_2, w_3 -parametry rozkładu trójkątnego

x,y -zmienne niezależne

$\tilde{x}=(x_1,\ldots x_n)$ -element n-wymiarowej przestrzeni euklidesowej

$\tilde{x}$, ν -parametry rozkładu lognormalnego

z_i,/i=1,...n/ -wartość dystrybuanty empirycznej

B -powierzchnia lub szerokość podstawy przyczółka

D -minimalna głębokość posadowienia

D_n -statystyka Kołmogorowa

E -symbol wartości oczekiwanej

$F(x), F_X(x)$ -dystrybuanta

$F_o(x)$ -dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego

$F^{-1}(y)$ -funkcja odwrotna do dystrybuanty

$F_n(x)$ -dystrybuanta empiryczna

G_i -ciężar i-tego paska

H_{ai} -wypadkowe parcie czynne w i-tej warstwie

H_p -wypadkowe parcie bierne

H_h - siła od hamowania pojazdów

H_o -składowa wypadkowej sił styczna do podstawy przyczółka

I_D -stopień zagęszczenia

I_L -stopień plastyczności

$I(x)$ -linia wpływowa efektu statycznego

K_i -linia poślizgu o indeksie i

K_{ai} -współczynnik granicznego parcia czynnego w i-tej warstwie

K_p -współczynnik odporu granicznego /parcia biernego/

$K_{q,q}(x,y)$ -funkcja kowariancji procesu stochastycznego $\{q(x)\}$

L -długość przęsła

L_1 -długość podstawy przyczółka

M_o -wypadkowy moment sił względem osi powierzchni cylindrycznej

M_u -momenty utrzymujące

M_w -momenty wywracające

N -liczba realizacji

N_o -składowa wypadkowej sił normalna do podstawy przyczółka

N_3 -ciężar gruntu na odsadzkach przyczółka

N_4 -ciężar gruntu ograniczonego powierzchnią cylindryczną

N_B, N_D, N_c -współczynniki nośności podłoża

N_{p1} -reakcja przyczółka od obciążeń ruchomych

N_{p2} -reakcja przyczółka od ciężaru własnego belki

N_q -ciężar własny przyczółka

$N(\bar{x}, \sigma)$ -rozkład normalny o wartości oczekiwanej x i wariancji σ^2

O -środek obrotu

$P(\cdot)$,$P\{\ldots\}$ -prawdopodobieństwo pewnego zdarzenia

P_o -wypadkowa wszystkich sił działających na przyczółek

Q_f -nośność graniczna podłoża gruntowego

$\vec{Q}(t,x)$ -pole losowe obciążeń /czasowo-przestrzenne/

R -nośność /w rozdziale 2/,rozkład jednostajny /w rozdziale 6/

R_o -promień najniekorzystniejszej linii poślizgu

R_1 -promień powierzchni cylindrycznej

R_A, R_B -reakcje podporowe

$R(X)$ -rozkład zmiennej losowej X

S -obciążenie /tylko w rozdziale 2/

S_i ,/i=1,...5/ -współczynnik pewności /bezpieczeństwa/ dla i-tego kryterium

T -siła /moment/ przeciwdziałająca utracie stateczności

U -siła /moment/ powodująca utratę stateczności

Var -symbol wariancji

X, X_i -zmienne losowe

$\bar{X}$ -wartość oczekiwana /średnia/ zmiennej losowej X

$(X_1, \ldots, X_n)$ -n-wymiarowy wektor losowy

Z_i -zapas stateczności przyczółka w i-tym przypadku /kryterium/

α -kąt nachylenia ściany przyczółka /tylko w rozdz. 3/,parametr rozkładu Dirichleta /tylko w rozdz. 4/

α_i,/i=1,...n/ -kąt nachylenia w i-tym pasku /tylko w rozdz. 3/,parametry dystrybuanty rozkładu wielokątnego /w pozostałych rozdz./

α_G, u_G -parametry rozkładu Gumbela

β -kąt nachylenia naziomu /tylko w rozdz. 3/,parametr rozkładu Dirichleta /tylko w rozdz. 4/.

β_o -wskaźnik niezawodności

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ -parametry dystrybuanty rozkładu wielokątnego

γ -ciężar objętościowy

γ_i,/i=1,...n/ -ciężar objętościowy w i-tej warstwie

δ -kąt tarcia między ścianą przyczółka a gruntem /w rozdziale 3/,parametr rozkładu Dirichleta /tylko w rozdziale 4/,mała liczba dodatnia /w rozdziale 8/.

$\delta_1,\delta_2,\delta_3$ -kąty nachylenia wykresów poszczególnych odcinków gęstości wielokątnej /tylko w podrozdziale 4.3/

δ_1 -współczynnik skośności zmiennej losowej /oprócz podrozdziału 4.3/

δ_2 -kurtoza /oprócz podrozdziału 4.3/

$\delta(x)$ -miara probabilistyczna skoncentrowana w zerze

ε -mała liczba dodatnia /tylko w rozdziale 8/

η_i,/i=1,...4/ -poziomy istotności

ϑ -kąt nachylenia podstawy

λ -parametr rozkładu Poissona

λ_p -kwantyl rzędu p

μ_i /i=1,...4/ -parametry pewnego rozkładu prawdopodobieństwa /tylko w rozdziale 2/,estymator nieobciążony i-tego momentu centralnego

$\tilde{\mu}_2,\tilde{\mu}_3,\tilde{\mu}_4$ -estymatory obciążone momentów centralnych

ν, ν_X -współczynnik zmienności

σ, σ_X -odchylenie standardowe

ϕ -kąt tarcia wewnętrznego

ϕ_i,/i=1,...n/ -kąt tarcia wewnętrznego w i-tej warstwie /oprócz podrozdz.3.6/ kąt tarcia wewnętrznego w podstawie i-tego paska /tylko w podrozdziale 3.6/

ω -element przestrzeni probabilistycznej

Γ -współczynnik bezpieczeństwa

$\Gamma(x)$ -funkcja gamma Eulera

Δ -wyróżnik trójmianu kwadratowego /w rozdz. 6./,symbol różnicy wartości / w innych rozdziałach/

Σ -sigma - ciało podzbiorów

Ω -przestrzeń probabilistyczna

$\mathbb{R}$ -zbiór liczb rzeczywistych

$\mathbb{R}^n$ -n-wymiarowa przestrzeń euklidesowa

$\mathbb{1}_A(x)$ -funkcja charakterystyczna /indykator/ zbioru A

Uwaga:

Przy referowaniu prac innych autorów zachowywano zazwyczaj oryginalne oznaczenia,stąd pewne symbole tu objaśnione mogą się pojawiać w innym znaczeniu w trakcie cytatu.W takich przypadkach to odmienne znaczenie jest objaśnione w tekście.

1. WSTĘP

1.1 Wprowadzenie

Masywny przyczółek mostu drogowego jest nie tylko podporą przęsła skrajnego, lecz służy również jako mur oporowy, przytrzymujący czoło nasypu. Otaczający go ośrodek gruntowy decyduje o nośności podłoża, ale równocześnie stanowi obciążenie dla samego przyczółka. Stąd też fluktuacje losowe własności fizycznych i wytrzymałościowych gruntu mają bardzo duży wpływ na bezpieczeństwo takiej konstrukcji. Grunt jest ze swej natury ośrodkiem statystycznie niejednorodnym. Współczynniki zmienności poszczególnych parametrów geotechnicznych osiągają niekiedy znaczne wartości. To sugeruje, że właściwe podejście do badania stateczności masywnego przyczółka powinno opierać się na analizie probabilistycznej.

Analiza probabilistyczna może tu stawiać sobie różne cele. Bardzo często ma ona odpowiedzieć na pytanie w jaki sposób wyznaczać wartości obliczeniowe poszczególnych parametrów, tak aby prawdopodobieństwo utraty stateczności było mniejsze od określonego poziomu. Można także obliczać prawdopodobieństwo utraty stateczności /zniszczenia czy awarii/ i porównywać je z postulowaną wartością wynikającą z analizy ekonomicznej kosztów budowy i zniszczenia. Można też badać prawdopodobieństwo niezniszczenia konstrukcji w z góry określonym czasie jej eksploatacji.

Prace związane z analizą probabilistyczną masywnych przyczółków mostowych zostały podjęte w latach sześćdziesiątych przez Biernatowskiego [14, 15,16b] a podane tam propozycje wykorzystują metody linearyzacji Leviego i Rżanicyna [51, 95] . Pojawiają się jednak trudności, które wymagają prowadzenia dalszych badań nad tym zagadnieniem. Pierwszą taką trudnością jest fakt, że stosowane miary stateczności mają skomplikowane analityczne postaci/ w szczególności kryterium dotyczące wypierania gruntu spod przyczółka/. Trudność ta wzrasta wraz z ilością warstw geotechnicznych, które muszą być wzięte pod uwagę i powoduje, że obliczanie prawdopodobieństw utraty stateczności może odbywać się prawie wyłącznie metodami przybliżonymi. Metody przybliżone nie dają na ogół możliwości oszacowania popełnionego błędu. Interesujące jest pytanie, jakie relacje zachodzą między wynikami otrzymywanymi w poszczególnych metodach. Następna trudność wiąże się z wyborem odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla poszczególnych cech gruntowych. Wybór tych rozkładów opiera się zwykle na analizie laboratoryjnych badań poszczególnych cech. W tej sytuacji istnieje pewna dowolność w stosowaniu rozkładów. Nie ma też zgodności wśród badaczy, czy mają to być rozkłady o nośnikach ograniczonych, czy nie, jakkolwiek poszczególne parametry gruntowe przyjmują wartości z dość wąskich przedziałów. Dodatkowo dochodzą problemy związane ze zmiennością przestrzenną parametrów.

Ważnym zagadnieniem jest także ocena wpływu poszczególnych zmiennych losowych na prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przyczółek.

Innym ciekawym zagadnieniem jest zbadanie rozkładów zmiennych losowych, będących miarami stateczności, przyjmowanymi na przykład jako różnica lub iloraz wielkości reprezentujących wytrzymałość i obciążenie.

Wymienione problemy stanowią przykłady zagadnień związanych z probabilistyczną analizą stateczności przyczółka. Niektóre z nich zostaną podjęte w ramach niniejszej pracy.

1.2 Cel i zakres pracy

Podstawowym celem pracy jest podanie sposobu obliczania

prawdopodobieństwa utraty stateczności przez masywny przyczółek mostu drogowego, w sytuacji, gdy przeprowadzona jest geotechniczna analiza podłoża gruntowego. Zakłada się, więc, że znany jest układ warstw gruntowych oraz dysponuje się odpowiednią ilością wyników badań laboratoryjnych na próbach gruntowych, które pozwolą na zbadanie rozkładów prawdopodobieństwa /a przynajmniej momentów statystycznych/ parametrów niezbędnych do analizy. Ściślej chodzi tu raczej o wybór spośród istniejących metod najbardziej adekwatnej i przeprowadzenie tą metodą odpowiednich obliczeń. Ponadto pożądana jest taka metoda, która dawałaby możliwość oceny rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych przyjętych jako miary stateczności. Wobec tego w rozdziale 2-gim dokonuje się przeglądu kilku takich /znanych z literatury/ metod. Wybór padł na metodę symulacyjną, co podyktowane było bardzo skomplikowanymi wyrażeniami analitycznymi opisującymi miary stateczności, w które uwikłane były wyjściowe zmienne losowe, a także możliwością przybliżonego zbadania rozkładów prawdopodobieństwa tychże miar.
Miary stateczności a także schemat obliczeniowy przyjęto za pracami Biernatowskiego [14, 15, 22]. Schemat ten składa się z pięciu kryteriów - możliwości utraty stateczności, mianowicie: przesunięcia, obrotu wokół najbardziej obciążonej krawędzi podstawy, obrotu wokół powierzchni cylindrycznej, wystąpienia osuwiska i wyparcia gruntu spod przyczółka /rozdział 3/. Zagadnieniu wyboru odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla układu wejściowych zmiennych losowych poświęcono rozdział 4. W pracy analizuje się stateczność przede wszystkim z geotechnicznego punktu widzenia, w związku z tym za zmienne losowe przyjęto parametry gruntowe występujące w kryteriach stateczności, a więc w każdej warstwie gruntowej kąt tarcia wewnętrznego - ϕ, spójność - c / dla gruntów spoistych/ oraz ciężar objętościowy - γ. Dodatkową zmien-

ną losową stanowi reakcja przyczółka od losowych obciążeń mostu przejeżdżającymi pojazdami. Chodzi bowiem o stwierdzenie, czy losowe zmiany tej wielkości mają duży wpływ na prawdopodobieństwo utraty stateczności. Przedstawia się także własne propozycje opisu parametrów gruntowych rozkładami wielokątnymi, poparte wynikami testów statystycznych dla rzeczywistych badań tychże parametrów. Podstawową zaletą tych rozkładów jest ich przydatność do badań symulacyjnych ze względu na prosty i efektywny generator liczb losowych.

Korzystając z przedstawionych kryteriów przeprowadza się obliczenie prawdopodobieństw utraty stateczności dla prostych przypadków i przy pewnych upraszczających założeniach metodą bezpośredniego całkowania odpowiednich funkcji gęstości /całkowanie przybliżone-numeryczne/. Wyniki przedstawia się i komentuje w rozdziale 5. Następnym etapem jest budowa generatora liczb losowych o rozkładzie wielokątnym, wykorzystująca metodę odwracania dystrybuanty oraz budowa odpowiedniego programu na maszynę cyfrową, umożliwiającego obliczenie prawdopodobieństw stateczności we wszystkich pięciu przypadkach oraz wyznaczenie momentów statystycznych i rozkładów prawdopodobieństwa zmiennych losowych będących miarami stateczności w poszczególnych przypadkach /rozdział 6/. W oparciu o zbudowany program analizuje się serię przykładów pozwalających na stwierdzenie skuteczności metody oraz na zrealizowanie dodatkowych celów, którymi są: zbadanie wpływu losowości poszczególnych parametrów gruntowych na prawdopodobieństwo utraty stateczności i na rozkłady prawdopodobieństwa miar stateczności, a także na zbadanie wpływu losowości reakcji od obciążenia pojazdami na wyżej wymienione miary. Podaje się też pewne uwagi o wpływie typu rozkładów wyjściowych na uzyskiwane wyniki w kontekście zastosowania prostych rozkładów trójkątnych symetrycznych. Przykłady obliczeniowe i związane z nimi komentarze zawarte są w rozdziale 7. Jak w każdej metodzie przybliżonej także i tutaj istotną rolę odgrywa ocena błędów popełnionych w trakcie obliczeń. W pracy podejmuje się próbę takiej oceny poprzez oszacowanie niezbędnej liczby reali - zacji dla danego poziomu dokładności oraz analizę wpływu parametrów początkowych generatora,wprowadzonych w celu zapoczątkowania procesu symulacji,na uzyskane wyniki /rozdział 8/.

W celu porównania dla jednego z przykładów przeprowadza się obliczenia przy zastosowaniu metody linearyzacji Rżanicyna, która jest dosyć rozpowszechniona, ale może prowadzić do dość dużych błędów. Dodatkowo wykonuje się obliczenia korzystając z rozwi - nięć dystrybuanty w szereg względem pochodnych rozkładu normalnego /rozwinięcie Grama-Charliera i rozwinięcie Edgewortha/. Porównanie wyników prezentuje się w rozdziale 9.

Przeprowadzone analizy pozwoliły na wyciągnięcie szeregu wniosków o charakterze ogólno - poznawczym, które omówiono i zebrano w ostatnim rozdziale pracy.

Zagadnienia związane z określeniem dopuszczalnego ryzyka w oparciu o analizę ekonomiczną /por. np. [51, 146, 22] /, jak również problematyka związana z określeniem odpowiednich wartości obliczeniowych parametrów w zależności od przyjętego poziomu bezpieczeństwa /np. [86, 95] / nie stanowią przedmiotu niniejszej pracy. Podstawową tezę pracy można sformułować następująco:

Metoda symulacyjna stanowi dogodne narzędzie do wyznacza - nia prawdopodobieństw utraty stateczności masywnego przyczółka mostowego. Pozwala ona także na analizę wpływu losowej zmienności poszczególnych czynników na stateczność przyczółka. Przy stosowaniu tej metody pożytecznie jest korzystać z rozkładów wielokątnych jako rozkładów prawdopodobieństwa kąta tarcia wewnętrz - nego - $\varnothing$, spójności - c, oraz ciężaru objętościowego - γ .

2. NIEKTÓRE METODY OBLICZANIA PRAWDOPODOBIEŃSTW NIESPEŁNIANIA WARUNKU STATECZNOŚCI

2.1. Wprowadzenie

Zadania postawione w tej pracy mieszczą się w ramach teorii bezpieczeństwa konstrukcji. Probabilistyczne podejście do zagadnień bezpieczeństwa konstrukcji zostało zapoczątkowane pracami M.Maiera w 1926r. [81] , N.S.Strieleckiego w 1935r. [122] , M.Prota w 1936r. [108] , a w Polsce przez W.Wierzbickiego w 1936 [131] . Od tego czasu nastąpił intensywny rozwój teorii bezpieczeństwa konstrukcji opartej na bazie teorii prawdopodobieństwa i procesów stochastycznych. Równolegle rozwijała się matematyczna teoria niezawodności, której wywody stanowiły uzasadnienie przyjmowanych modeli i metod teorii niezawodności konstrukcji /por. [71] /.

We współczesnej teorii bezpieczeństwa konstrukcji ze względu na stosowane miary niezawodności można wyróżnić cztery poziomy obliczeń /podano za pracą [95] ,por. także [55] / :

a/ poziom pierwszy, gdzie miarą niezawodności jest współczynnik bezpieczeństwa

$$\Gamma = \frac{R}{S} \geqslant 1 \tag{2.1}$$

lub zapas bezpieczeństwa

$$Z = R - S \geqslant 0 \tag{2.2}$$

gdzie

R - nośność,

S - obciążenie;

b/ poziom drugi, w którym miarą bezpieczeństwa jest wskaźnik niezawodności określony następująco :

$$V_z^{-1} = \frac{\bar{Z}}{\sigma_z} \geqslant \beta \qquad (2.3)$$

lub

$$V_{\ln\Gamma}^{-1} = \frac{\ln\tilde{\Gamma}}{\sigma_{\ln\Gamma}} \geqslant \beta \qquad (2.4)$$

gdzie

$\bar{Z}$ - wartość oczekiwana zapasu bezpieczeństwa,

$\tilde{\Gamma}$ - wartość oczekiwana współczynnika bezpieczeństwa,

σ_z, $\sigma_{\ln\Gamma}$ - odchylenie standardowe odpowiednio Z i $\ln\Gamma$,

β - postulowany wskaźnik niezawodności;

c/ dla poziomu trzeciego przyjmuje się następujące miary niezawodności :

$$F_Z(0) = \int_{-\infty}^{0} g_Z(x)\, dx \leqslant q \qquad (2.5)$$

lub

$$F_\Gamma(1) = \int_{0}^{1} g_\Gamma(x)\, dx \leqslant q \qquad (2.6)$$

gdzie

F_Z, F_Γ - dystrybuanty rozkładów zapasu bezpieczeństwa Z i współczynnika bezpieczeństwa Γ , zaś

$g_Z(x)$, $g_\Gamma(x)$ - funkcje gęstości rozkładów zapasu bezpieczeństwa Z i współczynnika bezpieczeństwa Γ,

q - norma prawdopodobieństwa

d/ poziom czwarty /por. [86] /, w którym miary bezpieczeństwa określamy wzorami :

$$r_R(x) = \frac{g_R(x)}{1-F_R(x)} \leqslant \frac{1}{c_o \cdot R} \qquad (2.7)$$

$$r_S(x) = \frac{g_S(x)}{F_S(x)} \leqslant \frac{1}{c_o \cdot S} \qquad (2.8)$$

w których:

$F_R(x)$, $F_S(x)$ - dystrybuanty rozkładów prawdopodobieństw nośności i obciążeń uogólnionych;

$g_R(x)$, $g_S(x)$ - gęstości powyższych rozkładów

$r_R(x)$, $r_S(x)$ - ryzyko przekroczenia wartości R i S odpowiednio

c_o - współczynnik klasy bezpieczeństwa

Ujęcie problemu w niniejszej pracy najbliższe jest trzeciemu poziomowi obliczeń.

Prawdopodobieństwo bezawaryjnej pracy konstrukcji (niezawodność) oblicza się ze wzoru (2.5), który może być także zapisany w postaci:

$$p = \iint_{S<R} g(R,S)\, dRdS \tag{2.9}$$

Autor monografii [86] wprowadza rozróżnienie pomiędzy stanem bezawaryjnym a stanem bezpiecznym, przy czym prawdopodobieństwo tego drugiego (bezpieczeństwo) dane jest wzorem (por. [88]):

$$p' = \int_{-\infty}^{S_{nom}} \int_{R_{nom}}^{+\infty} g(R,S)\, dRdS \tag{2.10}$$

(R_{nom}, S_{nom} - wartości graniczne odpowiednio R i S)

W niniejszej pracy wykorzystywany jest wzór (2.9). Bowiem w warunkach geotechnicznych rozdzielenie nośności od obciążeń okazuje się trudne, gdyż warstwa gruntowa przenosząca obciążenia sama częstokroć stanowi znaczne obciążenie konstrukcji.

W związku z tym obciążenia i nośności na ogół nie mogą być uznane za niezależne zmienne losowe /por. uwagi w podrozdziałach 3.6 i 3.7/. Ponadto wzajemne zależności pomiędzy obciążeniami przyczółka a nośnością graniczną stwarzają komplikacje w określeniu wartości R_{nom} oraz S_{nom}.
Niech kryterium bezpieczeństwa /stateczności/ ma postać :

$$f(X_1, X_2, \dots X_n) \geqslant 0 \tag{2.11}$$

lub

$$\frac{f_1(X_1, X_2, \dots X_n)}{f_2(X_1, X_2, \dots X_n)} \geqslant 1 , \tag{2.12}$$

gdzie

$X_1, X_2, \dots X_n$ - pewien układ zmiennych losowych określonych na przestrzeni (Ω, Σ, P)

(Ω - przestrzeń probabilistyczna,
Σ - σ- ciało podzbiorów,
P - prawdopodobieństwo),

wybrany stosownie do rozpatrywanego zagadnienia. W zagadnieniach związanych z bezpieczeństwem konstrukcji opartych na podłożu gruntowym takim przykładowym układem zmiennych losowych są cechy gruntu tj. wilgotność naturalna, stopień plastyczności, ciężary objętościowe, stopień zagęszczenia, spójność, kąt tarcia wewnętrznego itp. i cechy konstrukcji : materiał konstrukcyjny, kształt, połączenia elementów oraz obciążenia : zewnętrzne /wiatr, śnieg, itp./ i wewnętrzne /użytkowe, termiczne, itp./.
Zatem występuje tu n - wymiarowy wektor losowy $/X_1, X_2, \dots X_n/$.
Dalej zakłada się ,że rozkład tego wektora, który jest pewną miarą

probabilistyczną w $\mathbb{R}^n$, jest absolutnie ciągły względem miary Lebesgue'a w $\mathbb{R}^n$, czyli istnieje jego gęstość, która oznaczana będzie przez $g(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Kolejnym założeniem jest przyjęcie, że funkcje f, f_1 i f_2 występujące we wzorach /2.11/ i /2.12/ są mierzalne po borelowsku. Dzięki mierzalności f wielkość określona wzorem

$$Y = f(X_1, \dots, X_n) \tag{2.13}$$

jest zmienną losową $Y : \Omega \to \mathbb{R}$.

W dalszej części tego rozdziału będzie wykorzystywana jedynie nierówność /2.11/. Jakkolwiek stosowanie warunku bezpieczeństwa w postaci /2.12/ bywa czasem wygodniejsze.
Po tych wstępnych uwagach i założeniach zaprezentowanych zostanie kilka metod obliczania prawdopodobieństwa spełniania nierówności /2.11/.

2.2. Metoda dokładna

Z rachunku prawdopodobieństwa wiadomo, że prawdopodobieństwo spełnienia nierówności /2.11/ wyraża się wzorem :

$$P\left\{f(X_1, X_2, \dots X_n) \geq 0\right\} = \int\limits_{\left\{\omega \in \Omega : f(X_1(\omega), \dots X_n(\omega)) \geq 0\right\}} dP(\omega) = \tag{2.14}$$

$$= \int \dots \int\limits_{\left\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n : f(x_1, \dots x_n) \geq 0\right\}} g(x_1, x_2, \dots x_n)\, dx_1 \dots dx_n$$

Oczywiście prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego jest równe :

$$P\left\{f\left(X_1,X_2,\ldots X_n\right)<0\right\}=\underset{\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n:f\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)<0\right\}}{\int\int\ldots\int} g\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)dx_1\ldots dx_n \qquad (2.15)$$

Prawdopodobieństwo to bywa czasem nazywane prawdopodobieństwem katastrofy lub prawdopodobieństwem awarii /probability of failure/. Jeżeli zmienne losowe $X_1,X_2,\ldots,X_n$ są stochastycznie niezależne, to wzór /2.14/ przyjmuje postać :

$$P\left\{f\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)\geq 0\right\}=\underset{\left\{\bar{x}\in\mathbb{R}^n:f\left(x_1,\ldots x_n\right)\geq 0\right\}}{\int\int\ldots\int} g_1(x_1)\cdot g_2(x_2)\cdot\ldots\cdot g_n(x_n)dx_1\ldots dx_n \qquad (2.16)$$

W niektórych przypadkach udaje się ex-plicite znaleźć gęstość g_Y zmiennej losowej $Y(\omega)=f\left(X_1(\omega),X_2(\omega),\ldots,X_n(\omega)\right)$ i wówczas :

$$P\left\{f\left(X_1,X_2,\ldots,X_n\right)\geq 0\right\}=\int_0^{+\infty} g_Y(x)\,dx \qquad (2.17)$$

Jeśli f jest funkcją tylko jednej zmiennej, czyli $Y=f\left(X_1\right)$ i ponadto f jest klasy C^1 oraz $f'\neq 0$ w rozpatrywanym obszarze, to pomocne jest następujące twierdzenie :

Aby znaleźć $g_Y(y)$ dla danego y, należy rozwiązać równanie

$$y=f(x) \qquad (2.18)$$

wyrażając x przez y. Jeśli $x_1,x_2,\ldots,x_n\ldots$ są wszystkimi pierwiastkami rzeczywistymi równania :

$$y=f\left(x_1\right)=\ldots=f\left(x_n\right)=\ldots,\ \text{to}:$$

$$g_Y(y) = \frac{g_X(x_1)}{|f'(x_1)|} + \quad + \frac{g_X(x_n)}{|f'(x_n)|} + \ldots \tag{2.19}$$

gdzie:

$g_X(x)$ - gęstość zmiennej losowej X , zaś

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Jeżeli dla pewnego y równanie nie ma pierwiastków rzeczywistych, to

$$g_Y(y) = 0 \tag{2.20}$$

Prosty dowód tego twierdzenia można znaleźć w [104].
Twierdzenie to można uogólnić na przypadek wielu zmiennych, lecz wówczas posługiwanie się nim staje się utrudnione ze względu na występujące całki wielokrotne we wzorze na gęstość.
Dla szczególnych przypadków funkcji f oraz szczególnych rozkładów zmiennych $X_1, X_2, \ldots, X_n$ znane są rozkłady zmiennej Y. Przypadki te są szczegółowo omówione w podstawowych podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, np. [53 , 12 , 34 , 56 , 104] .
W większości przypadków obliczenie prawdopodobieństwa ze wzorów /2.14/ lub /2.15/ w sposób dokładny okazuje się niemożliwe ze względu na dużą ilość zmiennych losowych i skomplikowaną formułę określającą zapas bezpieczeństwa.
Uciekanie się do metod całkowania przybliżonego na ogół nie daje oczekiwanego rezultatu, gdyż błędy przy numerycznym obliczaniu całek wielokrotnych mogą być znaczne, co przy małych zwykle wartościach prawdopodobieństwa /2.15/ prowadzi do niezbyt pewnych rezultatów.

W związku z tym od dawna już proponowane są pewne przybliżone metody obliczania tych prawdopodobieństw. Metod tych jest w chwili obecnej już wiele. Niżej podano kilka przykładów takich metod.

2.3. Linearyzacja Rżanicyna

Istotny rozwój metod przybliżonych rozpoczął się pod koniec lat czterdziestych. Zapoczątkowany został pracami Strieleckiego [123] , a następnie Rżanicyna [112 , 113 , 114] . Drugi z tych autorów opracował metodę nadającą się do skomplikowanych funkcyjnie warunków bezpieczeństwa.

Założył on, że zmienne $X_1,..,X_n$ w warunku /2.11/ posiadają rozkłady normalne o znanych parametrach, zaś funkcja f z tego warunku rozwijana była w szereg Taylora w otoczeniu wartości oczekiwanych, przy czym brane były pod uwagę jedynie wyrazy liniowe tego rozwinięcia :

$$f(x_1,x_2,..,x_n) \approx f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,..,\bar{x}_n) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{X}_1,\ldots\bar{X}_n} \cdot (x_i - \bar{X}_i) \qquad (2.21)$$

gdzie $\bar{X}_i = EX_i$ /wartość oczekiwana zmiennej X_i/. Przy takim założeniu wartość oczekiwana i odchylenie standardowe zmiennej $Y = f(X_1,..,X_n)$ dane są zależnościami

$$EY = E\left[f(X_1,..,X_n)\right] \approx f(\bar{X}_1,..,\bar{X}_n) \qquad (2.22)$$

$$\sigma_Y \approx \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma_i^2 \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{X}_1,\ldots\bar{X}_n}\right)^2} \qquad (2.23)$$

,
gdzie σ_i oznacza odchylenie standardowe zmiennej X_i

Jeśli zmienne $X_1,..,X_n$ są stochastycznie niezależne, to oczywiście przybliżona zmienna Y ma rozkład normalny o parametrach danych przez /2.22/ i /2.23/. Wówczas prawdopodobieństwo spełnienia nierówności przeciwnej do (2.11) wynosi:

$$P\left\{f\left(X_1,..,X_n\right)<0\right\} = \frac{1}{\sigma_Y\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}\exp\left[-\frac{(x-EY)^2}{2\sigma_Y^2}\right]dy = \qquad (2.24)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{-\frac{EY}{\sigma_Y}}\exp\left[-\frac{z^2}{2}\right]dz \,.$$

Jeśli żądamy, aby prawdopodobieństwo spełnienia nierówności /2.11/ było nie mniejsze niż p, to otrzymuje się następujący warunek bezpieczeństwa /por. [22] lub [51] /:

$$f\left(\bar{x}_1,\bar{x}_2,..,\bar{x}_n\right) - \lambda_p\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n}\right)^2} \geqslant 0 \,, \qquad (2.25)$$

gdzie λ_p - kwantyl rzędu p standaryzowanego rozkładu normalnego. Podobnie można postąpić w przypadku skorelowanych zmiennych z tym, że zmienia się wówczas wzór na wariancję zmiennej Y i ma postać :

$$\sigma_Y^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n}\right)^2\sigma_i^2 + 2\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n}\varrho_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\bigg|_{\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n}\right)\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\bigg|_{\bar{x}_1,\dots\bar{x}_n}\right) \qquad (2.26)$$

gdzie ϱ_{ij} jest współczynnikiem korelacji zmiennych X_i, X_j, czyli :

$$\varrho_{ij} = \frac{E\left[\left(X_i-\bar{x}_i\right)\cdot\left(X_j-\bar{x}_j\right)\right]}{\sigma_i\cdot\sigma_j} \qquad (2.27)$$

W przypadku stosowania tej metody zwykle z góry zakłada się, że Y ma rozkład normalny /nie wnikając często w rozkłady X_i/ o parametrach danych wzorami (2.22) i (2.23) .

Spotyka się także prace, np. [13] w których rozkład Y jest rozkładem dwuparametrowym, innym niż normalny, ale jego parametry wyznaczone są opisaną wyżej metodą.

Metoda Rżanicyna jest bardzo rozpowszechniona, a zastosowana linearyzacja wokół wartości średnich stała się podstawą rozwijanej przez Cornella /por. [44] / metody FOA /first order uncertainty analysis/. Metoda FOA rezygnuje z badania rozkładów zmiennych losowych, ograniczając się jedynie do wyznaczenia pierwszych dwóch momentów. Można wymienić sporo prac wykorzystujących linearyzację Rżanicyna w zagadnieniach geotechnicznych. Przykładowo można tu wskazać prace takich autorów jak : Alonso [1] , Biernatowski [15] Cornell [143] czy Förster i Weber [57] .

Podstawową wadą opisywanego wyżej sposobu jest fakt, że w przypadku nieliniowych funkcji f może ona prowadzić do błędnych rezultatów /por. [38] i [54] /. Błędy mogą też pojawić się w wyniku odstępstw od rozkładów normalnych, /dla rozkładów normalnych, przy założeniu liniowej funkcji f - metoda jest dokładna/. Dodatkowo nie ma ona własności niezmienniczości ze względu na kryterium bezpieczeństwa /por. [95] /. I tak np. warunki /2.11/ i /2.12/ mogą być przy założeniu odpowiednich funkcji f_1, f_2 równoważne, zaś w wyniku zastosowania metody Rżanicyna uzyskane prawdopodobieństwa nie są na ogół równe.

2.4. Metody związane z linearyzacją Leviego

R. Levi / [72 , 73] /podobnie do Rżanicyna posłużył się liniowym przybliżeniem funkcji f, wynikającym z rozwinięcia taylorowskiego, ale rozwinięcie to następuje w punktach, które na ogół różnią się od wartości oczekiwanych zmiennych X_i.

Metodę Leviego w polskiej literaturze przypomniał /wraz z wprowadzeniem pewnych uściśleń/ Cz.Eimer [51] . Można ją streścić następująco :

a/ Dokonuje się takiej transformacji współrzędnych /o ile jest ona możliwa/ aby :

$$F_i(x) = F_0(\xi_i) \quad \text{- dla każdego } x,$$

F_i - dystrybuanta zmiennej X_i,

F_0 - dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego.

b/ Poszukiwane prawdopodobieństwo w nowych zmiennych wyraża się wzorem :

$$P\left\{f(X_1,\dots,X_n)<0\right\} = \frac{1}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^n}\int\limits_{B}\!\dots\!\int \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\xi_k^2\right) d\xi_1\dots d\xi_n \qquad (2.28)$$

$$B = \left\{(\xi_1\dots\xi_n)\in\mathbb{R}^n : h(\xi_1,\dots\xi_n)<0\right\}$$

przy czym :

$$h(\xi_1,\dots\xi_n) \stackrel{df}{=} f\left[x_1(\xi_1),\dots x_n(\xi_n)\right]$$

c/ O wartości całki z prawej strony /2.28/ decydują wartości funkcji podcałkowej w pobliżu jej maksimum, które znajduje się poszukując minimum funkcji $\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^2$ dla punktów leżących na brzegu obszaru B. Minimum to przedstawia kwadrat najmniejszej odległości obszaru całkowania od początku układu współrzędnych w przestrzeni n - wymiarowej $/\xi_1\dots\xi_n/$. Poszukiwanie minimum prowadzi do następującego układu równań :

$$\begin{cases} \dfrac{\xi_1}{\frac{\partial h}{\partial \xi_1}} = \dfrac{\xi_2}{\frac{\partial h}{\partial \xi_2}} = \dots = \dfrac{\xi_n}{\frac{\partial h}{\partial \xi_n}} \\ h(\xi_1 \dots \xi_n) = 0 \end{cases} \qquad (2.29)$$

d/ Oznaczając rozwiązanie tego układu przez $(\xi_{01}, \dots \xi_{0n})$ /współrzędne te nazywa Eimer wartościami krytycznymi/, otrzymuje się odległość obszaru B od początku układu współrzędnych w postaci:

$$\beta_0 = \sqrt{\sum_{K=1}^{n} \xi_{0K}^2} \qquad (2.30)$$

Rozwijając funkcję f w szereg Taylora ograniczony do składników liniowych wokół wartości krytycznych, uzyskuje się następujące oszacowanie dla poszukiwanego prawdopodobieństwa :

$$P\left\{f\left(X_1 \dots, X_n\right) < 0\right\} = F_0\left(-\beta_0\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \xi_{0i}^2}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \qquad (2.31)$$

Metodę Leviego szczególnie łatwo można zastosować, gdy zmienne losowe mają rozkłady normalne albo lognormalne. W innych przypadkach pojawiają się znaczne trudności rachunkowe przy poszukiwaniu wartości krytycznych. Można stosować wówczas procedury iteracyjne /por. [95] /.

Metoda opisana wyżej była stosowana do oceny stateczności fundamentów i zboczy przez K.Biernatowskiego [14, 15, 18] .

Szacowanie odległości β_0 /wzór(2.30)/ zbioru odpowiadającego awarii /failure region/, oznaczanego wyżej przez B, od początku układu współrzędnych wykorzystali Hasofer i Lind [62] .

Podali oni kryterium oceny bezpieczeństwa konstrukcji wykorzystujące β_0 oraz wartości średnie i odchylenia standardowe poszczególnych zmiennych X_i /i=1,...,n/.

W wielu przypadkach kryterium to sprowadza się do wzoru /2.3/. Autorzy ci przyjmują dla β_o nazwę wskaźnika niezawodności /reliability index of the design/.

W zbiorowym opracowaniu [55] z 1976r. dotyczącym tzw. metod niezawodności pierwszego rzędu sprowadzono ocenę niezawodności do następującego toku postępowania :

a/ dokonać transformacji zmiennych $X_1,..,X_n$ na standardowe nieskorelowane zmienne gaussowskie $Y_1,...,Y_n$ /zmienne skorelowane można przekształcić na nieskorelowane przy użyciu liniowej transformacji ortogonalnej - szczegóły np. w [95] § 5.3 lub [62] Appendix II/

b/ znaleźć odległość β_o zbioru odpowiadającego awarii /w przestrzeni nowych zmiennych $Y_1,...,Y_n$/ od początku układu współrzędnych.

Prawdopodobieństwo awarii szacuje się ze wzoru:

$$P\{f(X_1,...,X_n) < 0\} \approx F_o(-\beta_o) \qquad (2.32)$$

Można wykazać /por. np. [110] /, że jeżeli zbiór odpowiadający awarii jest zbiorem wypukłym w przestrzeni nieskorelowanych zmiennych gaussowskich, to :

$$F_o(-\beta_o) \geqslant P\{f(X_1,..,X_n) < 0\} \qquad (2.33)$$

przy czym dla funkcji f liniowej i $X_1,...X_n$ - niezależnych zmiennych gaussowskich zachodzi równość.

Widać, że zasadniczy sposób **postępowania** bardzo przypomina znaną już przecież od wielu lat metodę Leviego.

Należy jednak dodać, że zaproponowano też ([55]) pewne nowe metody poszukiwania β_0 /a w zasadzie punktu realizującego tę odległość/.

2.5. Wykorzystanie metody kolokacji

Do znalezienia prawdopodobieństwa katastrofy wykorzystać można tzw. metodę kolokacji. Metoda ta opracowana przez J.Murzewskiego /por. np. [94, 95, 91] wywodzi się z graficznej metody siatek probabilistycznych. Istotą metody jest zastąpienie wyjściowego rozkładu prawdopodobieństwa przez inny rozkład wygodny z punktu widzenia celów obliczeniowych, a więc najczęściej : rozkład normalny, lognormalny czy jeden z rozkładów ekstremalnych. Przykładowo transformując rozkład o dystrybuancie $F(x)$ na pewien trójparametrowy rozkład o dystrybuancie $F_1^{(i)}(x, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$ żąda się aby w pewnym aproksymacyjnym punkcie kolokacji x^* dystrybuanty F i F_1 były sobie równe wraz z dwiema pierwszymi pochodnymi, czyli :

$$F^{(i)}(x^*) = F_1^{(i)}(x^*, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \qquad \text{dla } i = 0,1,2 \tag{2.34}$$

Rozwiązanie układu /2.34/ pozwala wyznaczyć poszukiwane parametry dystrybuanty F_1 /szczegóły wraz z wykresami funkcji pomocniczych można znaleźć w [94, 95, 92]/.
Dla znalezienia prawdopodobieństwa awarii należy rozkład każdej ze zmiennych X_i z warunku bezpieczeństwa /2.11/ zamienić na rozkład normalny stosując kolokację w pewnym punkcie aproksymacyjnym $\bar{x}_0^* = (x_1^0, x_2^0, .., x_n^0)$. Jednocześnie warunek bezpieczeństwa /2.11/ linearyzuje się /przez rozwinięcie taylorowskie/ wokół punktu x_0, a następnie oblicza się pierwsze przybliżenie wskaźnika niezawodności :

$$\beta_0' = \frac{\left(\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{x}_0^*}\right]\left(\mu_{x_i} - x_i^o\right)\right) + f\left(\bar{x}_0^*\right)}{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{x}_0^*}\right)\sigma_{x_i}\right]^2\right\}^{1/2}} \qquad (2.35)$$

(por. Lind-Hasofer [62]).

gdzie : μ_{x_i} jest wartością oczekiwaną rozkładu normalnego uzyskanego drogą kolokacji z rozkładu X_1, zaś

σ_{x_i} odchyleniem standardowym tegoż rozkładu normalnego.

Z kolei otrzymuje się następne przybliżenie punktu aproksymacyjnego :

$$\bar{x}_1^* = (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$$

$$x_i^1 = \mu_{x_i} - \delta_i \beta' \sigma_{x_i} \ ; \ i = 1, \ldots n \qquad (2.36)$$

gdzie :

$$\delta_i = \frac{\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{x}_0^*}\right] \cdot \sigma_{x_i}}{\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{\bar{x}_0^*} \cdot \sigma_{x_i}\right]^2\right\}^{1/2}} \qquad i=1,\ldots n \qquad (2.37)$$

W nowym punkcie aproksymacyjnym $\bar{x}_1^*$ stosuje się ponownie kolokację wyjściowego rozkładu. Procedurę powtarza się aż do spełnienia z góry określonego kryterium zbieżności dla punktu aproksymacyjnego. Mając końcowe przybliżenie oblicza się prawdopodobieństwo awarii wg wzoru /2.32/.

Metodę identyczną w idei lecz mniej ogólną i różniącą się od powyższej w szczegółach realizacyjnych zaproponowali autorzy pracy [110]. Metoda ta jest nazywana w literaturze zachodniej algorytmem Rackwitza-Fiesslera /R-F/. Algorytm R-F dotyczy jedynie zamiany rozkładu wyjściowego na rozkład normalny. Pewną modyfikację /rozszerzenie/ tego algorytmu zaproponowali Chen i Lind /por. [41] /, w której zastosowali aproksymację dystrybuantą normalną pomnożoną przez pewną stałą /kolokacja o trzech parametrach - por. wzór (2.34)/. Podali też interesującą aproksymację funkcji pomocniczej służącej do wyznaczania parametrów poszukiwanego rozkładu normalnego. Algorytm Rackwitza-Fiesslera znalazł już zastosowanie w praktyce do obliczania prawdopodobienstwa awarii określonych konstrukcji. Przykładowo można tu wymienić prace Madsena [80], Bjeragera i Skova [[illegible]]

2.6. Inne propozycje

Celem dokładniejszego oszacowania prawdopodobieństwa katastrofy autorzy pracy [54] zastosowali rozwinięcie Taylora funkcji f w warunku /2.11/ wokół punktu aproksymacyjnego z uwzględnieniem składników zawierających drugie pochodne. Podejście takie napotyka jednak na duże trudności ze względu na pojawianie się liniowych kombinacji niecentralnych rozkładów χ- kwadrat, których rozkłady w jawnej postaci można podać jedynie w szczególnych przypadkach. Znajomość tych rozkładów jest niezbędna dla obliczenia prawdopodobieństwa awarii. Autorzy zwracają uwagę na fakt, że różnica pomiędzy oszacowaniem liniowym a kwadratowym zależy w bardzo dużym stopniu od krzywizny brzegu $\{\bar{x}: f(x_1, .. x_n) = 0\}$ w otoczeniu punktu aproksymacyjnego. Stąd oszacowanie liniowe może dawać duże błędy.

Tę ostatnią ideę podjął K.Breitung, który w pracach [37] i [38] podał przybliżony wzór na prawdopodobieństwo katastrofy. Breitung nie korzysta z rozwinięcia Taylora, lecz bada krzywizny brzegu $\{\bar{x} : f(x_1,..,x_n) = 0\}$ w kierunkach wyznaczonych przez wektory $\{e_i : i=1,..,n\}$, czyli jednostkowe wektory w kierunkach osi $\{X_i : i=1,..,n\}$.
Wzór ten dla przypadku, gdy na brzegu $\{\bar{x} : f(x_1,..,x_n) = 0\}$ istnieje dokładnie jeden punkt realizujący odległość β_0, ma następującą postać :

$$P\{f(X_1,..X_n) < 0\} \approx F_0(-\beta_0) \prod_{i=1}^{n-1} (1-k_i)^{-\frac{1}{2}} \qquad (2.38)$$

gdzie k_i - jest krzywizną w kierunku wektora e_i. Inne przypadki i dowody wzorów można znaleźć w pracach [37] i [38].
Omówione w niniejszym rozdziale metody dają z większą lub mniejszą dokładnością /która to dokładność jest zwykle trudna do oszacowania/ odpowiedź na pytanie, jakie jest prawdopodobieństwo katastrofy /awarii/.
Z probabilistycznego punktu widzenia pełny obraz zjawiska losowego znany jest dopiero wtedy, gdy znany jest rozkład danej zmiennej losowej.
Może się bowiem zdarzyć, że istotna jest nie tylko znajomość prawdopodobieństwa katastrofy, lecz także np. momenty zmiennej Y /Y- jest tu rozumiana jako zapas bezpieczeństwa/, lub nawet kształt funkcji gęstości. W przypadku, gdy zmienna losowa Y dana jest skomplikowaną zależnością od zmiennych $X_1,..,X_n$, praktycznie jedyną metodą przybliżonego wyznaczenia jej gęstości jest opisana niżej i zastosowana w tej pracy metoda symulacyjna.

2.7. Metoda symulacyjna

Metody symulacyjne /zwane też metodami Monte Carlo/ znane są od dawna i wykorzystywane nie tylko do opisu zjawisk losowych, lecz także typowo deterministycznych /jak np. obliczanie numeryczne całek/. Opisy tych metod można znaleźć w wielu pozycjach literaturowych, np. [140 , 142 , 107] . W przypadku niniejszej pracy sposób zastosowania metody symulacyjnej jest następujący :

A. Wygenerowanie odpowiedniej ilości liczb pseudolosowych z rozkładu jednostajnego na odcinku $[0,1]$.

B. Dla każdego i, $i=1,..,n$ wygenerowanie /z wykorzystaniem liczb uzyskanych w A/ liczby pseudolosowej z rozkładu jaki posiada zmienna X_i.

C. Podstawienie wygenerowanych /zgodnie z B/ liczb pseudolosowych do wzoru $Y = f(x_1,..,x_n)$, da liczbę pseudolosową z nieznanego rozkładu Y.

D. Przeprowadzenie dużej liczby operacji A-C pozwoli otrzymać histogram częstości występowania liczb pseudolosowych z rozkładu Y dla z góry zadanych przedziałów prostej rzeczywistej. Będzie to aproksymacja gęstości rozkładu Y.

E. Zsumowanie częstości dla przedziałów z lewej strony zera da w przybliżeniu poszukiwane prawdopodobieństwo awarii

$$P\{f(X_1,..,X_n)<0\}$$

Znane są przykłady zastosowania metod symulacyjnych w zagadnieniach geotechnicznych. Odpowiednie przykłady takich prac związane ze znajdowaniem rozkładu współczynnika pewności dla zboczy [67, 99] współczynników parcia [117] i nośności podłoża [83] zostaną podane w rozdziale 3.

3. SCHEMAT OBLICZENIOWY MASYWNEGO PRZYCZÓŁKA MOSTOWEGO

3.1 Uwagi wstępne

Zostaną tu przedstawione kryteria opisujące możliwość utraty stateczności przez masywny przyczółek mostowy. Na marginesie tychże kryteriów podane będą informacje o znanych z literatury przykładach probabilistycznej analizy danego problemu.

Jako miary stateczności przyjęto zgodnie z propozycjami zawartymi w [22]:

a/ zapas stateczności:

$$Z = T - U \tag{3.1}$$

gdzie: T - wypadkowa wszystkich sił /lub momentów sił/ przeciwdziałających utracie stateczności; U - wypadkowa sił /momentów/ powodujących utratę stateczności,

b/ współczynnik pewności /bezpieczeństwa/, który w literaturze geotechnicznej często bywa też nazywany wskaźnikiem stateczności /por. [22]/:

$$S = \frac{T}{U} \tag{3.2}$$

/oznaczenia jak wyżej/.

Miary powyższe są analogiczne do Z i Γ określonych wzorami (2.2) oraz (2.1).

Oczywiście przy badaniu stateczności korzysta się zazwyczaj z jednej z podanych miar (3.1) lub (3.2). Zagadnienie wyboru jednej z nich w zależności od badanej sytuacji nie będzie tu szerzej dyskutowane. W rozważaniach probabilistycznych często o tym wyborze decydują typy rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych. W przykładach obliczeniowych /rozdział 7 / stosowane są obydwie miary dla podkreślenia, że opracowana tu metoda dopuszcza posługiwanie się zarówno jedną jak i drugą miarą.

W związku z losowym charakterem T oraz U poszukiwane będzie następujące prawdopodobieństwo /utraty stateczności/:

$$P\{Z < 0\} = P\{S < 1\} \tag{3.3}$$

Rozpatrywany tu schemat utraty stateczności przez przyczółek zaczerpnięty został z pracy [14]. Sprowadza się on do wyspecyfikowania pięciu przypadków, z których każdy powoduje inny mechanizm utraty stateczności. Tymi przypadkami są:

a/ przesunięcie przyczółka /rys. 3.2 /,

b/ obrót przyczółka wokół dolnej krawędzi podstawy /rys. 3.3 /,

c/ obrót wokół powierzchni cylindrycznej /rys. 3.5/,

d/ powstanie uskoku naziomu wzdłuż najniekorzystniejszej powierzchni poślizgu /rys. 3.6/,

e/ wypieranie gruntu spod podstawy przyczółka /rys. 3.7/.

Zakłada się, że utrata stateczności ma miejsce wtedy, gdy wystąpi co najmniej jeden z przedstawionych wyżej przypadków.

Jest rzeczą jasną, że przyjęcie takiego schematu stanowi pewne uproszczenie. Na ogół bowiem w sytuacji utraty stateczności przez przyczółek występuje jednocześnie kilka spośród omówionych wyżej przypadków. Obrót łączny się zwykle z wyparciem pewnych mas gruntu, a często występuje także przesunięcie. Oprócz tego z przypadkiem b/ można mieć do czynienia przy posadowieniu na gruntach praktycznie nieodkształcalnych, natomiast z przypadkiem c/ - dla gruntów niespoistych w stanie luźnym, lub spoistych w stanie plastycznym. Idealnym rozwiązaniem byłoby tu jednolite i konsekwentne podejście oparte na teorii stanów granicznych, opisujące globalny stan naprężenia i odkształcenia /por. [17] /. Jak dotąd jednak nie istnieje opis spełniający ten warunek, który równocześnie nadawałby się do przeprowadzenia analizy probabilistycznej.

Decydując się na przyjęty w pracy schemat należy także pamiętać, że stateczność przyczółka należy sprawdzać nie tylko dla fazy jego eksploatacji, lecz także w trakcie budowy obiektu. Wiąże się to z różnymi możliwymi schematami obciążeń. Przykładowo autor [98] sugeruje tę analizę dla trzech następujących układów obciążeń:

- przyczółek i nasyp wybudowane, przęsła nie ma, obciążenia ruchome na naziomie nasypu;
- budowa mostów i dojazdów ukończona, przęsło obciążone, uwzględniona siła hamowania (zaczepiona na wysokości przegubu łożyska).

Probabilistyczną analizą masywnych przyczółków mostowych zajmował się Biernatowski w pracach [15] i [16 b]. Autor ten rozpatrywał w zasadzie dwie sytuacje. Pierwsza z nich to przypadek, gdy wszystkie zmienne losowe miały rozkłady normalne. Wówczas stosowano metodę linearyzacji Rżanicyna, dochodząc do warunku bezpieczeństwa typu (2.25). W drugim przypadku przyjmowano, że zmienne losowe mają rozkłady lognormalne i stosowano linearyzację Leviego. Dokładne określenie wartości krytycznych w tej metodzie okazało się niemożliwe, wobec tego proponowano metodę iteracyjną. Dla rozpatrywanych sytuacji autor wyznaczył pierwsze przybliżenia tych wartości i przyjął je jako wielkości obliczeniowe, znajdując w końcowym etapie współczynniki bezpieczeństwa. W przykładach tych zakładano, że obciążenie pojazdami jest zdeterminowane i nie zmienia się losowo.

Jak już powiedziano przyczółek mostu belkowego jest nie tylko podporą przęsła skrajnego, lecz również służy jako mur oporowy, podtrzymujący podtrzymujący czoło nasypu drogowego. Tak więc analiza stateczności przyczółka zawiera w sobie analizę stateczności konstrukcji oporowej, dodatkowo uwzględniając także obciążenie przęsłem i siły związane z ruchem pojazdów na moście oraz na naziomie nasypu drogowego. Probabilistyczną analizę stateczności murów oporowych przeprowadził Bielski w pracy [13]. Analiza ta zawierała jedynie kryteria a, b i e /poprzednio opisane/. Do obliczenia wartości oczekiwanej i wariancji zapasu stateczności zastosowano linearyzację Rżanicyna.

Przyjmując, że zapas stateczności ma rozkład normalny o wyliczonej wartości oczekiwanej i wariancji, znaleziono prawdopodobieństwa zachowania stateczności przez mur oporowy w przypadkach a, b oraz e.

3.2 Obciążenia przyczółka

Uwzględniono następujące obciążenia pionowe:

N_q - ciężar własny przyczółka /wielkość nielosowa/,[1/]

N_{p1} - losowa reakcja przyczółka od obciążeń pojazdami na przęśle mostu,

N_{p2} - reakcja od ciężaru własnego belki przęsłowej /wielkość nielosowa/,[1/]

N_3 - ciężar gruntu na "odsadzkach" przyczółka /o ile występują/ - zmienna losowa.[1/]

Równomierne obciążenie naziomu na dojeździe do mostu rozdzielono na część stałą związaną np. z ciężarem nawierzchni drogowej $-q_o$ oraz część losową będącą konsekwencją ruchu pojazdów - q_1.
Z reakcji N_{p1} oblicza się intensywność obciążenia na całym przęśle i taką samą przyjmuje się dla naziomu, czyli:

$$q_1 = \frac{2 \cdot N_{p1}}{L} \tag{3.4}$$

Obciążenia poziome stanowią przede wszystkim parcia gruntu na przyczółek. Sposób obliczenia parć przyjęto wg. klasycznej teorii parcia /por. np. [134]/. W związku z tym wypadkowe parcie czynne H_{ai} w i-tej warstwie gruntu napierającej na przyczółek,

---

[1/] Dokładne wyszczególnienie, które wielkości są tu traktowane jako zmienne losowe, dokonane jest w rozdziale 4.

w przypadku, gdy jest to grunt niespoisty, wynosi:

$$H_{ai} = h_i \left\{ \frac{1}{2} \gamma_i h_i + \left(q_o + q_1\right) + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k h_k \right\} \cdot K_{ai} \qquad (3.5)$$

gdzie:

$$K_{ai} = tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi i}{2} \right) \qquad (3.6)$$

γ_i - ciężar objętościowy gruntu w i-tej warstwie (γ_k - ciężar objętościowy gruntu w k-tej warstwie), h_i - miąższość i-tej warstwy, q_o - obciążenie stałe naziomu, q_1 - dane wzorem (3.4)

Jeśli ściana przyczółka jest nachylona pod kątem α, naziom pod kątem β, zaś kąt tarcia gruntu o ścianę ma miarę δ, to współczynnik parcia granicznego dany jest wzorem Müllera-Breslaua / por. [134] /:

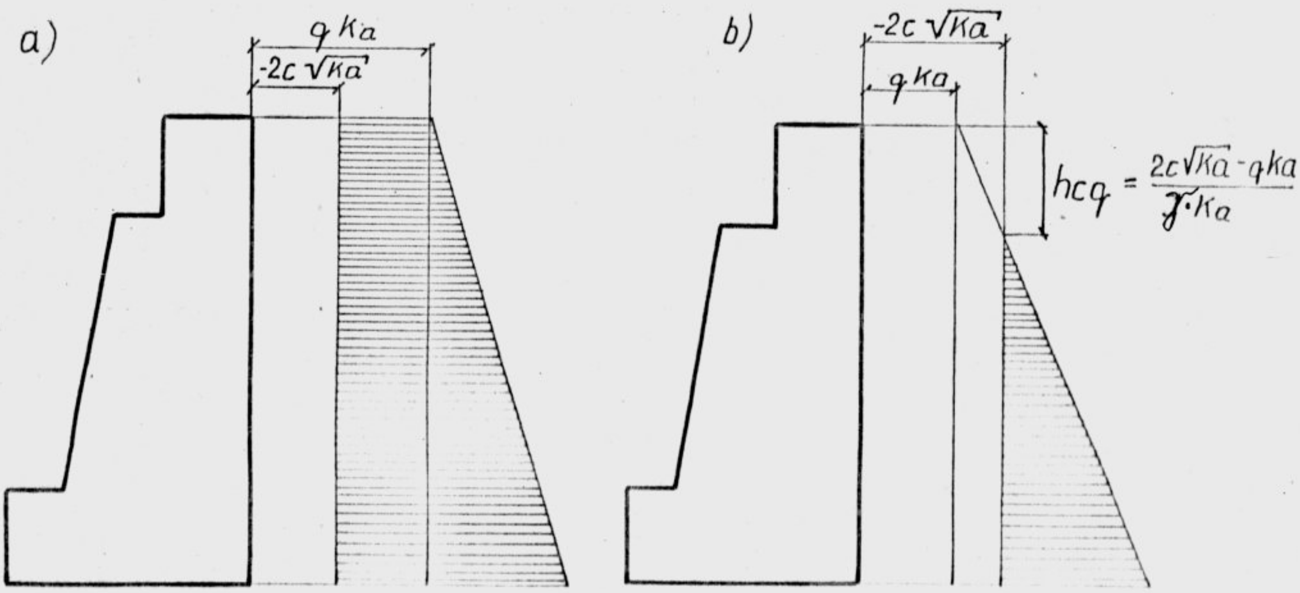
$$K_{ai} = \frac{\cos^2\left(\phi_i + \alpha\right)}{\cos^2 \alpha \cdot \cos\left(\delta - \alpha\right)\left[1 + \sqrt{\frac{\sin\left(\phi_i + \delta\right)\cdot\sin\left(\phi_i + \beta\right)}{\cos\left(\delta - \alpha\right)\cdot\cos\left(\alpha + \beta\right)}}\right]^2} \qquad (3.7)$$

Jeśli rozpatruje się warstwę gruntu spoistego, to analityczne wyrażenie dla wypadkowej parcia czynnego można uzyskać jedynie dla przypadku płaskiego i równomiernie obciążonego naziomu, pionowej i gładkiej ściany $\left(\alpha = \beta = \delta = 0\right)$. W innych przypadkach /brak analitycznych wyrażeń/ symulacyjne badanie procesu stateczności byłoby na ogół praktycznie niemożliwe lub wymagałoby skomplikowanych i zwykle niezbyt dokładnych aproksymacji. Dlatego przedstawiony dalej program symulacyjny, w przypadku, gdy występują warstwy gruntu spoistego, wymaga założenia $\alpha = \beta = \delta = 0$.

Możliwe są tu dwa przypadki /rys. 3.1/:

1. $qK_{ai} \geqslant 2c_i \sqrt{K_{ai}}$ / c_i - spójność w warstwie i; K_{ai} - wzór (3.6)

wówczas wypadkowe parcie czynne jest równe co do wartości polu trapezu przedstawionego na rys. 3.1 a.



Rys. 3.1 Parcie czynne gruntu spoistego na ścianę oporową
a/ przypadek 1; b/ przypadek 2 /opis w tekście

Czyli wyraża się wzorem:

$$H_{ai} = h_i \left(\frac{1}{2} \gamma_i \cdot h_i + q \right) K_{ai} - 2\, h_i c_i \sqrt{K_{ai}} \qquad (3.8)$$

2. $q\, K_{ai} < 2c_i \cdot \sqrt{K_{ai}}$

W tym przypadku wypadkowe parcie czynne jest równe co do wartości polu trójkąta zakreskowanego na rys. 3.1 b. Ostatecznie:

$$H_{ai} = h_i \left(\frac{1}{2} h_i \gamma_i + q \right) \cdot K_{ai} - 2ch_i \sqrt{K_{ai}} + \frac{q^2}{2\gamma_i} K_{ai} + $$
$$- \frac{2c_{iq} \cdot \sqrt{K_{ai}}}{\gamma_i} + \frac{2c_i^2}{\gamma_i} \qquad (3.9)$$

We wzorach (3.8) i (3.9) q oznacza obciążenie równomierne i jego wartość jest oczywiście zależna od tego, która warstwa gruntu jest rozpatrywana. Dla $i = 1$

$$q = q_o + q_1 \qquad (3.10)$$

Dla $i > 1$

$$q = q_o + q_1 + \sum_{k=1}^{i-1} \gamma_k \cdot h_k \qquad (3.11)$$

Jeśli uwzględnia się odpór gruntu działający na zagłębioną część przyczółka z drugiej strony, to wzory na wypadkową siłę parcia biernego przyjmowane są w postaci:

Dla gruntu niespoistego:

$$H_p = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 \cdot K_p \qquad (3.12)$$

gdzie: $$K_p = tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2} \right) \qquad (3.13)$$

lub

$$K_p = \frac{\cos^2(\phi - \alpha)}{\cos^2 \alpha \cos(\delta - \alpha) \left[1 - \sqrt{\frac{\sin(\phi - \delta) \cdot \sin(\phi - \beta)}{\cos(\delta - \alpha) \cdot \cos(\alpha + \beta)}} \right]^2} \qquad (3.14)$$

Dla gruntu spoistego $(\alpha = \beta = \delta = 0)$

$$H_p = \frac{1}{2} \gamma \cdot h^2 K_p + 2 c h \sqrt{K_p} \qquad (3.15)$$

K_p - dane wzorem (3.13).

Probabilistyczną analizę współczynników K_a i K_p w postaci (3.6) i (3.13) przeprowadził A. Singh [117]. Przyjął on, że kąt tarcia wewnętrznego ϕ ma rozkład normalny i symulacyjnie /liczba realizacji N = 2000 / wyznaczał rozkłady K_a oraz K_p przy różnych współczynnikach zmienności kąta ϕ. Podstawowe wnioski uzyskane przez Singha są następujące:

- rozkład współczynników K_a i K_p można uznać w przybliżeniu za normalny /przy założeniu, że ϕ ma rozkład normalny/,
- dla dużych wartości kątów ϕ współczynniki zmienności V_{Ka} i V_{K_p} /dla wsp. parcia/ są istotnie większe od współczynnika zmienności V_ϕ /kąta tarcia wewnętrznego/.

Inne szczegółowe wnioski dotyczące współczynników zmienności wraz z histogramami oraz wykresami dystrybuant przedstawione są w pracy [117].

Oprócz obciążeń poziomych związanych z parciem gruntu na przyczółek rozpatrzono jeszcze siłę pochodzącą od hamowania pojazdów. Siłę tę przyjmowano w postaci:

$$H_h = a_h \cdot N_{p1} \tag{3.16}$$

gdzie: a_h - współczynnik $/a_h < 1/$ określony zwykle przepisami normowymi. Siła ta działa na wysokości przegubu łożyska. Do analizy stateczności przyjmuje się zwrot tej siły zgodny ze zwrotem składowej poziomej parć czynnych.

3.3 Przesunięcie przyczółka

Siły poziome działające na przyczółek dążą do przesunięcia przyczółka. Przeciwstawia się temu tarcie w płaszczyźnie kontaktu podstawy przyczółka z podłożem /lub w warstwie gruntowej poniżej podstawy - por. rys. 3.2/. W przypadku gruntów spoistych dodatkową siłą przeciwdziałającą przesunięciu jest opór spójności lub przyczepności /adhezji/.

Ogólne wzory na zapas stateczności i współczynnik pewności mają w tym przypadku postać:

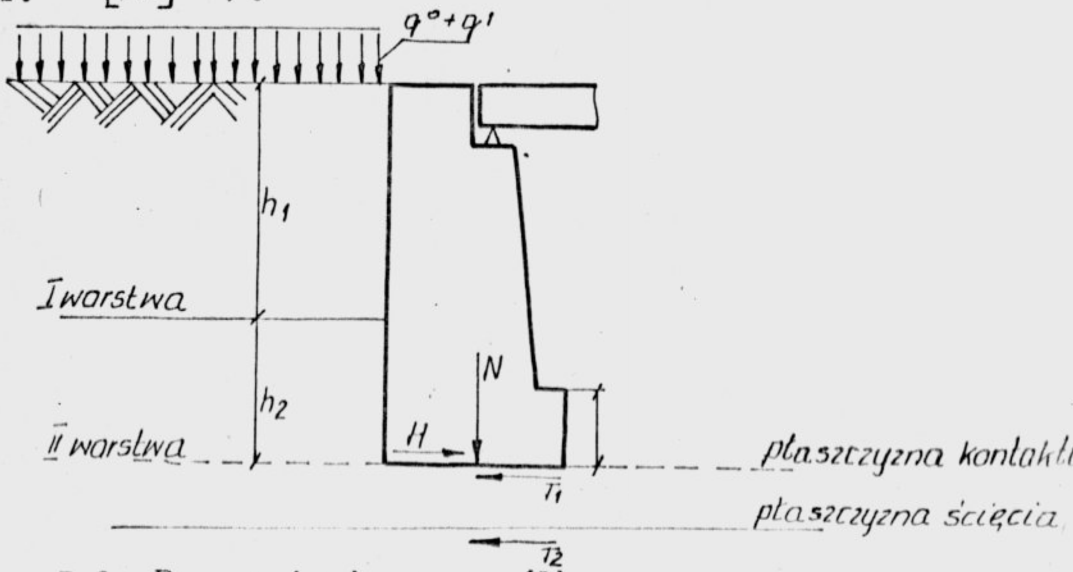
$$Z_1 = N_o \cdot tg\left(k_1 \cdot \phi\right) + B \cdot k_2 \cdot c - H_o$$
$$S_1 = \frac{N_o \cdot tg\left(k_1 \cdot \phi\right) + B \cdot k_2 \cdot c}{H_o} \tag{3.17}$$

gdzie:

N_o - składowa wypadkowej sił normalna do podstawy przyczółka,
H_o - składowa wypadkowej sił styczna do płaszczyzny podstawy,
ϕ - kąt tarcia wewnętrznego, c - spójność, B - powierzchnia podstawy /ewentualnie szerokość w sytuacji, gdy rozważa się obciążenie przypadające na 1 m bieżący długości przyczółka/.

Współczynniki k_1 i k_2 są równe jedności, jeśli płasz -

czyznę ścięcia zakłada się w gruncie poniżej podstawy przyczółka. Jeśli płaszczyzna ścięcia pokrywa się z płaszczyzną kontaktu podstawy przyczółka i podłoża, to $k_1 \leqslant 1$, zaś $k_2 \in [0,2\ ;\ 0,5]$ por. [102] /.



Rys. 3.2 Przesunięcie przyczółka

Wzór (3.17) może po rozpisaniu występujących w nim składowych N_0 i H_0 przyjmować różne postaci. Przykładowo dla dwóch warstw gruntowych /por. rys. 3.2/, przy założeniu że pierwszą stanowi grunt niespoisty, zaś drugą - spoisty, otrzymuje się:

dla przypadku $q \cdot \sqrt{K_{a2}} \geqslant 2c$; /q dane wzorem (3.11)/

$$
\begin{aligned}
Z_1 = {} & \left(N_{p1} + N_{p2} + N_q\right) \cdot tg\left(k_1 \cdot \varnothing_2\right) + B \cdot k_2 \cdot c - a_h \cdot N_{p1} + \\
& - \left[\frac{\gamma_1 h_1^2}{2} + h_1\left(\frac{2 \cdot N_{p1}}{L} + q_o\right)\right] \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varnothing_1}{2}\right) - \left[\frac{\gamma_1 \cdot h_2^2}{2} + h_2 \cdot \right. \\
& \left. \left(q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 h_1\right)\right] \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varnothing_2}{2}\right) + 2 \cdot c \cdot h_2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varnothing_2}{2}\right) + \\
& + \frac{\gamma_2 h_3^2}{2} \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varnothing_2}{2}\right) + 2 \cdot c \cdot h_3 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\varnothing_2}{2}\right)
\end{aligned}
\qquad (3.18)
$$

oraz dla przypadku $q\sqrt{K_{a2}} < 2c$:

$$Z_1 = \left(N_{p1} + N_{p2} + N_q\right) \cdot tg\left(k_1 \cdot \phi_2\right) + b \cdot k_2 \cdot c - a_h \cdot N_{p1} -$$

$$\left[\frac{1}{2} \gamma_1 \cdot h_1^2 + h_1\left(\frac{2N_{p1}}{L} + q_o\right)\right] \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right) - \left[\left(\frac{1}{2}\gamma_2 \cdot h_2^2 + \right.\right.$$

$$\left. + h_2\left(q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1\right)\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) - 2 \cdot c \cdot h_2 +$$

$$\left. + \frac{\left(q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1\right)^2}{2 \cdot \gamma_2} \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) - \frac{2c\left(q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1\right)}{\gamma_2}\right]$$

$$\cdot\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) + \frac{2c^2}{\gamma_2} + \frac{\gamma_2\, h_3^2}{2} \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right) +$$

$$+ 2 \cdot c \cdot h_3\, tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right) \qquad (3.19)$$

/oznaczenia jak w podrozdziale 3.2/.

W zakresie metod niezawodności poziomu pierwszego wielu autorów podaje minimalne bezpieczne wartości współczynnika S_1. I tak np. Wiłun [134] podaje wartość $S_{1min} = 1{,}5$.

3.4 Obrót wokół dolnej krawędzi podstawy

Obrót wokół dolnej krawędzi podstawy, czyli względem najbardziej obciążonej krawędzi podstawy /Rys. 3.3. - dalej często będzie się tu używać określenie - obrót wokół punktu A/, bez współpracy podłoża gruntowego, ma miejsce zazwyczaj przy posadowieniu na gruntach praktycznie nieodkształcalnych i o znacznej wytrzymałości, np. przy posadowieniu na skale.

Tutaj zapas oraz wskaźnik stateczności opisane są wzorami:

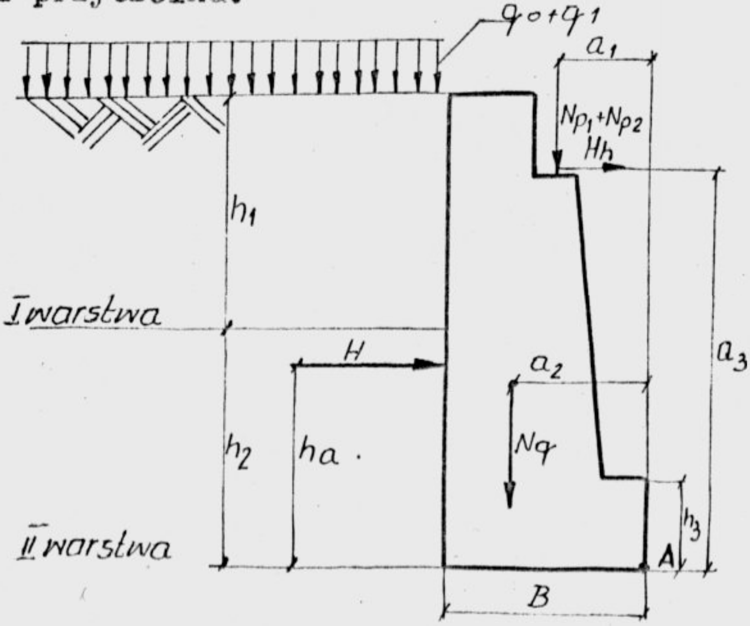
$$Z_2 = M_{uA} - M_{wA} \qquad (3.20)$$

i

$$S_2 = \frac{M_{uA}}{M_{wA}} \qquad (3.21)$$

gdzie: M_{wA} - wypadkowy moment sił względem punktu A dążących do obrócenia przyczółka.

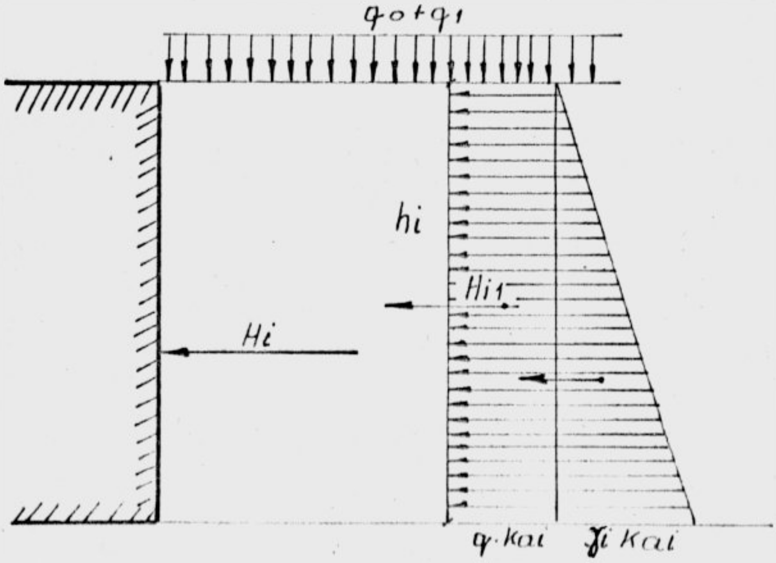
M_{uA} - moment wypadkowy wzgl. punktu A przeciwdziałających obrotowi przyczółka.



Rys. 3.3 Obrót przyczółka względem punktu A

Przy rozpatrywaniu niniejszego przypadku należy zwrócić uwagę na punkty przyłożenia poszczególnych sił, co jest istotne ze względu na konieczność obliczania momentów tych sił. Szczególnie istotne są punkty przyłożenia sił parć gruntowych, które w związku z losowymi zmianami odpowiednich parametrów gruntowych wraz z wielkościami sił parcia, będą podlegały losowym wahaniom.

W klasycznej teorii parcia siły przyłożone są na wysokości środka ciężkości bryły tych parć. Wygodnie jest tutaj rozbić trapez wykresu parć na równoległobok - związany z obciążeniem q /por. wzór (3.11)/ i trójkąt - związany z przyrostem parć jednostkowych w ramach danej warstwy /rys. 3.4/. Dla tego równoległoboku i trójkąta położenia rzędnych środka ciężkości są zdeterminowane przez miąższość warstwy / $\frac{1}{2} h_i$ oraz $\frac{1}{3} h_i$ - odpowiednio/, która uważana będzie w ramach tej pracy / o czym mowa w rozdz. 4/ za wielkość nielosową. W tej sytuacji moment sił parcia od danej warstwy będzie sumą dwóch momentów sił, których ramiona względem punktu A będą nielosowe.



Rys. 3.4 Rozkład siły parcia na dwie składowe, umożliwiający przyjęcie nielosowych ramion sił

Podobnie jak dla przesuwu podany zostanie poniżej w formie rozpisanej wzór (3.20) dla przypadku dwóch warstw, pierwszej – niespoistej, drugiej – spoistej /por. rys. 3.3 /:

dla przypadku $q \cdot \sqrt{K_{a2}} \geqslant 2c$

$$
\begin{aligned}
Z_2 = {} & a_1' N_{p1} + a_1' N_{p2} + a_2' N_q - a_h \cdot N_{p1} \cdot a_3 - \left[\frac{1}{2} \gamma_1 \cdot h_1^2 \cdot \left(h_2 + \frac{1}{3} h_1 \right) + h_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot N_{p1}}{L} + q_o \right) \cdot \left(h_2 + \frac{1}{2} h_1 \right) \right] \cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} \right) + \\
& - \left[\left(q_o + \frac{2\, N_{p1}}{L} + \gamma_1 h_1 \right) \cdot h_2 \cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) - 2 \cdot c \cdot h_2 \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) \right] \cdot \frac{1}{2} \cdot h_2 - \frac{1}{2} \cdot \gamma_2 h_2^2 \cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot h_2 + \\
& + \frac{1}{2} \gamma_2 \cdot h_3^2 \cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} h_3 + 2 \cdot c \cdot h_3 \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} h_3
\end{aligned}
\qquad (3.22)
$$

dla przypadku $q \cdot \sqrt{K_{a2}} < 2c$

$$Z_2 = a_1 \cdot N_{p1} + a_1 \cdot N_{p2} + a_2 \cdot N_q - a_h \cdot N_{p1} \cdot a_3 - \Bigg[\frac{1}{2} \cdot \gamma_1 h_1^2 \cdot \left(h_2 + \frac{1}{3} h_1 \right) + h_1 \cdot \left(\frac{2N_{p1}}{L} + q_o \right) \cdot \left(h_2 + \frac{1}{2} h_1 \right) \Bigg] \cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2} \right) +$$
$$- \Bigg\{ \Bigg[\left(\frac{1}{2} \cdot \gamma_2 \cdot h_2 + q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1 \right) \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) - 2\,c \Bigg] \cdot$$
$$\cdot h_2 \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) + \Bigg[\frac{q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1}{2\gamma_2} \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) +$$
$$- \frac{2c}{\gamma_3} \Bigg] \cdot \left(q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1 \right) \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) + \frac{2c^2}{\gamma_2} \Bigg\} \cdot \tag{3.23}$$
$$\cdot \Bigg[\frac{\gamma_2 h_2 + q_o + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1}{3\gamma_2} - \frac{2c}{3 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \gamma_2} \Bigg] + \frac{1}{2} \gamma_2 \, h_3^2 \cdot$$
$$\cdot tg^2 \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{3} \cdot h_3 + 2\,c\,h_3 \cdot tg \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2} \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot h_3$$

/oznaczenia jak w punkcie 3.2/

Jak widać wzory na zapas są w tym przypadku dosyć złożone. Oznacza to, że znalezienie gęstości prawdopodobieństwa Z_2 drogą analityczną, a następnie obliczenie prawdopodobieństwa $P\{Z_2 < 0\}$ jest praktycznie niewykonalne. Na zakończenie warto podkreślić iż Wiłun [139] sugeruje iż współczynnik pewności w tym przypadku powinien spełniać warunek:

$$S_2 \geqslant 2 \; .$$

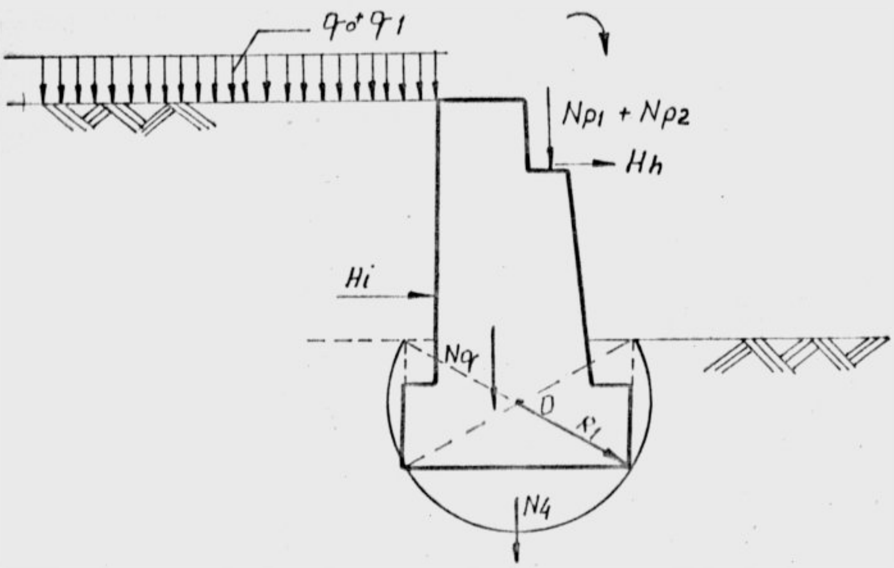
3.5 Obrót wokół powierzchni cylindrycznej /kołyskowej/

Podobnie jak w 3.4 wzory na zapas i wskaźnik stateczności mają postać:

$$Z_3 = M_{uo} - M_{wo} \tag{3.24}$$

$$S_3 = \frac{M_{uo}}{M_{wo}} \tag{3.25}$$

M_{uo} i M_{wo} - oznaczają momenty tak jak w (3.20) i (3.21) z tym, że oblicza się je względem punktu 0_1 - środka pow. cylindrycznej /por. rys. 3.5/.



Rys. 3.5 Schemat obrotu wokół pow. cylindrycznej

W praktyce inżynierskiej przypadek ten rozpatruje się, gdy przyczółek jest posadowiony w gruntach luźnych i plastycznych o małych wartościach kąta tarcia wewnętrznego. Ograniczono się tu do powierzchni cylindrycznej, której środek obrotu jest środkiem symetrii prostokąta, uwidocznionego na rys. 3.5 /por. [27] Rozpatruje się tu ponadto dodatkową siłę N_4 będącą ciężarem gruntu ograniczonego pow. cylindryczną.

Wzory (3.24) i (3.25) można tu doprowadzić do postaci:

$$Z_3 = \sqrt{R_1^2 \cdot P_o^2 - M_o^2} \cdot \operatorname{tg} \phi + R_1 \cdot c \cdot l_o - M_o \tag{3.26}$$

$$S_3 = \frac{\sqrt{R_1^2 \cdot P_o^2 - M_o^2} \cdot \operatorname{tg} \phi + R_1 \cdot c \cdot l_o}{M_o} \tag{3.27}$$

gdzie P_o - wypadkowa wszystkich rozpatrywanych sił,
M_o - wypadkowy moment względem punktu O_1,
R_1 - promień powierzchni cylindrycznej,
l_o - długość przekroju powierzchni cylindrycznej prostopadłego do osi.

Wzory zachowują słuszność na gruntu niespoistego po podstawieniu $c = 0$. Za dodatnie uważane są tu momenty powodujące obrót przyczółka w kierunku od naziomu /na rys. 3.5 zgodnie ze wskazówkami zegara/.

Rozpatruje się tu schemat zniszczenia polegający na obróceniu się przyczółka w kierunku od naziomu. W przypadku gdy moment M_o jest ujemny /co oznacza tendencję do obrotu w kierunku naziomu/ ulega zmianie schemat działających sił. Od strony naziomu nie działa wówczas parcie czynne, lecz bardzo duży odpór bierny, który uniemożliwia obrót w kierunku do naziomu. Zatem w przypadku $M_o < 0$ utratę stateczności przez obrót wokół pow. cylindrycznej uważa się za niemożliwą. To zagadnienie będzie jeszcze komentowane w rozdziale 6.

3.6 Uskok naziomu wzdłuż najniekorzystniejszej linii poślizgu

Jest to zagadnienie analogiczne do badania stateczności zboczy. Dlatego też można wykorzystać tu różne istniejące metody. Tutaj zdecydowano się wykorzystać szeroko rozpowszechnioną metodę Felleniusa /zwaną też metodą szwedzką, por. np. [111, 134]/. W związku z tym wzory na zapas stateczności i współczynnik pewności mają postać:

$$Z_4 = M_u - M_w \tag{3.28}$$

$$S_4 = \frac{M_u}{M_w} \tag{3.29}$$

gdzie:

$$M_u = R_o \sum_{i=1}^{n} \left(G_i \cdot \cos \alpha_i \cdot \mathrm{tg}\, \phi_i + l_i c_i \right) + R_o \sum_{i=n_1+1}^{n} G_i \cdot \sin \alpha_i \tag{3.30}$$

$$M_w = R_o \sum_{i=1}^{n_1} G_i \sin \alpha_i \tag{3.31}$$

Poszczególne litery oznaczają:

n - liczba pasków,

ϕ_i - kąta tarcia wewnętrznego w postawie i-tego paska,

R_o - promień najniekorzystniejszej linii poślizgu przyjętej jako kołowa,

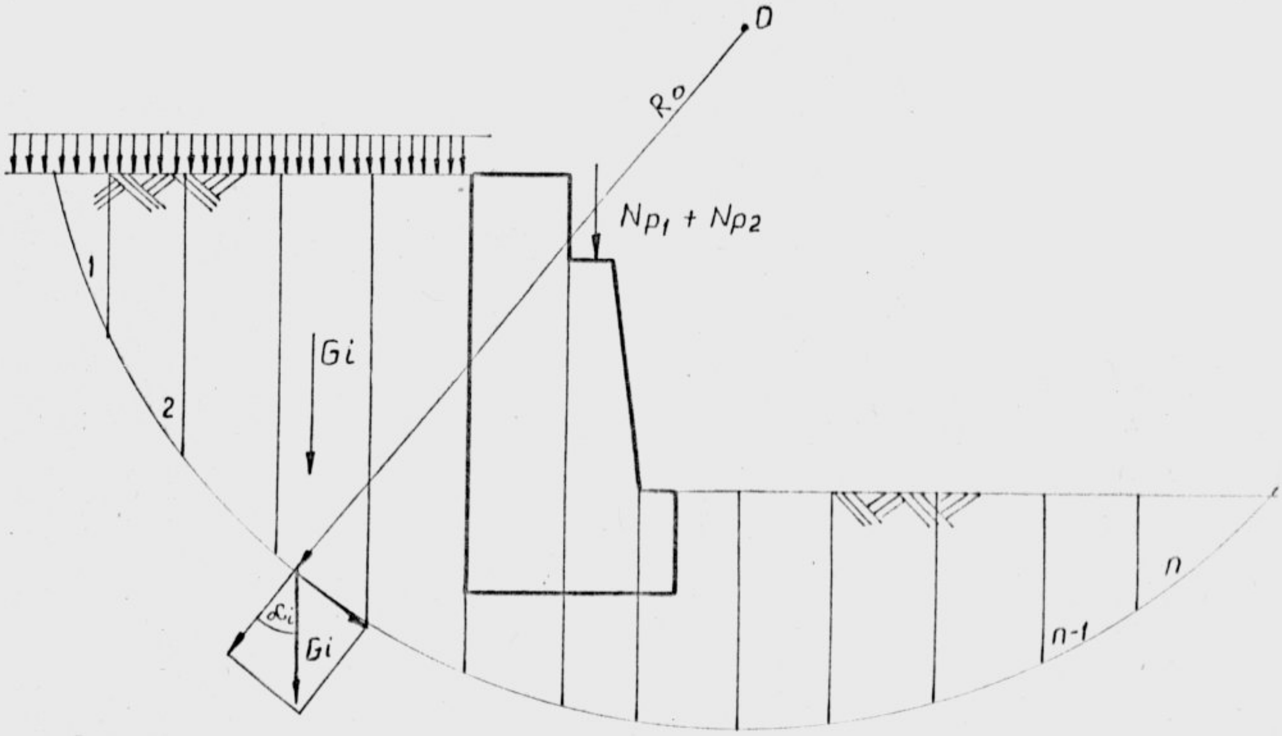
c_i - spójność w podstawie i-tego paska,

l_i - długość podstawy i-tego paska,

α_i - kąt nachylenia ciężaru G_i względem normalnej do podstawy paska /por. rys. 3.6/.

Składowe styczne do podstawy paska ciężarów występujące z lewej strony punktu 0 /por. rys. 3.6 / wywołują moment obracający, zaś styczne do podstawy po prawej stronie punktu 0 moment utrzymujący /moment obracający o przeciwnym znaku/.
Stąd we wzorach (3.30), (3.31) występuje n_1 - liczba pasków z lewej strony punktu 0. Oczywiście sformułowanie z lewej, czy z prawej strony zależy od orientacji przyczółka i w tym przyp. odnosi się do sytuacji jak na rys. 3.6, na którym zaznaczono też sposób numeracji pasków odnoszący się do wzorów (3.30) i (3.31).

Efekty ciśnienia spływowego związane z ewentualnym przepływem wód gruntowych nie są tutaj rozpatrywane. Ponadto ϕ oraz c we wzorach (3.30) i (3.31) są parametrami całkowitymi, co oznacza, że oddzielny wpływ ciśnienia porowego nie jest rozpatrywany.
Probabilistyczna analiza tego zjawiska nie jest prosta, gdyż wraz z losowymi fluktuacjami parametrów gruntowych zmienia się losowe położenie najniekorzystniejszej linii poślizgu. W zasadzie należałoby sytuację tę opisywać polem losowym zapasów stateczności $\left\{Z_4(x, y, R_o)_{(x,y,R_o) \in A \subset \mathbb{R}^3}\right\}$ gdzie współrzędne x, y określają położenie środka obrotu 0, zaś R_o jest promieniem linii poślizgu.



Rys. 3.6 Uskok naziomu. Metoda Felleniusa

Takie podejście nie daje efektywnych rezultatów w postaci prawdopodobieństw utraty stateczności. Problem staje się niezwykle trudny, gdyby założyć, że wspomniane pole losowe nie jest gaussowskie. Trudności związane z probabilistyczną analizą położenia linii poślizgu są opisywane w literaturze np. [18 , 99], lecz do tej pory nie udało się znaleźć pełnego rozwiązania.

W niniejszej pracy przyjęto następujący tok postępowania. Dla średnich wartości parametrów znajdowano metodą Felleniusa położenie najniekorzystniejszej kołowej linii poślizgu. Przy znanej już i ustalonej linii poślizgu przeprowadzono probabilistyczną analizę rozkładów Z_4 i S_4 /wykorzystując wzory (3.30) i (3.31)/. Takie postępowanie odpowiada następującemu probabilistycznemu schematowi, który zaczerpnięto z pracy Athonasiou-Grivasa /[4]/. Niech $P\left(Z_4 < 0 / K_i\right)$ będzie prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia $Z_4 < 0$, pod warunkiem że linią poślizgu jest

K_i. Jeżeli rozpatruje się N linii poślizgu, przy czym każda z nich może wystąpić z określonym prawdopodobieństwem $P(K_i)$ oraz ponadto $\sum_{i=1}^{N} P(K_i) = 1$, to ze wzoru na prawdopodo - bieństwo całkowite wynika:

$$P\left\{Z_4 < 0\right\} = \sum_{i=1}^{N} P\left\{Z_4 < 0/K_i\right\} \cdot P(K_i) \qquad (3.32)$$

Niech K_N będzie linią, dla której S_4 ma wartość najmniejszą przy obliczeniach na wartościach średnich /oczekiwanych/, wtedy:

$$P\left\{Z_4 < 0\right\} = P\left\{Z_4 < 0/K_N\right\} \cdot P(K_N) + \sum_{i=1}^{N-1} P\left(Z_4 < 0/K_i\right) \cdot P(K_i) \qquad (3.33)$$

Jeśli przyjmie się, że prawdopodobieństwa $P(K_i)$, $i = 1,\dots N-1$ są bardzo małe w porównaniu z $P(K_N)$, co oznacza, że $P(K_N)$ jest bliskie 1,/A. Grivas twierdzi, że w praktyce zawsze takie łożenie jest do przyjęcia/ wtedy ze wzoru (3.33) otrzymuje się:

$$P\left\{Z_4 < 0\right\} \approx P\left\{Z_4 < 0/K_N\right\} \cdot P(K_N) \approx P\left(Z_4 < 0/K_N\right) \qquad (3.34)$$

Sytuacja ta koresponduje z opisanym wyżej tokiem postępowania.

Literatura dotycząca probabilistycznego badania statecz - ności zboczy jest już dzisiaj bardzo bogata /por. np. [18 , 99 , 4 , 128 , 136 , 1 , 43 , 42 , 30 , 82]/. Większość stanowią prace wywodzące się z klasycznych deterministycznych metod badania stateczności zboczy, a więc wykorzystujące metody, pasków oraz badające probabilistyczne charakterystyki współczynnika pewności /wzór (3.29) /. Jedna z pierwszych probabilistycznych analiz stateczności zboczd pochodzi od Biernatowskiego [16a] , w której przedstawiono propozycję znajdowania współczynnika pewności przy zadanym z góry poziomie bezpieczeństwa /przez założenie z góry prawdopodobieństwa awarii/ z wykorzystaniem linearyzacji Leviego. Pewne orientacyjne oszacowania prawdopodobieństw kata -

strofy dla określonych wielkości współczynnika pewności podał Meyerhof [85]. Obszerną i wnikliwą analizę zagadnienia podał Alonso w pracy [1]. Rozpatrzył on zmienność losową kąta tarcia, spójności, ciśnienia porowego oraz geometrii skarpy /losowo zmienna wysokość/. Ponadto uwzględnił przestrzenną zmienność spójności i kąta poprzez zastosowanie odpowiednich funkcji autokorelacyjnych i w ograniczonym zakresie ciśnienia porowego /funkcja kowariancji między poszczególnymi paskami/. Zmienne losowe uważane były za niezależne. Do wyznaczania prawdopodobieństwa utraty stateczności autor zastosował linearyzację Rżanicyna, przyjmując, że współczynnik pewności ma rozkład normalny lub lognormalny. Na podstawie przykładu obliczeniowego przeprowadzono analizę wpływu zmienności losowej poszczególnych parametrów na zmienność współczynnika pewności. Wreszcie podano propozycję, aby prawdopodobieństwo utraty stateczności badać w postaci $P\left\{S_4 \leq N\right\}$, gdzie S_4 - wsk. stateczności, zaś N - zmienna losowa charakteryzująca różnego typu dodatkowe niepewności występujące w modelu /np. anizotropowość warstw, efekty wytrzymałości rezydualnej itp./ przy czym wartość oczekiwana N wynosi 1. Metodyka zaproponowana przez Alonso była wykorzystywana i uzupełniana przez innych badaczy /por. np. [70, 8]/. Stochastyczne warianty tradycyjnej metody Fröhlicha przedstawili Förster i Weber [121, 57].

Z badań tych autorów wynika, że uwzględnienie korelacji pomiędzy c oraz $tg\phi$ daje mniejsze prawdopodobieństwo utraty stateczności, niż uzyskane w przypadku pominięcia korelacji [57].

W pracy [121] przedstawili oni c oraz $tg\phi$ jako jednorodne i izotropowe pola losowe i badali funkcje autokorelacyjne oraz funkcję kowariancji pomiędzy polami $\{c\}$ oraz $\{tg\,\phi\}$.

Analizą probabilistyczną stateczności długotrwałej /long - term stability/, czyli stateczności po ustaleniu się warunków filtracji lub stateczności po kilku latach od wykonania wykopu, przeprowadzili Yucemen i Tang [139]. Z kolei autorzy pracy [11] badali prawdop. utraty stateczności ze szczególnym uwzględnieniem warunków wodoprzepuszczalności, do analizy których wykorzystano metodę elementów skończonych. Rozwijana jest także trójwymiarowa probabilistyczna analiza zboczy /por. np. [138] oraz analiza niezawodności w czasie przeprowadzona przez Alonso i Lloreta [3]. W tej ostatniej autorzy badali zapas stateczności jako stochastyczny proces w czasie, używając do badania znanych metod teorii procesów stochastycznych takich jak teoria spektralna i problemy przejścia procesu przez określoną granicę.

Rozwijane są także niekonwencjonalne metody probabilistycznego badania stateczności zboczy, które nie nawiązują bezpośrednio do deterministycznych metod lub posługują się innymi miarami stateczności niż (3.28) i (3.29). Za przykład może tu służyć praca Chowothury'ego i Athanasiou - Grivasa [43], w której autorzy analizują progresywny model zniszczenia, polegającym na kolejnym osuwaniu się poszczególnym bloków. Wykorzystano tu znane metody teorii łańcuchów Markowa, poprzez wprowadzenie odpowiedniej macierzy prawdopodobieństw przejścia, które charakteryzują możliwość propagacji procesu osuwania się z jednego bloku do następnego. Podano także /dosyć uproszczony/ sposób znajdowania tych prawdopodobieństw. Propozycję tę wykorzystali Oboni i Bourdeau [99] do określenia prawdopodobieństwa utraty stateczności przez zbocze w całości i podali specjalny algorytm do poszukiwania powierzchni poślizgu, przy której prawdopodobieństwo to jest największe. W tym miejscu należy podkreślić, że propozycję zastosowania metod probabilistycznych do wariacyjnego badania najniekorzystniejszej linii poślizgu przedstawił wcześniej Biernatowski [18]. W innej pracy [20] autor ten zaproponował wynikającą z linearyzacji Rżanicyna postać zapasu stateczności, który jest zależny od wcześniej ustalonego / w oparciu o względy ekonomiczne/ poziomu bezpieczeństwa. Tak zidentyfikowany zapas okazuje się szczególnie przydatny przy stosowaniu iteracyjnej metody badania stateczności zbocza przedstawionej w pracy [65] .

Oryginalne podejście do zagadnienia przedstawili Bjerager i Ditlevsen [30] , którzy analizę probabilistyczną oparli na teorii plastyczności, traktując grunt jako nieważki ośrodek Culomba, zaś $\emptyset$ i c jako jednorodne i izotropowe pola losowe. Jeszcze jednym przykładem odmiennego podejścia może być praca [103] , gdzie analiza stateczności oparta jest na teorii informacji, a konkretnie na zastosowaniu zasady maksimum entropii do wyznaczania prawdopodobieństwa osuwanie się bloków zbocza po linii poślizgu.

Należy też wspomnieć o opracowaniach dotyczących pozagruntowych wpływów środowiska na stateczność zboczy, jak np. trzęsienia ziemi [144 , 138] lub długotrwałych opadów deszczu [82] .

Istotną rolę w probabilistycznym podejściu do badania stateczności skarp i zboczy odgrywają metody symulacyjne. Przykładem ich wykorzystania jest program skonstruowany w IBW PAN w Gdańsku i opisany w pracy [67]. Program ten oparty na metodzie Felleniusa i Bishopa uwzględnia: losowość $\emptyset$, c i γ , przestrzenną zmienność tych parametrów poprzez wprowadzenie zdyskredytowanych pól losowych i odpowiednich funkcji autokorelacyjnych, korelację wzajemną między polami losowymi $\{\emptyset\}$ i $\{c\}$. Efekty te są przedstawione w generowanej wielowymiarowej zmiennej losowej gaussowskiej. Stosując uproszczony sposób poddano analizie losowe fluktuacje poziomu wód gruntowych, modelując je rozkładem normalnym dla poziomu wody w najwyższym punkcie stoku. Przewidziano też uwzględnienie losowości wynikającej z niepewności takich czynników jak: niewłaściwe przeprowadzenie wierceń i pobieranie prób, niepoprawnego przeprowadzania badań, wadliwości aparatury itp. Niepewności te uwzględniono przez wprowadzenie współczynników poprawkowych o rozkładzie normalnym. Program ten pozwala na analizę uwarstwionych skarp, gdy powierzchnia terenu, jak również linie podziału na warstwy mogą mieć dowolne nachylenie. Część wstępną stanowi znalezienie środka obrotu i powierzchni poślizgu, które poszukuje się w sposób deterministyczny, przyjmując wartości średnie odpowiednich parametrów. Obróbka stochastyczna dotyczy już tylko jednej tak właśnie znalezionej linii poślizgu. Otrzymany z obliczeń rozkład współczynnika pewności autorzy aproksymują rozkładem normalnym, a następnie obliczają prawdopodobieństwo wystąpienia osuwiska.

Inny przykład symulacyjnego badania rozkładu współczynnika pewności można znaleźć w pracy [42]. Program tam rozpatrywany ma jednak znacznie skromniejsze możliwości od poprzedniego, gdyż uwzględnia jedynie losowość ϕ i c modelowaną dwuwymiarowym rozkładem normalnym /nie są rozpatrywane efekty przestrzennej zmienności/. Ciekawym spostrzeżeniem autorów tej pracy jest fakt, że w rozpatrywanym rozkładzie wraz ze zmianą współczynnika korelacji między ϕ i c od -1 do 0 prawdopodobieństwo utraty stateczności rośnie od ok. 0,08 do ok. 0,102.

Jak widać z podanych przykładów istnieją różnorodne sposoby i możliwości probabilistycznej analizy stateczności skarp i zboczy.

Schemat przedstawiony w niniejszej pracy jest niewątpliwie uproszczony. Podstawową przyczyną zastosowania schematu uproszczonego był fakt, że badanie prawdopodobieństwa osuwiska stanowi tu jeden z pięciu elementów badania stateczności przyczółka.

Zastosowanie takiego wariantu jak np. [67] spowodowałoby nadmierne rozbudowanie programu symulacyjnego. Zwłaszcza, że w niniejszej pracy chodzi o symulacyjne obliczenie prawdopodobieństwa utraty stateczności /bez użycia rozkładu aproksymującego / oraz przybliżone zbadanie rozkładu prawdopodobieństwa zmiennych Z_i i S_i /i = 1,...,5/. Takie podejście wymaga, aby liczba realizacji była rzędu kilku tysięcy/zagadnienie to będzie omówione dalej/, co w pewnym stopniu ogranicza możliwości rozbudowywania programu.

W deterministycznych opracowaniach autorzy np. [134 , 111] podają, że współczynnik S (3.29) powinien być nie mniej - szy niż 1,1 - 1,3. W opracowaniach probabilistycznych dopusz - czalna wielkość S_4 zależy oczywiście od tego jakie ma być prawdopodobieństwo zaistnienia osuwiska, a ponadto zależy od rozkładów i zmienności poszczególnych parametrów. Przykładowo Alonso [1] uzyskał S = 1,5 przy prawdopodobieństwie utraty stateczności p = 0,005 , a dla ok. p = 0,0001 - S_4 = 2,0. Natomiast Athanasiou-Grivas [4] dla prawdopodobieństwa p = = 0,025 uzyskał S_4 = 1,25.

Na zakończenie warto zauważyć, że w tym przypadku, o ile zakłada się losowość ciężaru objętościowego γ , nie można założyć /co często czynione jest w teorii niezawodności, por. rozdział 2/, że "nośność" i "obciążenie" są stochastyczne niezależne; od ciężaru γ zależą funkcyjnie zarówno momenty utrzymujące jak i momenty obracające.

3.7 Wypieranie gruntu spod przyczółka 1/

W ostatnim rozpatrywanym tu kryterium zapas i wskaźnik sta-

1/ Uwaga: W dalszej części pracy dla tego przypadku używa się także określenia przekroczenie /wyczerpanie/ nośności granicznej podłoża.

teczności wyrażają się następująco:

$$Z_5 = Q_f - N_o \tag{3.35}$$

i

$$S_5 = \frac{Q_f}{N_o} \tag{3.36}$$

gdzie:

Q_f - nośność graniczna podłoża gruntowego pod podstawą przyczółka,

N_o - składowa wszystkich obciążeń działających na przyczółek normalna do jego podstawy.

Obliczenie nośności gruntu obciążonego dowolną siłą może być dokonane różnymi metodami, opisanymi w literaturze np. [49, 48, 74]. Tu zastosowano rozwiązanie Brinch-Hansena [36]. Wzór na nośność Q_f jest następujący:

$$Q_f = \bar{B}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\bar{B}\gamma_B\cdot s_B\cdot d_B\cdot i_B\cdot b_B\cdot g_B\cdot N_B + \left(\gamma_D\cdot D + q\right)\cdot s_D \cdot d_D\cdot i_D\cdot N_D\cdot b_D\cdot g_D + c\cdot N_c\cdot s_c\cdot d_c\cdot i_c\cdot b_c\cdot g_c\right) \tag{3.37}$$

gdzie:

N_B, N_D, N_c, - współczynniki nośności podłoża,

i_B, i_D, i_c - współczynniki wpływu nachylenia wypadkowej sił względem kierunku normalnego do podstawy,

d_B, d_D, d_c - współczynniki wpływu zagłębienia fundamentu,

s_B, s_D, s_c - współczynniki kształtu, które dla fundamentów o długości znacznie większej niż szerokość mogą być przyjęte: $s_B = s_D = s_c = 1$,

b_B, b_D, b_c - współczynniki wpływu kąta nachylenia podstawy /przy podstawie poziomej $b_B = b_D = b_c = 1$/

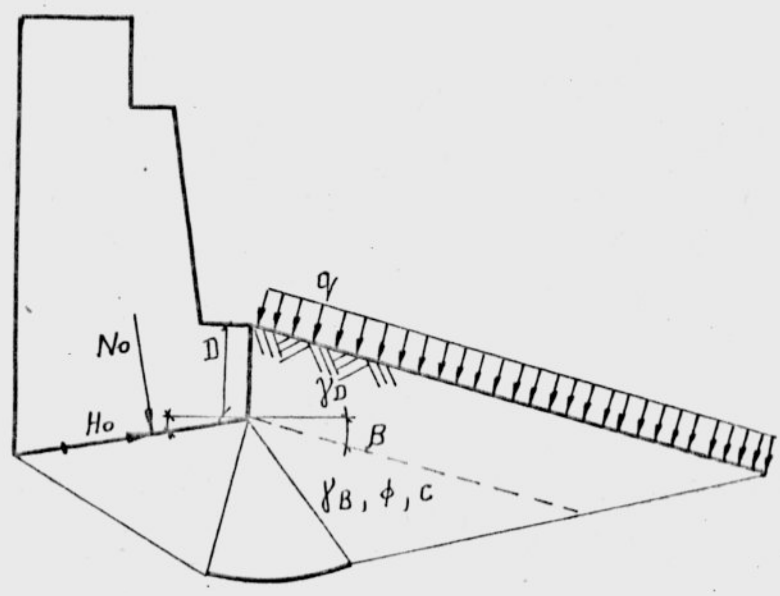
g_B, g_D, g_c - współczynniki związane z nachyleniem naziomu /od strony minimalnego zagłębienia fundamentu; kąt β na rys. 3.7 ; gdy nie ma nachylenia $g_B = g_D = g_c = 1$,

γ_B, γ_D - ciężary objętościowe gruntu - odpowiednio pod i obok fundamentu /por. rys. 3.7/,

D - minimalna głębokość posadowienia: c - spójność gruntu,

q - obciążenie naziomu/od strony minimalnego zagłębienia /,

$\bar{B} = B - 2 \cdot e$ /B - szerokość podstawy; e - momośród działania wy- wypadkowej obciążeń /.



Rys. 3.7 Wypieranie gruntu spod przyczółka.
Niektóre oznaczenia do wzorów na nośność graniczną.

W przypadku, gdy $\beta = 0$, czyli powierzchnia jest pozioma, wzór (3.37) upraszcza się. Stosując zależności wynikające z rozwiązań teorii stanów granicznych dla podłoża pod fundamentem, Brinch - Hansen proponuje wzór:

$$Q_f = \bar{B} \left\{ \frac{1}{2} \gamma_B \cdot \bar{B} \cdot N_B \cdot s_B \cdot d_B \cdot i_B \cdot b_B + \right.$$
$$\left. + \left[\left(q + \gamma_D \cdot D \right) + c \cdot ctg\, \phi \right] \cdot N_D \cdot s_D \cdot i_D \cdot b_D - c \cdot ctg\, \phi \right\} \quad (3.38)$$

Występujące tu współczynniki mają takie samo znaczenie jak dla (3.37) i wyrażają się wzorami:

$$N_D = e^{\pi \cdot tg\phi} \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi}{2}\right)$$

$$N_c = \left(N_D - 1\right) \cdot ctg\,\phi \qquad (3.39)$$

$$N_B = 1{,}5 \cdot \left(N_D - 1\right) \cdot tg\phi$$

$$i_D = \left[1 - 0{,}5\,\frac{H_o}{N_o + B \cdot c \cdot ctg\,\phi}\right]^5$$

$$i_B = \left[1 - 0{,}7 \cdot \frac{H_o}{N_o + B \cdot c \cdot ctg\,\phi}\right]^5 \qquad (3.40)$$

tutaj:

H_o - składowa styczna do podstawy/wypadkowej obciążeń/,

B - powierzchnia podstawy /lub szerokość - por. wzór (3.17)/

$$s_B = 1 - 0{,}4\,\frac{B \,.\, i_B}{L_1 i_{BL_1}}\,; \quad s_D = 1 + \sin\phi \cdot \frac{B \,.\, i_D}{L_1} \qquad (3.41)$$

/B - szerokość podstawy L_1 - długość podstawy/

$$d_B = 1\,;\; d_D = 1 + 2\,tg\,\phi\left(1 - \sin\phi\right)^2 \cdot \frac{D}{B} \qquad (3.42)$$

$$b_B = e^{-2{,}7 \cdot \vartheta \cdot tg\phi}\,; \; b_D = e^{-2 \cdot \vartheta \cdot tg\phi} \qquad (3.43)$$

/ϑ- kąt nachylenia podstawy mierzony względem poziomu/.

Pozostałe szczegóły - w pracy [36].

Propozycje Brinch - Hansena są o tyle wygodne, że wszystkie wielkości potrzebne do obliczenia nośności granicznej dane są w postaci analitycznej. Wzory na współczynniki, które w teorii stanów granicznych nie mają reprezentacji analitycznej uzyskano drogą empiryczną.

Warto zauważyć, że w przypadku zaistnienia obrotu przyczółka wokół punktu A /podrozdział 3.4 / teoria powyższa traci sens, gdyż wówczas siła wypadkowa W odniesiona do płaszczyzny podstawy.

jest przyłożona z jej zewnętrznej strony / z prawej strony punktu A na rys. 3.3/. W tej sytuacji musiałby być $\overline{B} < 0$, co jest oczywiście niemożliwe /por. także uwagi w podrozdziale 6.2 /.

Zagadnienie wypierania gruntu spod fundamentu było także badane metodami probabilistycznymi. Obok wspomnianych już prac [16 b] i [13] tematyka ta poruszona jest w pracach [117, 116, 75, 135, 83]. W pierwszej z nich [117] A. Singh zbadał rozkłady współczynników nośności granicznej N_B, N_D, N_C, przyjmując normalny rozkład kąta ϕ i stosując symulację numeryczną /niewielka liczba realizacji N = 200/. Zauważył on, że współczynniki zmienności dla N_B, N_D i N_c są większe niż dla współczynników parcia K_a i K_p /przy tym samym kącie ϕ/. Największy współczynnik zmienności zaobserwowano dla N_D. Współczynniki zmienności dla N_B, N_D, N_c rosną wraz ze wzrostem kąta ϕ /przy stałym współczynniku zmienności ϕ /. Dla kątów $\phi > 15^o$ są one większe niż współcz. zmienności ϕ. Ostatnią z tych obserwacji potwierdza Schultze [116], który zbadał nośność graniczną pod pionowo obciążonym fundamentem /obciążenie nielosowe/. Schultze do aproksymacji rozkładów N_B, N_D, N_c użył rozkładu normalnego. Jednak nieduża liczebność próby N = 50 oraz brak testowania i wykresów dystrybuant empirycznych stawiają tę aproksymację pod znakiem zapytania.

Symulacyjne badanie nośności granicznej podłoża przy dużej liczbie realizacji N = 2000 przeprowadził McAnally [83]. Wykorzystał on także rozwiązanie Brinch-Hansena. Badania te dotyczyły jedynie gruntów niespoistych i oprócz losowości ϕ i uwzględniały także takie efekty losowe jak: przestrzenną zmienność kąta ϕ, błędy spowodowane np. niedokładnością testowania czy niedokładnością metody obliczeniowej, niepewność wymiarów fundamentów, losowość obciążeń. Autor ten stwierdził, że rozkład zapasu stateczności (3.35) jest bliski rozkładowi normalnemu. Trzeba jednak stwierdzić, że podobnie jak autorzy dwóch poprzednich prac nie uwzględniał on możliwości mimośrodowego działania wypadkowej, ani też jej ewentualnego nachylenia względem podstawy.

Wielkości współczynników pewności S_5 są oczywiście uzależnione od warunków gruntowych, rodzaju konstrukcji itp. Przykładowo Meyerhof [85] podaje $S_5 = 2 - 3$, Lumb [75]: $S_5 = 2 - 3$ dla piasków oraz $3 - 4$ dla glin, co ma dawać prawdopodobieństwo utraty stateczności rzędu 10^{-2}. McAnally [83] otrzymuje $S_5 = 3$ przy prawdopodobieństwie awarii 10^{-4}. Bielski [13] otrzymał wartość $S_5 = 4,15$ przy prawdopodobieństwie utraty stateczności równym 0,03.

Na zakończenie należy zauważyć, że podobnie jak w przypadku osuwiska, nie można tu założyć, że nośność i obciążenie są niezależnymi zmiennymi losowymi. W przypadku przyczółków mostowych /konstrukcji oporowych/ duży udział w obciążeniach może mieć parcie gruntu. Jeśli pod podstawą przyczółka znajduje się ten sam grunt, co w nasypie obciążającym przyczółek /choćby tylko do pewnej wysokości/ to oczywiście zarówno nośność jak i obciążenie zależą między innymi od tych samych parametrów ϕ, c i γ.

4. OPIS ZMIENNYCH LOSOWYCH DO BADANIA STATECZNOŚCI MASYWNEGO PRZYCZÓŁKA MOSTOWEGO

W niniejszym rozdziale precyzuje się te wielkości użyte do probabilistycznej analizy stateczności przyczółka mostowego, które w ramach tej pracy traktowano jako losowe. W oparciu o studia literatury zostaną podane propozycje dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych oraz własne propozycje związane z tym zagadnieniem.

4.1 Specyfikacja wielkości losowych

Uwaga pracy skoncentrowana jest na badaniu prawdopodobieństwa stateczności przyczółka mostowego pod kątem wpływu losowych własności podłoża gruntowego oraz losowego obciążenia pojazdami przejeżdżającymi przez most. W związku z tym jako nielosowe uznano:

1. Wymiary konstrukcji - wielu autorów zakłada, że losowość wymiarów może być w zagadnieniach tego typu pomijana [51, 117, 13, 135, 116].
2. Cechy i parametry materiałów konstrukcyjnych, czyli w tym przypadku ciężar własny przyczółka i obciążenie stałe przekazywane przez belkę (ciężar belki).
3. Miąższość warstw gruntowych w otoczeniu miejsca posadowienia przyczółka. Stałość rozumie się tu jako nielosowość oraz jednakową miąższość danej warstwy gruntowej w analizowanym sąsiedztwie przyczółka. Uwzględnienie losowej miąższości warstwy implikuje konieczność wprowadzenia odpowiedniej funkcji losowej /procesu stochastycznego/ charakteryzującej tę miąższość i indeksowanej położeniem danego punktu w otoczeniu przyczółka. Prowadzi to do dużych trudności w analitycznym wyznaczeniu parcia na

ścianę przyczółka. W tej sytuacji ze wszystkich wielkości występujących w kryteriach stateczności za zmienne losowe uznano:

- reakcję przyczółka od obciążenia pojazdami,
- parametry geotechniczne w każdej warstwie gruntowej.

Już samo wyodrębnienie określonych warstw geotechnicznych czy gruntowych wiąże się na ogół ze zmiennością statystyczną pewnych parametrów. Zagadnienie to szczegółowo omawiają prace [23, 24, 50]. Przyjęcie układu zmiennych losowych w ramach określonej warstwy może odbywać się w różny sposób. Można na przykład wyróżnić tak zwane cechy wiodące, którymi są parametry dotyczące stanu, a więc stopień plastyczności I_L dla gruntów spoistych oraz stopień zgęszczenia I_D dla gruntów niespoistych. W oparciu o związki funkcyjne i korelacyjne można wówczas wyznaczać inne niezbędne parametry [100].

W niniejszej pracy za podstawowe zmienne losowe w danej warstwie przyjęto te parametry, od których w sposób jawny zależą funkcje opisujące warunek bezpieczeństwa przyczółka dla rozpatrywanych pięciu możliwości utraty stateczności .

Dla ustalonej warstwy geotechnicznej są to:

- kąt tarcia wewnętrznego ϕ,
- spójność c /dla gruntu spoistego/,
- ciężar objętościowy γ.

Założenie, że zmienna N_{p1} jest stochastycznie niezależna od układu zmiennych charakteryzujących fizyczno-mechaniczne własności gruntu, nie powinno budzić żadnych zastrzeżeń. Zakłada się także, że zmienne opisujące parametry w różnych warstwach geotechnicznych są stochastycznie niezależne. Jednak parametry tej samej warstwy geotechnicznej mogą być uważane za skorelowane. Często przyjmuje się, że spójność i kąt tarcia wewnętrznego są ujemnie skorelowane [5, 8, 67, 139]. Również ciężar objętościowy jest dodatnio skorelowany z kątem tarcia wewnętrznego [8, 63, 67]. Jednak Lumb w pracy [77] po szczegółowej analizie wysuwa hipotezę, że obserwowana korelacja pomiędzy parametrami ϕ i c może być spowodowana szybkością odkształceń w aparacie trójosiowego ściskania. Ponadto w oparciu o analizę dwuwymiarowego rozkładu normalnego tych parametrów z uwzględnieniem i bez uwzględnienia wzajemnej korelacji dochodzi do wniosku, że nieco większe prawdopodobieństwo wystąpienia mniejszej wytrzymałosci na ściskanie daje przypadek nieskorelowanych zmiennych ϕ i c. W konsekwencji Lumb proponuje, aby traktowac te wielkości jako niezależne zmienne losowe. Podobnie Alonso [1] jest zdania (co popiera odpowiednimi przykładami), że parametry c i ϕ można uznać za nieskorelowane (por. także Singh [117]). Ten sam autor uważa, że stwierdzona korelacja między ciężarem i parametrami wytrzymałosciowymi ma charakter lokalny (punktowy) i w obliczeniach dotyczących statecznosci, gdzie rozkłady reprezentują pewne średnie tendencje dla całej warstwy nie powinna byc ona uwzględniana (podobnie autorzy prac [63] i [67]).

W związku z tym założono w ninejszej pracy, że w danej warstwie geotechnicznej układ γ, ϕ, c jest układem zmiennych stochastycznie niezależnych.

Inną przyczyną takiego podejscia była trudność w symulacyjnym generowaniu rozkładu wektora losowego (γ, ϕ, c) w przypadku, gdyby poszczególne zmienne nie były niezależne. Trudność ta nie istnieje w przypadku wektora losowego o rozkładzie normalnym, który można w nietrudny sposób generować lub stosować odpowiednią transformację ortogonalną [133, 95, 62] układu współrzędnych, która doprowadza do diagonalizacji macierzy kowariancji. Dla wektora gaussowskiego oznacza to automatycznie niezależność poszczególnych rozkładów brzegowych. W niniejszej pracy nie zastosowano jednak rozkładów normalnych, ale rozkłady wielokątne

/co będzie omówione i uzasadnione dalej/. Można wyobrazić sobie wielowymiarowy analog takiego rozkładu, w którym funkcja gęstości składałaby się z kilku kawałków pewnych hiperpłaszczyzn. Autorowi nie jest znany jednak generator liczb pseudolosowych o takim rozkładzie. Również transformacja ortogonalna nie prowadzi tu do niezależności, gdyż w tym przypadku zmienne nieskorelowane nie muszą być niezależne.

4.2 Losowa zmienność parametrów gruntowych

Nawet w ramach jednej warstwy geotechnicznej poszczególne parametry doznają dużych wahań przypadkowych. Jest to spowodowane przede wszystkim stochastyczną niejednorodnością ośrodka gruntowego, gdyż wpływ przypadkowych błędów pomiarowych można często oszacować [145] . Wiłun [134] podaje następujące przyczyny tego zjawiska /por. [117] /:

- niejednorodność skały pierwotnej, z której powstał grunt,
- różny stopień zwietrzenia jego składników mineralnych,
- różne warunki sedymentacji,
- różne warunki konsolidacji / w środku warstwy i przy jej granicznych powierzchniach/,
- wpływ wgłębnego przemarzania w okresach zlodowaceń,
- wpływ sfałdowań geotechnicznych i glacitektonicznych, powodujących powstanie nieciągłości strukturalnej na kontakcie wzajemnie przesuniętych warstw /powierzchni zlustrzeń/,
- ruchy osuwiskowe na zboczach.

Oprócz tego znaczne zmieny cech gruntów mogą powstać pod wpływem:

- niewłaściwego pobierania prób,
- naruszenia struktury gruntów przy wciskaniu próbników,
- zmian zawilgocenia w czasie przechowywania prób - migracja wo -

dy w próbach warstwowych do warstw spoistych lub wyschnięcie prób.

Dlatego też istotne staje się podanie odpowiednich rozkładów prawdopodobieństwa dla poszczególnych parametrów. Jest to jednak zadanie o tyle trudne, że w przypadku gruntu nie ma żadnych modeli teoretycznych, które prowadziłyby do akceptowania takiego lub innego rozkładu. Wraz ze zmianą warstwy geotechnicznej może się zmienić nie tylko wartość średnia i odchylenie standardowe danego parametru, lecz także kształt czy nawet typ rozkładu. Dodatkową trudność stanowi zróżnicowanie przestrzenne charakterystyk parametrów, czyli inne zachowanie się danej cechy w zależności od miejsca, w którym pobrano próbę, nawet jeśli próby pobierane są ze stosunkowo niewielkiego obszaru.

Prowadzone są prace w kierunku opisu podłoża jako pewnego rodzaju ośrodka stochastycznego /por. np. [25, 40, 118] / co wydaje się być najbardziej adekwatnym podejściem. Na razie jednak teoria ta nie daje żadnych wskazówek co do charakteru rozkładu rozpatrywanych tu parametrów podłoża gruntowego. Podobnie interesującą propozycją jest opis warstwy geotechnicznej za pomocą odpowiedniego pola losowego /np. [2, 7, 39, 124, 132] /. W tym przypadku analiza często ogranicza się do badania wartości średniej i funkcji autokorelacji [39, 7] . Zazwyczaj jednak rozważania zawężają się do jednoparametrowej funkcji losowej i badania dotyczą zmienności cech wraz z głębokością [2, 8, 79] . Aparatem tu stosowanym jest klasyczna teoria spektralna dla procesów stacjonarnych [2, 79]. W niniejszej pracy przyjęto wariant najprostszy. Każdemu parametrowi z określonej warstwy geotechnicznej przyporządkowana została jedna zmienna losowa, która opisuje przypadkową zmienność tego parametru w rozpatrywanym obszarze danej warstwy. Określenie rozkładu takiej zmiennej może nastąpić jedynie w wyniku systema -

tycznych badań opartych o próby o dużej liczebności i estymowanie różnych rozkładów znanymi ze statystyki metodami, a następnie testowanie [12, 22, 60]. Literatura obfituje w prace tego typu. Za pionierskie uważa się opracowanie P. Lumba [75], w którym za pomocą testu chi-kwadrat /liczebność prób wahała się od 27 do 120 / testowano rozkłady statystyczne wszystkich podstawowych parametrów gruntowych. Przedmiotem badania były cztery rodzaje gruntów: ił morski /marine clay/, aluwialny ił piaszczysty /aluvial sandy clay/, rezydualny piasek pylasty /residual silty sand/, rezydualny ił pylasty /residual clayey silt/, szczegółowo omówione w pracy. Testowany był głównie rozkład normalny, ale również lognormalny /współczynnik konsolidacji/ i dwuwymiarowy normalny /łączny rozkład wskaźnika plastyczności i granicy płynności/. Dla spójności c i kąta tarcia wewnętrznego ϕ i jego tangensa /tg ϕ / przyjęto rozkład normalny. Lumb zbadał też wpływ głębokości na zmienność przedstawionych wyżej parametrów. Zagadnieniu zmienności statystycznej własności gruntu oraz jej badaniu poświęconych jest także kilka późniejszych prac Lumba, np. [76, 77, 78, 79] . Obok prac Lumba w dziedzinie badania probabilistycznych rozkładów parametrów geotechnicznych należy wymienić prace takich autorów jak: Schultze [115, 116] , Singh [117], Krizek [45, 2, 66] i Athanasiou - Grivas [5].

Dla spójności i kąta tarcia wewnętrznego przyjmowano początkowo niezależne rozkłady normalne [75]. Lumb w pracy [75] twierdził, że zarówno ϕ jak i tg ϕ można opisać rozkładem normalnym / z punktu widzenia rachunku prawdopodobieństwa jest to oczywista sprzeczność/, jednak rozkładowi temu lepiej odpowiada tangens ϕ i tę właśnie wielkość jest wygodniej traktować jako zmienną losową. Opinię tę podtrzymał Schultze [115], wskazując jednocześnie, że histogram ctg - ϕ jeszcze lepiej opisuje się rozkładem normalnym niż histogram tg ϕ /przedmiotem badania były iły, glina i piasek z Nadrenii/. Rozkład normalny dla ϕ i tg ϕ stosowany jest także w późniejszej pracy Schultzego [116] i dzięki swym zaletom analitycznym i statystycznym bywa nadal chętnie stosowany w pracach innych autorów, np. [117, 8, 45, 15, 64]. W kolejnej pracy Lumba [77] stosowany jest najpierw dwuwymiarowy rozkład normalny, lecz w konsekwencji uwag o korelacji przytaczanych w 4.1 autor przechodzi do dwóch niezależnych rozkładów dla c i dla tg ϕ przyjmując rozkłady beta. Zaletą tego rozkładu jest jego ograniczony nośnik $[a, b]$ /parametry c i tg ϕ przyjmują ograniczone wartości/, a także możliwość opisania zaobserwowanej skośności rozkładów tych parametrów. Ponadto rodzina rozkładów beta zawiera bardzo różnorodne krzywe gęstości [12], co ułatwia znalezienie stosownego opisu przy danym histogramie. W późniejszych pracach inni autorzy również korzystali z tego rozkładu /przykładowo [8, 99] /.

Interesujące uogólnienie propozycji Lumba stanowi opis zastosowany przez autorów [5]; stosowali oni dla skorelowanych zmiennych ϕ i c dwuwymiarowy rozkład Dirichleta o gęstości:

$$g(x, y) = \begin{cases} \dfrac{\Gamma(\alpha + \beta + \delta)}{\Gamma(\alpha)\cdot\Gamma(\beta)\cdot\Gamma(\delta)}\, x^{\alpha-1}\, y^{\beta-1}\left(1 - x - y\right)^{\delta-1} \\ \qquad\qquad \text{dla } x, y \geqslant 0 \ \text{ i } \ x + y \leqslant 1 \\ 0 \quad \text{dla pozostałych } (x, y) \end{cases} \tag{4.1}$$

gdzie: $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\delta > 0$ - parametry rozkładu, $\Gamma(x)$ - funkcja Eulera.

Rozkładami brzegowymi tego rozkładu są rozkłady beta, dlatego bywa on też nazywany dwuwymiarowym rozkładem beta.

Innym często używanym do opisu losowej zmienności ϕ i c rozkładem, jest rozkład lognormalny. Rozkład ten można spotkać u takich autorów jak: Biernatowski [19, 14, 15], Mc Annaly [83], Wu i Kraft [135]. Warto też odnotować propozycję Försterа i Webera [57] stosowania rozkładów jednostajnych w odniesieniu do c oraz tg ϕ (traktowanych jako niezależne zmienne losowe).

Przechodząc do zmienności ciężaru objętościowego trzeba od razu stwierdzić, że w tym przypadku obserwowany rozrzut wyników jest znacznie mniejszy niż w poprzednio omawianej sytuacji. Stąd także dość niewielkie zainteresowanie autorów badaniem rozkładów. Niektórzy z nich jak np. Singh [117] czy Yucemen [139], sugerują, że losowość ciężaru może być na ogół pominięta, jednak jak wykazują Evangelista i Pellegrino [52] może mieć ona doniosłe znaczenie np. dla stateczności zapór ziemnych. Proponują oni rozkład normalny /testowany testem chi-kwadrat/, zwracając uwagę, że nie we wszystkich przypadkach jest to opis wystarczająco dokładny. Dla tych przypadków proponują zastosowanie rozkładu lognormalnego, beta lub nawet gamma. Rozkład normalny jest w przypadku γ jednak zdecydowanie najczęściej stosowany / por. np. [83, 115, 18, 8], rzadziej zaś lognormalny [15] czy beta [8]. Warto jeszcze przyjrzeć się, jak duże mogą być wahania ϕ, c i γ w ramach jednej warstwy geotechnicznej; najprostszą miarą tych wahań jest oczywiście współczynnik zmienności:

$$\nu = \frac{\sigma}{\overline{x}} \tag{4.2}$$

σ - odchylenie standardowe danego parametru, $\overline{x}$ - wartość średnia.

Poniżej w tablicy 4.1 podano zakres współczynników zmienności dla ϕ, c, γ jakie spotyka się w literaturze.
Łatwo zauważyć, że poszczególne współczynniki zmienności podlegają dużym wahaniom. Najmniejszym współczynnikiem odznacza się ciężar objętościowy, największym zaś - spójność. Biernatowski [21] i Ingles [64] podjęli na podstawie własnych obserwacji oraz szczegółowej analizy współczynników zmienności podawanych dla różnych

Tablica 4.1

Współczynniki zmienności parametrów ϕ, c, γ

Rodzaj parametru	Zakres stosowanych współczynników zmienności	Źródła literaturowe
γ	0,01 - 0,15	[8, 18, 21, 45, 52, 59, 64]
c	0,15 - 0,71	[8, 14, 21, 64, 75, 116]
ϕ - grunty niespoiste	0,05 - 0,15	[21, 64, 116, 117]
ϕ - grunty spoiste	0,10 - 0,56	[8, 21, 115, 116, 117]
tg ϕ - grunty niespoiste	0,073- 0,138	[75, 83, 115, 116]
tg ϕ - grunty spoiste	0,15	[75]

parametrów w literaturze, próbę przyjęcia pewnych ustalonych wartości tych współczynników, które mogłyby być wykorzystane w zagadnieniach bezpieczeństwa konstrukcji współpracujących z gruntem. Poniżej podano te propozycje dla omawianych wyżej cech gruntowych (współczynniki zmienności wyrażono tu w procentach):

	Biernatowski	Ingles
Kąt tarcia wewnętrznego		
grunty niespoiste	15	10
grunty spoiste	5 (15) 1/	-
Spójność		
konsystencja półzwarta i twarda	10 (15) 1/	
konsystencja plastyczna	12,5 (20) 1/	30
miękko plastyczna	15 (30) 1/	
Ciężar objętościowy	2,5	3

1/ Wartości w nawiasie - dla gruntów mało spoistych.

Podsumowując należy stwierdzić, że rozkładem najczęściej stosowanym przy statystycznym opisie ϕ, c i γ jest rozkład normalny. Jednak zastosowanie tego rozkładu ma dwa podstawowe mankamenty, na które zwraca uwagę wielu cytowanych wyżej badaczy, mianowicie:

- symetria rozkładu normalnego, podczas gdy empirycznie uzyskane rozkłady ϕ, c i γ wykazują zwykle dużą skośność [8];
- nieograniczony nośnik rozkładu normalnego, podczas gdy parametry geotechniczne zmieniają się losowo w ograniczonych /zwykle dość wąskich/ przedziałach.

Stąd też głównie wywodzi się zainteresowanie innymi rozkładami, głównie rozkładem beta. Jednak z punktu widzenia metod symulacyjnych rozkład beta nie jest korzystny, gdyż obecnie znane generatory liczb losowych o tym rozkładzie są mało efektywne [142]. Fakt ten będzie szerzej omówiony w rozdziale 6 . Należy też podkreślić, że na wybór konkretnego rozkładu prawdopodobieństwa duży wpływ ma zwykle dogodność opisu, czyli przyjęcie takiego rozkładu, który będzie ułatwiał dokonywanie dalszych przekształceń i obliczeń.

4.3 Zastosowanie rozkładów wielokątnych

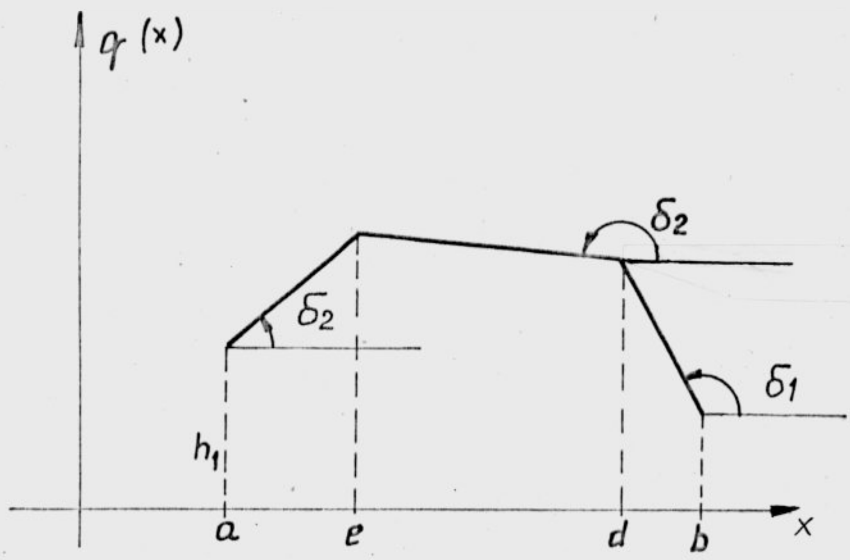
W niniejszym podrozdziale zostanie podana propozycja użycia do opisu parametrów ϕ, c i γ rozkładów wielokątnych, które posiadają bardzo proste generatory liczb pseudolosowych, co między innymi znacznie ułatwia symulacyjne badanie prawdopodobieństw utraty stateczności przez konstrukcje zagłębione w gruncie. Przez rozkłady wielokątne rozumie się tu rozkłady, których funkcje gęstości złożone są co najwyżej z trzech odcinków łamanej, z tym, że oba końce całej łamanej umiejscowione mogą być na różnych wysokościach. Rozszerzenie na większą liczbę odcinków łamanej nie przedstawia większych trudności.

Funkcja gęstości takiego rozkładu ma następującą postać:

$$g(x) = \begin{cases} m_1(x - a) + h_1 & \text{dla } x \in [a;\ e) \\ m_2(x - e) + m_1(e - a) + h_1 & \text{dla } x \in [e;\ d) \\ m_3(x - d) + m_2(d - e) + m_1(e - a) + h_1 & \\ & \text{dla } x \in [d;\ b) \\ 0 & \text{dla } x \notin [a;\ b) \end{cases} \tag{4.3}$$

gdzie: $m_1 = \operatorname{tg}\delta_1$; $m_2 = \operatorname{tg}\delta_2$; $m_3 = \operatorname{tg}\delta_3$,

zaś znaczenie pozostałych parametrów objaśnia rysunek 4.1.



Rys. 4.1 Parametry rozkładu sześciokątnego

We wzorze (4.3) występuje osiem parametrów, jednak warunek unormowania miary:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\, dx = 1 \tag{4.4}$$

daje następującą zależność między tymi parametrami:

$$h_1 \cdot (b - a) + \frac{1}{2} m_1 \cdot (e - a)^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot (d - e)^2 + \frac{1}{2} m_3 (b - d)^2 +$$
$$+ m_1 (e - a) \cdot (d - e) + \left(m_2 (d - e) + m_1 (e - a) \right) \cdot (b - d) = 1 \tag{4.5}$$

Oczywiście warunek ten musi zostać uwzględniony przy poszukiwaniu parametrów gęstości (4.3), dalej jednak dla zachowania przejrzystości wzorów korzystać się będzie z ośmiu parametrów, pamiętając przy tym, że łączy je związek (4.5).

Wykonanie elementarnego całkowania prowadzi do następującego wzoru na dystrybuantę rozkładu o gęstości (4.3).

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{dla } x \leq a \\ \dfrac{m_1^2}{2}x^2 + \left(h_1 - m_1 \cdot a\right) \cdot x + \dfrac{m_1 \cdot a^2}{2} - h_1 \cdot a & \text{dla } x \in [a;\ e) \\ \dfrac{m_2}{2}x^2 + \left(h_1 - m_1 \cdot a + m_1 \cdot e - m_2 \cdot e\right) \cdot x + \dfrac{m_1 \cdot a^2}{2} - h_1 \cdot a + \dfrac{m_2 \cdot e^2}{2} - \dfrac{m_1 \cdot e^2}{2} & \text{dla } x \in [e;\ d) \\ \dfrac{m_3}{2}x^2 + \left(h_1 - m_1 \cdot a + m_1 \cdot e - m_2 \cdot e + m_2 \cdot d - m_3 \cdot d\right) \cdot x + \dfrac{m_1 \cdot a^2}{2} - h_1 \cdot a + \dfrac{m_2 \cdot e^2}{2} + {} \\ \quad - \dfrac{m_1 \cdot e^2}{2} + \dfrac{m_3 \cdot d^2}{2} - \dfrac{m_2\, d^2}{2} & \text{dla } x \in [d;\ b) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant b \end{cases} \tag{4.6}$$

Wprowadzając oznaczenia

$$\begin{cases} \alpha_1 = h_1 - m_1 \cdot a\ ; \quad \alpha_2 = m_1 \cdot e - m_2 \cdot e\ ; \quad \alpha_3 = m_2 \cdot d - m_3 \cdot d \\ \beta_1 = \dfrac{m_1 \cdot a^2}{2} - h_1 \cdot a\ ; \quad \beta_2 = \dfrac{m_2 \cdot e^2}{2} - \dfrac{m_1 \cdot e^2}{2}\ ; \\ \beta_3 = \dfrac{m_3 \cdot d^2}{2} - \dfrac{m_2 \cdot d^2}{2} \end{cases} \tag{4.7}$$

widać, że

$$\beta_2 = -\frac{\alpha_2 \cdot e}{2}\,; \qquad \beta_3 = -\frac{\alpha_3 \cdot d}{2}$$

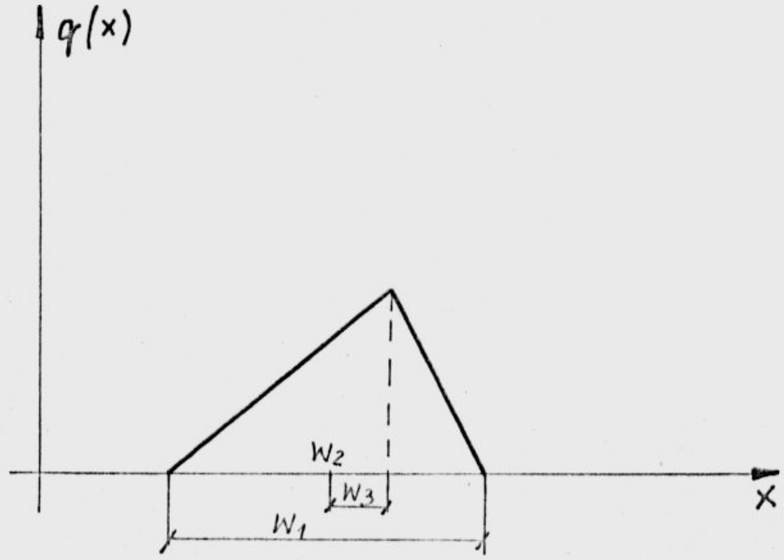
otrzymuje się:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad x \leq a \\ \frac{m_1}{2} \cdot x^2 + \alpha_1 \cdot x + \beta_1 & \text{dla} \quad x \in [a,\ e) \\ \frac{m_2}{2} \cdot x^2 + \left(\alpha_1 + \alpha_2\right) x + \left(\beta_1 + \beta_2\right) & \\ & \text{dla} \quad x \in [e,\ d) \\ \frac{m_3}{2} \cdot x^2 + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3\right) \cdot x + \left(\beta_1 + \beta_2 + \beta_3\right) & \\ & \text{dla} \quad x \in [d,\ b) \\ 1 & \text{dla} \quad x \geq b \end{cases} \qquad (4.8)$$

We wzorze (4.8) liczba parametrów wynosi 13, ale należy pamiętać o zależnościach (4.5) i (4.7), które redukują tę liczbę dla siedmiu niezależnych wielkości. Jako szczególny przypadek rozkładu o gęstości (4.3) otrzymuje się np. gęstość rozkładu jednostajnego /prostokątnego/ na odcinku $[a,\ b]$:

$$g_1(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a} & \text{dla} \quad x \in [a,\ b] \\ 0 & \text{dla} \quad x \notin [a,\ b] \end{cases} \qquad (4.9)$$

Innym istotnym przypadkiem szczególnym jest rozkład trójkątny skoncentrowany na odcinku $[a,\ b]$. Rozkład ten otrzymuje się przyjmując we wzorze (4.3) $h_1 = 0$, $m_2 = 0$ oraz $e = d$. Dla znalezienia momentów zmiennej trójkątnej wygodnie jest posłużyć się opisem gęstości przy użyciu nieco innych parametrów. Wykres gęstości oraz znaczenie nowych parametrów ilustruje rys.4.2



Rys. 4.2 Gęstość rozkładu trójkątnego /asymetrycznego/ w_1 - długość podstawy trójkąta, w_2 - współrzędna środka podstawy trójkąta, w_3 - różnica między odciętą wierzchołka a odciętą środka podstawy

Jasne jest, że ze względu na warunek unormowania (4.4) rozkład ten jest trójparametrowy. Jego gęstość wyrażona w nowych parametrach zapisuje się wzorem:

$$g_2(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{w_1\cdot(2w_3 + w_1)}(x - w_2) + \dfrac{2}{2w_3 + w_1} & \text{dla } x \in \left[w_2 - \dfrac{w_1}{2} : w_2 + w_3\right) \\ \dfrac{-4}{w_1\cdot(w_1 - 2w_3)}(x - w_2) + \dfrac{2}{w_1 - 2w_3} & \text{dla } x \in \left[w_2 + w_3 : w_2 + \dfrac{w_1}{2}\right) \\ 0 \quad \text{dla } x \notin \left[w_2 - \dfrac{w_1}{2} : w_2 + \dfrac{w_1}{2}\right) \end{cases} \tag{4.10}$$

Jak łatwo obliczyć pierwsze trzy momenty centralne zmiennej o gęstości g_2 wynoszą:

$$EX = \frac{1}{3}\cdot w_3 + w_2 \tag{4.11}$$

$$\operatorname{Var} X = E\left(X - EX\right)^2 = \frac{w_3^2}{18} + \frac{w_1^2}{24} \tag{4.12}$$

$$E\left(X - EX\right)^3 = \frac{w_3^3}{135} - \frac{w_3 \cdot w_1}{60} \tag{4.13}$$

W szczególnym przypadku, przyjmując $w_3 = 0$ otrzymuje się rozkład trójkątny symetryczny, który jest rozkładem dwuparametrowym. ze wzorów (4.11) i (4.12) otrzymuje się w tym przypadku:

$$EX = w_2 \tag{4.14}$$

$$\operatorname{Var} X = \frac{w_1^2}{24} \tag{4.15}$$

Po tym omówieniu niektórych zagadnień związanych z rozkładami wielokątnymi zostaną podane przykłady mające na celu pokazanie, że istnieje możliwość opisu parametrów ϕ, c i γ tymi rozkładami oraz podanie sposobu oceny parametrów gęstości (4.3).

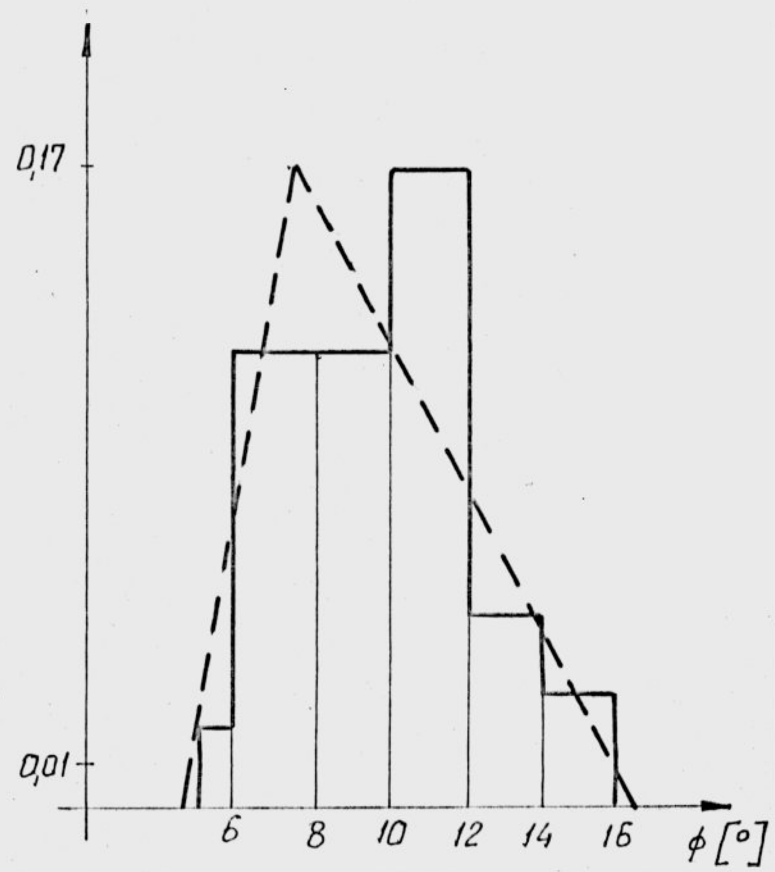
Na wstępie należy zaznaczyć, że w niektórych przypadkach kształt histogramu może sugerować dobór odpowiedniego rozkładu wielokątnego. Gdy po przeprowadzeniu jednego z testów istotności okaże się, że nie ma podstaw do rezygnacji ze wstępnie przyjętego rozkładu, to wówczas parametry gęstości (4.3) odczytuje się bezpośrednio z wykresu. Często okazuje się, że w rozpatrywanym zagadnieniu wystarczy posłużyć się rozkładami trójkątnymi. Z pracy [28, 96] zaczerpnięto przykłady statystycznych badań kąta tarcia wewnętrznego ϕ, spójności c i ciężaru objętościowego γ dla gliny.

Dystrybuanty empiryczne odpowiednio dla kąta tarcia wewnętrznego, spójności i ciężaru objętościowego zestawiono w tablicach : Z 3.1, Z 3.2 i Z 3.3 w załączniku nr 3, zaś uzyskane parametry zawiera tablica 4.2. Histogramy uzyskane z badań podano na rysunkach 4.3 , 4.4 i 4.5 .

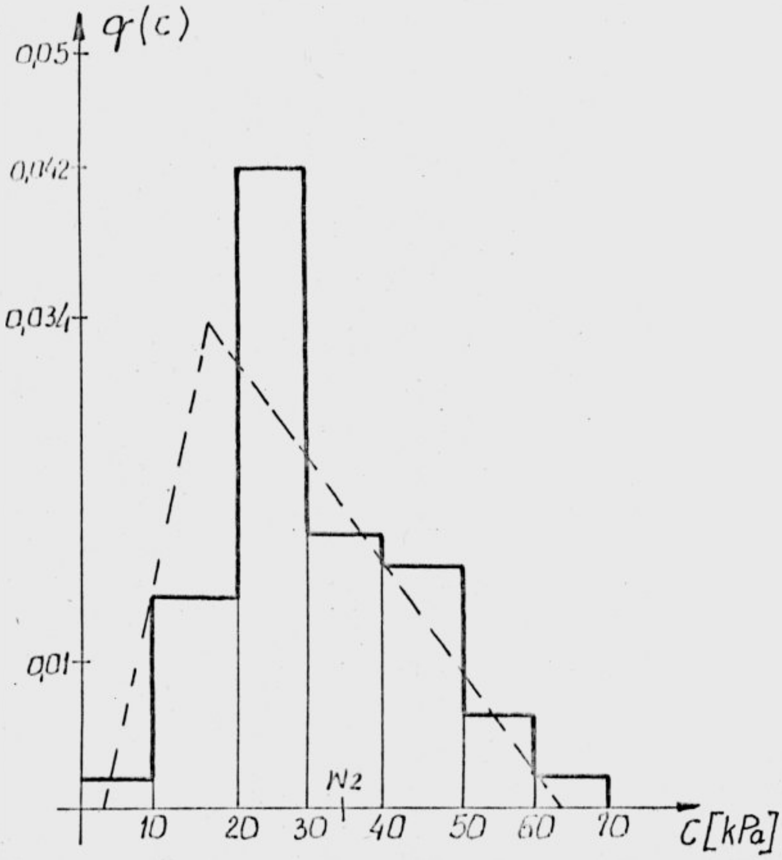
Tablica 4.2

Parametry statystyczne dla ϕ, c i γ uzyskane z badań

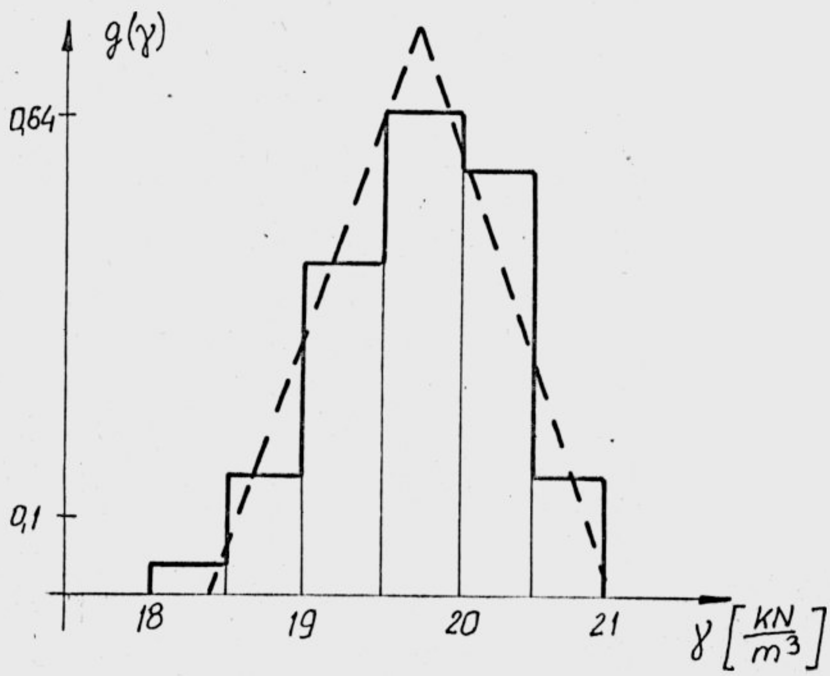
Parametr gruntowy	Liczebność próby	Wartość średnia	Odchyl. stand.	Współcz. zmienn.	Współcz. skośn.
Kąt tarcia wewn. ϕ [°]	50	9,38	2,48	0,264	0,410
Spójność c [kPa]	50	28,84	12,64	0,438	0,821
Ciężar objętościowy $\left[\frac{kN}{m^3}\right]$	50	19,74	0,53	0,027	-



Rys. 4.3 Histogram kąta tarcia wewnętrznego wraz z hipotetyczną gęstością trójkątną /asymetryczną/



Rys. 4.4 Histogram spójności i hipotetyczny rozkład trójkątny /asymetryczny/



Rys. 4.5 Histogram ciężaru objętościowego i hipotetyczna gęstość trójkątna /symetryczna/

Posługując się metodą momentów /por. np. [106, 95]/ z wykorzystaniem wzorów (4.11) - (4.13), (4.14) i (4.15) znaleziono gęstości trójkątne o momentach wg tablicy 4.2. Dla kąta tarcia wewnętrznego i spójności zaproponowano rozkłady trójkątne asymetryczne, zaś dla ciężaru objętościowego rozkład trójkątny symetryczny. Odpowiednie parametry gęstości (4.10) wynoszą :

Kąt tarcia wewnętrznego ϕ :

$w_1 = 11{,}71$, $w_2 = 10{,}32$, $w_3 = -2{,}82$.

Spójność c :

$w_1 = 58{,}84$, $w_2 = 34{,}39$, $w_3 = -16{,}66$.

oraz dla gęstości symetrycznej ciężaru objętościowego:

$w_1 = 2{,}61$, $w_2 = 19{,}75$.

Na rysunkach 4.3 , 4.4 i 4.5 zaznaczono także wykresy tych gęstości, zaś ich dystrybuanty wraz z dystrybuantami empirycznymi przedstawiono na rysunkach Z 3.1, Z 3.2, Z 3.3 /załącznik 3/. Następnie za pomocą zgodności testu Kołmogorowa [106, 12] testowano hipotezę, że zmienne losowe ϕ, c i γ mają zaproponowane wyżej rozkłady trójkątne. Znajdowano więc wartości statystyki:

$$D_n = \sup_x \left| F(x) - F_n^*(x) \right| , \tag{4.16}$$

gdzie: F_n - dystrybuanta empiryczna, zaś F - dystrybuanta teoretyczna.

Ponieważ liczebność próbki była mniejsza od 100 stosowano dokładny rozkład tej statystyki podany przez Masseya /por. [106] /, korzystając z tablic [141].

Obliczone wartości statystyki D_n oraz jej graniczne wartości dla poziomów istotności $\eta_1 = 0{,}2$, $\eta_2 = 0{,}1$, $\eta_3 = 0{,}05$ i $\eta_4 = 0{,}01$ podane są w tablicy 4.3.

Tablica 4.3

Wyniki testowania zaproponowanych rozkładów testem Kołmogorowa

Parametr gruntowy	Obliczona wartość statystyki D_n	Wartości graniczne			
		η_1=0,2	η_2=0,1	η_3=0,05	η_4=0,01
ϕ	0,1132				
c	0,1320	0,1484	0,16959	0,1841	0,22604
γ	0,1096				

Jak widać, na żadnym z tych czterech poziomów istotności nie ma podstaw do odrzucenia przedstawionych hipotez. Przedstawiony powyżej przykład został także zaprezentowany przez autora w pracy [26]. W przypadku, gdy rozkład trójkątny nie nadaje się do opisu uzyskanych danych i stosuje się rozkład wielokątny, użycie metody momentów staje się znacznie bardziej skomplikowane. Gdyby bowiem doszło do znajdowania metodą momentów wszystkich siedmiu /niezależnych/ parametrów gęstości (4.3), należałoby rozwiązywać układ równań zawierający równanie siódmego stopnia. Poniżej podane przykłady zademonstrują inny sposób znajdowania tych parametrów. Dane, podobnie jak poprzednio, pochodzą z badań opisywanych w [28] i [96].

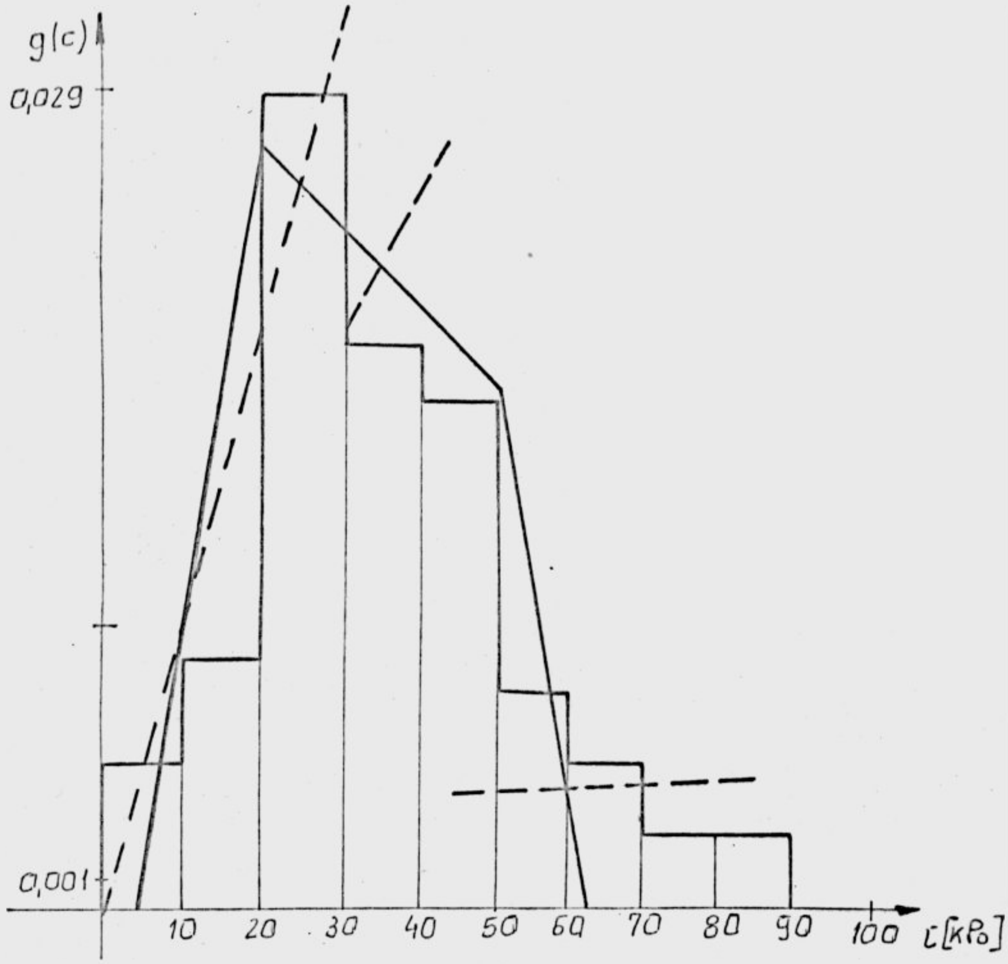
Badanym gruntem była glina piaszczysta. Tablica 4.4 przedstawia parametry statystyczne uzyskane z próbek.

Tablica 4.4

Parametry statystyczne uzyskane z badań

Parametr gruntowy	Liczebność próby	Wartość średnia	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
c kPa	79	34,317	17,113	0,499
ϕ [°]	79	12,289	5,798	0,472

Dystrybuantę empiryczną spójności zamieszczono w tablicy Z 3.4 /Załącznik 3/, a na rysunku 4.6 uzyskany histogram.



Rys. 4.6 Histogram spójności. Gęstość g_{c1} - linia kreskowana, gęstość g_{c2} - linia ciągła

Dla wstępnej oceny możliwości wyboru odpowiedniego rozkładu wielokątnego wygodnie jest posłużyć się odpowiednią siatką prawdopodobieństwa, a mianowicie taką, w której parabola $y = x^2$ ma postać linii prostej, zwanej dalej siatką pierwiastkową. Na siatkę tę nanosi się wartości dystrybuanty empirycznej /przedstawiono to w załączniku nr 3 na rysunku Z 3.4/. Takie przedstawienie umożliwia ocenę, na jakich odcinkach i jakimi parabolami /które mają tu postać prostych/ można aproksymować dystrybuantę empiryczną. Przykład takiej oceny przedstawiony jest w postaci trzech odcinków łamanej na rysunku Z 3.4 /dystrybuanta ta będzie tu oznaczona przez F_{c1}/. Ustalając, dla każdego od -

cinka dwa punkty należące do niego i wykorzystując zamieszczoną skalę $\sqrt{F(c)}$ znajduje się równanie prostej w postaci $y = px + q$. Podnosząc prawą stronę tego równania do kwadratu otrzymuje się odpowiedni odcinek dystrybuanty parabolicznej. W omawianym przykładzie dystrybuanta ma postać:

$$F_{c1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 0{,}000529\, x^2 & \text{dla } x \in [0;\ 30) \\ 0{,}000215135 \cdot x^2 + 0{,}0073315 \cdot x + 0{,}0625326 & \\ & \text{dla } x \in [30;\ 45) \\ 5{,}06285\ 10^{-6} \cdot x^2 + 0{,}0036393x + 0{,}6540785 & \\ & \text{dla } x \in [45;\ 85) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 85 \end{cases} \qquad (4.17)$$

Okazuje się jednak, że funkcja gęstości g_{c1} rozkładu o tej dystrybuancie jest nieciągła /jej wykres zaznaczony jest na rys. 4.6 linią kreskowaną/ i składa się z trzech rozłącznych odcinków. Formalnie rzecz biorąc, gęstość prawdopodobieństwa nie musi być funkcją ciągłą. Wzór (4.3) można łatwo uogólnić, tak aby obejmował on także przypadek nieciągłej gęstości. W zasadzie nie ma więc specjalnych przyczyn do odrzucenia takiego opisu /o ile nie zostanie on zdyskwalifikowany testem statystycznym/, zwłaszcza, że jego parametry mogą być w prosty sposób znalezione opisaną wyżej metodą. Jednak opisy nieciągłą funkcją gęstości nie są zwykle stosowane. Z tego względu w dalszym ciągu będą używane rozkłady o ciągłej gęstości.

Warunki ciągłości w punkcie x_o dla dystrybuanty i gęstości dla dwóch sąsiednich odcinków prowadzą do następujących równań:

$$\begin{cases} p_1 \cdot x_o^{\,2} + q_1 \cdot x_o + r_1 = p_2 \cdot x_o^2 + q_2 \cdot x_o + r_2 \\ 2p_1 \cdot x_o + q_1 = 2p_2 \cdot x_o + q_2 \end{cases} \qquad (4.18)$$

Trzeba jeszcze dodać, że zastosowana siatka nie wyczerpuje wszystkich przypadków dystrybuant kawałkami parabolicznych, gdyż w postaci prostej wpisują się się w nią tylko parabole typu $y = (p\,x + q)^2$.
Posługiwanie się siatką można usprawnić, poprzez odpowiednie przesunięcie układu współrzędnych /do punktu od którego rozpoczyna się aproksymacja/, tak aby aproksymacja na każdym z odcinków rozpoczynała się od punktu zerowego $(0,0)$. Bowiem stosowana tu podziałka pozwala na przeprowadzenie dokładniejszej aproksymacji dla małych wartości.

Niżej prezentuje się inny sposób wyznaczenia parametrów gęstości wielokątnej oparty na metodzie najmniejszych kwadratów. Niech obszar zmienności c będzie podzielony na trzy odcinki $[0; 20)$, $[20; 50)$ i $[50; 85)$. Taki podział może być również zasugerowany wykresem dystrybuanty empirycznej w siatce pierwiastkowej /por. rys. Z 3.4 /. Rozpoczynając aproksymację od środkowego przedziału $[20, 50)$, po zastosowaniu warunku najmniejszych kwadratów:

$$\sum_{i=1}^{n} \left[z_i - \left(p_2\, x_i^2 + q_2\, x_i + r_2\right)\right]^2 = \min \tag{4.19}$$

/gdzie x_i - punkty skoku dystrybuanty empirycznej oraz $z_i = F^*(x_i)$, n - liczebność próby/, i przyrównaniu do zera pochodnych względem trzech poszukiwanych parametrów $(r_2,\ q_2$ i $p_2)$ otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} z_i - p_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - q_2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n\, r_2 = 0 \\[2ex] \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \cdot x_i - p_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 - q_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 - r_2 \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 0 \end{cases} \tag{4.20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} z_i \cdot x_i^2 - p_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^4 - q_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^3 - r_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 0.$$

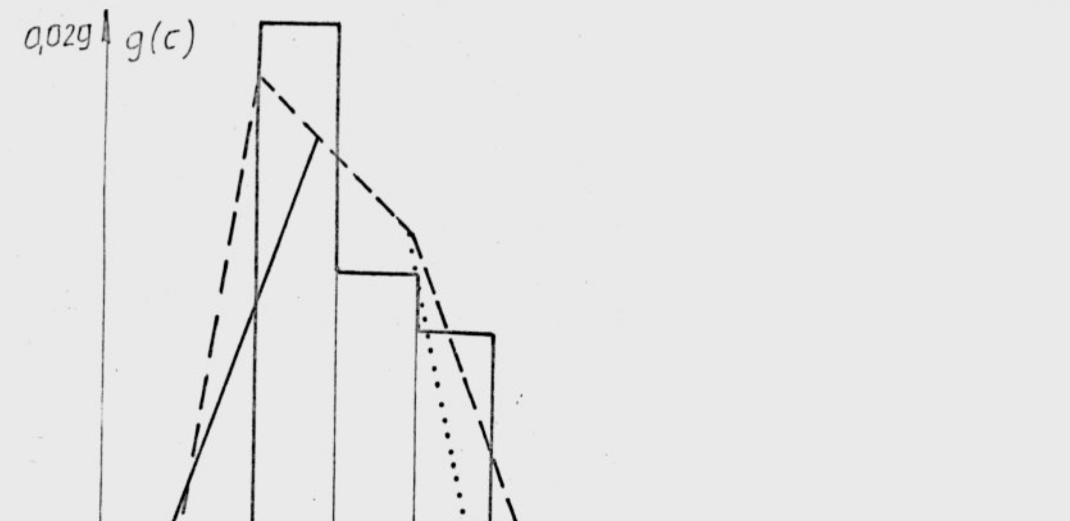
Obliczone, z tego układu parametry p_2, q_2, r_2 są współczynnikami trójmianu kwadratowego będącego środkowym odcinkiem dystrybuanty /przedział $[20;\ 50)$/. Pierwszy odcinek dystrybuanty /przedział $[0;\ 20)$/ znaleziono korzystając z warunków ciągłości (4.18) i przyjmując założenie, że gęstość w punkcie początkowym jest równa zeru /tzn. $h_1 = 0$ we wzorze (4.3) - pole obszaru pod pierwszym odcinkiem gęstości musi być równe wartości dystrybuanty w punkcie połączenia z odcinkiem drugim/. Trzeci odcinek wyznaczono w oparciu o założenie, że gęstość w punkcie końcowym b ma wartość zero, warunki ciągłości (4.18) i fakt, że $F_{c2}(b) = 1$. Warunki te pozwoliły wyznaczyć punkt b, który w tym przypadku nie był z góry ustalony. Ostatecznie otrzymano następującą dystrybuantę:

$$F_{c2}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 4{,}7008 \\ 0{,}000886675 \cdot x^2 + 0{,}00833617 \cdot x + 0{,}0195949 & \text{dla } x \in [4{,}7008;\ 20) \\ -0{,}000146418 \cdot x^2 + 0{,}0329878 \cdot x - 0{,}3936473 & \text{dla } x \in [20;\ 50) \\ -0{,}000762845 \cdot x^2 + 0{,}0946304\, x - 1{,}9347098 & \text{dla } x \in [50;\ 60{,}\ 025) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 62{,}025 \end{cases} \qquad (4.21)$$

Wykres odpowiadającej tej dystrybuancie gęstości g_{c2} wraz z histogramem spójności przedstawia rysunek 4.6 /linia ciągła/. Łatwo zauważyć, że nośnik gęstości g_{c2} dość znacznie różni się od przedziału zmienności c otrzymanego z badań. Z prawej strony na przykład nie obejmuje on pięciu zaobserwowanych wartości. Jeżeli tych skrajnych obserwacji nie można uznać za nieistotne /np. niewiarygodne/, to skracając nieco środkowy przedział oraz korzystając z warunków ciągłości (4.18), związku $F(b) = 1$ i zerowania się gęstości w punkcie końcowym /ostatni warunek może być zastąpiony przez $g(b) = h_2 > 0$ albo przez ustalenie położenia punktu b/, można otrzymać gęstość z nośnikiem o większej długości. W taki sposób otrzymano gęstość g_{c3} odpowiadającą dystrybuancie F_{c3}, która to dystrybuanta dana jest wzorem:

$$F_{c3}(x) = \begin{cases} F_{c2}(x) & \text{dla } x \in (-\infty ; 38) \\ -0{,}000339835\, x^2 + 0{,}047687\, x - 0{,}672927 & \\ & \text{dla } x \in [38; 70{,}1672) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 70{,}1672 \end{cases} \tag{4.22}$$

Wykres gęstości g_{c3} przedstawiono na rys. 4.7 linią przerywaną.



Rys. 4.7 Histogram spójności; wykresy gęstości: g_{c3}-linia przerywana; g_{c4} - odcinek ciągły /dla punktów gdzie $g_{c4} \neq g_{c3}$/; g_{c5} - odcinek kropkowany /dla punktów, w których $g_{c5} \neq g_{c4}$/

Analogicznie można modyfikować pierwszy odcinek gęstości, wprowadzając w ten sposób do nośnika wartości najmniejsze. Przykładowo otrzymuje się:

$$F_{c4}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ 0{,}000393563 \cdot x^2 + 0{,}00382876 \cdot x & \\ & \text{dla } x \in [0;\ 27) \\ F_{c3}(x) & \text{dla } x \geqslant 27 \end{cases} \tag{4.23}$$

Odcinek gęstości g_{c4} różny od g_{c3} zaznaczono na rys. 4.7 linią ciągłą.

Nietrudno zauważyć /por. rys. 4.7 /, że modyfikacja ostatniej gęstość /g_{c4} - trzeci odcinek/, polegającej na zastosowaniu gęstości złożonej z czterech odcinków łamanej, daje jeszcze lepszą aproksymację uzyskanego z badań histogramu. Odcinki nowej gęstości g_{c5} różne od gęstości g_{c4} zaznaczono na rys. 4.7 linią kropkowaną. Odpowiednia dystrybuanta zapisuje się wzorem:

$$F_{c5}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 0 \\ F_{c4}(x) & \text{dla } x \in [0;\ 38) \\ -0{,}000623 \cdot x^2 + 0{,}06922075 \cdot x - 1{,}0818158 & \\ & \text{dla } x \in [38;\ 50) \\ -0{,}000066646 \cdot x^2 + 0{,}0135714 \cdot x + 0{,}3091 & \\ & \text{dla } x \in [50;\ 101{,}817049) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 101{,}817049 \end{cases} \tag{4.24}$$

Nośnik gęstości g_{c5} obejmuje wszystkie zaobserwowane w badaniach wartości c.

Zadanie poszukiwania dystrybuanty rozkładu wielokątnego można także rozpocząć od innego jej odcinka - na przykład końcowego. Po określeniu tego odcinka przez rozwiązanie układu (4.20) można dalej stosować warunek najmniejszych kwadratów, który po podstawieniu (4.18) prowadzi do równania:

$$\sum_{i=1}^{n}\left\{z_i\cdot\left[p_2\cdot x_i^2+\left(q_3+2x_o\cdot\left(p_3-p_2\right)\right)\cdot x_i+r_3-x_o^2\cdot\left(p_3-p_2\right)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\left(x_i^2-2x_o\,x_i+x_o^2\right)=0 \qquad (4.25)$$

Z (4.25) wylicza się parametr p_2.

Posługując się metodą najmniejszych kwadratów należy pamiętać, że odcinek paraboli uzyskany z układu (4.20) lub z równania (4.25) nie zawsze musi być rosnący /układ (4.20) nie zawiera warunku gwarantującego otrzymanie odcinka rosnącego/. Na ogół rośnięcie to wymuszone jest przez wartość dystrybuanty empirycznej, która jest funkcją niemalejącą. Jednak w sytuacji, gdy przedział, w którym poszukuje się rozwiązania jest zbyt długi, można otrzymać także fragment malejący. Oczywiście jest to rozwiązanie nie do przyjęcia. Należy wówczas skrócić przedział, na którym odbywa się aproksymacja i ponownie znaleźć rozwiązanie dla odcinka krótszego.

Przedstawione tu propozycje prowadzą do określenia parametrów gęstości (4.3) bez użycia metody momentów dającej zbyt skomplikowane równania. Otrzymane parametry dla omówionych gęstości /poza gęstościami g_{c1} i g_{c5}, które nie mają postaci (4.3) zestawiono w tablicy 4.5.

Tablica 4.5

Parametry hipotetycznych gęstości spójności

Gęstość	a	e	d	b	h_1	m_1	m_2	m_3
g_{c2}	4,7008	20	50	62,025	0	$1,77335\cdot 10^{-3}$	$-2,9284\cdot 10^{-4}$	$-1,5257\cdot 10^{-3}$
g_{c3}	4,7008	20	38	70,1627	0	$1,77335\cdot 10^{-3}$	$-2,9284\cdot 10^{-4}$	$-6,7967\cdot 10^{-4}$
g_{c4}	0	27	38	30,1627	0,0382	$7,87127\cdot 10^{-4}$	$-2,9284\cdot 10^{-4}$	$-6,7967\cdot 10^{-4}$

Tak jak poprzednio w celu weryfikacji hipotez dotyczących rozkładu c posłużono się testem Kołmogorowa i dokładnym rozkładem statystyki D_n /wzór (4.16) /. Wyniki przedstawiono w tablicy 4.6.

Tablica 4.6

Wyniki testu Kołmogorowa dla gęstości g_{c1}, g_{c2}, g_{c3}, g_{c4}, i g_{c5}

Gęstość	Obliczona wartość statystyki D_n	Wartości graniczne			
		$\eta_1 = 0,2$	$\eta_2 = 0,1$	$\eta_3 = 0,05$	$\eta_4 = 0,01$
g_{c1}	0,077045				
g_{c2}	0,1072244				
g_{c3}	0,0715687	0,11860	0,13551	0,15052	0,18060
g_{c4}	0,1008986				
g_{c5}	0,1008986				

Z wyników podanych w tablicy 4.6 wynika, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotetycznych gęstości g_{c1}, g_{c2}, g_{c3}, g_{c4} i g_{c5}. Wybór jednej spośród tych gęstości jako gęstości zmiennej losowej c stanowi oddzielne zagadnienie, które nie będzie tu szerzej omawiane /obszerną dyskusję na ten temat można znaleźć np. w książce Cornella [12]/. Warto jedynie zwrócić uwagę, że przy wyborze tym może zdecydować np. zachowanie się gęstości przy największych i najmniejszych wartościach, c . Innym kryterium może być porównanie momentów poszczególnych gęstości z momentami próby. Poniżej zamieszczono tablicę dwóch pierwszych momentów centralnych dla rozkładów o gęstościach $g_{c1} \div g_{c5}$ (tab.4.7).
Analogicznie rozważono zastosowanie rozkładu wielokątnego jako rozkładu kąta tarcia wewnętrznego. Parametry statystyczne z badań podane były w tablicy 4.4. W załączniku nr 3 (tablica Z 3.5)

Tablica 4.7

Porównanie momentów rozkładów o gęstościach g_{c1}, g_{c2}, g_{c3}, g_{c4}, g_{c5} oraz momentów uzyskanych z próby

Gęstość	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
g_{c1}	34,0704	17,8978	0,5253
g_{c2}	32,2662	13,0758	0,4053
g_{c3}	32,8632	14,0664	0,4280
g_{c4}	32,0446	15,1870	0,4739
g_{c5}	34,3713	19,4215	0,5651
Wartości uzyskane z próby	34,317	17,113	0,499

przedstawia uzyskaną dystrybuantę empiryczną, zaś histogram częstości obrazuje rysunek 4.8. Analogicznie jak dla spójności, dla wstępnej oceny możliwości wyboru odpowiedniego rozkładu wielokątnego zastosowano siatkę pierwiastkową, na której naniesiono wartości dystrybuanty empirycznej /rys. Z 3.5 w załączniku nr 3/. Zastosowano tu sposób postępowania identyczny jak przy konstrukcji dystrybuanty F_{c2} dla spójności. Najpierw poszukiwano środkowej części dystrybuanty $F_{\emptyset 1}$ na odcinku $[6;\ 15,5)$, wykorzystując układ równań (4.20). Pierwszy i trzeci odcinek określono używając warunków ciągłości (4.18), warunku $F_{\emptyset 1}(b) = 1$ oraz przyjmując założenie, że dla gęstości $g_{\emptyset 1}$ jest: $g_{\emptyset 1}(a) = g_{\emptyset 1}(b) = 0$. W rezultacie otrzymano następującą dystrybuantę:

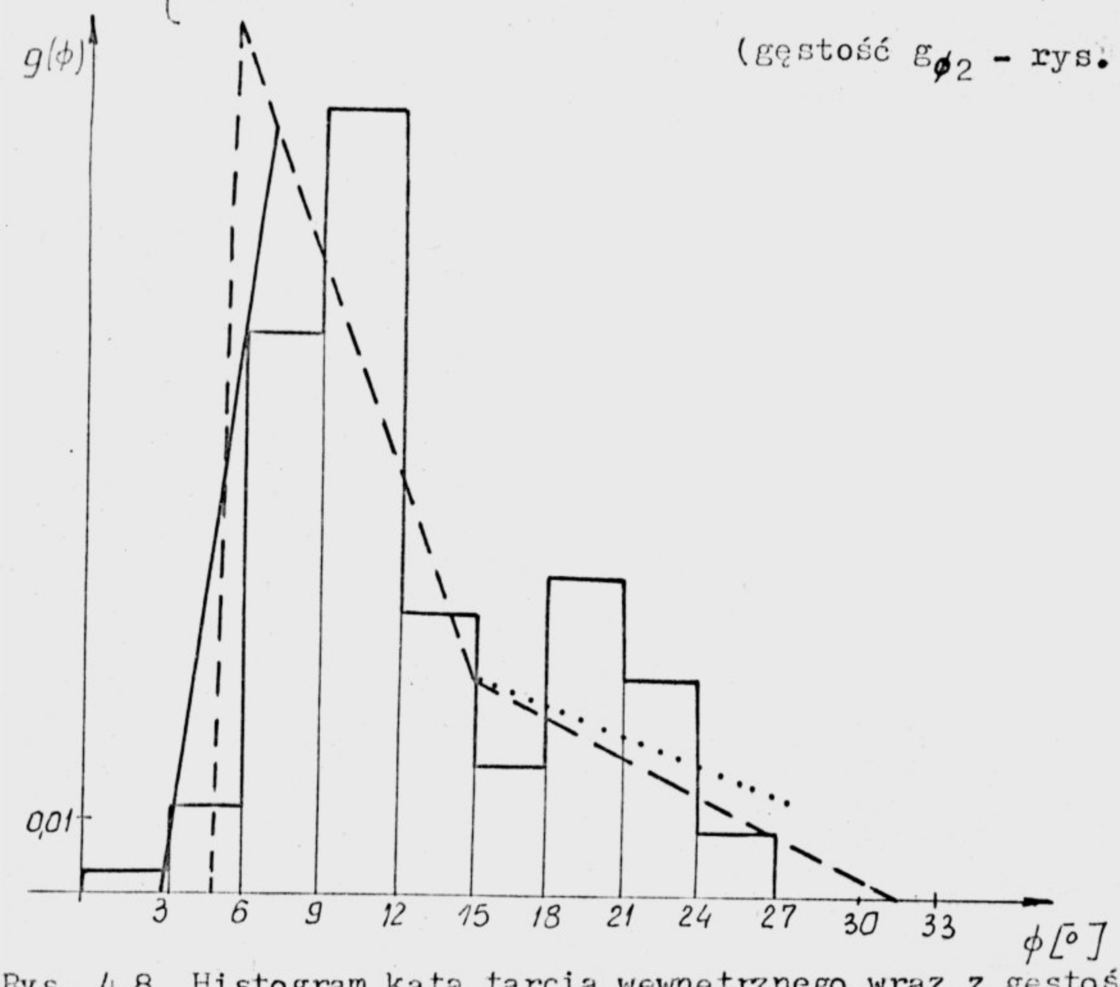
$$F_{\emptyset 1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{dla } x < 4,6024 \\ 0,0416502 \cdot x^2 - 0,3833821 \cdot x + 0,8822396 & \\ & \text{dla } x \in [4,6024;\ 6) \\ -0,0048026 \cdot x^2 + 0,1740521 \cdot x - 0,790064 & \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
 & \text{dla } x \in [6;\ 15) \\
-0{,}00086433 \cdot x^2 + 0{,}0559039 \cdot x + 0{,}0960482 & \\
 & \text{dla } x \in [15;\ 32{,}3395) \\
1 & \text{dla } x \geqslant 32{,}3395
\end{cases}
\qquad (4.26)
$$

Gęstość $g_{\phi 1}$ rozkładu o dystrybuancie $F_{\phi 1}$ wykreślono na rys. 4.8 /linia przerywana/; do nośnika tej gęstości nie należą pierwsze trzy zaobserwowane wartości ϕ . W związku z tym zmodyfikowano pierwszy odcinek dystrybuanty w taki sposób, jak przy dystrybuancie F_{c3} i F_{c4} dla spójności, uzyskując rezultat:

$$
F_{\phi 2}(x) = \begin{cases}
0{,}011144\, x^2 - 0{,}0625959\, x + 0{,}0879003 & \\
 & \text{dla } x \in [2{,}8084957;\ 7{,}42) \\
F_{\phi 1}(x) & \text{dla } x \notin [2{,}8084957;\ 7{,}42)
\end{cases}
\qquad (4.27)
$$

(gęstość $g_{\phi 2}$ - rys. 4.8)



Rys. 4.8 Histogram kąta tarcia wewnętrznego wraz z gęstościami $g_{\phi 1}$ /linia przerywana/; $g_{\phi 2}$ /linia ciągła dla odcinka, na którym $g_{\phi 1} \neq g_{\phi 2}$/; $g_{\phi 3}$ - odcinek, dla którego $g_{\phi 3} \neq g_{\phi 2}$ - linia kropkowana

Z kolei z prawej strony nośnik gęstości $g_{\phi 2}$ znacznie przekracza zaobserwowane wartości kąta ϕ. Rezygnacja z założenia, że $g_{\phi 2}(b) = 0$ i przyjęcie, że końcowym punktem nośnika jest $b = 27$ przy zachowaniu bez zmian dwóch pierwszych odcinków gęstości /dystrybuanty/ prowadzi do dystrybuanty $F_{\phi 3}$ - wzór (4.28); w tym przypadku $g_{\phi 3}(b) = g_{\phi 3}(27) = 0{,}01334$.

$$F_{\phi 3}(x) = \begin{cases} F_{\phi 2}(x) & \text{dla } x < 15 \\ -0{,}0006932 \cdot x^2 + 0{,}0507701 \cdot x + 0{,}134551 & \\ & \text{dla } x \in [15;\ 27) \\ 1 & \text{dla } x \geqslant 27 \end{cases} \tag{4.28}$$

/wykres gęstości $g_{\phi 3}$ dla odcinka niepokrywającego się z $g_{\phi 2}$ zaznaczono na rys. 4.8 linią kropkowaną/.
Parametry gęstości $g_{\phi 1}$, $g_{\phi 2}$, $g_{\phi 3}$ wg wzoru (4.3) zestawiono w tablicy 4.8, a wyniki testowania testem Kołmogorowa w tablicy 4.9.

Tablica 4.8

Parametry gęstości hipotetycznych $g_{\phi 1}$, $g_{\phi 2}$, $g_{\phi 3}$ kąta tarcia wewnętrznego

Gęstość	a	e	d	b	h_1	m_1	m_2	m_3
$g_{\phi 1}$	4,6024	6	15	32,3395	0	$8{,}33 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}6052 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}72866 \cdot 10^{-3}$
$g_{\phi 2}$	2,8085	7,42	15	32,3395	0	$2{,}2288 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}6052 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}72866 \cdot 10^{-3}$
$g_{\phi 3}$	2,8085	7,42	15	27	0	$2{,}2288 \cdot 10^{-2}$	$-9{,}6052 \cdot 10^{-3}$	$-1{,}3864 \cdot 10^{-3}$

Z zamieszczonych w tablicy 4.9 wyników należy wyciągnąć wniosek, że nie ma podstaw do odrzucenia żadnej z trzech gęstości na zaprezentowanych poziomach istotności. Obliczono także, pierwsze dwa momenty o gęstościach $g_{\phi 1}$, $g_{\phi 2}$, $g_{\phi 3}$, które porównano z odpowiednimi momentami próby - tablica 4.10

Tablica 4.9

Wyniki testu Kołmogorowa dla $g_{\phi 1}$, $g_{\phi 2}$, $g_{\phi 3}$ kąta tarcia wewnętrznego

Gęstość	Obliczone wartości statystyki D_n	Wartości graniczne			
		$\eta_1 = 0,2$	$\eta_2 = 0,1$	$\eta_3 = 0,05$	$\eta_4 = 0,01$
$g_{\phi 1}$	0,1157667				
$g_{\phi 2}$	0,1157667	0,1186	0,13551	0,15052	0,1806
$g_{\phi 3}$	0,1157667				

Tablica 4.10

Wartości oczekiwane, odchylenia standardowe i współczynniki zmienności hipotetycznych rozkładów kąta tarcia wewnętrznego ϕ oraz odpowiednie momenty uzyskane z próby

Gęstość	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
$g_{\phi 1}$	12,1839	5,9522	0,4885
$g_{\phi 2}$	12,0858	6,0653	0,5019
$g_{\phi 3}$	11,9434	5,7740	0,4809
Wartości z próby	12,2894	5,7983	0,4718

Przedstawione w tym podrozdziale przykłady wskazują na możliwość zastosowania rozkładów wielokątnych jako rozkładów kąta tarcia wewnętrznego, spójności oraz ciężaru objętościowego. Pokazano także, sposoby doboru odpowiedniego rozkładu wielokątnego na podstawie posiadanych wyników badań.

Ważną cechą rozkładów wielokątnych jest możliwość aproksymowania histogramów niesymetrycznych. W dalszej części pracy /rozdział 6/ zostanie pokazane, że rozkłady te mają bardzo prosty generator liczb losowych, co ma zasadnicze znaczenie przy symulacyjnym badaniu zjawiska losowego.

4.4 Losowe obciążenia ruchem pojazdów, przekazywane z przęsła na przyczółek. Rozkłady reakcji podporowych.

Wcześniej założono, że obciążenia przyczółka wywołane ciężarem belki przęsłowej będą traktowane jako nielosowe. Za zmienną losową przyjęto natomiast obciążenia mostu losowym ruchem pojazdów przekazywane poprzez belkę na przyczółek mostowy. Rozważania ograniczone są do przyczółków mostów drogowych.

Stochastyczne teorie obciążeń mostów stanowią pewien dział bardzo dziś rozwiniętej probabilistycznej teorii obciążeń /por. np. [84, 32]/. Teoria taka uwzględnia zwykle informacje o różnych typach pojazdów przypadkowo pojawiających się na moście, przy czym podstawową rolę gra tu losowy ciężar pojazdu, rozstaw osi oraz długość pojazdu. Inne elementy schematu to: odległości między pojazdami na moście, częstość pojawiania się określonych typów pojazdów oraz średnie prędkości przejazdu przez most. Ustalenie konkretnych wartości parametrów wymaga wielu żmudnych badań statystycznych, np. obserwacji ciężarów całkowitych pojazdów /wyniki badań tego typu dla warunków polskich można znaleźć w pracy Wysokowskiego [137]. Poniżej w formie bardzo skrótowej zostanie podanych kilka propozycji probabilistycznych schematów. Jedną z pierwszych podał Asplund [6]. Rozważa on możliwość pojawienia się jednego lub kilku pojazdów "wyjątkowo ciężkich" /lub transportów o równoważnym obciążeniu/, za które uważa pojazdy o ciężarze $T = 56{,}99\ \frac{kN}{m^2}$ i długości $L = 10{,}2$ m. Przyjęto, że pojawiają się one z prawdopodobieństwem $p_e = 0{,}001$. W celu obliczania prawdopodobieństwa pojawienia się takich pojazdów w liczbie k, na przęśle o rozpiętości równej n-krotnej długości pojazdu "wyjątkowo ciężkiego", użyto rozkładu dwumianowego. Stąd poszukiwane prawdopodobieństwo wynosi:

$$p_k = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1 - p)^{n-k} \qquad (4.29)$$

Autor bada wielkości p_k w zależności od rozpiętości przęsła (określonej przez n) oraz prawdopodobieństwa przekroczenia określonej proporcji $\frac{k}{n}$. Przyjmując określony średni ciężar przeciętnego przejazdu $U = 4{,}38 \frac{kN}{m^2}$ bada średnie intensywności w postaci:

$$A = U + (T - U)\frac{k}{n}, \qquad (4.30)$$

gdzie A - średnie obciążenie przypadające na odcinek $L = 10{,}2$ m. Oznaczenia zgodne są z pracą [6]. Wyznaczane są te wartości A, które są przekraczane z zadanymi prawdopodobieństwami 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}.

Modyfikacje tego modelu przedstawiono w pracach [68] i [69], gdzie dla wyznaczenia ciężaru pojazdu "wyjątkowo ciężkiego" użyty został asymptotyczny rozkład ekstremów I-go rodzaju (rozkład Gumbela/. Obok rozkładu dwumianowego najczęściej pojawiającym się opisem liczby zaobserwowanych pojazdów jest opis przy pomocy rozkładu Poissona:

$$p_k = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k\,!} \qquad (4.31)$$

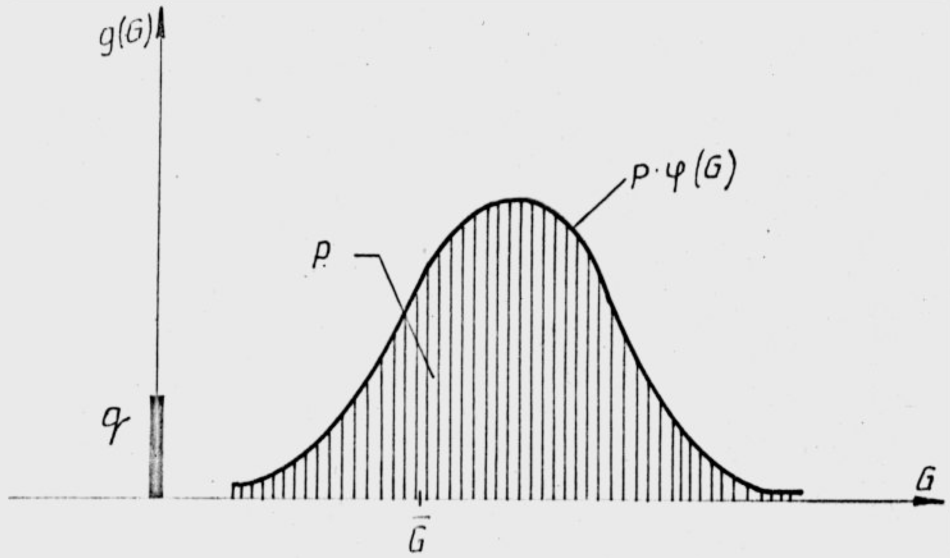
k - liczba pojazdów, λ - wartość średnia /intensywność/.

Propozycja ta pochodzi od Stephensona [120] i była wykorzystywana przez wielu innych autorów, np. [10, 12, 93].
Propozycja uwzględniająca możliwość wystąpienia przerw /większych niż minimalne/ między pojazdami lub grupami pojazdów przedstawiona została przez Murzewskiego i Winiana w pracy [93]. Autorzy ci rozważyli sekwencję ciężarów losowych G stochastycznie niezależnych, działających na konstrukcję w stałych odstępach Δx. Chcąc uwzględnić fakt że nie można pominąć niezerowego prawdopodobieńs-

twa $q \neq 0$, braku obciążenia $G = 0$ założono, że rozkład prawdopodobieństwa G nie jest ciągły, lecz składa się z części atomowej skupionej w zerze i części absolutnie ciągłej. Umowną gęstość tego rozkładu przedstawia wzór

$$g(G) = q \cdot \delta(G) + p \cdot \varphi(G) \tag{4.32}$$

gdzie $\delta(G)$ - miara probabilistyczna skoncentrowana w zerze, $\varphi(G)$ - gęstość warunkowa przy $G \neq 0$, $p + q = 1$. Gęstość φ może być także niesymetryczna lub wielomodalna.



Rys. 4.9 Nieciągły rozkład obciążenia G

Następnie przyjęto, że odstęp $\Delta x = t$ między pojazdami jest losowy i wyznaczono rozkład prawdopodobieństwa dla obciążenia zastępczego $z = \frac{G}{t}$ /korzystając z niezależności zmiennych losowych G i t /:

$$g(z) = q \cdot \delta(z) + p \cdot \int_0^\infty \varphi(z \cdot t) g_1(t) \, t dt , \tag{4.33}$$

gdzie $g_1(t)$ - gęstość prawdopodobieństwa odstępów pojedynczych obciążeń, $t = x_{i+1} - x_i$. Jawną postać rozkładu (4.33) podano dla gęstości g_1 wykładniczej /co odpowiada poissonowskiemu strumieniowi pojawiania się pojazdów/ oraz dla warunkowej gęstości φ normalnej i typu gamma. Podano także sposoby estymacji prawdopodobieństwa p występującego we wzorach (4.32) i (4.33) dla przypadków strumienia Poissona i Erlanga /por. [93]/. W pracy [87] Murzewski podał dwie dalsze propozycje przydatne z punktu widzenia przeciążenia mostów. W pierwszej z nich /tzw. "modelu ciągłym"/ obciążenia obiektu są reprezentowane przez wektorowe pole losowe $\vec{Q}(t, x)$ zależne od czasu obciążenia t i współrzędnej x - przekroju poprzecznego. Autor przyjmuje następujące założenia:

- pole stochastyczne obciążeń losowych jest gaussowskie,
- efekty czasu i przestrzeni są rozłączne,
- standaryzowana funkcja stochastyczna obciążeń jest stacjonarna wzdłuż osi mostu x w każdym czasie,
- losowy proces obciążeń jest stacjonarny w czasie t dla każdego przekroju poprzecznego obiektu mostowego.

Założenia te pozwalają na określenie wartości oczekiwanej funkcji autokorelacji obciążenia $\vec{Q}(t, x)$ za pomocą dwóch parametrów i trzech funkcji skalarnych.

Problem przeciążenia jest przedstawiony jako problem przewyższenia nośności przez stacjonarną gaussowską funkcję stochastyczną. Prawdopodobieństwo przeciążenia dla całego obiektu mostowego dane jest wzorem

$$\omega = 1 - \exp(-rLT) \qquad (4.34)$$

gdzie: L - długość obiektu mostowego, T - przewidziany okres eksploatacji konstrukcji, r - ryzyko przeciążenia /przewyższenie nośności przez proces gaussowski - wzory w pracy [87]/.
W drugiej propozycji ("modelu dyskretnym") autor rozważa dwuwymiarowy ciąg maksimów lokalnych losowego pola obciążeń $\vec{Q}(t, x)$.
Ponadto wprowadzona zostaje koncepcja tzw. prób krótkoterminowych. Czas próby krótkoterminowej $\tau > \Delta T$ /ΔT - odstęp czasu pomiędzy szczytowymi obciążeniami/ jest tak dobrany, by losowy

szczyt ekstremalnych obciążeń podczas próby krótkoterminowej był praktycznie niezależny od innych krótkoterminowych obciążeń, ale τ jest małe w porównaniu z okresem użytkowania T. Ekstremalne obciążenie jest wzięte z odcinka mostu o długości λ = const., $\Delta L < \lambda < L$, a ponadto wartości ekstremalnych koncentracji obciążeń Q_{JK} w różnych odcinkach mostu powinny być stochastycznie niezależne. Taka koncepcja prowadzi do prawdopodobieństwa przeciążenia w postaci iloczynu odpowiednich prawdopodobieństw przeciążeń dla poszczególnych odcinków czasowo przestrzennych. Jeżeli liczba tych odcinków jest duża, to proponuje się użycie asymptotycznego rozkładu wartości ekstremalnych. W tym przypadku użyto rozkładu I-go rodzaju /Gumbela, por. wzór (4.39) . W innej pracy [90] ten sam autor używa dla scharakteryzowania maksymalnych obciążeń rozkładu II-go rodzaju /Frecheta, por. wzór (4.40)/ . Ostatnio znaczną rolę odgrywają metody analizy obciążeń mostów wykorzystujące symulację komputerową różnorodnych obciążeń mostu w czasie trwania ruchu drogowego. Typowym tego przykładem jest "model ARRB" zaproponowany przez Bramelda [35] dla warunków w Australii. Składa się on z dwóch części: symulacyjnego opisu ruchu drogowego oraz schematu ciężaru pojazdów. W pierwszej części mogącej symulować czterostrumieniowy ruch pojazdów uwzględniono takie elementy jak: moment przyjazdu pojazdu, prędkość pojazdu, typ pojazdu, proporcje samochodów ciężarowych do innych, minimalna odległość między pojazdami. Zagadnienie ciężarów pojazdów opracowano w oparciu o ważenia pojazdów przejeżdżających przez jeden z australijskich mostów. Spośród obserwowanych dziesięciu grup pojazdów wyróżniono trzy klasy pojazdów i opracowano dla nich histogramy rozkładów ciężaru. Ciężary te rozkładano na poszczególne osie / w zależności od klasy/, przy czym zbadano także zagadnienie losowego rozstawu osi w poszczególnych klasach /histogramy częstości/. Opracowany program posłużył do symulacyjnego badania naprężeń występujących w konstrukcji jednego z mostów, który był jednocześnie poddany badaniom doświadczalnym. Badania prowadzono z myślą o prognozowaniu stanów granicznych zarówno nośności jak i użytkowania obiektów mostowych.

W rozpatrywanych dotąd propozycjach nie była poruszana sprawa obciążeń przekazywanych z przęsła mostowego na podporę. Wyznaczenie tego obciążenia jest równoznaczne wyznaczeniu reakcji podporowych od obciążeń ruchomych z przęsła.

Jeśli rozpatruje się belkę na końcach wolnopodpartą o długości L i podporach A oraz B, na którą działa obciążenie o intensywności $q(x)$, to reakcje podpór są odpowiednio równe /podpora A umieszczona w początku układu współrzędnych; por. np. [97]/ :

$$R_A = \frac{\int_0^L (L - x)\, q(x)\,dx}{L} \qquad R_B = \frac{\int_0^L x q(x)\,dx}{L} \tag{4.35}$$

Jeżeli założy się, że $\{q(x)\ ,\ 0 \leqslant x \leqslant L\}$, jest stochastycznym procesem obciążeń średniokwadratowo ciągłym, to całki (4.35) można rozumieć jako średniokwadratowe całki stochastyczne /por. np. [130]/. Jednak przy takim podejściu wyznaczenie drogą analityczną konkretnego rozkładu prawdopodobieństwa R_A lub R_B przy zadanym procesie $\{q(x) : 0 \leqslant x \leqslant L\}$, jest na ogół zadaniem niewykonalnym. Można jedynie w prosty sposób przedstawić wartość oczekiwaną reakcji:

$$ER_A = \frac{\int_0^L \left[(L - x)\ Eq(x)\right]dx}{L}\ ; \qquad ER_B = \frac{\int_0^L \left[xEq(x)\right]dx}{L} \tag{4.36}$$

oraz wariancję:

$$Var\left(R_A\right) = \frac{1}{L^2}\int_0^L\int_0^L \left[(L - x)\cdot(L - y)\, K_{q,q}(x, y)\right] dxdy\ , \tag{4.35}$$

gdzie $K_{q,q}(x,y)$ - funkcja autokowariancji procesu stochastycznego $\{q(x) : 0 \leqslant x \leqslant L\}$

/uzasadnienie powyższych wzorów wynika z twierdzeń podanych w [130]/. Chcąc zatem otrzymać konkretne rozkłady prawdopodobieństwa dla reakcji należy użyć innego podejścia. Jeżeli przedmiotem zainteresowania są jedynie reakcje maksymalne to można posłużyć się wywodem autora cytowanego poprzednio modelu dyskretnego [87] lub analogicznym rozumowaniem autora pracy [84]. Okres użytkowania T jest podzielony na n okresów elementarnych w taki sposób, że maksymalna reakcja R_i w i-tym okresie /i=1, 2,...,n / jest stochastycznie niezależna od maksymalnej reakcji R_j w innym okresie elementarnym, $i \neq j$. Ponadto zakłada się, że rozkłady tych maksimów są jednakowe /założenie to można osłabić/. Jeśli weźmie się pod uwagę maksymalną reakcję

$$R^{(n)} = \max_{i=1}^{n} R_i \tag{4.38}$$

to o ile n jest dostatecznie duże, można zastosować jeden z asymptotycznych rozkładów wartości ekstremalnych /dla maksimów/. Wyróżnia się trzy typy tych rozkładów (por. np. [12]). Rozkład graniczny zależy od typu "prawego ogona" dystrybuanty R_i. W praktyce stosuje się jedynie dwa typy rozkładów dla maksimów: rozkład I-go rodzaju /Gumbela/ i rozkład II-go rodzaju /Frecheta/. Szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć np. w [12, 84, 86]. Gęstość i dystrybuanta dla rozkładów I-go i II-go rodzaju mają postać:

rozkład Gumbela

$$\begin{cases} g_I(x) = \alpha_G \cdot \exp\left\{-\alpha_G(x-u_G) - \exp\left[-\alpha_G(x-u_G)\right]\right\} \\ F_I(x) = \exp\left\{-\exp\left[-\alpha_G(x-u_G)\right]\right\} \qquad -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{4.39}$$

α_G, u_G - parametry rozkładu,

rozkład Frecheta:

$$\begin{cases} g_{II}(x) = \frac{k_F}{u_F} \cdot \left(\frac{u_F}{x}\right)^{k_F+1} \cdot \exp\left[-\left(\frac{u_F}{x}\right)^{k_F}\right] & \text{dla } x > 0 \\ F_{II}(x) = \exp\left[-\left(\frac{u_F}{x}\right)^{k_F}\right]; & \\ 0 \quad \text{dla } x \leq 0 & \end{cases} \tag{4.40}$$

k_F, u_F - parametry rozkładu

Poszczególne maksymalne reakcje R_i są tu nieujemne, a więc należałoby raczej zrezygnować z założenia, że mają one rozkłady normalne. Jeżeli założy się, że rozkłady są lognormalne (rozkład stosowany często do opisu obciążeń), wówczas asymptotycznym rozkładem jest rozkład Frecheta (por. [84]). Innym sposobem otrzymania rozkładów jest zastosowanie symulacji cyfrowej przy wykorzystaniu symulacyjnego sposobu badania obciążeń mostu. Autorowi znane są jedynie dwie prace, w których podjęto to zagadnienie. Autorzy pierwszej z nich (Harman, Davenport i Wong [61]) przedstawili podejście dwuetapowe. W pierwszym etapie założono stałą proporcję między liczbą samochodów ciężarowych a całkowitą liczbą pojazdów na moście. W każdej realizacji badano maksymalny efekt statyczny (siły tnące, momenty zginające, reakcje), posługując się wzorem:

$$\widetilde{R}_m = \int_0^L I(x)\overline{W}_m(x)\,dx \tag{4.41}$$

gdzie L - długość przęsła, I(x) - odpowiednia dla danego efektu linia wpływowa, $\overline{W}_m$ - uśredniona w czasie funkcja modelująca ciężary pojazdów (szczegółowy w [61]). Uzyskane z wielu realizacji wyniki $\widetilde{R}_m$ autorzy badali przy zastosowaniu normalnej siatki prawdopodobieństwa. Dla opisanych przypadków I(x) stwierdzono dobrą zgodność z rozkładem normalnym. Niestety praca zarówno w pierwszej jak i w drugiej części nie zawiera wyników (ani żadnych wzmianek) o przypadku, gdy I(x) jest linią wpływową reakcji podporowej.

W drugim etapie zrezygnowano z założenia o stałej proporcji pomiędzy liczbą samochodów ciężarowych i całkowitą liczbą pojazdów. Losowość pojawiania się pojazdów ciężarowych uwzględniono przez zastosowanie zmodyfikowanego procesu Poissona /por. [61]/. W rezultacie uzyskano następujący rozkład prawdopodobieństwa maksymalnego efektu:

$$F\left(R,\ T\right) = \left\{\sum_m P_m\ F_m\left(R,\ t_o\right)\right\}^M \tag{4.42}$$

gdzie T - okres eksploatacji, P_m - prawdopodobieństwo warunkowe pojawienia się m pojazdów ciężarowych na długości L, pod warunkiem pojawienia się jednego takiego pojazdu na określonym miejscu, M - liczba niezależnych odcinków czasowych /podział okresu T /, $F_m\left(R,\ t_o\right)$ - odpowiednie rozkłady normalne wyznaczone w pierwszym etapie.

Nasuwa się też uwaga, że wzór (4.42) przedstawia dystrybuantę rozkładu maksimum z M zmiennych niezależnych o rozkładach o dystrybuantach $F_o = \sum_m P_m\ F_m\left(R,\ t_o\right)$, a więc dla dużych M można by rozkład ten aproksymować asymptotycznym rozkładem ekstremów. Autorzy nie czynią tego, stosując natomiast inną formułę przybliżoną /szczegóły [61]/.

Drugą propozycję rozkładu reakcji stanowi podejście symulacyjne przedstawione przez Takaokę [125, 126].

Autor rozważył trzy grupy pojazdów /lekkie, średnie, ciężkie/, przy czym przyjęto, że ciężary w każdej z tych grup zmieniają się losowo według "obciętych" rozkładów normalnych. Następnie pojazdy ustawiono w losowy sposób na przęśle mostu /odległość między pojazdami była stała/. Proces kontynuowano aż do zapełnienia przęsła. Symulowano $N = 10^5$ takich procesów obciążenia przęsła. Badania te posłużyły do opisu obciążenia jako stochastycznego procesu $\left\{q(x);\ x \in [0,\ L]\right\}$ /L - długość przęsła/. Uzyskane wyniki pozwoliły autorowi na wysunięcie hipotezy, że proces ten jest stacjonarny w szerszym sensie. Funkcja autokowariancji tego procesu była aproksymowana przez:

$$K_q(\tau) = D_q \cdot e^{-\alpha|\tau|} \qquad (4.43)$$

gdzie D_q - wariancja obciążenia /dla stacjonarnego procesu stochastycznego - wartość stała /.

Szczegółowo przeanalizowano moment zginający jako proces stochastyczny $\{M(x);\ x \in [0,\ L]\}$ i wyznaczono funkcję autokowariancji tego procesu. Zagadnienie niezawodności zostało przedstawione jako proces przekroczenia przez losowy proces $\{M(x)\}$ pewnej ustalonej wartości momentu M_a /zero-crossing from below problem/. Szczegółowe wzory zawarte są w pracach [125] i [126]. Drogą symulacyjną poszukiwano rozkładu prawdopodobieństwa momentu zginającego w środku przęsła. Otrzymany rozkład porównano z teoretycznymi rozkładami: normalnym, lognormalnym i Gumbela. Zaproponowano opis "skorygowanym" rozkładem normalnym, uzyskanym przez odpowiednią modyfikację wartości oczekiwanej i wariancji. Z punktu widzenia niniejszej pracy najważniejsze są rezultaty przedstawione w suplemencie do pracy [126], dotyczące rozkładów reakcji podporowych uzyskanych z powyższych badań symulacyjnych. Suplement ten ze względu na późniejsze nadesłanie nie został wydrukowany w pozycji [126]. Dlatego w załączeniu nr 3 przedstawiono w całości zamieszczoną tam tablicę /tabl. Z 3.6 / oraz rysunki rys. Z. 3.6 - Z 3.11 /.

Z rysunków Z 3.6 - Z 3.11 można wnioskować, że lepsze efekty daje zastosowanie rozkładu Frecheta.

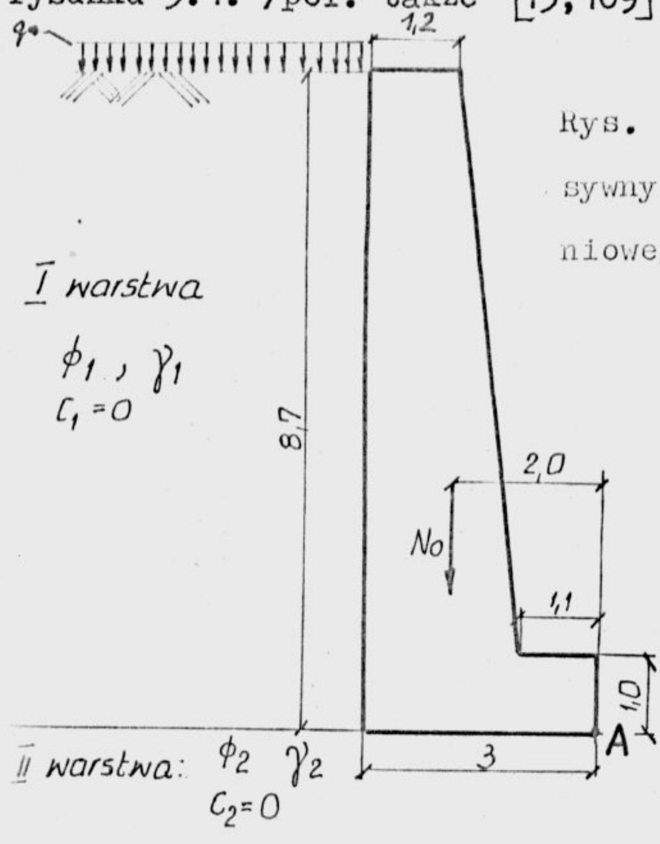
Trzeba jeszcze raz podkreślić, że otrzymanie rozkładu prawdopodobieństwa reakcji podporowych z ogólnego probabilistycznego schematu obciążeń drogą analityczną jest na ogół niemożliwe.

Przedstawione przesłanki teoretyczne, jak i badania symulacyjne świadczą, że można założyć, iż reakcje te mają asymptotyczne rozkłady wartości ekstremalnych / w przypadku gdy przedmiotem zainteresowania są reakcje maksymalne/. Szczególnie rozkład Frecheta /dla maksimów/ wydaje się być najbardziej właściwy. W badaniach symulacyjnych zastosowanych w ramach niniejszej pracy do badania stateczności podpór mostowych użyto tego właśnie rozkładu.

5. PRZYKŁADY UPROSZCZONEJ PROBABILISTYCZNEJ ANALIZY STATECZNOŚCI MASYWNEGO PRZYCZÓŁKA MOSTOWEGO

5.1. Informacje o sposobie rozwiązania i przykładzie obliczeniowym

Rozważa się tu pewien uproszczony sposób obliczania prawdopodobieństwa utraty stateczności i znajdowania rozkładu zapasu stateczności. Sposób ten polega na wyodrębnieniu w formule przedstawiającej określony zapas stateczności pewnych grup wyrażeń algebraicznych. Każda z takich grup uważana jest za zmienną losową o założonym rozkładzie. Poszczególne grupy są wybierane tak, aby zmienne losowe można było uznać za niezależne /przy pominięciu korelacji między ϕ, c, γ/ oraz tak, aby dalsze operacje na tych zmiennych dawały możliwość prostego sposobu znalezienia prawdopodobieństwa utraty stateczności. Szczegóły zostaną wyjaśnione na przykładach obliczeniowych. Przykłady podane tu dotyczyć będą jedynie dwóch pierwszych kryteriów, tj. stateczności na przesuw i obrotu wokół punktu A. W przykładach rozważono masywny przyczółek przedstawiony na rysunku 5.1. /por. także [15,109] /.



Rys. 5.1. Przyczółek masywny z przykładu obliczeniowego

Dla wielkości zmiennych losowo sprecyzowane będą tu dwa pierwsze momenty, gdyż używane rozkłady będą dwuparametrowe. I tak w rozpatrywanym przykładzie przyjęto :

I warstwa - piasek średni, zagęszczony

ϕ_1 : wartość średnia $\bar{\phi}_1 = 36,8^{o} \approx 0,642$ rd; γ_1 : wartość śred. $\bar{\gamma}_1 = 17 \frac{kN}{m^3}$

odchyl.stand. $\sigma_{\phi_1} = 3,4^{o} \approx 0,059$ rd   odchyl.stand. $\sigma_{\gamma_1} = 0,85 \frac{kN}{m^3}$

współcz.zmien. $\nu_{\phi_1} = 0,09$ współcz.zmien. $\nu_{\gamma_1} = 0,05$

II warstwa - żwir zagęszczony

ϕ_2 : wartość średnia $\bar{\phi}_2 = 42^{o} \approx 0,73304$ γ_2 : wartość śred. $\bar{\gamma}_2 = 20 \frac{kN}{m^3}$

odchyl.stand. $\sigma_{\phi_2} = 3,5^{o} \approx 0,062$ rd   odchyl.stand. $\sigma_{\gamma_2} = 1 \frac{kN}{m^3}$

współcz.zmien. $\nu_{\phi_2} = 0,08$ współcz.zmien. $\nu_{\gamma_2} = 0,05$

Reakcja przyczółka na losowy ruch pojazdów :

wartość średnia $\bar{N}_{p1} = 250 \frac{kN}{m}$

odchyl.stand. $\nu_{Np1} = 30 \frac{kN}{m}$

współcz.zmien. $\nu_{Np1} = 0,12$

Zakłada się, że N_{p1}, ϕ_i, γ_i, /i = 1,2/ stanowią układ niezależnych zmiennych losowych

Wielkości deterministyczne :

Ciężar przyczółka $N_q = 336 \frac{kN}{m}$; reakcja na obciążenie belką $N_{p2} = 450 \frac{kN}{m}$; współczynnik do obliczania siły od hamowania $\alpha = 0,16$; ramię wypadkowej sił poziomych względem punktu A /dla uproszczenia przyjęto tu jako wielkość stałą/ $h_a = 4,45$ m; ramię wypadkowej sił pionowych względem punktu A: $b_a = 2$ m.

Obciążenie naziomu /przyjęte tu jako wielkość nielosowa i stała/ $q_o = 68 \frac{kN}{m^2}$; współczynnik redukcyjny do kąta tarcia między podstawą przyczółka i podłożem $k_1 = 0,69$.

Zakłada się brak tarcia pomiędzy ścianą boczną przyczółka a napierającym gruntem /ściana idealnie gładka/.

5.2. Badanie stateczności na przesunięcie

Kryterium stateczności w postaci zapasu ma tutaj postać :

$$\left(N_{p1}+N_{p2}+N_q\right) \cdot tg\left(k_1 \cdot \phi_2\right) - \left[H_h+h_o \cdot \left(\frac{1}{2} h_o \cdot \gamma_1 + q_o\right) \cdot K_a\right] \geqslant 0 \qquad (5.1)$$

gdzie : H_h - siła od hamowania $H_h = a_h \cdot N_{p1}$

$K_a = tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right)$ - współczynnik parcia, h_o-wys.przyczółka

Po prostym przekształceniu otrzymuje się :

$$\left(N_{p1}+N_{p2}+N_q\right) \cdot \left(tg\left(k_1 \phi_2\right) - a_h\right) + a_h \left(N_{p2}+N_q\right) - h_o\left(\frac{1}{2} h_o \gamma_1 + q_o\right) \cdot K_a \geqslant 0 \quad (5.2)$$

Zgodnie z uproszczoną metodą przyjmuje się następujące zmienne losowe :

$$X_1 = N_{p1}+N_{p2}+N_q \; ; \; X_2 = tg\left(k_1 \cdot \phi_2\right) - a_h \; ; \; X_3 = a_h\left(N_{p2}+N_q\right) - h_o \cdot \left(\frac{1}{2} h_o \gamma_1 + q_o\right) \cdot K_a \quad (5.3)$$

Po podstawieniu do (5.2) kryterium stateczności przyjmuje postać :

$$Y = X_1 \cdot X_2 + X_3 \geqslant 0 \qquad (5.4)$$

Wartość oczekiwana i wariancja dla X_1 wynoszą odpowiednio:

$$EX_1 = E\left(N_{p1}+N_{p2}+N_q\right) = \bar{N}_{p1} + N_{p2} + N_q \tag{5.5}$$

$$\sigma^2_{X_1} = Var\left(X_1\right) = Var\left(N_{p1}+N_{p2}+N_q\right) = Var\left(N_{p1}\right) = \sigma^2_{N_{p1}} \tag{5.6}$$

Momenty zmiennych X_2 i X_3 oblicza się w sposób przybliżony, wykorzystując linearyzację wokół wartości średnich-Rżanicyna /wzory (2.22) i (2.23)/.

$$EX_2 \approx tg\left(k_1 \cdot \phi_2\right) - a_h \tag{5.7}$$

$$\sigma^2_{X_2} = Var\, X_2 \approx \left[\frac{\partial\left(tg(k_1 \cdot \phi_2)\right)}{\partial \phi_2}\bigg/_{\bar{\phi}_2}\right]^2 \cdot \sigma^2_{\phi_2} = \frac{k_1^2 \cdot \sigma^2_{\phi_2}}{\cos^4\left(\bar{\phi}_2 \cdot k_1\right)} \tag{5.8}$$

$$EX_3 \approx a_h\left(N_{p2}+N_q\right) - h_o\left(\frac{1}{2} h_o \cdot \bar{\gamma}_1 + q_o\right) \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right) \tag{5.9}$$

$$\sigma^2_{X_3} = Var\, X_3 = h_o^2 \cdot Var\left[\left(\frac{1}{2} h_o \cdot \bar{\gamma}_1 + q_o\right) \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right)\right] \approx$$

$$\approx h_o^2\left[\frac{1}{4} h_o^2 \cdot tg^4\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right) \cdot \sigma^2_{\gamma_1} + \left(\frac{1}{2} h_o \bar{\gamma}_1 + q_o\right)^2 \cdot \frac{tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right) \cdot \sigma^2_{\phi_1}}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right)}\right] \tag{5.10}$$

W przypadku zmiennej X_2 można założyć z góry jak to czyni wielu autorów, że zmienną losową jest $tg\left(k_1 \cdot \phi_2\right)$ /zamiast ϕ_2/ i podać parametry tej właśnie zmiennej, wówczas procedura przybliżona będzie zbędna.

Wobec założenia o niezależności (przyjętego w 5.1) zmienne X_1, X_2, X_3 są niezależnymi zmiennymi losowymi. W celu znalezienia gęstości zmiennej $X_1 \cdot X_2$ stosuje się wzór na gęstość iloczynu niezależnych zmiennych losowych (por. np. [104] paragraf 7.2)

$$g_{X_1 \cdot X_2}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} g_{X_1}\left(\frac{y}{x}\right) \cdot g_{X_2}(x)\, dx \tag{5.11}$$

Dodanie zmiennej X_3 (niezależnej od X_1 i X_2) oznacza, że gęstość Y będzie splotem gęstości $X_1 \cdot X_2$ oraz X_3, czyli:

$$g_Y(y) = g_{X_1 \cdot X_2} * g_{X_3}(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{|x|} g_{X_1}\left(\frac{y-z}{x}\right) g_{X_2}(x)\, dx \right) g_{X_3}(z)\, dz \tag{5.12}$$

W rozpatrywanych przykładach przyjmowano, że zmienne X_1, X_2, X_3 mają określonego typu rozkłady dwuparametrowe o momentach wyznaczonych według wzorów (5.5)-(5.10). Poniżej przedstawiono jeden z takich przykładów (przykład A). W innych przykładach, które ze względu na brak miejsca nie są tu szczegółowo omawiane, występują ponadto zmienne losowe $X_0 = X_1 \cdot X_2$ oraz X_4 i X_5 - takie, że $X_4 \cdot X_5 = X_3$. Momenty zmiennych X_0, X_4, X_5 oblicza się analogicznie jak dla zmiennych X_1, X_2, X_3. Przykłady różnią się między sobą stosowanymi przekształceniami i szczegółami rachunkowymi. W większości z nich w końcowym etapie uciekano się do przybliżonego całkowania wykonywanego metodą trapezów za pomocą kalkulatora programowalnego. Zestawienie założeń poszczególnych przykładów oraz obliczonych w nich prawdopodobieństw utraty stateczności znajduje się w tablicy 5.1 pod koniec niniejszego rozdziału.

Przykład A.

X_1, X_2, X_3 mają rozkłady normalne $N(\bar{X}_1, \sigma_1)$, $N(X_2, \sigma_2)$, $N(X_3, \sigma_3)$ odpowiednio.

Całkując gęstość (5.12) w przedziale $[0,+\infty)$ i wykonując kilka prostych przekształceń otrzymuje się następującą formułę na prawdopodobieństwo zachowania stateczności:

$$P\left\{X_1 \cdot X_2 + X_3 \geqslant 0\right\} = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi\sigma_2\sigma_3} \exp\left[-\frac{(x-\bar{X}_2)^2}{2\cdot\sigma_2^2} - \frac{(x-\bar{X}_3)^2}{2\cdot\sigma_3^2}\right] \cdot F_0\left(\frac{-(y+\bar{X}_1\cdot x)}{\sigma_1\cdot\sqrt{x}}\right) dxdy \qquad (5.13)$$

gdzie F_0 jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego $N(0,1)$.

W celu numerycznego wykonania całkowania przyjęto przybliżoną dystrybuantę F_0 określoną wzorem (por. [142]):

$$F_1(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+e^{-kx}} & \text{dla } x \geqslant 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+e^{kx}} & \text{dla } x < 0 \end{cases} \qquad (5.14)$$

gdzie : $k = \sqrt{\frac{8}{\pi}}$

Całkę we wzorze (5.13) obliczono na kalkulatorze programowalnym stosując metodę trapezów. Otrzymano wynik:

$$P\left\{X_1 \cdot X_2 + X_3 \geqslant 0\right\} = 0{,}9987$$

5.3. Badanie stateczności na obrót wokół najbardziej obciążonej krawędzi /wokół punktu A/

Kryterium stateczności w postaci zapasu można tu zapisać w postaci :

$$\left(N_{p1}+N_{p2}+N_q\right)\cdot b_a-\left[H_h+h_o\left(\frac{1}{2}h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot K_a\right]\cdot h_a \geqslant 0 \qquad (5.15)$$

lub w postaci równoważnej

$$N_{p1}\left(b_a-a_h\cdot h_a\right)+N_{p2}\cdot b_a+N_q\cdot b_a-h_o\left(\frac{1}{2}h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot K_a\cdot h_a \geqslant 0 \qquad (5.16)$$

Wprowadzając oznaczenia :

$$X_1=N_{p1}\cdot\left(b_a-a_h\cdot h_a\right)+N_{p2}\cdot b_a+N_q\cdot b_a;$$
$$X_2=\left(\frac{1}{2}h_o\,\gamma_1+q_o\right)\cdot h_o\cdot h_a\ ;\quad X_3=K_a\ , \qquad (5.17)$$

Wzór (5.16) przepisuje się w postaci :

$$X_1-X_2\cdot X_3 \geqslant 0 \qquad (5.18)$$

Momenty zmiennych X_1 i X_2 można wyznaczyć dokładnie

$$EX_1=\overline{N}_{p1}\cdot\left(b_a-a_h\cdot h_a\right)+N_{p2}\cdot b_a+N_q\cdot b_a$$
$$\sigma_{X_1}=\mathrm{Var}X_1=\mathrm{Var}\left(N_{p1}\cdot\left(b_a-a_h\cdot h_a\right)\right)=\left(b_a-a_h\cdot h_a\right)^2\cdot\sigma^2_{N_{p1}} \qquad (5.19)$$

$$EX_2 = \frac{1}{2} h_o^2 \cdot h_a \bar{\gamma}_1 + q\, h_o \cdot h_a \; ; \; \sigma_{X_2}^2 = \frac{1}{4} h_o^4 \cdot h_a \cdot \sigma_{\gamma_1}^2 \tag{5.20}$$

Dla X_3 stosuje się linearyzację:

$$EX_3 \approx tg^2 \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right); \; \sigma_{X_3}^2 = Var\left(X_3\right) \approx \frac{tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right)}{\cos^4\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right)} \cdot \sigma_{\phi_1}^2 \tag{5.21}$$

Podobnie jak w podrozdziale 5.2 jeden z przykładów omawia się poniżej /przykład A/, zaś założenia i wyniki pozostałych zestawione są wraz z przykładami dotyczącymi przesunięcia w tablicy 5.1.

Przykład A

Niech N_{p1} ma rozkład Frecheta o parametrach k_F i u_F. Parametry te znajduje się ze znanych zależności /por. np. [12] /

$$EN_{p1} = u_F \cdot \Gamma\left(1 - \frac{1}{k_F}\right)$$

$$\nu_{N_{p1}}^2 = \frac{Var\left(N_{p1}\right)}{\left(E\,N_{p1}\right)^2} = \frac{\Gamma\left(1 - \frac{2}{k_F}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{k_F}\right)} - 1 \tag{5.22}$$

Oznaczając wielkości nielosowe: $s_1 = b_a - a_h \cdot h_a$ i $s_2 = N_{p2} \cdot b_a + N_q \cdot b_a$, otrzymuje się $X_1 = s_1 \cdot N_{p1} + s_2$ i gęstość X_1 z gęstości N_{p1} według zależności:

$$g_{X_1}(x) = g_{N_{p1}}\left(\frac{x - s_2}{s_1}\right) \cdot \frac{1}{|s_1|} \tag{5.23}$$

czyli:

$$g_{X_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{k_F}{u_F\,|s_1|} \cdot \left(\dfrac{u_F \cdot s_1}{x - s_2}\right)^{k_F+1} \cdot \exp\left\{-\left(\dfrac{u_F \cdot s_1}{x - s_2}\right)^{k_F}\right\} & \text{dla } x > s_2 \\ 0 & \text{dla } x \leq s_2 \end{cases} \tag{5.24}$$

Niech X_2, X_3 /traktowane jako zmienne losowe niezależne/ mają rozkłady lognormalne o parametrach $\tilde{X}_2$, V_2 i V_3 otrzymanych z momentów (5.20) i (5.21) przez zastosowanie znanych zależności /por. np. [12] /:

$$\tilde{X}_i = m_i \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} V_i^2\right) \; ; \; V_i^2 = \ln\left[1 + \frac{\sigma_i^2}{\bar{X}_i^2}\right]; \; i = 2,3 \tag{5.25}$$

Oznaczając przez g_{X_1}, g_Y gęstości X_1 i $Y = X_2 \cdot X_3$ - odpowiednio, otrzymuje się:

$$\left(\check{g}_X(x) = g_X(-x) \right)$$

$$P\left\{X_1 - X_2 \cdot X_3 \geqslant 0\right\} = \int_0^{+\infty} g_{X_1} * \check{g}_Y(x)\,dx = 1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{0} g_{X_1}(x-y)\,dx\right]\check{g}_Y(y)\,dy =$$

$$= 1 - \int_{-\infty}^{+\infty}\left[\int_{-\infty}^{-y} g_{X_1}(x')\,dx'\right]\check{g}_Y(y)\,dy = 1 - \int_{-\infty}^{\min\{-s_2,0\}}\left\{\left[\exp -\left(\frac{u_F\,|s_1|}{-y-s_2}\right)^{k_F}\right] \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\ln(-y) - \ln\left(\tilde{X}_2 \cdot \tilde{X}_3\right)}{\sqrt{V_2^2 + V_3^2}}\right)^2\right]}{(-y)\cdot\sqrt{\left(V_2^2 + V_3^2\right)\cdot 2\pi}}\right\} dy \tag{5.26}$$

Po podstawieniu odpowiednich wartości liczbowych /wyznaczonych na podstawie wartości parametrów podanych w 5.1 / i przeprowadzeniu całkowania numerycznego otrzymano:

$$P\left\{X_1 - X_2 \cdot X_3\right\} \geqslant 0 = 0{,}9851$$

5.4 Zestawienie wyników - uwagi

Obliczone uproszczoną metodą prawdopodobieństwa zachowania stateczności przy badaniu możliwości przesuwu i obrotu wokół najbardziej obciążonej krawędzi przyczółka opisanego w punkcie 5.1 zestwiono w tablicy 5.1.

Analizując wyniki obliczeń można poczynić następujące uwagi :

1. Różnice pomiędzy poszczególnymi prawdopodobieństwami zarówno w przypadku przesunięcia, jak i obrotu, są niewielkie. Maksymalna różnica między prawdopodobieństwami przesunięcia wynosi: 0,0105

a dla obrotu: 0,009.

2. Największe prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przesunięcie uzyskano w przypadku uwzględnienia największej ilości zmiennych losowych /przypadek D - 4 zmienne losowe/ i przyjęcia, że zmienne losowe mają rozkłady lognormalne.

3. Największe prawdopodobieństwo utraty stateczności przez obrót wokół najbardziej obciążonej krawędzi uzyskano /podobnie jak dla przesunięcia/ dla rozkładu lognormalnego.

4. Najmniejsze prawdopodobieństwa utraty stateczności w obu przypadkach przesuwu i obrotu wokół punktu A, uzyskano w przypadku, gdy zmienna losowa zawierająca reakcję podpory miała rozkład Frecheta, a pozostałe zmienne miały rozkład normalny.

5. W przypadku utraty stateczności przez obrót, gdy wyodrębni się w wyrażeniu na moment pochodzący od parcia gruntu dwie zmienne losowe - jedną związaną z ciężarem objętościowym, drugą z kątem tarcia wewnętrznego, to uzyskuje się zwiększenie prawdopodobieństwa utraty stateczności.

6. Ekstrapolacja powyższych uwag na przykłady dotyczące innych przyczółków nie może być dokonywana. Zbyt małe różnice w prawdopodobieństwach /por. uwaga 1 /, nasuwają przypuszczenie, że w innych warunkach geotechnicznych /uwagi 2, 3, 4 i 5 / mogą być jakościowo różne.

7. Należy zauważyć, że różnice między tymi rezultatami wynikają nie tylko z różnych założeń wyjściowych, ale również z błędów numerycznych, związanych przede wszystkim z zastosowaniem przybliżonej dystrybuanty rozkładu normalnego, a także przybliżonego całkowania.

Omawiane tu przykłady zaprezentowane zostały w pracy [109].

Tablica 5.1

Prawdopodobieństwa zachowania stateczności na przesunięcie i obrót wokół punktu A obliczone przy zastosowaniu metody uproszczonej

Przykład		Zmienne losowe	Rozkład	Prawdop. statecz.
1		2	3	4
Przesunięcie	A	$X_1=N_{p1}+N_{p2}+N_q$; $X_2=tg(k_1 Ø_2)-a_h$ $X_3=a_h\cdot(N_{p2}+N_q)-h_o\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot Ka$	normalne	0,9987
	B	$X_1=N_{p1}+N_{p2}+N_q$	Frecheta	0,9992
		$X_2=tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h$ $X_3=a_h\cdot(N_{p2}+N_q)-h_o\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot Ka$	normalne	
	C	$X_1=N_{p1}+N_{p2}+N_q$; $X_2=tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h$	lognormal.	0,9994
		$X_3=a_h\cdot(N_{p2}+N_q)-h_o\cdot\left(\frac{1}{2}h_o\gamma_1+q_o\right)\cdot Ka$	normalny	
	D	$X_1=N_{p1}+N_{p2}+N_q$; $X_2=tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h$	lognormal.	0,9893
		$X_4=\left(\frac{1}{2}h_o\gamma_1+q\right)\cdot h_o$; $X_5=Ka$	lognormal.	
	E	$X_o=(N_{p1}+N_{p2}+N_q)\cdot(tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h)$	normalny	0,9985
		$X_3=a_h\cdot(N_{p2}+N_q)-h_o\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot Ka$	normalny	
	F	$X_o=(N_{p1}+N_{p2}+N_q)\cdot(tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h)$	Frecheta	0,9998
		$X_3=a_h(N_{p2}+N_q)-h_o\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q\right)\cdot Ka$	normalny	
	G	$X_o=(N_{p1}+N_{p2}+N_q)\cdot(tg(k_1\cdot Ø_2)-a_h)$	Frecheta	0,9993
		$X_4=\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q\right)\cdot h_o$; $X_5=Ka$	lognormal.	

	1	2	3	4
Obrót	A	$X_1=N_{p1}$	Frecheta	0,9851
		$X_2=\left(\frac{1}{2}h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot h_o$; $X_3=K_a$	lognormal.	
	B	$X_1=N_{p1}\cdot\left(b_a-a_h h_a\right)+N_{p2}\cdot b_a+N_q\cdot b_a$ $X_2=\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot h_o\cdot h_a$; $X_3=Ka$	lognormal.	0,9850
	C	$X_1=N_{p1}\cdot\left(b_a-a_h h_a\right)+N_{p2}\cdot b_a+N_q\cdot b_a$ $Y=\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot h_o\cdot h_a\cdot Ka$	normalne	0,9921
	D	$X_1=N_{p1}$	Frecheta	0,9940
		$Y=\left(\frac{1}{2}\cdot h_o\cdot\gamma_1+q_o\right)\cdot h_o\cdot h_a\cdot Ka$	normalne	

Na zakończenie należy stwierdzić, że w wielu przypadkach zastosowanie takiej procedury może prowadzić do dużych błędów w obliczaniu prawdopodobieństwa. Przykładowo uwzględnienie spójności /grunt spoisty/ lub większej ilości warstw gruntowych prowadzi do wzrostu liczby wyjściowych zmiennych losowych, a to powoduje konieczność numerycznego obliczenia całek wielokrotnych /krotności większej niż dwa/, co z kolei wiąże się z dużymi błędami w obliczeniach. Z kolei zastępując kilka zmiennych losowych przez jedną /tak jak było to czynione w przykładach/ i szacując jej momenty przez linearyzację - także popełnia się błąd i to tym większy im większa liczba zmiennych losowych zostaje zastąpiona jedną. Innego typu trudność wystąpi w przypadku, gdy ten sam rodzaj gruntu będzie wywierał parcie czynne na ścianę przyczółka /chociaż na pewnej jej wysokości/ i równocześnie będzie znajdował się pod podstawą przyczółka. Wówczas w przypadku przesuwu nie można uznać zmiennych X_2 i X_3 /por. punkt 5.2/ za niezależne.

Tego typu trudności nie są istotne ~~się~~ przy zastosowaniu metody symulacyjnej.

6. SYMULACYJNA METODA PROBABILISTYCZNEJ ANALIZY STATECZNOŚCI MASYWNEGO PRZYCZÓŁKA MOSTOWEGO

6.1. Generator liczb losowych o rozkładzie wielokątnym

W rozdziale 2 /podrozdział 2.7/ podano w skrócie sposób wykorzystania metody symulacyjnej do znajdowania rozkładu prawdopodobieństwa danej zmiennej losowej, będącej funkcją kilku innych zmiennych losowych oraz do obliczenia prawdopodobieństwa zaistnienia awarii /katastrofy/ danej konstrukcji. Zasadniczym elementem tej metody jest wygenerowanie liczb losowych /w istocie są to liczby pseudolosowe, gdyż powstają w wyniku zastosowania pewnych generatorów programowych w maszynie cyfrowej/ o rozkładach takich jakie zakłada się dla poszczególnych zmiennych losowych. W niniejszej pracy wykorzystuje się w opisie parametrów gruntowych wielokątne rozkłady prawdopodobieństwa, o czym była już mowa w rozdziale 4. Generator liczb losowych o tym rozkładzie buduje się wykorzystując w zasadzie najprostszą metodę , tj. metodę odwracania dystrybuanty /por. [142] /, która to metoda opiera się na następującym rozumowaniu :

Dla dystrybuanty F - ściśle rosnącej na przedziale, w którym $0 < F(x) < 1$, określa się nową zmienną losową :

$$X = F^{-1}(R) \tag{6.1.}$$

gdzie R jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na $[0,1)$.

Ponieważ :

$$P\{X \leq x\} = P\{F^{-1}(R) \leq x\} = P\{R \leq F(x)\} = F(x) \quad , \tag{6.2.}$$

więc zmienna losowa X ma rozkład o dystrybuancie F. Wynika stąd że jeśli $\{r_n\}$, n = 1,2... jest ciągiem liczb losowych o rozkładzie jednostajnym na przedziale $(0,1)$, to ciąg $\{x_n\}$, n = 1,2... dla $x_n = F^{-1}(r_n)$, jest ciągiem liczb losowych o rozkładzie z dystrybuantą F. Wystarczy zatem znaleźć funkcję odwrotną do dystrybuanty F rozkładu wielokątnego. Przypuśćmy, że w dystrybuancie przedstawionej w rozdziale 4 - wzór (4.8) współczynniki m_1, m_2, m_3 są różne od zera /wszystkie trzy/. Wówczas wykresy tej dystrybuanty składają się z trzech rosnących odcinków paraboli. Z postaci kanonicznej trójmianu kwadratowego $y = a_o \cdot x^2 + b_o \cdot x + c_o$

$$y = a_o \cdot \left(x - \frac{-b_o}{2a_o} \right)^2 + \frac{-\Delta}{4 \cdot a_o} \tag{6.3}$$

/ Δ - wyróżnik trójmianu/

otrzymuje się :

$$\left| x + \frac{b_o}{2a_o} \right| = \sqrt{\frac{1}{a_o} \cdot \left(y + \frac{\Delta}{4a_o} \right)} \tag{6.4}$$

Jeśli $x \geqslant -\frac{b_o}{2a_o}$, to:

$$x = -\frac{b_o}{2a_o} + \sqrt{\frac{1}{a_o} \cdot \left(y + \frac{\Delta}{4a_o} \right)} \tag{6.5}$$

Jest to funkcja odwrotna do tej "gałęzi" funkcji kwadratowej, której wykres znajduje się na prawo od wierzchołka paraboli :

W przeciwnym przypadku $x < -\dfrac{b_0}{2 a_0}$ otrzymuje się :

$$x = -\frac{b_0}{2 a_0} - \sqrt{\frac{1}{a_0}\left(y + \frac{\Delta}{4a_0}\right)} \qquad (6.6)$$

funkcję odwrotną dla gałęzi po lewej stronie wierzchołka.
Tu interesujące są oczywiście tylko rosnące gałęzie funkcji kwadratowej. Dla $a_0 > 0$ rosnąca jest gałąź prawa, czyli funkcja odwrotna dana jest wzorem /6.5/, natomiast dla $a_0 < 0$ rosnącą gałęzią jest gałąź lewa, której funkcja odwrotna dana jest wzorem /6.6/.
Zapisując to przy użyciu takich parametrów dystrybuanty F jak we wzorze (4.8) otrzyma się następujący wzór na funkcję odwrotną do dystrybuanty rozkładu wielokątnego.

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} -\dfrac{\alpha_1}{m_1} \pm \sqrt{\dfrac{2}{m_1}\left(y + \dfrac{\alpha_1^2 - 2m_1\beta_1}{2m_1}\right)} & y \in \left[0; \dfrac{m_1 e^2}{2} + \alpha_1 e + \beta_1\right) \\ \text{(znak + przy pierwiastku dla } m_1 > 0, \text{ - dla } m_1 < 0\text{)} & \\ -\dfrac{\alpha_1 + \alpha_2}{m_2} \pm \sqrt{\dfrac{2}{m_2} \cdot \left(y + \dfrac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 - 2m_2(\beta_1 + \beta_2)}{2m_2}\right)} & \text{dla} \\ & y \in \left[\dfrac{m_1 e^2}{2} + \alpha_1 e + \beta_1 ; \dfrac{m_2 d^2}{2} + (\alpha_1 + \alpha_2)d + (\beta_1 + \beta_2)\right) \\ \left(+ \text{ dla } m_2 > 0; \quad - \text{ dla } m_2 < 0\right) & \end{cases}$$

$$-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{m_3} \pm \sqrt{\frac{2}{m_3}\left(y+\frac{\left(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3\right)^2-2m_3\left(\beta_1+\beta_2+\beta_3\right)}{2\cdot m_3}\right)}$$

$$\text{dla } y \in \left[\frac{m_2 d^2}{2}+\left(\alpha_1+\alpha_2\right)d+\left(\beta_1+\beta_2\right);\ 1\right) \qquad (6.7)$$

$+$ dla $m_3 > 0$

$-$ dla $m_3 < 0$

$$\text{przy czym } F\left(e\right) = \frac{m_1 e^2}{2} + \alpha\cdot e + \beta_1$$

$$F\left(d\right) = \frac{m_2 d^2}{2} + \left(\alpha_1+\alpha_2\right)d + \left(\beta_1+\beta_2\right)$$

Jeśli stosuje się rozkłady trójkątne na przedziale $[a,b]$, to wzór /6.7/ znacznie upraszcza się.
W tym przypadku $g\left(a\right)=g\left(b\right)=0$ /gęstość rozkładu trójkątnego- g/, oznacza to, że pierwsza gałąź dystrybuanty ma wierzchołek /wierzchołek całej paraboli/ w punkcie a /pochodna zeruje się/. Stąd już wynika, że :

$$-\frac{\alpha_1}{m_1} = a \quad \text{i} \quad -\left(\frac{\alpha_1^2-2m_1\beta_1}{2m_1}\right) = 0 \qquad (6.8)$$

/są to współrzędne wierzchołka/

Podobnie druga gałąź dystrybuanty ma wierzchołek w punkcie b, co implikuje :

$$-\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{m_3} = b \quad i \quad -\frac{(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)^2 - 2m_3(\beta_1+\beta_2+\beta_3)}{2m_3} = 1 \qquad (6.9)$$

Po uwzględnieniu (6.8) i (6.9) oraz faktu istnienia tylko dwóch gałęzi dla rozkładu trójkątnego z (6.7) otrzymuje się:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} a + \sqrt{\frac{2}{m_1}\cdot y} & \text{dla } y \in \left[0;\ 1-\frac{b-e}{b-a}\right) \\ b - \sqrt{\frac{2}{m_3}\cdot(y-1)} & \text{dla } y \in \left[1-\frac{b-e}{b-a};\ 1\right) \end{cases} \qquad (6.10)$$

Przy czym $F(e) = 1 - \frac{b-e}{b-a}$

Według notacji stosowanej w rozdziale 4 dla rozkładów trójkątnych wzór (6.10) otrzymuje postać:

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \left(w_2 - \frac{w_1}{2}\right) + \sqrt{\frac{w_1(2w_3+w_1)}{2}\cdot y} & \text{dla } y \in \left[0;\ \frac{1}{2} - \frac{w_3}{w_1}\right) \\ \left(w_2 + \frac{w_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{w_1\cdot(w_1-2w_3)}{2}\cdot(1-y)} & \\ \text{dla } y \in \left[\frac{1}{2} - \frac{w_3}{w_1};\ 1\right) & \end{cases} \qquad (6.11)$$

oraz dla trójkąta symetrycznego :

$$F^{-1}(y) = \begin{cases} \left(w_2 - \frac{w_1}{2}\right) + \sqrt{\frac{w_1^2}{2} \cdot y} & \text{dla } y \in \left[0; \frac{1}{2}\right) \\ \left(w_2 + \frac{w_1}{2}\right) - \sqrt{\frac{w_1^2}{2} \cdot (1-y)} & \text{dla } y \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \end{cases} \tag{6.12}$$

Jeśli w pewnym niepustym przedziale, któryś z parametrów m_1, m_2, m_3 jest równy zeru, to oznacza to, że odpowiedni odcinek łamanej/będącej wykresem gęstości/, jest równoległy do osi odciętych. Dla ustalenia uwagi niech $m_2=0$. Wówczas /por.wzór(4.3)/

$$g(x) = m_1(e-a)+h_1 \qquad \text{dla } x \in [e;d) \tag{6.13}$$

/dla $\mathbb{R} - [e;d)$ jak we wzorze (4.3)/

Odpowiednią gałąź dystrybuanty opisuje wzór :

$$F(x) = \left[m_1 \cdot (e-a) + h_1\right] x + F(e) - \left[m_1(e-a) + h_1\right] \cdot e \qquad \text{dla } x \in [e;d) \tag{6.14}$$

zaś funkcja odwrotna do niej ma postać :

$$F^{-1}(y) = \frac{y - F(e) + \left[m_1(e-a) + h_1\right] \cdot e}{\left[m_1(e-a) + h_1\right]} \qquad \text{dla } y \in [F(e); F(d)) \tag{6.15}$$

Przedstawiony tu generator po wprowadzeniu drobnych modyfikacji nadaje się także do generowania liczb losowych o rozkładach z nieciągłą gęstością - przedziałami liniową, tj. taką jak otrzymano w jednym z przykładów w rozdziale 4 /por.wzór (4.27)/. Istnieje jeszcze inny sposób otrzymania generatora rozkładu wielokątnego. Jest on opisany w pracy Dahlquista i Björcka /por. [31] rozdział 11.2/ i polega na wykorzystaniu rozkładu minimum z dwóch rozkładów jednostajnych oraz metody superpozycji /szczegóły w [31]/.

Zaletą przedstawionego w niniejszym podrozdziale generatora liczb losowych o rozkładzie wielokątnym jest jego efektywność. Polega ona na tym, że z jednej wygenerowanej liczby losowej o rozkładzie jednostajnym otrzymuje się za pomocą wzoru /6.7/ jedną liczbę losową o rozkładzie wielokątnym. Dla porównania znane obecnie generatory liczb losowych o rozkładzie beta są znacznie mniej efektywne. Np. generator rozkładu β , w którym parametry nie są liczbami całkowitymi, zaproponowany przez Jöhnka /omówienie- [142] rozdz.3.2.5/ wymaga zwykle wygenerowania najpierw około 40 liczb losowych o rozkładzie potęgowym dla otrzymania jednej liczby o rozkładzie beta /liczby o rozkładzie potęgowym można otrzymać np. metodą odwracania dystrybuanty z rozkładu jednostajnego/. Inny generator rozkładu beta /por. także [142] rozdz.3.2.5 i 3.2.6/ wymaga, aby najpierw wygenerować dwie liczby losowe z niezależnych rozkładów gamma. Ale otrzymanie efektywnego generatora liczb o rozkładzie gamma wiąże się znowu z wykorzystaniem rozkładu beta. Dlatego generowanie rozkładów beta i gamma umieszcza się w ramach jednej procedury /stosując dodatkowo rozkład potęgowy/, co także wydłuża czas pracy maszyny cyfrowej /por. [142] rozdz.3.2.6/.

Wykorzystanie zatem rozkładów beta przy opisie parametrów gruntowych w niniejszej pracy musiałoby spowodować albo przeprowadzanie obliczeń dla małej liczby realizacji /to z kolei dawałoby mało wiarogodne wartości prawdopodobieństw/, albo bardzo długi czas pracy komputera przy dużych liczbach realizacji /duża liczba realizacji jest tu rozumiana jako co najmniej N=5000 - zagadnienie liczby realizacji będzie jeszcze poruszone w rozdziale 8/.

Warto też podkreślić, że efektywność przedstawionego generatora liczb o rozkładzie wielokątnym jest także większa niż w przypadku wykorzystania dla parametrów gruntowych generatora rozkładu normalnego opartego na centralnym twierdzeniu granicznym wykorzystującego tzw. "prawo tuzina" /por. [142] rozdz.3.2.3/.
Przykład badający prawdopodobieństwo utraty stateczności przyczółka przez przesuw z wykorzystaniem rozkładów trójkątnych dla cech gruntowych, szerzej omówiony w [26], był następnie przeliczony przy użyciu rozkładu normalnego /generator oparty na "prawie tuzina"/. Czas pracy maszyny w pierwszym wariancie /rozkłady trójkątne/ był o około 40 % krótszy. Przykłady te będą omówione w rozdziale 7.
Wszystkie informacje podane dotychczas w niniejszym podrozdziale dotyczyły generatorów rozkładów parametrów gruntowych. Natomiast dla reakcji przyczółka na losowe obciążenie pojazdami przyjęto rozkład Frecheta /por.rozdz.4 p.4.4/. Generator tego rozkładu otrzymuje się również metodą odwracania dystrybuanty /por.np. [142] /.
Funkcja odwrotna do dystrybuanty ma tutaj postać :

$$F^{-1}(y) = u_F \cdot \left[-\ln(y)\right]^{-\frac{1}{k_F}} \qquad (6.16)$$

gdzie u_F, k_F - parametry rozkładu Frecheta /por.wzór (4.40)/.

6.2. Omówienie zastosowanej metody symulacyjnej i programu na maszynę cyfrową.

Po wylosowaniu /wygenerowaniu/ liczb z rozkładów wielokątnych przypisanych cechom gruntowym występującym w danym przykładzie oraz liczby losowej z rozkładu Frecheta odpowiadającej reakcji przyczółka od obciążeń pojazdami na przęśle, podstawia się je do wzorów na obciążenia przyczółka - podanych w rozdziale 3 /wzory (3.4) - (3.16) - odpowiednich dla danego przykładu/. Następnie obliczone są kolejno wartości poszczególnych zapasów i wskaźników stateczności /wzory w podrozdz. od 3.3 do 3.7/. Obliczone wartości są klasyfikowane do odpowiednich przedziałów zmienności danego zapasu /lub wskaźnika/ stateczności. Wartości końców przedziałów są zadane a priori. W ten sposób powtarzając tę operację wielokrotnie, za każdym razem dla nowego zestawu wylosowanych liczb , otrzymuje się częstości pojawienia się danego zapasu /wskaźnika/ stateczności w określonych przedziałach liczbowych. Częstości te stanowią aproksymację prawdopodobieństw pojawienia się zmiennej losowej, jaką jest zapas /wskaźnik/ stateczności w określonym przedziale. Prowadzi to do przybliżonego rozkładu prawdopodobieństwa dla danego zapasu. Zsumowanie prawdopodobieństw z przedziałów znajdujących się na lewo od zera lub dla wskaźnika na lewo od jedynki daje prawdopodobieństwo utraty stateczności w danym przypadku.

Jednocześnie z obliczeniem zapasów Z_i i wskaźników $S_i(i=1...5)$ są na bieżąco obliczone i sumowane pierwsze cztery potęgi tych zmiennych.Po zakończeniu wszystkich realizacji obliczone są momenty wg. następujących estymatorów:

$$E_s Z_i^k = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} Z_{ij}^k \quad ; \quad k=1,2,3,4 \tag{6.17}$$

i=1,2,...5, N-liczba realizacji,indeks s oznacza tu,że wzór przedstawia estymator danego momentu.Analogicznie wzory odnoszą się do wskaźników $S_i(i=1,...5)$.

Z wielkości obliczonych za pomocą wzorów (6.17) wyznaczane są z kolei estymatory obciążone momentów centralnych:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu}_2 &= E_{so}(Z_i-EZ_i)^2 = E_s Z_i^2 - (E_s Z_i)^2 \\ \tilde{\mu}_3 &= E_{so}(Z_i-EZ_i)^3 = E_s Z_i^3 - 3(E_s Z_i)(E_s Z_i^2) + 2(E_s Z_i)^3 \\ \tilde{\mu}_4 &= E_{so}(Z_i-EZ_i)^4 = E_s Z_i^4 - 4(E_s Z_i)(E_s Z_i^3) + 6(E_s Z_i)^2(E_s Z_i^2) - 3(EZ_i)^4 \end{aligned} \tag{6.18}$$

(indeks so oznacza estymator obciążony)

i następnie nieobciążone estymatory momentów centralnych (por. [46])

$$\begin{aligned} \mu_2 &= E_{sn}(Z_i - EZ_i)^2 = \frac{N}{N-1}\cdot\tilde{\mu}_2 \\ \mu_3 &= E_{sn}(Z_i-EZ_i)^3 = \frac{N^2}{(N-1)\cdot(N-2)}\cdot\tilde{\mu}_3 \\ \mu_4 &= E_{sn}(Z_i-EZ_i)^4 = \frac{N}{(N-1)\cdot(N-2)\cdot(N-3)}\cdot\left[(N^2-2N+3)\cdot\tilde{\mu}_4 - 3\cdot(2N-3)\cdot\tilde{\mu}_2^2\right] \end{aligned} \tag{6.19}$$

(indeks sn oznacza estymator nieobciążony)

Analogiczne wartosci obliczone są dla wskaźników statecznosci S_i (i=1,...5).

Celem obliczenia ogólnego prawdopodobieństwa utraty stateczności założono,że ma ona miejsce,gdy zachodzi co najmniej jedna z pięciu możliwości przedstawionych w rozdziale 3 .Jeżeli przy obliczeniach w ramach jednej realizacji co najmniej jeden z zapasów spełnia warunek $Z_i < 0$ (i=1,...5),to jest to uważane za dokładne jedno zdarzenie sprzyjające awarii.Iloraz wszystkich uzyskanych w N realizacjach zdarzeń sprzyjających przez liczbę realizacji N,estymuje "całkowite" prawdopodobieństwo utraty stateczności.

Uwaga:

Wyraz prawdopodobieństwo "całkowite" użyto w cudzysłowie, gdyż chodzi tu o prawdopodobieństwo utraty stateczności bez precyzowania jakiego typu /z pięciu rozpatrywanych/ uszkodzenia doznał przyczółek. Nie należy natomiast kojarzyć tego określenia ze znanym w klasycznym rachunku prawdopodobieństwa wzorem na prawdopodobieństwo całkowite / nie są tu spełnione założenia tw. o prawdopodobieństwie całkowitym/.

Informacja o danych wejścia i wyjścia oraz o schemacie ideowym programu na EMC zostanie poprzedzona trzema uwagami szczegółowymi.

1. W przypadku utraty stateczności przez obrót wokół pow. cylindrycznej prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia jest obliczone jako prawdopodobieństwo warunkowe :

$$p_3 = P\left(Z_3 < 0 / _{M_0} > 0\right) = P\left(S_3 < 1 \;\; / \; _{M_0} > 0\right) \tag{6.20}$$

gdzie M_0 - wypadkowy moment sił względem punktu O_1 /por.podrozdz. 3.5/.

Takie podejście wynika z uwag w podrozdz.3.5 na temat schematu zniszczenia. Przyjmuje się , że stan ujemnego momentu M_o jest stanem bezpiecznym dla konstrukcji /w związku z bardzo dużym odporem biernym naziomu,który musiałby wtedy wystąpić. Dla niektórych kształtów przyczółków oraz warunków gruntowych wypadkowy moment średni M_o może być bliski zeru.

w związku z tym w niektórych realizacjach mogą być otrzymane ujemne wartości M_o . Taka sytuacja uważana jest za zdarzenie sprzyjające utrzymaniu stateczności. Otrzymany rozkład prawdopodobieństwa będzie także rozumiany jako rozkład warunkowy.
Prawdopodobieństwo $P\left(M_o < 0\right)$ jest także obliczane.
Jeśli uznaje się zdarzenie utraty stateczności przez obrót wokół pow. cylindrycznej pod warunkiem ujemnego momentu M_o, za zdarzenie niemożliwe, to całkowite prawdopodobieństwo utraty stateczności przez obrót wokół pow. cylindrycznej można znaleźć ze wzoru na prawdopodobieństwo całkowite :

$$P\left(\begin{array}{l}\text{utraty stateczności}\\ \text{przez obrót wokół}\\ \text{pow.cylindr.}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{l}\text{utraty stateczności}\\ \dots\end{array} / M_o > 0\right) \cdot P\left(M_o > 0\right) +$$

$$+ P\left(\begin{array}{l}\text{utraty stateczn.}\\ \dots\end{array} / M_o \leq 0\right) \cdot P\left(M_o \leq 0\right) =$$

$$= P\left(Z_3 < 0 / M_o > 0\right) \cdot P\left(M_o > 0\right) \tag{6.21}$$

2. Zgodnie z uwagą w podrozdziale 4.7 wzory związane z obliczeniem nośności granicznej podłoża tracą sens w przypadku, gdy $Z_2 < 0$, tzn. wystąpienia obrotu wokół punktu A. Zatem podobnie jak w uwadze 1 także i w przypadku utraty nośności podłoża obliczone jest prawdopodobieństwo warunkowe :

$$p_5 = P\left(Z_5 < 0 / Z_2 \geq 0\right) = P\left(S_5 < 1 / Z_2 \geq 0\right) \tag{6.22}$$

Podobnie jak wyżej otrzymany rozkład prawdopodobieństwa będzie rozkładem warunkowym, pod warunkiem $Z_2 > 0$.
Analogicznie gdyby założyć, że wystąpienie obrotu wokół punktu A implikuje wyczerpanie nośności podłoża, to ze wzoru na prawdop. całkowite otrzyma się :

$$P\left(\text{wyczerpanie nośności}\right) = P\left(\text{wyczerpanie nośności}/_{Z_2 \geqslant 0}\right) \cdot P\left(Z_2 \geqslant 0\right) +$$

$$+ P\left(\text{wyczerp.nośności}/\ Z_2 < 0\right) . \ P\left(Z_2 < 0\right) =$$

$$= P\left(Z_5 < 0/_{Z_2 \geqslant 0}\right) \cdot P\left(Z_2 \geqslant 0\right) + P\left(Z_2 < 0\right) \qquad (6.23)$$

Ostatnie założenie jest jednak bardzo dyskusyjne z punktu widzenia mechaniki gruntów, gdyż np. na gruncie skalistym może wystąpić obrót bez utraty nośności podłoża.

3. W niektórych przypadkach może być uzasadnione użycie dla rozkładu reakcji od ruchu pojazdów, tzw. "obciętego" rozkładu Frecheta, którego gęstość opisuje się wzorem :

$$g'(x) = \begin{cases} \dfrac{g(x)}{1-p_{ob}} & \text{dla } x \in \left(0;A\right] \\ 0 & \text{dla } x > A \end{cases} \qquad (6.24)$$

gdzie $g(x)$ jest gęstością rozkładu Frecheta, zaś :

$$p_{ob} = \int_A^{\infty} g(x)\,dx \qquad (6.25)$$

Stałą A można wybrać,tak aby p_{ob} było dowolnie małe /dla zadanego dowolnie $\varepsilon > 0$ istnieje takie A, że $p_{ob} < \varepsilon$ /, wtedy g' różni się minimalnie od gęstości g.
Przyjęcie "obciętego" rozkładu Frecheta może być podyktowane faktem, że reakcje podporowe nigdy nie osiągają wartości dowolnie wielkich. O innych konsekwencjach tego założenia będzie mowa w rozdziale 9.

Omawiany tu symulacyjny program obliczeniowy o nazwie WP01 został opracowany w języku FORTRAN dla maszyny cyfrowej Odra 1305. Do generowania liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku /0,1/ wykorzystano generator multiplikatywny FPMCRV znajdujący się w typowym oprogramowaniu tej maszyny /opisany w poz. [58] /.
Jako dane wejściowe programu WP01 podaje się :
/Szczegółowa charakterystyka wejścia podana jest w załączniku nr 2 wraz z przykładowym wydrukiem/

1. liczby przedziałów na lewo od zera, w których mają być obliczone częstości występowania wartości zmiennych Z_i /i=1,..,5/;
2. granice przedziałów do wyznaczenia rozkładów prawdopodobieństwa;
3. parametry dystrybuant rozkładów cech gruntowych /w postaci jak we wzorze (4.8) za wyjątkiem a oraz b/;
4. parametry początkowe dla generatora FPMCRV /jeden parametr dla każdej zmiennej losowej/;
5. parametry związane z geometrią przyczółka i układem warstw gruntowych;

6. parametry charakteryzujące możliwości wystąpienia osuwiska;

Uwaga : W obecnej wersji programu nie zamieszczano segmentu zawierającego deterministycznego poszukiwania najniekorzystniejszej linii poślizgu metodą Felleniusa. Procedurę tę należy przeprowadzić niezależnie bez użycia komputera lub też wykorzystać istniejące tu typowe programy na EMC. Dopiero po znalezieniu najniekorzystniejszej linii poślizgu jej parametry /szczegóły w zał. nr 2/ wprowadza się do programu WPO1.

7. wartości parametrów rozkładu Frecheta;
8. wartości parametrów pomocniczych związanych z ilością pojawiających się wydruków w czasie przeprowadzania obliczeń /szczegóły w załączniku nr 2/.

W wydrukach wyjściowych otrzymuje się :

I. Informacyjne wydruki w czasie pracy maszyny, pojawiające się z określoną częstotliwością /z częstotl. LW1 w początkowej fazie - liczba realizacji $J < JW$ oraz z częstotl. LW2 w końcowej fazie, tj. dla $J \geqslant JW$/. Wydruki te zawierają :

1 - bieżącą liczbę realizacji;
2 - wartości zmiennych losowych wygenerowanych w trakcie realizacji, po której nastąpił wydruk;
3 - wartości wszystkich zapasów i wskaźników stateczności Z_i, S_i /i=1...,5/, dla realizacji, po której nastąpił wydruk;
4 - prawdopodobieństwa utraty stateczności dla pięciu przypadków, obliczone do momentu pojawienia się wydruku;

II. Wydruki końcowe zawierają :

1 - końcową liczbę realizacji;

2 - obliczone prawdopodobieństwa utraty stateczności przez

przesuw - p_1;

obrót wokół krawędzi podstawy - p_2;

obrót wokół pow. cylindrycznej - p_3 /warunkowe - por. uwagi 6.2/;

powstanie osuwiska - p_4;

przekroczenie nośności podłoża; p_5 /warunkowe/

3 - prawdopodobieństwo wystąpienia ujemnego momentu przy obrocie wokół powierzchni cylindrycznej

4 - "całkowite" prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przyczółek;

5 - rozkłady zapasów stateczności Z_i /i=1,2..,5/ podane są granice przedziałów i odpowiednie prawdopodobieństwa przyjęcia przez Z_i wartości z poszczególnych przedziałów;

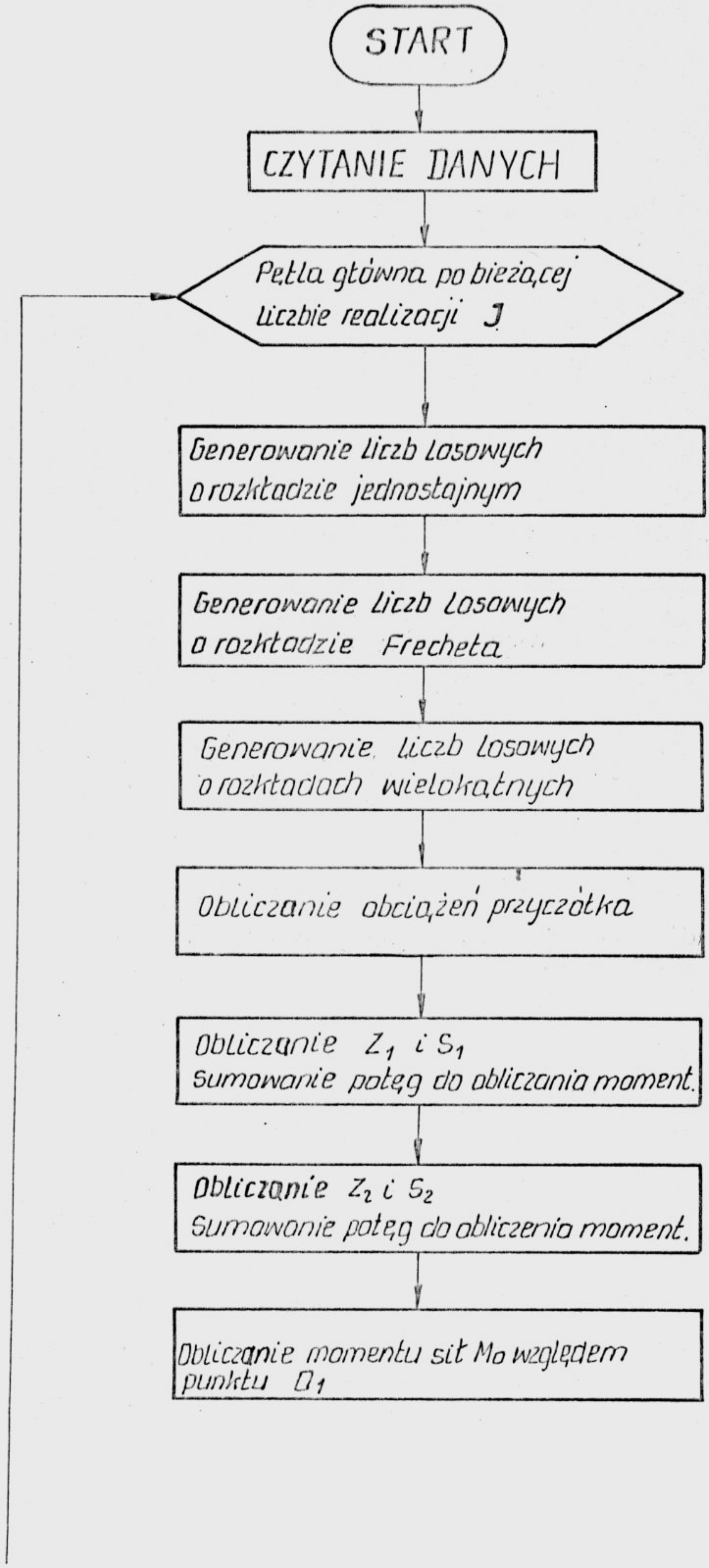
6 - rozkłady współczynników pewności S_i (i=1,2..,5) w sposób analogiczny jak dla zapasów

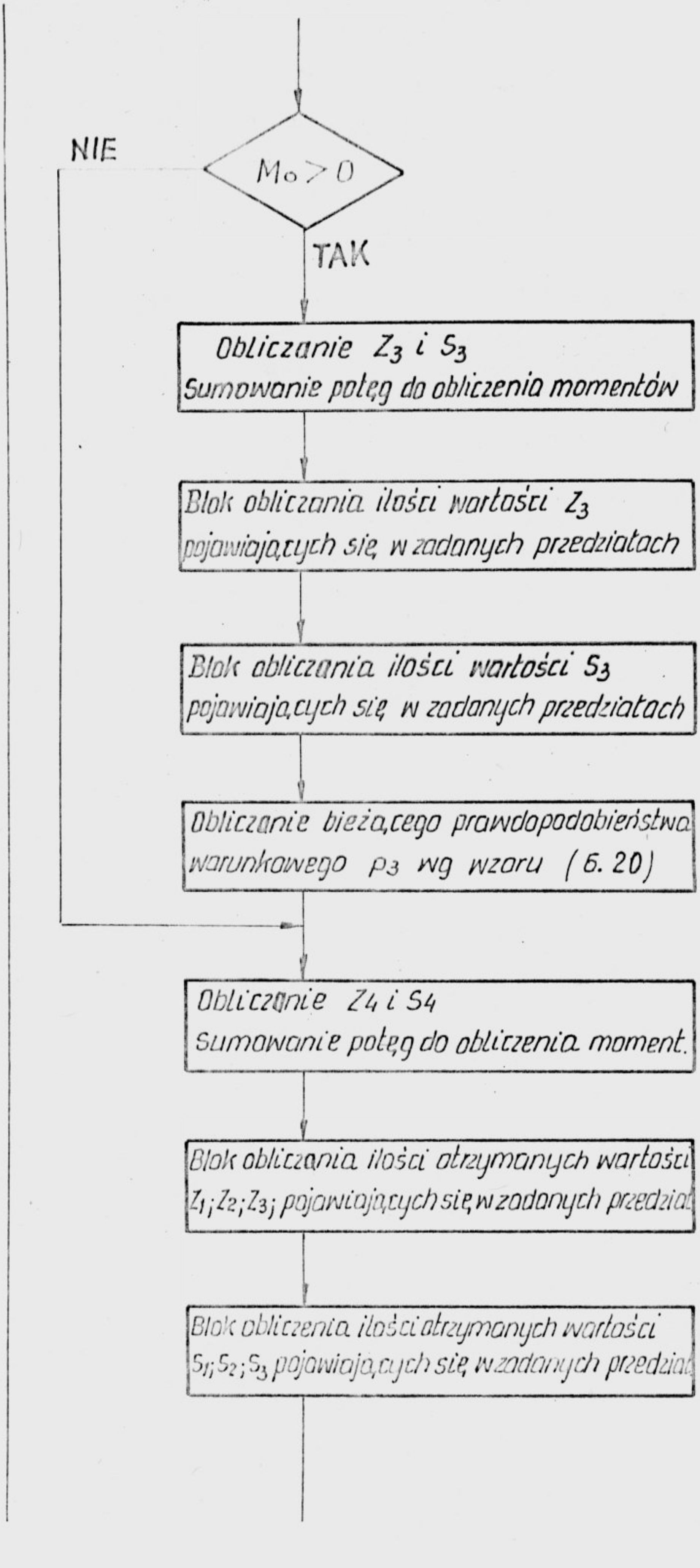
7 - pierwsze cztery momenty zwykłe zmiennych Z_i, oraz S_i /i=1...,5/;

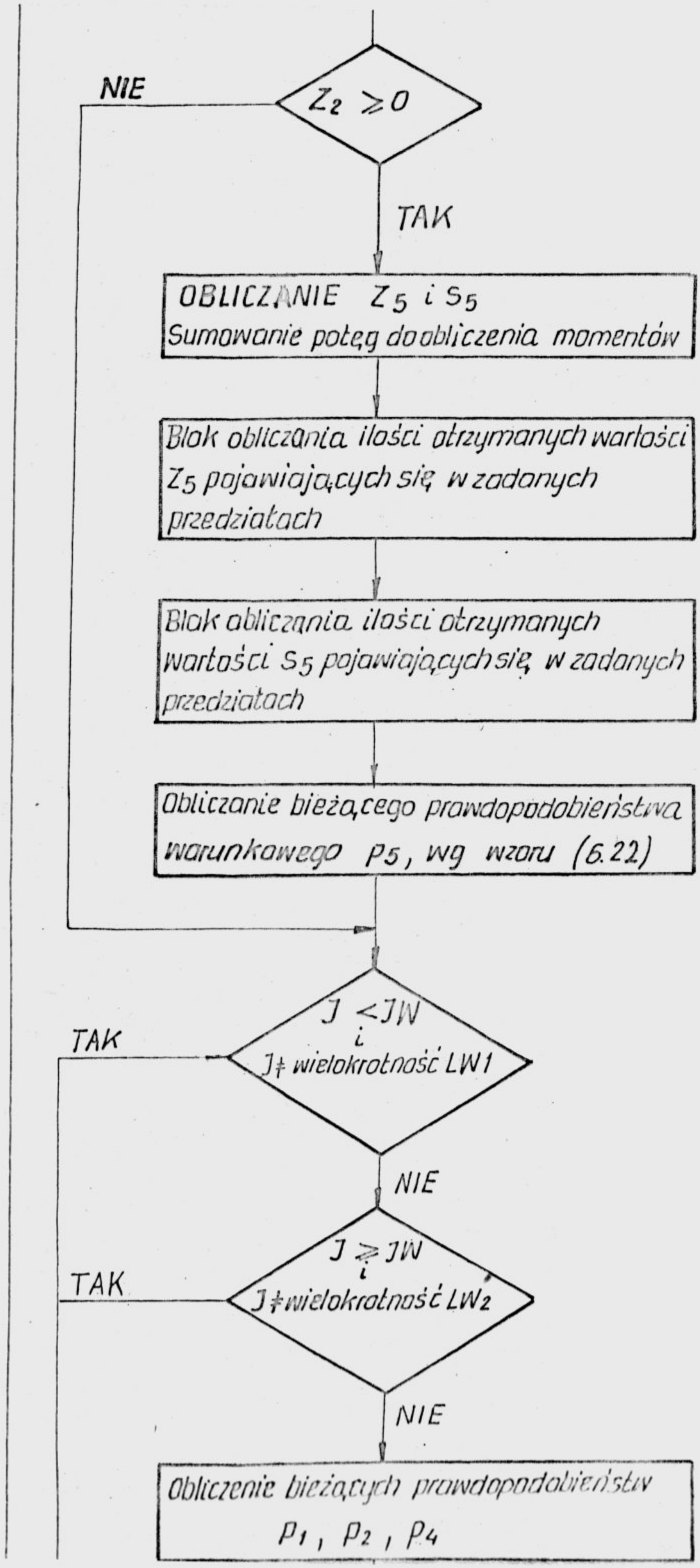
8 - pierwsze cztery momenty centralne zmiennych Z_i oraz S_i /i=1,...,5/; obliczane wg. estymatorów obciążonych /wzory (6.18)/;

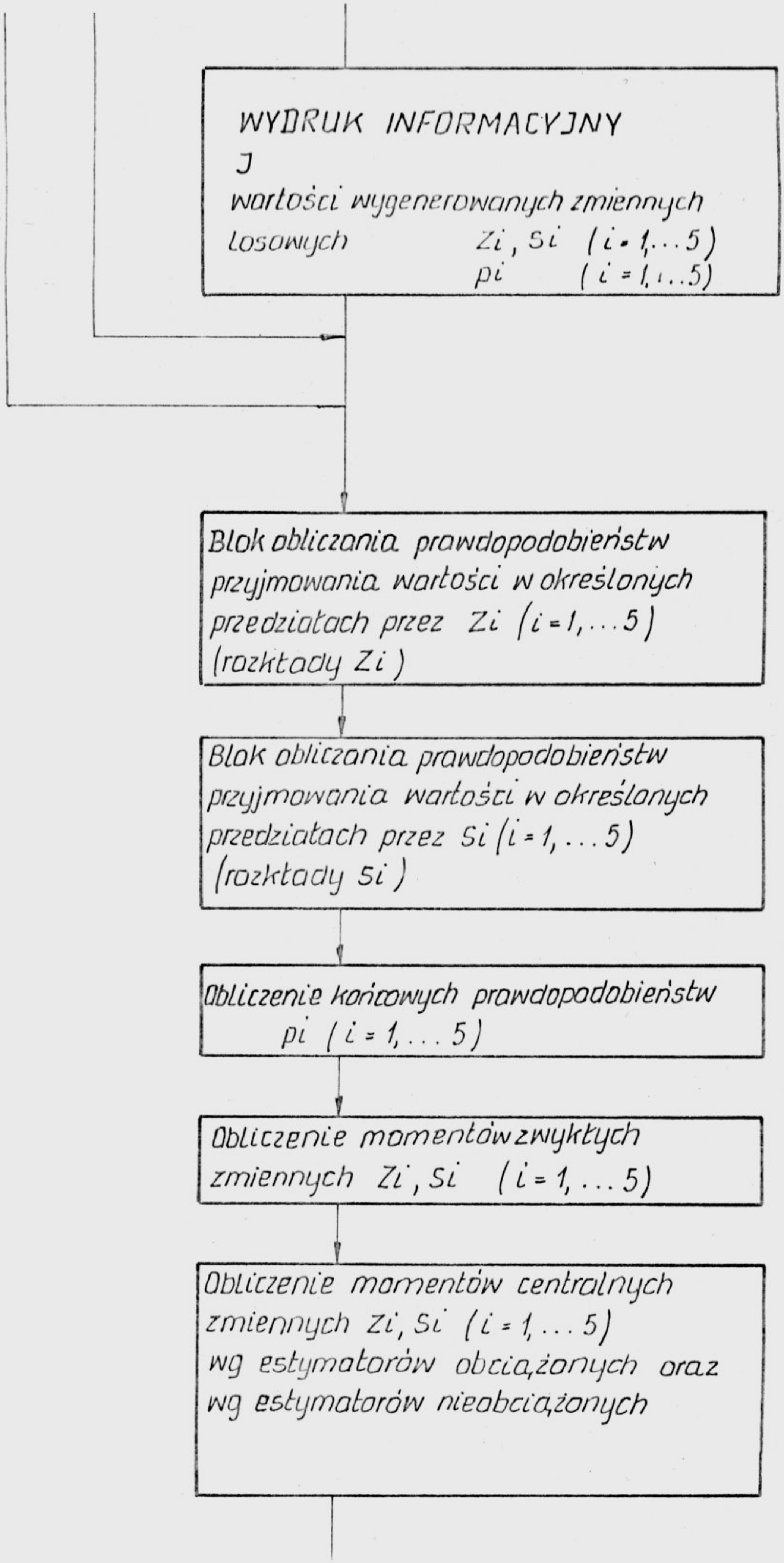
9 - pierwsze cztery momenty centralne zmiennych Z_i, S_i obliczane wg. estymatorów nieobciążonych /wzory (6.19)/.

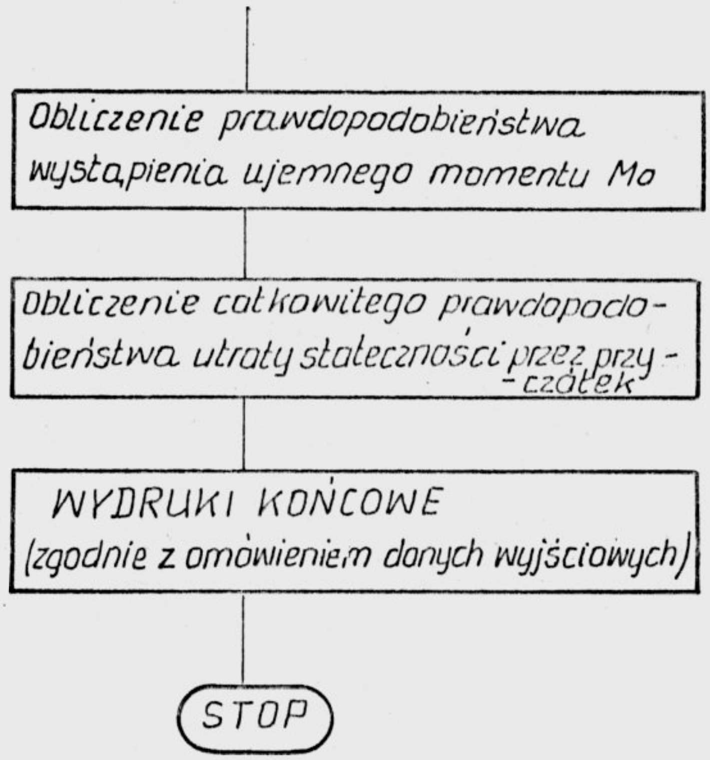
Poniżej rys. 6.1 przedstawia uproszczony schemat ideowy programu WP01.


START
CZYTANIE DANYCH
Pętla główna po bieżącej liczbie realizacji J
Generowanie liczb losowych o rozkładzie jednostajnym
Generowanie liczb losowych o rozkładzie Frecheta
Generowanie liczb losowych o rozkładach wielokątnych
Obliczanie obciążeń przyczółka
Obliczanie Z_1 i S_1
sumowanie potęg do obliczania moment.
Obliczanie Z_2 i S_2
Sumowanie potęg do obliczenia moment.
Obliczanie momentu sił M_o względem punktu O_1


NIE
Mo > 0
TAK
Obliczanie Z3 i S3
Sumowanie potęg do obliczenia momentów
Blok obliczania ilości wartości Z3
pojawiających się w zadanych przedziałach
Blok obliczania ilości wartości S3
pojawiających się w zadanych przedziałach
Obliczanie bieżącego prawdopodobieństwa
warunkowego p3 wg wzoru (6.20)
Obliczanie Z4 i S4
Sumowanie potęg do obliczenia moment.
Blok obliczania ilości otrzymanych wartości
Z1; Z2; Z3; pojawiających się w zadanych przedział
Blok obliczenia ilości otrzymanych wartości
S1; S2; S3 pojawiających się w zadanych przedział


NIE
Z2 ≥ 0
TAK
OBLICZANIE Z5 i S5
Sumowanie potęg do obliczenia momentów
Blok obliczania ilości otrzymanych wartości Z5 pojawiających się w zadanych przedziałach
Blok obliczania ilości otrzymanych wartości S5 pojawiających się w zadanych przedziałach
Obliczanie bieżącego prawdopodobieństwa warunkowego P5, wg wzoru (6.22)
NIE
TAK
J < JW i J ≠ wielokrotność LW1
NIE
TAK
J ≥ JW i J ≠ wielokrotność LW2
NIE
Obliczenie bieżących prawdopodobieństw P1, P2, P4


WYDRUK INFORMACYJNY
J
wartości wygenerowanych zmiennych losowych Z_i, S_i ($i = 1, \ldots 5$)
p_i ($i = 1, \ldots 5$)
Blok obliczania prawdopodobieństw przyjmowania wartości w określonych przedziałach przez Z_i ($i = 1, \ldots 5$) (rozkłady Z_i)
Blok obliczania prawdopodobieństw przyjmowania wartości w określonych przedziałach przez S_i ($i = 1, \ldots 5$) (rozkłady S_i)
Obliczenie końcowych prawdopodobieństw p_i ($i = 1, \ldots 5$)
Obliczenie momentów zwykłych zmiennych Z_i, S_i ($i = 1, \ldots 5$)
Obliczenie momentów centralnych zmiennych Z_i, S_i ($i = 1, \ldots 5$) wg estymatorów obciążonych oraz wg estymatorów nieobciążonych



Rys.6.1 Schemat ideowy programu WP01

Przykładowy wydruk skomplikowanego programu WP01 wraz z wydrukami wyników obliczeń zawiera załącznik nr 2.

6.3. Uwagi o stosowaniu programu

1. Podstawowa wersja programu, która została tu przedstawiona, jest przystosowana do uwzględnienia jednej, dwóch lub trzech warstw gruntowych, przy czym zakłada się, że pod podstawą przyczółka występuje tylko jedna warstwa. Przy zachowaniu tego ostatniego założenia wprowadzenie większej ilości warstw oddziałujących na ścianę przyczółka wymaga jedynie drobnych uzupełnień.
2. Możliwe jest rozpatrywanie przyczółków o nachylonej podstawie.
3. Zakłada się poziome granice pomiędzy warstwami gruntu oraz przyjmuje się, że są one zdeterminowane /nielosowe/.
4. Program nie obejmuje przypadków, gdy siła parcia /odporu/ gruntu nie ma wyrażenia analitycznego /por.np. [134] § 10.3.4/.
5. W obecnej wersji program nie uwzględnia występowania wód gruntowych.
6. Bloki związane z wyznaczaniem rozkładów zmiennych Z_i oraz S_i są od siebie niezależne, tak aby w razie potrzeby można było jeden z nich usunąć z programu /lub ominąć/, co może być uzasadnione ze względu na skrócenie czasu pracy maszyny.

7. PRZYKŁADY OBLICZENIOWE

7.1 Charakterystyka przykładów

W ramach niniejszej pracy zrealizowano kilkanaście przykładów obliczeniowych. Stosunkowo duża liczba przykładów wynika stąd, że miały one zrealizować następujące cele:

- Przeprowadzenie pełnej analizy stateczności z wykazaniem przydatności metody symulacyjnej do tego zadania, sprawdzenie funkcjonowania zaproponowanych rozkładów wielokątnych oraz działania zbudowanego programu obliczeniowego (przykład podstawowy).
- Określenie wpływu zmienności losowej poszczególnych parametrów gruntowych na otrzymane rezultaty (przede wszystkim na prawdopodobieństwa utraty stateczności).
- Określenie wpływu losowości reakcji od obciążeń pojazdami na uzyskiwane prawdopodobieństwa utraty stateczności.
- Porównanie wyników przy zastosowaniu różnych typów rozkładów prawdopodobieństwa w kontekście uproszczeń rachunkowych oraz minimalizowania czasu pracy maszyny.
- Wykonanie analizy stateczności przyczółka w różnych etapach jego budowy (por. rozdział 3). Należy jednak podkreślić, że uwaga skoncentrowana była na analizie gotowej i oddanej do eksploatacji konstrukcji, gdyż analizy w poszczególnych etapach budowy przeprowadza się analogicznie.
- Przeprowadzenie obliczeń w warunkach, gdy nie zachodzi potrzeba sprawdzania wszystkich pięciu kryteriów stateczności.
- Porównanie wyników uzyskanych metodą symulacyjną przy użyciu rozkładów wielokątnych z wynikami uzyskanymi metodami uproszczonymi (por. rozdział 5).
- Ocena dokładności przeprowadzonych obliczeń - temu zagadnieniu poświęcony jest rozdział 8 .

W związku z tak postawionymi zadaniami warunki gruntowe i geometria przyczółka w przykładach były dobrane w taki sposób, aby niezerowe prawdopodobieństwa stateczności w poszczególnych przypadkach były stosunkowo duże. Zmiany dość dużych prawdopodobieństw można bowiem łatwiej analizować, mając na względzie ewentualne niedokładności obliczeniowe. Należy jednak zaznaczyć, że przykładowy dobór sensownych warunków takich, aby prawdopodobieństwa utraty stateczności we wszystkich pięciu przypadkach były niezerowe, okazał się niewykonalny.

Przyczółek analizowany w większości przykładów przedstawiono na rys. 7.1.

Oprócz danych przedstawionych na rysunku przyjęto:

Ciężar przyczółka betonowego: $N_{q} = 451{,}2 \ \frac{kN}{m}$

Reakcja od obciążeń belką: $N_{p2} = 490 \ \frac{kN}{m}$

Obciążenie stałe $q_o = 1{,}5 \ \frac{kN}{m^2}$; q_1 -/por. wzór (3.4) /.

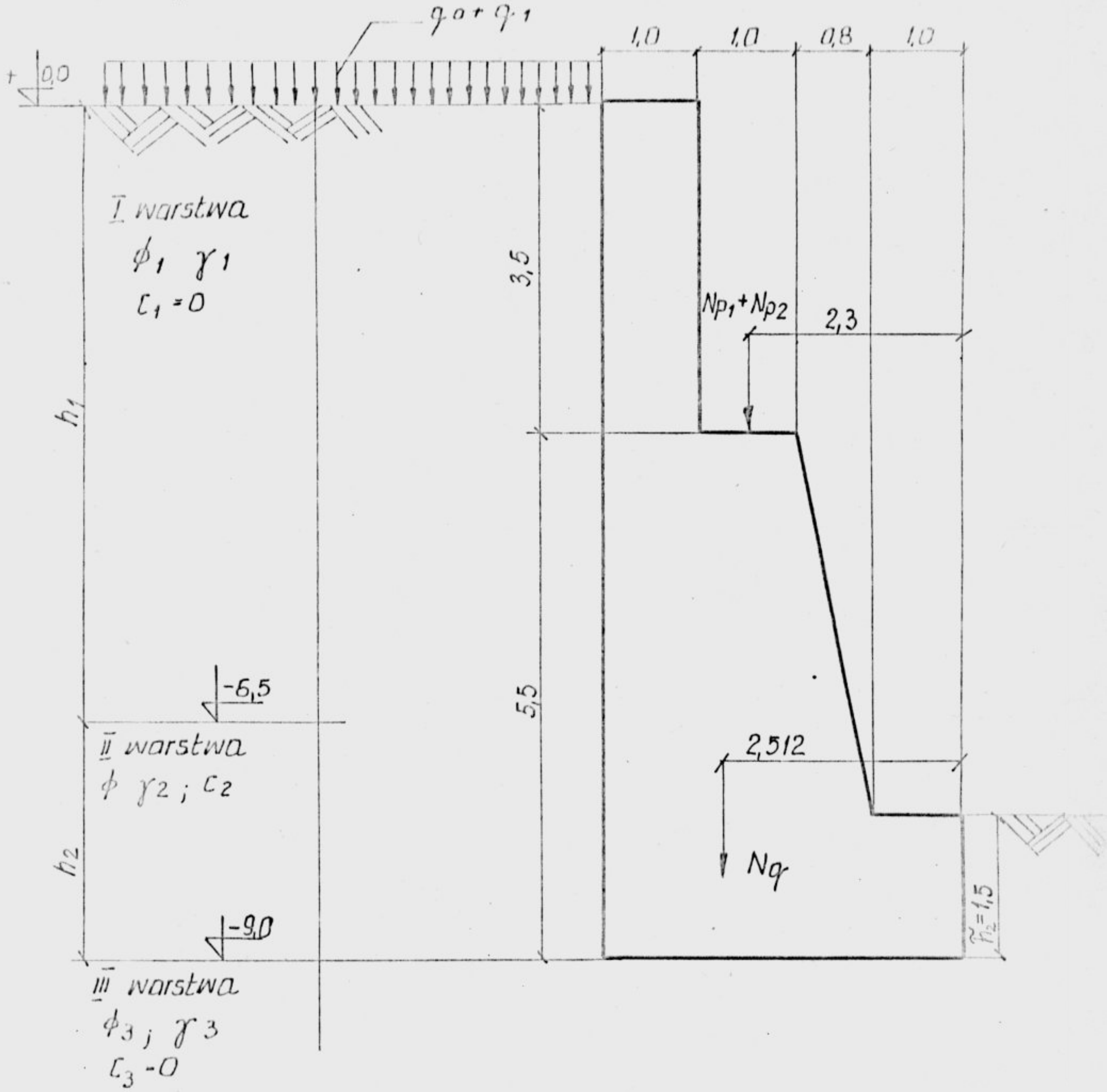
Współczynnik do obliczenia siły od hamowania $a_h = 0{,}1$

Współczynnik $k_1 = \frac{2}{3}$ /por. wzór (3.17) /

Długość przęsła $L = 50$ m

Zgodnie z wynikami uzyskanymi przez Takaokę /por.rozdział IV/ założono, że reakcja od obciążenia przejeżdżającymi pojazdami ma rozkład Frecheta o wartości oczekiwanej $EN_{p1} = 56{,}73 \ \frac{kN}{m}$ i odchyleniu standardowym $\sigma N_{p1} = 44{,}17 \ \frac{kN}{m}$, co odpowiada parametrom $u_F = 40{,}59$ i $k_F = 2{,}80$ /por. wzór (4.40) /. Tutaj przyjęto rozkład obcięty o parametrze $p_{ob} = 0{,}00001$ /wzór (6.25) /.

Przyjęcie rozkładu obciętego jest tu związane z zastosowaniem rozwinięcia Grama - Charliera, które zostanie przedstawione w rozdziale 9. Warto jednak zauważyć, że przy tak małym parametrze p_{ob} zmiany w stosunku do wyjściowej gęstości rozkładu są nieznaczne.



Rys. 7.1 Przyczółek masywny analizowany metodą symulacyjną w przykładach obliczeniowych

Charakterystyki probobilistyczne zmiennych losowych związanych nych z parametrami gruntowymi podaje tablica 7.1.

Pierwszą warstwę stanowi piasek drobny, wilgotny i średnio zagęszczony, drugą - glina piaszczysta nieskonsolidowana z pogranicza stanu plastycznego i miękkoplastycznego, zaś trzecią mokry i zagęszczony piasek gruboziarnisty.

Kształty funkcji gęstości rozkładów wielokątnych opisujących parametry gruntowe wybrano na podstawie wielu histogramów /np. z pracy [8] / oraz rezultatów opisanych w rozdziale 4.

Wykresy funkcji gęstości poszczególnych parametrów gruntowych zamieszczone są w załączniku nr 1 /rysunki Z 1 do Z 7 - linia ciągła /, zaś poniżej podano wzory określające je.

Tablica 7.1

Charakterystyki probabilistyczne parametrów gruntowych

/ por. rys. 7.1 /

Nr warstwy	Cecha gruntowa	Wartość oczekiwana	Odchylenie standardowe	Współczynnik zmienności
1	ϕ_1	$29^o \approx$ $\approx 0{,}506145$ rd	$4{,}35^o \approx$ $\approx 0{,}075922$ rd	0,15
	γ_1	17 $\frac{kN}{m^3}$	1,7 $\frac{kN}{m^3}$	0,10
2	ϕ_2	$11^o \approx$ $\approx 0{,}191986$ rd	$2{,}2^o \approx$ $\approx 0{,}038397$ rd	0,20
	c_2	10 kPa	2 kPa	0,20
	γ_2	21 $\frac{KN}{m^3}$	2,1 $\frac{KN}{m^3}$	0,10
3	ϕ_3	$34^o \approx$ $\approx 0{,}593412$ ed	$5{,}1^o \approx$ $\approx 0{,}089012$ rd	0,15
	γ_3	20 $\frac{kN}{m^3}$	1 $\frac{kN}{m^3}$	0,05

1. $\emptyset_1$[1] (rys. Z 1)

$$g_1(x) = \begin{cases} 7{,}397137x - 1{,}983994 & x \in [0{,}268211;\ 0{,}382132) \\ 52;\ 149805x - 19{,}085426 & x \in [0;\ 382132;\ 0{,}477066) \\ -26{,}\ 345767x + 18{,}\ 362162 & x \in [0{,}477066;\ 0{,}6969684) \\ 0 & x \notin [0;268211;\ 0{,}6969684) \end{cases} \quad (7.1)$$

2. γ_1 - rozkład trójkątny asymetryczny rys. (Z 2)

$w_1 = 8{,}299398;\ w_2 = 17{,}2;\ w_3 = -0{,}6$

$$g_2(x) = \begin{cases} 0{,}067887x - 0{,}88595 & x \in [13{,}050301;\ 16{,}6) \\ -0{,}050735x + 1{,}083177 & x \in [16{,}6;\ 21{,}349699) \\ 0 & x \notin [13{,}050301;\ 21{,}349699) \end{cases} \quad (7.2)$$

3. $\emptyset_2$: /argument w radionach/ rys. (Z 3)

$$g_3(x) = \begin{cases} 28{,}919903x - 2{,}072153 & x \in [0{,}071651;\ 0{,}129267) \\ 203{,}88528x - 24{,}68937 & x \in [0{,}129267;\ 0{,}177280) \\ -103{,}0016x + 29{,}715373 & x \in [0{,}177280;\ 0{,}288494) \\ 0 & x \notin [0{,}071651;\ 0{,}288494) \end{cases} \quad (7.3)$$

4. c_2: (rys. Z 4)

$$g_4(x) = \begin{cases} 0{,}2063x - 1{,}430613 & x \in [7{,}18427;\ 8{,}34927) \\ -0{,}061048x + 0{,}80155 & x \in [8{,}34927;\ 12{,}42677) \\ -0{,}007838x + 0{,}140322 & x \in [12{,}42677;\ 17{,}902781) \\ 0 & x \notin [7{,}18427;\ 17{,}902781) \end{cases} \quad (7.4)$$

5. γ_2: rozkład trójkątny asymetryczny (rys. Z 5)

$w_1 = 10{,}141005;\ w_2 = 21{,}5;\ w_3 = -1{,}5$

$$g_5(x) = \begin{cases} 0{,}055233x - 0{,}90745 & x \in [16{,}429498;\ 20) \\ -0{,}030014x + 0{,}79749 & x \in [20;\ 26{,}570503) \\ 0 & x \notin [16{,}429498;\ 26{,}570503) \end{cases} \quad (7.5)$$

1/ Argument x wyrażony w radianach.

6. ϕ_3 : 1/ (rys. Z 6)

$$g_6(x) = \begin{cases} 5{,}3814812x - 1{,}691130 & x \in [0{,}314455;\ 0{,}448017) \\ 37{,}939436x - 16{,}278746 & x \in [0{,}448017;\ 0{,}559319) \\ -19{,}166772x + 15{,}661844 & x \in [0{,}559319;\ 0{,}817182) \\ 0 & x \notin [0{,}314455;\ 0{,}817182) \end{cases} \quad (7.6)$$

7. γ_3 - rozkład trójkątny asynetryczny (rys. Z 7)

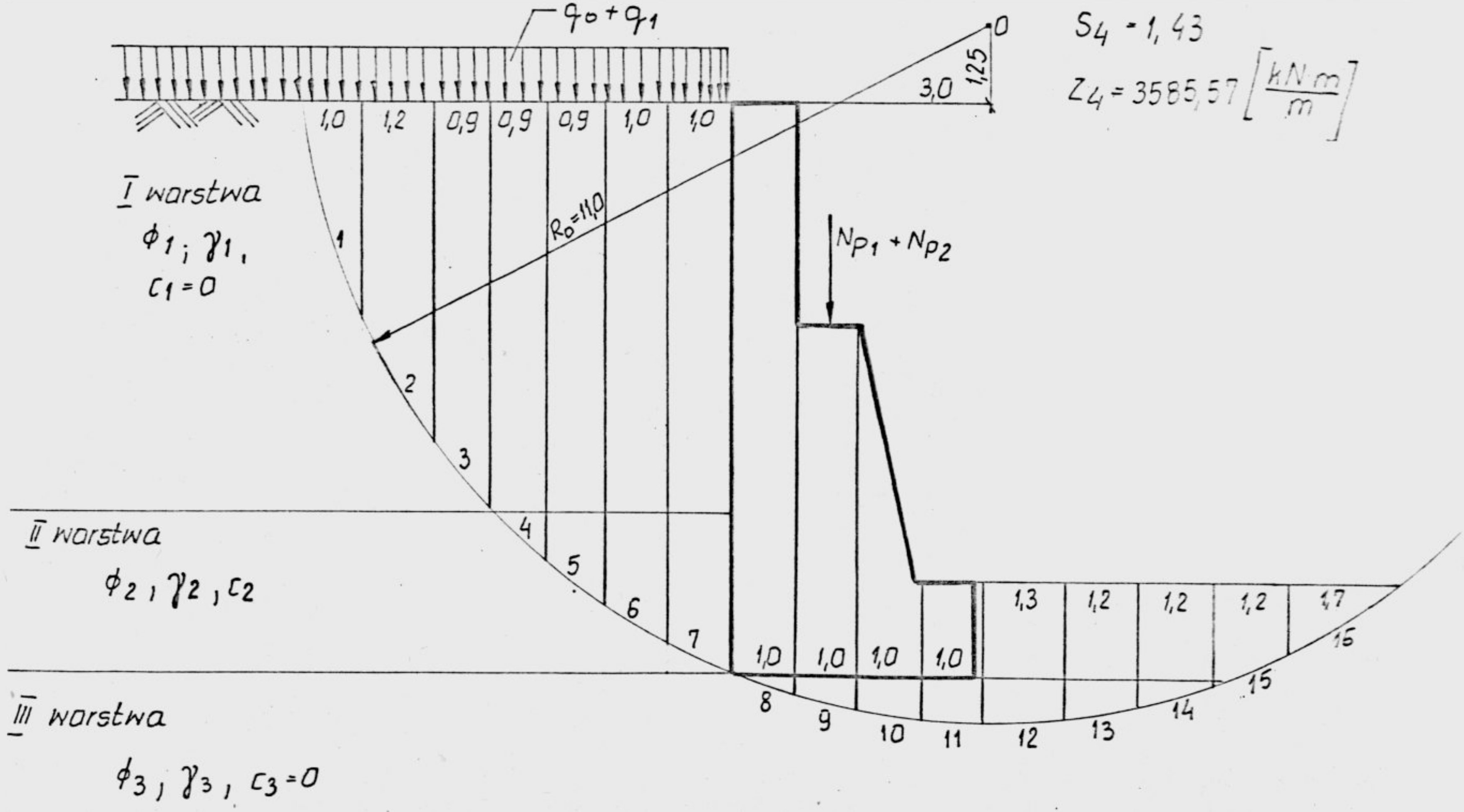
$w_1 = 4{,}7874840$; $w_2 = 19{,}7$; $w_3 = 0{,}9$

$$g_7(x) = \begin{cases} 0{,}12683x - 2{,}194953 & x \in [17{,}306258\ \ 20{,}6) \\ -0{,}27966x + 6{,}178736 & x \in [20{,}6;\ 22{,}093472) \\ 0 & x \notin [17{,}306258;\ 22{,}093742) \end{cases} \quad (7.7)$$

Następnie określono najniekorzystniejszą linię poślizgu w przypadku powstania osuwiska metodą Felleniusa. Przyjęta do obliczeń najniekorzystniejsza linia poślizgu wyznaczona dla wartości oczekiwanych parametrów gruntowych jest uwidoczniona na rysunku 7.2.

Pozostałe dane niezbędne na wejściu programu można łatwo znaleźć w oparciu o podane tutaj wartości.

1/ Argument x wyrażony w radianach.



Rys. 7.2 Dane do obliczania prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska /linia poślizgu uzyskana metodą Felleniusa/

Wartości kątów ${}_i$ /por. wzór (3.30) / w radianach:
$\alpha_1 = 1,2740903$; $\alpha_2 = 1,0122909$; $\alpha_3 = 0,85521$; $\alpha_4 = 0,75049$; $\alpha_5 = 0,62831$; $\alpha_6 = 0,53806$; $\alpha_7 = 0,43633$;
$\alpha_8 = 0,34906$; $\alpha_9 = 0,26179$; $\alpha_{10} = 0,14835$; $\alpha_{11} = 0,052369$; $\alpha_{12} = 0,069813$; $\alpha_{13} = 0,19198$; $\alpha_{14} = 0,32289$;
$\alpha_{15} = 0,40142$; $\alpha_{16} = 0,5585$

7.2 Wyniki przykładu podstawowego /przykład nr 1/ i ich analiza

Przyczółek opisany w 7.1 poddano badaniu symulacyjnemu zgodnie z programem omówionym w rozdziale VI. Użyto rozkładów omówionych w 7.1. Liczba realizacji wynosiła N = 10000. W rezultacie obliczeń uzyskano następujące prawdopodobieństwa:

Prawdopod. utraty stateczności przez przesuw $p_1 = 0{,}0376$

-"- -"- -"- przez obrót wokoło punktu A $p_2 = 0{,}0$

Prawdopod. warunkowe utraty stateczności przez obrót wokół pow. cylindrycznej, pod warunkiem $\{M_o > 0\}$ $p_3 = 0{,}0$

Prawdopodobieństwo wystąpienia osuwiska $p_4 = 0{,}0149$

Prawdopodobieństwo warunkowe utraty stateczności przez przekroczenie nośności podłoża $p_5 = 0{,}1002$

Prawdopod. wystąpienia ujemnego momentu przy obrocie wokół pow. cylindrycznej $P\{M_o \leqslant 0\}$ $p_M = 0{,}0703$

"Całkowite" prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przyczółek $p_o = 0{,}1002$

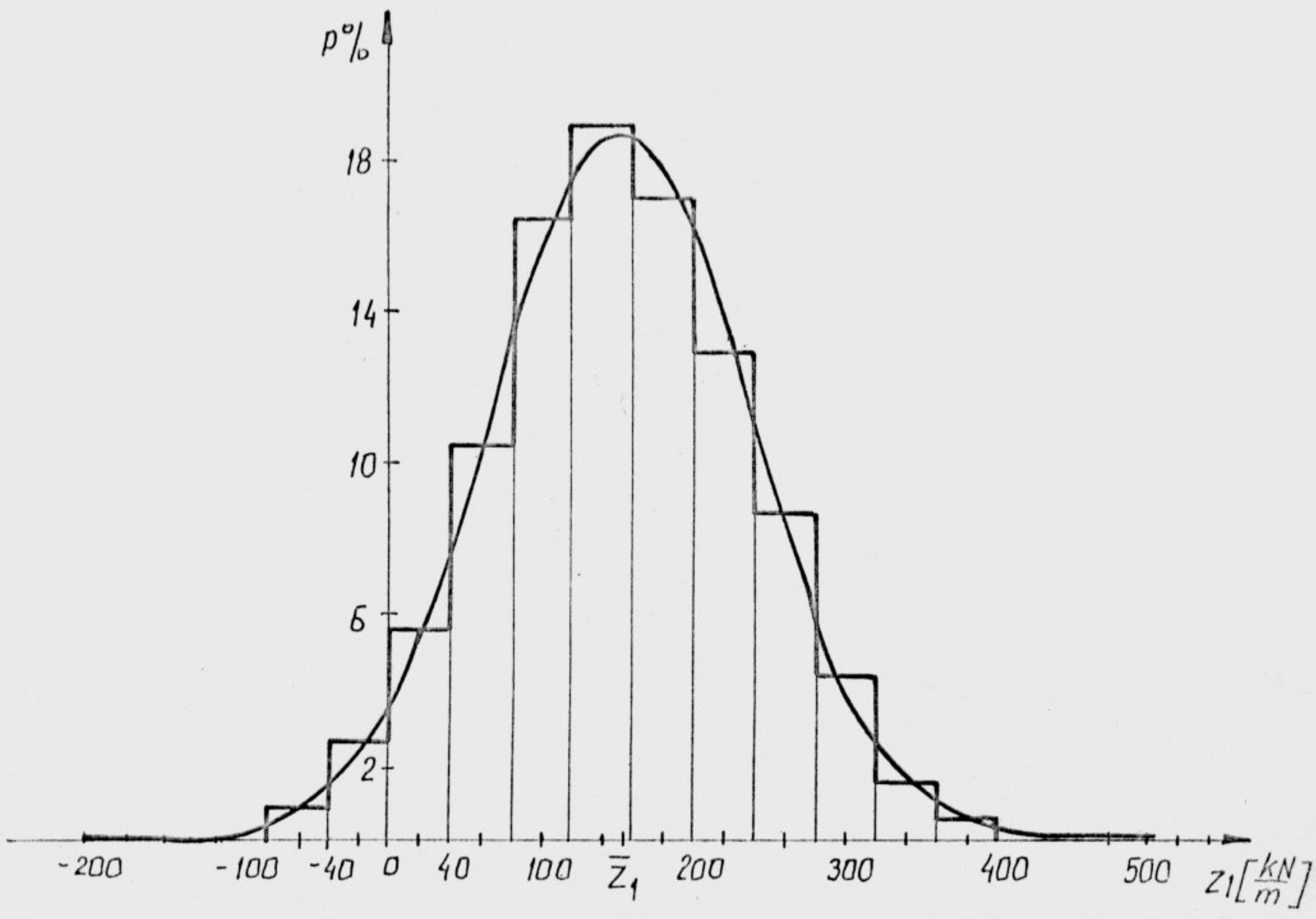
W tablicy 7.2 podane są uzyskane w obliczeniach parametry rozkładów, przy czym zastosowano, następujące oznaczenia $\bar{X}$ - wartość średnia zmiennej X; σ - odchylenie standardowe;- ν-współczynnik zmienności; $\delta_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ - współczynnik skośności $\delta_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ - Kurtoza.

Uzyskane rozkłady zmiennych losowych Z_i, S_i $(i = 1,\dots 5)$ przedstawiono w postaci histogramów na rysunkach Z 8 do Z 17 w załączniku nr 1, a tutaj przedstawia się przykładowo histogram zmiennej Z_1 /rys. 7.3/.

Tablica 7.2

Parametry rozkładów uzyskane w przykładzie 1.

zmienna losowa	$\overline{X}$	σ	ν	δ_1	δ_2
Z_1	151,1353	85,0708	0,5629	0,03075	2,9749
S_1	1,4731	0,2948	0,2001	0,4846	3,4357
Z_2	1541,1634	147,4933	0,0957	-0,03751	4,5081
S_2	2,7902	0,4363	0,1514	0,4494	3,0585
Z_3	1430,4265	315,3922	0,2205	0,2496	2,9993
S_3	26,3814	142,6135	5,4058	28,5918	1109,6293
Z_4	3673,8997	1752,4487	0,4770	0,2710	2,9073
S_4	1,4465	0,2168	0,1499	0,3137	2,9453
Z_5	2452,5963	3085,4197	1,2580	2,4942	11,7074
S_5	3,4642	3,1028	0,8957	2,5075	11,8387



Rys. 7.3 Histogram zmiennej Z_1 z przykładu 1 wraz z gęstością rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji

Analiza otrzymanych wyników dotyczących rozkładów pozwala na sformułowanie następujących wniosków i uwag:

1. Rozkłady zmiennych losowych Z_1, Z_2, Z_3 i Z_4 oraz S_1, S_2 i S_4 wykazują dość duże podobieństwo do rozkładu normalnego. Hipotezę tę zweryfikowano wykorzystując prosty test oparty na porównaniu współczynników δ_1 i kurtoz δ_2 rozkładów empirycznego i normalnego. Postawioną hipotezę weryfikuje się za pomocą dwóch sprawdzianów: /por. [106] /.

$$Q_1 = \frac{\delta_1}{\sqrt{6}} \cdot \sqrt{N} \; ; \tag{7.8}$$

$$Q_2 = \frac{(\delta_2 - 3)}{\sqrt{24}} \cdot \sqrt{N} \tag{7.9}$$

Gdy hipoteza jest prawdziwa, statystyki Q_1 i Q_2 mają rozkłady asymptotycznie normalne $N(0,1)$. Na poziomie istotności 0,01 wartości sprawdzianów (7.8) i (7.9) nie powinny przekraczać liczby 2,33.

Okazało się, że jedynie dla przypadku zmiennej Z_1 /por. rys. 7.3/ wymóg ten został spełniony $Q_1 = 1{,}255$; $Q_2 = 0{,}512$. Wzory 7.8 i 7.9 sugerują, że przy dużej liczbie realizacji $N = 10000$ jedynie bardzo wysoki stopień zgodności współczynników δ_1 i δ_2 gwarantuje pozytywny wynik testu. Graficzne porównanie histogramów zmiennych Z_2, Z_3, Z_4 oraz S_1, S_2 i S_4 z wykresami gęstości normalnych o średnich i wariancjach takich jak odpowiednie parametry Z_i lub S_i /por. rys. Z 9 - Z 12 oraz Z 14 i Z 15 w załączniku nr 1/ pozwala na stwierdzenie, że z pewnym przybliżeniem można uznać te rozkłady za normalne.

2. Rozkłady Z_5 i S_5 zasadniczo odbiegają od rozkładu normalnego na co wskazują ich współczynniki skośności i kurtozy /por. tabl. 7.2 / oraz uzyskane histogramy /rys. Z 16 a i b oraz rys. Z 17 w załączniku/.

Duża skośność /a także duża wariancja/ prawostronna rozkładu Z_5 oraz przyjmowanie wartości zarówno ujemnych i dodatnich przez tę zmienną powodują, że w zasadzie żaden z powszechnie stosowanych rozkładów nie nadaje się do aproksymacji tego rozkładu.

Zmienna S_5 przyjmuje tylko wartości dodatnie. Dla niej metodą kollokacji graficznej /opisana w [94] / znaleziono rozkład lognormalny o medianie $\tilde{x} = 2{,}471$ i logarytmicznym współczynniku zmienności $\nu = 0{,}7686$ /rys. Z 18 /, który stanowi dobre przybliżenie rozkładu S_5. Krzywą gęstości uzyskanego rozkładu lognormalnego przedstawiono na rys. Z 17 wraz z histogramem zmiennej losowej S_5.

3. Oprócz rozkładów Z_5 i S_5 także rozkład zmiennej S_3 zasadniczo różni się od rozkładu normalnego. Tutaj jednak jest to konsekwencją przyjmowania wartości bliskich zeru / a także ujemnych/ przez moment sił Mo /por. wzór (3.25) i uwagi w podrozdziale 3.5 /, co powodowało uzyskiwanie bardzo dużych wartości S_5. Spowodowało to brak "stabilności" uzyskiwanych wyników, ze względu na warunki początkowe generatora liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym /zmiany parametrów początkowych wywoływały duże zmiany parametrów rozkładu oraz oraz samego rozkładu S_3/. Sytuacja ta będzie jeszcze omówiona w rozdziale 8. Ze względu na brak stabilności rozkładu S_3 nie był on brany pod uwagę w dalszych analizach związanych z przykładem 1.

4. W cytowanej już kilkakrotnie pracy [83] McAnally uzyskał dla fundamentów posadowionych na piaskach rozkład normalny dla zapasu stateczności typu Z_5. Autor ten stosował także model Brinch-Hansena i metodę symulacyjną. Wydaje się, że tę jakościową różnicę pomiędzy rozkładem uzyskanym w niniejszej pracy a rozkładem podanym w [83] można tłumaczyć w dwojaki sposób. Po pierwsze w pracy Mc Anallyégo występowały jedynie obciążenia pionowe nie działające mimośrodowo. W przypadku masywnego przyczółka działają natomiast duże siły poziome związane z parciem gruntu, a więc dużą rolę odgrywają współczynniki związane z nachyleniem wypadkowej - wzory (3.40). Istotne znaczenie ma tu także mimośrodowe obciążenie przyczółka. Drugą przyczyną obserwowanej różnicy mogą być bardzo niewielkie współczynniki zmienności dla kąta tarcia wewnętrznego stosowane przez autora pracy [83] /wsp. zmienności dla tgϕ wynosił 0,035/.

W związku z prawdopodobieństwami niezachowania kryteriów stateczności obliczonymi w przykładzie 1 nasuwają się następujące uwagi:

5. Najbardziej prawdopodobne okazało się tu przekroczenie nośności granicznej podłoża $p_5 = 0,1002$.

6. W przyjętym tu modelu zniszczenia zakładającym, że awaria przyczółka ma miejsce wówczas, gdy co najmniej dla jednego i $(i = 1,...5)$ $Z_i < 0$ /lub $S_i < 1$; por. podrozdział 6.2 / ogólne /"całkowite"/ prawdopodobieństwo utraty stateczności okazało się równe prawdopodobieństwu przekroczenia nośności podłoża, tj. $p_o = p_5$. Wynika stąd, że jeśli w danej realizacji było $Z_1 < 0$ lub $Z_4 < 0$ /Z_2, Z_3 były tu zawsze nieujemne/, to także $Z_5 < 0$. Oczywiście w innych przykładach zjawisko to, nie zawsze ma miejsce. Jednak wskazuje ono na istnienie pewnej ko - relacji pomiędzy zmiennymi Z_i /analogicznie pomiędzy zmiennymi S_i/.

7. Bezawaryjna praca przyczółka wymaga, aby nie wystąpił żaden z pięciu przypadków utraty stateczności. Zatem mogło by się wydawać, że z punktu widzenia modeli teorii niezawodności /por. np. [22] lub [95] jest to model szeregowy. Jednak efekt omówiony w uwadze 6 wskazuje, że <u>prosty</u> model szeregowy jest tutaj nieadekwatny, Łatwo bowiem zauważyć, że zdarzenia $\{Z_i \geqslant 0\}$ $i = 1,2,...,5$ nie są niezależne. Istotnie, jeśli przez p_s oznaczyć prawdopodobieństwo zachowania stateczności, to:

$$p_s = 1 - p_o = 0,8998, \text{ natomiast}$$

$$\prod_{i=1}^{5} (1 - p_i) = 0,8530646 \neq p_s$$

Ponadto na podstawie uzyskanych histogramów jasne jest, że rozkłady zmiennych Z_i $(i = 1,2,...5)$ nie są jednakowe, podobnie też rozkłady S_i $(i = 1,2,.. 5)$ nie są jednakowe.

Wydaje się natomiast, że mógłby być tu zastosowany tzw. "model szeregowy o skorelowanych wytrzymałościach" /należy do złożonych modeli teorii niezawodności/ opisany w [95]. Wymaga on jednak znajomości współczynników korelacji pomiędzy zmiennymi Z_i /lub S_i/, a to zagadnienie w niniejszej pracy nie było badane. Warto jedynie nadmienić, że zgodnie z tym ostatnim modelem wartości wyrażenia: $\prod_{i=1}^{5}(1 - p_i)$ stanowi dolne oszacowanie prawdopodobieństwa zachowania stateczności, zaś $\min_i \left\{(1 - p_i),\ i = 1, \ldots 5\right\}$ jest oszacowaniem górnym. W przykładzie 1 okazało się, że $1 - p_o = \min_i \left\{(1 - p_i)\ ;\ i = 1, \ldots 5\right\}$ lecz dalsze przykłady nie zawsze potwierdzają tę obserwację.

8. Jeżeli przyjmie się, zgodnie z sugestiami zawartymi w uwagach 1 i 2 w podrozdziale 6.2, że całkowite prawdopodobieństwo wystąpienia obrotu wokół pow. cylindrycznej dane jest wzorem (6.21), zaś całkowite prawdopod. wyczerpania nośności podłoża - wzorem (6.23), to w rozpatrywanym przykładzie wynoszą one odpowiednio:

$$p_3' = P(Z_3 < 0 / M_o > 0) \cdot P(M_o > 0) = 0 \cdot (1 - p_M) = 0$$

$$p_5' = P(Z_5 < 0 / Z_2 \geqslant 0) \cdot P(Z_2 \geqslant 0) + P(Z_2 < 0) = p_5 + 0 = 0{,}1002$$

Tak więc w tym przypadku uzyskuje się $p_3' = p_3$ i $p_5' = p_5$.

Biorąc pod uwagę wartości parametrów zmiennych losowych Z_i oraz S_i $(i = 1, \ldots, 5)$ można stwierdzić, że:

9. Wśród zmiennych Z_i najmniejszy współczynnik zmienności ma zmienna Z_2 (0,0957), zaś zmienna Z_5 odznacza się bardzo dużą zmiennością, bo aż 1,258 (125,8 %).
Spośród zmiennych S_i $i = 1, \ldots, 5$ małe współczynniki zmienności mają - S_2 i S_4 (0,1564 i 0,1499 - odpow.), a największy - podobnie jak w przyp. Z_i - zmienna S_5 (0,8957) /S_3 - nie jest brana pod uwagę/.

10. Wszystkie zmienne, oprócz Z_5 i S_5 mają stosunkowo nieduże współczynniki skośności. W przypadku zmiennych Z_1 i Z_2 są one minimalne /0,03075 i -0,03751 odpowiednio/. Jedynie zmienna Z_2 ma współczynnik skośności ujemny, co odpowiada skośności lewostronnej.

11. Podobnie jak w przypadku skośności, jedynie zmienne Z_5 i S_5 wykazują kurtozy znacznie odbiegające od tychże dla rozkładu normalnego /11,7074 i 11,8387 - odpowiednio/. Zmienna Z_2 jest także nieco bardziej "stroma" od pozostałych 4,5081 .

12. Bardzo znamienny jest fakt, że pomimo dużej wartości średniej zmiennej losowej S_5 = 3,4642 prawdopodobieństwo utraty stateczności w tym przypadku wynosi aż 0,1002. Jakkolwiek wskaźnik S_5 obliczony bezpośrednio przez podstawienie wartości poszczegól - nych zmiennych losowych /por. także rozdział 9/ jest mniejszy 2,5471 , to mimo wszystko jasnym jest, że przy projektowaniu przyczółków, należałoby przy sprawdzaniu nośności podłoża zwrócić szczególną uwagę na losową zmienność parametrów gruntowych

7.3 Wpływ losowości poszczególnych parametrów gruntowych na prawdopodobieństwo utraty stateczności

Po przykładzie podstawowym /przykład 1 / przeprowadzono serię badań /przykładów/ mających na celu uchwycenie wpływu losowości poszczególnych parametrów gruntowych na prawdopodonieństwo utraty stateczności. Zagadnienie takie może być analizowane w różny sposób. Jest bowiem rzeczą jasną, że wpływ ten jest uwarunkowany np. poszczególnymi współczynnikami zmienności występujących tu zmiennych losowych wartościami średnimi tych zmiennych, a także miąższościami poszczególnych warstw gruntowych. Jednakże porównywanie oparte na przyjęciu jednakowych współczynników zmienności lub jednakowych miąższości warstw traci sens z geotechnicznego punktu widzenia. Wiadomo bowiem z praktyki, że współczynniki zmienności ciężarów objętościowych są znacznie niższe niż odpowiednie współczynniki dla kąta tarcia wewnętrznego, które to z kolei są nieco mniejsze niż w przypadku spójności /wsp. zmienności ϕ zależy także od tego czy grunt jest spoisty czy niespoisty - por. tablica 4.1/.

W związku z tymi trudnościami przyjęto tu sposób porównania oparty na wyznaczaniu rozkładów warunkowych, przyjmując kolejno poszczególne zmienne losowe za stałe i równe swoim wartościom średnim.

I tak w kolejnych przykładach badano:

/R - jest tu symbolem rozkładu prawdopodobieństwa ; $\overline{X}$ wartość średnia zmiennej X/.

Przykład 2

$$\tilde{R}_1\left(Z_i\right) = R\left(Z_i/\phi_1 = \bar{\phi}_1\right) \quad ; \quad \tilde{R}_1\left(S_i\right) = R\left(S_i/\phi_1 = \bar{\phi}_1\right) \qquad (7.10)$$

Przykład 3

$$\tilde{R}_2\left(Z_i\right) = R\left(Z_i/\phi_2 = \bar{\phi}_2\right) \quad ; \quad \tilde{R}_2\left(S_i\right) = R\left(S_i/\phi_2 = \bar{\phi}_2\right) \qquad (7.11)$$

Przykład 4

$$\tilde{R}_3\left(Z_i\right) = R\left(Z_i/\phi_3 = \bar{\phi}_3\right) \quad ; \quad \tilde{R}_3\left(S_i\right) = R\left(S_i/\phi_3 = \bar{\phi}_3\right) \qquad (7.12)$$

Przykład 5

$$\tilde{R}_4\left(Z_i\right) = R\left(Z_i/c_2 = \bar{c}_2\right) \quad ; \quad \tilde{R}\left(S_i\right) = R_4\left(S_i/c_2 = \bar{c}_2\right) \qquad (7.13)$$

Przykład 6

$$\begin{aligned} \tilde{R}_5\left(Z_i\right) &= R\left(Z_i/\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 \,;\, \gamma_2 = \bar{\gamma}_2 \,;\, \gamma_3 = \bar{\gamma}_3\right) \\ \tilde{R}_5\left(S_i\right) &= R\left(S_i/\gamma_1 = \bar{\gamma}_1 \,;\, \gamma_2 = \bar{\gamma}_2 \,;\, \gamma_3 = \bar{\gamma}_3\right) \end{aligned} \qquad (7.14)$$

W tych przykładach liczba realizacji była równa N = 5000.

Uzyskane prawdopodobieństwa zostały zestawione w tablicy 7.3.

Dla porównania w ostatniej kolumnie tej tablicy podano prawdopodobieństwo uzyskane w przykładzie 1, lecz przy liczbie realizacji N = 5000 /wpływ liczby realizacji będzie omówiony w rozdziale następnym/.

Tablica 7.3

Prawdopodobieństea warunkowe uzyskane w przykładach 2, 3, 4, 5, 6 zestawione z prawdopodobieństwami uzyskanymi w przykładzie 1

Prawdopodobieństwa	2	3	4	5	6	1
p_1	0,0308	0,0318	0,0008	0,0338	0,0300	0,0376
p_2	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
p_3	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
p_4	0,0148	0,0134	0,0	0,0136	0,0134	0,0156
p_5	0,0864	0,0942	0,0026	0,0952	0,0872	0,0972
p_o	0,0864	0,0942	0,0028	0,0952	0,0872	0,0972

W kolejnej tablicy 7.4 zestawiono uzyskane parametry rozkładów /$\bar{X}$, σ, ν, δ_1 i δ_2 - jak w przykładzie 1/. Podobnie jak wyżej dane dla przykładu 1 odnoszą się do liczny realizacji N = 5000.

Porównywano także rozkłady zmiennych Z_i oraz S_i /i = 1, ,...5/ w kolejnych przykładach z rozkładami tych zmiennych w przykładzie 1 / dla N = 5000/. Przypadki w których różnice rozkładów były wyraźne, zilustrowano na rys. Z 19 - Z 25 w załączniku nr 1.

Analizując przeprowadzone porównania można wyciągnąć następujące wnioski:

Tablica 7.4

Parametry rozkładów

Zmienna	Parametr	Przykład 2 ($\bar{\phi}_1$)	Przykład 3 ($\bar{\phi}_2$)	Przykład 4 ($\bar{\phi}_3$)	Przykład 5 ($\bar{c}$)	przykład 6(γ_1, γ_2, γ_3)	Przykład 1
1	2	3	4	5	6	7	8
z_1	$\bar{z}_1$	152,6924	152,5813	151,1615	151,6384	151,0543	151,8905
	σ	81,9441	82,0161	47,2629	82,8827	79,2315	84,9225
	ν	0,5367	0,5375	0,3127	0,5466	0,5245	0,5591
	δ_1	0,03664	0,03901	-0,1379	0,01252	0,09078	0,01955
	δ_2	2,8844	2,9282	2,8582	2,9333	2,9631	2,9367
s_2	$\bar{s}_1$	1,4732	1,4748	1,4742	1,4734	1,4598	1,4763
	σ	0,2761	0,2796	0,2035	0,2853	0,2572	0,2948
	ν	0,1875	0,1896	0,1380	0,1936	0,1762	0,1997
	δ_1	0,3631	0,4098	0,5194	0,4124	0,3572	0,4625
	δ_2	3,2052	3,7829	3,2866	3,1977	3,2693	3,4346
z_2	$\bar{z}_1$	1547,0132	1544,0837	1543,2079	1542,9555	1540,9867	1543,2079
	σ	97,7073	142,8654	144,5748	143,4559	120,1217	144,5748
	ν	0,06316	0,09252	0,09368	0,09298	0,07795	0,09368
	δ_1	0,4584	-0,1346	-0,1380	-0,1384	0,04119	-0,1380
	δ_2	5,1438	3,4846	3,4228	3,4710	4,5536	3,4228

1	2	3	4	5	6	7	8
s_2	$\bar{s}_2$	2,7694	2,7990	2,7976	2,7964	2,7668	2,7976
	σ	0,2718	0,4305	0,4362	0,4334	0,3430	0,4362
	γ	0,09813	0,1538	0,1559	0,1550	0,1240	0,1559
	δ_1	0,2835	0,4348	0,4591	0,4507	0,3058	0,4591
	δ_2	2,5765	3,0218	3,0631	3,0342	2,8519	3,0631
z_3	$\bar{z}_3$	1448,6631	1434,2022	1419,436	1434,1126	1438,2519	1433,9654
	σ	305,3744	315,4015	100,8889	315,0821	312,7794	315,6962
	γ	0,2108	0,2199	0,0711	0,2157	0,2175	0,2202
	δ_1	0,2863	0,2532	0,2782	0,2545	0,2871	0,2544
	δ_2	2,9166	2,9684	4,0687	2,9697	2,9528	2,9682
z_4	$\bar{z}_4$	3673,2348	3683,2207	3605,1408	3679,7057	3673,5579	3682,5350
	σ	1750,0085	1738,4945	464,3596	1739,3838	1729,1174	1754,3838
	γ	0,4764	0,4720	0,1288	0,4727	0,4707	0,4764
	δ_1	0,2586	0,2730	0,06247	0,2629	0,2907	0,2586
	δ_2	2,8823	2,8945	2,9062	2,8817	2,8933	2,8913
s_4	$\bar{s}_4$	1,4468	1,4480	1,4388	1,4476	1,4431	1,4479
	σ	0,2164	0,2150	0,07247	0,2151	0,2079	0,2169
	γ	0,1495	0,1485	0,05037	0,1486	1,1441	0,1498
	δ_1	0,2939	0,3697	0,1154	0,2995	0,2729	0,2941
	δ_2	2,9101	2,9255	2,6262	2,9141	2,8465	2,9195

1	2	3	4	5	6	7	8
	z_5	2447,6419	2468,0271	1620,4014	2452,55701	2418,1473	2470,5160
	σ	2948,5386	3062,4545	729,1492	3034,2366	2977,0777	3091,3534
z_5	ν	1,2047	1,2409	0,4500	1,2372	1,2311	1,2513
	δ_1	2,2594	2,4339	0,4174	2,3723	2,4357	2,4954
	δ_2	9,7569	11,0880	2,9672	10,5516	11,3154	11,7769
	s_5	3,4584	3,4793	2,6294	3,4637	3,4291	3,4817
	σ	2,9625	3,0784	0,7397	3,0386	2,9920	3,1064
s_5	ν	0,8566	0,8848	0,2813	0,8801	0,8725	0,8922
	δ_1	2,2687	2,4458	0,4305	2,3796	2,4454	2,5048
	δ_2	9,8505	11,2157	2,9756	10,6436	11,4383	11,8836

1. W przypadkach 1, 3, 4, 5[1/] zdecydowanie największy wpływ na prawdopodobieństwo utraty stateczności, a także na rozkłady poszczególnych zmiennych ma losowość $-\phi_3$ /gruntu znajdującego się bezpośrednio pod podstawą przyczółka/. Nie dotyczy to przypadku obrotu wokół najbardziej obciążonej krawędzi /obrót wokół punktu A/, gdyż w tym przypadku i przykładzie zmienne Z_2 i S_2 nie zależą od kąta ϕ_3.
W przypadkach 1, 4, 5 zmiany prawdopodobieństw utraty stateczności są bardzo znaczne.
2. Przy założeniu $\phi_3 = \bar{\phi}_3$ /przykład 4/ zmieniają się znacznie także rozkłady zmiennych losowych Z_i oraz S_i. Zmienne Z_5 i S_5 zmieniają typ rozkładu i stają się bliskie rozkładowi normalnemu /por. rys. Z 23 i Z 24/.
W pozostałych przypadkach gęstości koncentrują się bardziej niż poprzednio wokół wartości średniej, przypominając kształtem gęstości normalne. W załączniku przedstawiono histogramy zmiennych losowych Z_1 /rys. Z 21/ i Z_4 /rys. Z 22 /.
Rozkłady zmiennych S_1, S_3 i S_4 zachowują się podobnie.
Warto zauważyć, że upodobnienie się do rozkładu normalnego zmiennej Z_5 koresponduje z wynikami Mc.Anally'ego /[83], por. także uwaga 4 w podrozdziale 7.2/, który w swoim przykładzie stosował małe współczynniki zmienności kąta tarcia wewnętrznego.
3. Założenie $\phi_3 = \bar{\phi}_3$ /przykład 4 / spowodowało znaczne zmniejszenie wariancji zmiennych Z_i oraz S_i /za wyjątkiem zmiennych Z_2 i S_2/, a co za tym idzie znaczne zmniejszenie się współczynników zmienności - prawie czterokrotne dla zmiennej Z_4, prawie trzykrotne dla zmiennych Z_3, S_5, Z_5 i S_5 oraz niemal dwukrotnie dla zmiennej Z_1. Ponadto w przypadku zmiennych Z_5 i S_5 znacznie zmniejszyły się nie tylko ich wariancje, ale także wartości oczekiwane. Wynika to z braku pojawiania się

[1/] Numery oznaczają tu poszczególne kryteria stateczności wg. kolejności omawiania w rozdziale 5.

bardzo dużych wartości współczynników nośności granicznej N_D, N_B, N_C /wzory (3.39)/, które szybko rosną wraz ze wzrostem kąta tarcia wewnętrznego.

4. Wpływ zmienności losowej pozostałych parametrów na uzyskane wyniki, jest już znacznie mniejszy i zależy w dużej mierze od miąższości poszczególnych warstw oraz przyjętych współczynników zmienności i geometrii przyczółka /wysokości parcia/.

5. Spośród pozostałych zmiennych stosunkowo największy wpływ ma $\emptyset_1$. Jest to szczególnie widoczne przy prawdopodobieństwach p_1 i p_5 i wiąże się ze zmianami wielkości sił parcia na ścianę boczną przyczółka. Siły te mają największy wpływ na możliwość przesuwu przyczółka, a także powodują zmiany w nachyleniu siły wypadkowej względem podstawy, co z kolei wiąże się z wahaniami nośności granicznej podłoża.

6. Wpływ losowej zmienności $\emptyset_1$ na rozkłady jest najbardziej widoczny w przypadku zmiennej Z_2 /np. Z 19 / oraz S_2 /zmiany analogiczne jak przy Z_2/.

Zwraca uwagę znaczny wzrost kurtozy zmiennej Z_2 w stosunku do pozostałych przykładów. Histogramy pozostałych zmiennych nie wykazują zasadniczych zmian w stosunku do przykładu 1.

Warto zauważyć, że w przykładach 1, 3, 4, 5 zmienna Z_2 miała niewielki ujemny współczynnik skośności, natomiast w przykładzie 2 /$\emptyset_1 = \overline{\emptyset}_1$/ otrzymano skośność dodatnią, większą od wartości bezwzględnych skośności w pozostałych przypadkach.

7. Zmiany spowodowane przyjęciem stałej wartości ϕ_2 /przykład 3/ są mniejsze niż w przypadku $\emptyset_1 = \overline{\emptyset}_1$ /przykład 2/ i to zarówno w wartościach prawdopodobieństw jak i w wartościach parametrów rozkładów, chociaż kąt tarcia $\emptyset_2$ ma większy współczynnik zmienności niż $\emptyset_1$ /por. tablica 7.1/. Jednak powierzchnia ściany bocznej przyczółka poddana parciu I wartswy

jest znacznie większa niż w przypadku II-giej warstwy. Wyjątkowo prawdopodobieństwo p_4 zmienia się znaczniej niż w przykładzie 2. Wynika to z faktu, że znaczna część potencjalnej powierzchni poślizgu przechodzi przez drugą warstwę gruntową /por. rys. 7.2/.

Zmiany rozkładów zmiennych losowych Z_i oraz S_i, $i = 1,...5$; były /w stosunku do przykładu 1/ bardzo niewielkie.

8. Podobnie jak w przypadku ϕ_2, także i wpływ losowości spójności /przykład 5/ jest w tym przypadku niewielki, mimo iż spójność posiadała największy /obok ϕ_2/ współczynnik zmienności / $\nu = 0,2$/.

Przyczyna tego faktu jest analogiczna, tzn. stosunkowo niewielka powierzchnia parcia tej warstwy gruntowej na boczną ścianę przyczółka.

Podobnie jak dla ϕ_2 znaczniejszy wpływ obserwuje się w przypadku prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska.

9. Przyjęcie założenia, że ciężary objętościowe γ_1, γ_2, γ_3 są stałe spowodowało dość znaczne zmiany niezerowych prawdopodobieństw, a także pewne zmiany w parametrach rozkładów poszczególnych zmiennych losowych. Największe zmiany w rozkładach były związane ze zmiennymi Z_2 i S_2. Zmiany S_2 zostały przedstawione na rys. Z 25 /rozkład Z_2 zmienia się podobnie/. Podobnie jak w przykładzie 2 także i tu skośność rozkładu z ujemnej zmieniła się na dodatnią /lecz bardzo niewielką !/. Należy jednak pamiętać, że w tym przykładzie od razu trzy zmienne losowe przyjęto za stałe, co musiało odbić się na współczynnikach zmienności wszystkich zmiennych Z_i oraz S_i /$i = 1,...5$/. Ponadto współczynniki zmienności zmiennych γ_1, γ_2, γ_3 przyjęte w tym przykładzie / $\gamma_1 = 0,1$; $\gamma_2 = 0,1$;

γ_3 = 0,05/ są stosunkowo duże jak na losowe zmiany ciężaru objętościowego /por. podrozdz. 4.2/.

10. Generalnie, oczywisty jest fakt, że przyjęcie którejkolwiek ze zmiennych losowych za stałą, powoduje zmniejszenie się współczynników zmienności wszystkich zmiennych Z_i oraz S_i /wyjątek stanowią Z_2 i S_2 przy zał. $\phi_3 = \bar{\phi}_3$ co było komentowane wyżej/. Można też zauważyć, że w każdym z takich przypadków prawdopodobieństwa utraty stateczności zmniejszają się /lub pozostają stałe w przypadku zerowych/.

11. Uzyskane prawdopodobieństwa "całkowite" p_o potwierdzają wnioski przedstawione w uwagach 6 i 7 poprzedniego podrozdziału, dotyczących wzajemnej korelacji i niemożności zastosowania "prostego modelu szeregowego". Widać jednak /przykład 4 /, że prawdopodobieństwo p_o nie musi być równe największemu z prawdopodobieństw p_i /i = 1, ... 5/.

7.4 Wpływ losowości reakcji od obciążeń pojazdami na prawdopodobieństwo utraty stateczności

Kolejne dwa przykłady związane są z badaniem wpływu losowości reakcji przyczółka na obciążenia od pojazdów przejeżdżających przez most. W przykładzie 7 postąpiono analogicznie jak przy analizie wpływu losowości poszczególnych parametrów gruntowych, czyli zbadano rozkłady warunkowe poszczególnych zmiennych pod warunkiem, że reakcja od obciążenia pojazdami jest stała i równa wartości średniej.
Liczba realizacji wynosiła N = 10000. W przykładzie 8 także zbadano rozkłady warunkowe, lecz pod warunkiem, że reakcja od pojazdów jest stała i równa zeru. Przykład 8 nawiązuje do stwierdzeń podanych w rozdziale 3, iż stateczność podpór mostowych należy sprawdzać w różnych etapach ich budowy oraz różnych

stanach eksploatacji. Nawet w stanie normalnej eksploatacji mostu mogą się zdarzać sytuacje, w których nie występuje obciążenie pojazdami /por. model Murzewskiego i Winiarza opisany w podrozdziale 4.4/, nie mówiąc już o sytuacjach przed oddaniem mostu do ruchu, czy też czasowym zamknięciu tegoż ruchu na moście. Dla masywnego przyczółka sytuacja braku obciążenia pojazdami jest o tyle ważna, że powoduje zmniejszenie składowej pionowej obciążeń, co z jednej strony jest korzystne ze względu na przekroczenie nośności podłoża, z drugiej strony zaś jest niekorzystne ze względu na możliwość przesuwu /mniejsze tarcie mobilicowane pod podstawą/. Tu założono ponadto, że na naziomie także nie występuje obciążenie pojazdami.
W przykładzie 8 związanym z tą sytuacją przyjęto liczbę realizacji N = 5000.

Uzyskane prawdopodobieństwa przedstawiono w tablicy 7.5 w zestawieniu z prawdopodobieństwami z przykładu 1, /wyniki przykładu 7 porównywano z wynikami uzyskanymi w przykładzie 1 dla N = 10000, zaś wyniki przykładu 8 z wynikami z przykładu 1 dla N = 5000/.

Parametry rozkładów otrzymanych w przykładach 7 i 8 w porównaniu z uzyskanymi w przykładzie 1 zestawiono w tablicy 7.6.
Porównanie przykładów 7 i 1 prowadzi do następujących wniosków.
1. Losowość reakcji od obciążenia pojazdami miała jedynie bardzo niewielki wpływ na prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej podłoża. Pozostałe prawdopodobieństwa nie uległy zmianie. Prawdopodobieństwo całkowite p_o jest równe prawdopodobieństwu p_5.
2. Przyjęcie stałej wartości reakcji od ruchu pojazdów spowodowało jedynie niewielkie zmniejszenie wariancji poszczególnych

Tablica 7.5

Prawdopodobieństwa utraty stateczności uzyskane w przykładach 7 oraz 8 w porównaniu z prawdopodobieństwami przykładu 1 /dla N=10000 i N=5000/

Prawdopobieństwo	Przykład			
	7	1/N=10000/	8	1/N=5000/
p_1	0,0376	0,0376	0,0410	0,0376
p_2	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_3	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
p_4	0,0149	0,0149	0,0156	0,0156
p_5	0,0993	0,1002	0,0838	0,0972
p_o	0,0993	0,1002	0,0840	0,0972

Tablica 7.6

Parametry rozkładów w przykładach 7 i 8

Zmienna	Parametr	Przykłady			
		7	1/N=10000/	8	1/N=5000/
1	2	3	4	5	6
z_1	$\bar{z}_1$	151,1463	151,1353	142,8835	151,8905
	σ	84,7830	85,0708	81,0597	84,9225
	ν	0,5609	0,5629	0,5673	0,5591
	δ_1	0,00727	0,03075	-0,008022	0,01955
	δ_2	2,9293	2,9749	2,8997	2,9367
s_1	$\bar{s}_1$	1,4732	1,4731	1,4704	1,4763
	σ	0,2947	0,2948	0,2972	0,2948
	ν	0,2001	0,2001	0,2021	0,1997
	δ_1	0,4826	0,4846	0,4812	0,4625
	δ_2	3,4282	3,4357	3,4717	3.4346

1	2	3	4	5	6
	$\bar{Z}_2$	1541,1459	1541,1634	1478,8085	1543,2079
	σ	139,2547	147,4933	133,9722	144,5748
Z_2	ν	0,09036	0,0957	0,09059	0,09368
	δ_1	-0,3975	-0,03751	-0,3625	-0,1380
	δ_2	3,1411	4,5081	3,0001	3,4228
	$\bar{S}_2$	2,7880	2,7902	2,8622	2,7976
	σ	0,4333	0,4363	0,4660	0,4362
S_2	ν	0,1554	0,1564	0,1628	0,1559
	δ_1	0,4359	0,4494	0,4855	0,4591
	δ_2	3,0467	3,0585	3,1135	3,0631
	$\bar{Z}_3$	1430,27976	1430,4265	1378,6289	1433,9654
	σ	312,5302	315,3922	294,7039	315,6962
Z_3	ν	0,2185	0,2205	0,2138	0,2202
	δ_1	0,2028	0,2496	0,2120	0,2544
	δ_2	2,8814	2,9993	2,8977	2,9682
	$\bar{Z}_4$	3674,1580	3673,8997	3515,8608	3682,535
	σ	1747,3715	1752,4487	1671,1741	1754,3838
Z_4	ν	0,4756	0,4770	0,4753	0,4764
	δ_1	0,2522	0,2710	0,2349	0,2586
	δ_2	2,8608	2,9073	2,8427	2,8913
	$\bar{S}_4$	1,4466	1,4465	1,4429	1,4479
	σ	0,2168	0,2168	0,2149	0,2169
S_4	ν	0,1499	0,1499	0,1490	0,1498
	δ_1	0,3125	0,3137	0,2936	0,2941
	δ_2	2,9423	2,9453	2,9214	2,9195
	$\bar{Z}_5$	2450,64221	2452,5963	2605,9326	2470,5160
	σ	3082,1300	3085,4197	3182,8721	3091,3534
Z_5	ν	1,2577	1,2580	1,2214	1,2513
	δ_1	2,4913	2,4942	2,5234	2,4954

1	2	3	4	5	6
Z_5	δ_2	11,6573	11,7074	12,0226	11,7769
S_5	$\bar{S}_5$	3,4557	3,4642	3,7687	3,4817
	σ	3,0885	3,1028	3,3817	3,1064
	ν	0,8937	0,8957	0,8973	0,8922
	δ_1	2,4913	2,5075	2,5234	2,5048
	δ_2	11,6573	11,8387	12,0226	11,8836

zmiennych losowych Z_i oraz S_i. Pozostałe parametry uległy jedynie minimalnym zmianom.

Także histogramy poszczególnych zmiennych uległy jedynie nieznacznym zmianom w stosunku do przykładu 1.

3. Warto zauważyć, że te nieznaczne zmiany mają miejsce przy bardzo dużym współczynniku zmienności reakcji od obciążenia pojazdami /ν = 0,78/. Małe zmiany związane są z proporcjami występujących tu obciążeń, gdyż średnia reakcja od ruchu pojazdów stanowi zaledwie ok. 6 % obciążenia pochodzącego łącznie od ciężaru przyczółka i reakcji od obciążenia belką przęsłową.
W przypadku krótszej belki przęsłowej i lżejszego przyczółka proporcje te mogłyby się zmienić, lecz wtedy także zmniejsza się znacznie reakcja od ruchu pojazdów /por. badania Takaoki przedstawione w podrozdziale 4.4/. Można zatem przypuszczać, że w przypadku masywnego przyczółka mostu drogowego losowe wahania reakcji od ruchu pojazdów / w czasie normalnego odbywania się tego ruchu/ nie mają dużego wpływu na prawdopodobieństwo utraty stateczności przez ten przyczółek.

W związku z zestawieniem wyników przykładów 8 i 1 nasuwają się następujące uwagi:

4. Zgodnie z oczekiwaniami w sytuacji, gdy na moście nie występuje obciążenie pojazdami prawdopodobieństwo przesuwu nieco

wzrasta / o ok. 9 %/, mimo iż nie występuje pozioma siła pochodząca od hamowania pojazdów. Natomiast prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej /tak jak przypuszczano/ zmalało o ok. 15 %.

5. Obserwuje się oczywiście pewne zmiany średnich wartości zmiennych Z_i oraz S_i.

W przypadku zmiennych Z_5 i S_5 oraz zmiennej S_2 następuje wzrost wartości średnich, zaś średnie pozostałych zmiennych zmalały w stosunku do przykładu 1.

6. Pewnym zmianom uległy też rozkłady /w przykładzie 8 / poszczególnych zmiennych, przy czym najwyraźniejsze różnice / w stosunku do przykładu 1 /zaobserwowano w przypadku zmiennych Z_2, Z_3 oraz S_5 co przedstawiono na rys. Z 26, Z 27, Z 28 w załączniku nr 1.

7. W przykładzie 8 prawdopodobieństwa p_0 i p_5 różnią się nieznacznie. Oznacza to, że w tym przypadku $p_0 > \max\limits_i \{p_i; i=1,...5\}$ /por. uwaga 7 w podrozdziale 7.2/.

7.5 Pewne zagadnienia związane z wpływem typu rozkładów parametrów gruntowych na prawdopodobieństwo utraty stateczności

Jest rzeczą jasną, że wybór typów wyjściowych rozkładów parametrów gruntowych rzutuje na otrzymane prawdopodobieństwa utraty stateczności w poszczególnych przypadkach.

Tutaj zbadano sytuację polegającą na zastąpieniu rozkładów wielokątnych, przyjętych jako rozkłady poszczególnych parametrów gruntowych, przez ich szczególnie prosty przypadek tj. symetryczne rozkłady trójkątne. Zgodnie z omówieniem w rozdziale 4 rozkłady trójkątne symetryczne charakteryzują się możliwością bardzo prostego określenia parametrów rozkładu i znalezienia funkcji gęstości na podstawie dwóch pierwszych momentów statystycznych /metoda momentów i wzory (4.14) i (4.15)/. Gdyby więc rezultaty uzyskane przy użyciu symetrycznych rozkładów trójkątnych były bardzo zbliżone do wyników z przykładu 1 można by w wielu sytuacjach upraszczać użycie rozkładów wielokątnych do tego szczególnego ich przypadku.

W związku z tym w przykładzie 1 zastąpiono użyte rozkłady parametrów gruntowych przez rozkłady trójkątne symetryczne o takich samych średnich i wariancjach. Ich funkcje gęstości uzyskuje się natychmiast ze wzoru (4.10) po podstawieniu (4.14) i (4.15). Wykresy tych funkcji przedstawiono wraz z wykresami odpowiednich gęstości z przykładu 1 - rys. Z 1 - Z 7 w załączniku /gęstości trójkątne symetryczne - linią przerywaną/. Przeprowadzono obliczenia dla liczby realizacji N = 5000 ;, przykład nr 9. Pozostałe dane w stosunku do przykładu 1 pozostały niezmienione. Otrzymane prawdopodobieństwa zestawiono w tablicy 7.7., porównując je z prawdopodobieństwami uzyskanymi w przykładzie 1 /dla N = 5000/.

Tablica 7.7

Prawdopodobieństwa utraty stateczności otrzymane w przykładzie 9

Prawdopodobieństwa	Przykład	
	9	1/N = 5000/
p_1	0,0362	0,0376
p_2	0,0000	0,0000
p_3	0,0000	0,0000
p_4	0,0050	0,0156
p_5	0,1094	0,0972

W tym przykładzie obliczenia parametrów rozkładów oraz wyznaczenie samych rozkładów przeprowadzono jedynie dla zmiennych Z_5 i S_5.

Tablica 7.8

Parametry rozkładów Z_5 i S_5 w przykładzie 9

Zmienna	Parametr	Przykłady	
		9	1/N = 5000/
Z_5	$\bar{Z}_1$	2459,5283	2470,5160
	σ	2999,8923	3091,3534
	ν	1,2197	1,2513
	δ_1	2,3075	2,4954
	δ_2	10,3848	11,7769
S_5	S_5	3,4708	3,4817
	σ	3,0146	3,1064
	ν	0,8686	0,8922
	δ_1	2,3147	2,5048
	δ_2	10,4623	11,8836

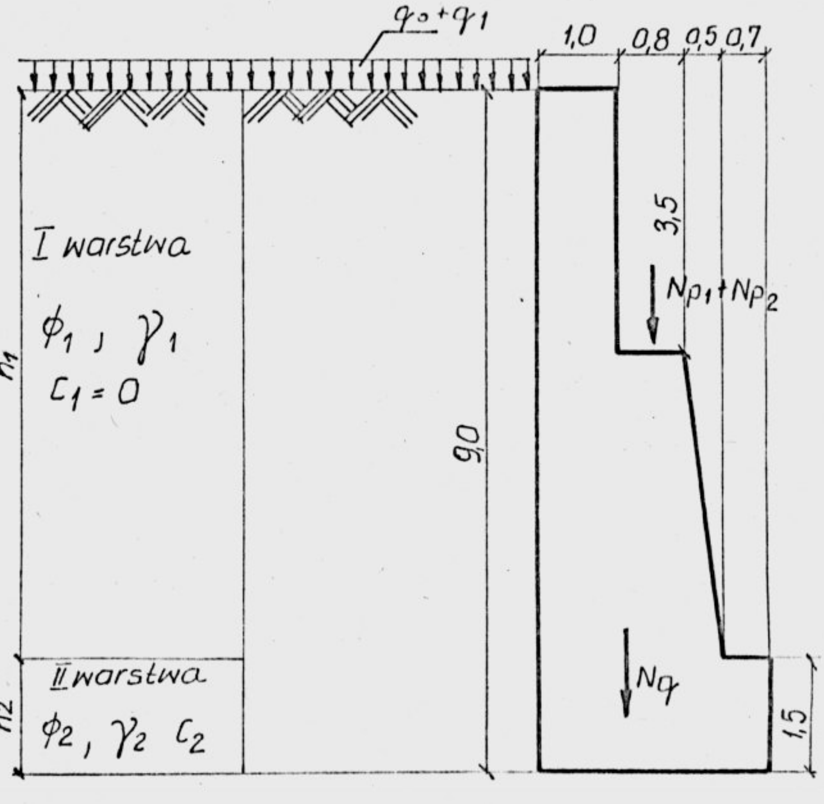
Porównanie rozkładów Z_5 z przykładu 9 oraz przykładu 1 ilustruje rys. Z 29 /różnice pomiędzy rozkładami zmiennych S_5 z tych przykładów były jeszcze mniejsze/.

Na podstawie niniejszego przykładu nie dało się jednocześnie odpowiedzieć na pytanie czy można rozkłady wielokątne zastępować przez trójkątne symetryczne. Co prawda prawdopodobieństwo przesuwu zmieniło się nieznacznie, a prawdopodobieństwa p_2 i p_3 pozostały zerowe, to jednak w przypadku p_5 zmiana jest już dość znaczna /jakkolwiek rozkłady Z_5 i S_5 zmieniają się w stosunku do przykładu 1 niewiele/, a w przypadku prawdopodobieństwa wystąpienie osuwiska już bardzo znaczne /wydaje się, że prawdopodobieństwo p_4 jest szczególnie "wrażliwe" na wszelkiego rodzaju "zaburzenia"/. Należy jednak zauważyć, że ta ostatnia różnica ma miejsce przy małym prawdopodobieństwie.

Można by więc sądzić, że w sytuacji gdy nie jest potrzebna zbyt duża dokładność rezultatów użycie tych prostych rozkładów może okazać się uzasadnione. Oczywiście może się zdarzyć, że rozkład trójkątny symetryczny z bardzo dużą dokładnością przybliża rozkład danego parametru gruntowego i wtedy nie ma żadnych powodów do korzystania z bardziej złożonych rozkładów.

W niniejszym podrozdziale przytacza się jeszcze dwa przykłady /nr 10 i nr 11/ związane z porównaniem wyników uzyskanych przy użyciu rozkładów trójkątnych z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu rozkładów normalnych. Przykład ten miał przede wszystkim odpowiedzieć na pytanie czy symulacja z użyciem rozkładów wielokątnych jest szybsza od symulacji korzystającej z rozkładów normalnych.

Przyczółek rozpatrywany w przykładach 10 i 11 przedstawia rys. 7.4. Przykłady 10 i 11 ograniczały się jedynie do badania możliwości przesuwu przyczółka.



Rys. 7.4 Przyczółek masywny analizowany w przykładach 10 i 11

Miąższość I warstwy gruntowej: $h_1 = 7{,}5$ m

Miąższość II warstwy gruntowej: $h_2 = 1{,}5$ m

Ciężar przyczółka $N_q = 388{,}8 \frac{kN}{m}$

Zmienne losowe ϕ_1 i γ_1 w warstwie pierwszej mają rozkłady trójkątne symetryczne, przy czym wartości średnie i odchylenia standardowe wynoszą odpowiednio:

$$\bar{\phi}_1 = 30^o \; ; \qquad \sigma_{\phi_1} = 3^o \; ; \qquad \bar{\gamma}_1 = 17 \frac{kN}{m^3} \; ; \qquad \sigma_{\gamma_1} = 1{,}7 \frac{kN}{m^3}$$

Drugą warstwę stanowi grunt, którego rozkłady parametrów analizowano w rozdziale 4 (tablice 4.2 i Z.3.1-Z.3.3) i przyjęto dla nich rozkłady trójkątne asymetryczne /symetryczny dla ciężaru/, których gęstości przedstawiają rys. 4.3, 4.4 i 4.5, zaś średnie, odchylenie standardowe i współczynniki skośności podaje tablica 4.2.

W warstwie trzeciej /pod podstawą przyczółka/ przyjęto dla kąta tarcia wewnętrznego ϕ_3 rozkład trójkątny asymetryczny o parametrach:

$$\bar{\phi}_3 = 31^o \; ; \quad \sigma_1 = 4{,}14 \; ; \quad \delta_1 = -0{,}278 \quad \text{/wsp. skośności/.}$$

Określanie rozkładu ciężaru objętościowego γ_3 było zbędne, ze względu na fakt, że rozpatrywano jedynie przesuw przyczółka.

Reakcję od ruchu pojazdów przyjęto taką jak w przykładzie 1 /rozkład Frecheta nieobcięty/.

Reakcja od obciążenia belką przęsła $N_{p2} = 400 \frac{kN}{m}$

Długość przęsła L = 50 m, obciążenie stałe $q_o = 1{,}5 \frac{kN}{m^2}$

/q_1 - por. wzór (4.4)/

współczynnik $k_1 = \frac{2}{3}$ /por. wzór (3.17)/.

W przykładzie 11 trójkątne rozkłady parametrów gruntowych zamieniono na obcięte rozkłady normalne o tych samych wartościach oczekiwanych i wariancjach. Obcięcie obejmowało wartości ujemne.

Do generowania tych rozkładów użyto generatora opartego na centralnym twierdzeniu granicznym /por. uwagi w podrozdziale 6.1/. Rozkład reakcji od ruchu pojazdów pozostał niezmieniony. Liczba realizacji w obu przykładach wynosiła N = 10000.

W wyniku obliczeń uzyskano następujące wartości prawdopodobieństwa przesuwu przyczółka:

W przykładzie 10 : $p_1 = 0,0204$

W przykładzie 11 : $p_1 = 0,0343$

W tablicy 7.9 podano parametry rozkładów uzyskanych w przykładach 10 i 11.

Tablica 7.9

Parametry zmiennej Z_1 w przykładach 10 i 11

Parametr	Przykłady	
	10	11
$\bar{Z}_1$	185,3065	186,3630
σ	98,8293	102,028
ν	0,5333	0,5475
δ_1	0,2031	0,003177
δ_2	2,7166	2,9187

Uzyskane histogramy przedstawiono na rys. Z 30 w zestawieniu z gęstością normalną o średniej i wariancji jak w przykładzie 11.

Uzyskane prawdopodobieństwa różnią się stosunkowo znacznie. Zmienna Z_1 z przykładu 11 ma także nieco większy współczynnik zmienności. Test normalności przedstawiony w podrozdziale 7.2 orzeka, że nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy, że rozkład Z_1 w przykładzie 11 jest normalny /$Q_1 = 0,1297 < 2,33$ i $Q_2 = 1,6595 < 2,33$/. Interesujący jest jednak fakt, że histogram zm. Z_1 w przykładzie 11 posiada trzy "wierzchołki". Natomiast histogram w przykładzie 10 jest jednomodalny i chociaż test normalności daje tu wynik negatywny, to podobieństwo kształtu do rozkładu normalnego jest znaczne.

Istotnym faktem jest to, że czas pracy maszyny niezbędny do wykonania zadania przy użyciu rozkładów trójkątnych /przykład 10/ był o około 40 % krótszy niż czas pracy w przypadku stosowania rozkł. normalnych /przykład 11/ -/por. uwagi w podrozdziale 6.1/. Ma to bardzo duże znaczenie z punktu widzenia kosztów pracy komputera.
Przykład 10 został opisany szczegółowo w pracy [26].

7.6 Inne przykłady

W podrozdziale 7.4 był już podany jeden przykład związany ze sprawdzeniem stateczności przyczółka w różnych stadiach jego budowy czy eksploatacji /przykład 8/. Tu przytoczony zostanie jeszcze jeden przykład tego typu /przykład 12/. Zakłada się mianowicie, że w sytuacji z przykładu 1 przyczółek i nasyp są wybudowane, zaś przęsło znajduje się w trakcie budowy. Ostatnie założenie jest realizowane w ten sposób, że zamiast pełnej reakcji od obciążenia belką przyjmuje się reakcję o wielkości $Np_2 = 290 \frac{kN}{m}$. Oczywiście na moście nie ma ruchu pojazdów, ale zakłada się losowy ruch pojazdów na naziomie w sąsiedztwie przyczółka /wg schematu podanego w podrozdziale 3.2/.

W przykładzie 12 liczba realizacji wynosiła $N = 5000$. Otrzymane prawdopodobieństwa porównano z prawdopodobieństwami uzyskanymi w przykładzie 1/dla $N = 5000$/ i zestawiono w tablicy 7.10.
Wszystkie niezerowe prawdopodobieństwa uległy tu zwiększeniu. W pierwszej chwili może wydać się dziwne, że wzrosło także prawdopodobieństwo p_5, mimo iż znacznie zmalała pionowa składowa obciążeń. Jednak ten znaczny spadek wartości obciążenia

Tablica 7.10

Prawdopodobieństwa utraty stateczności otrzymane w przykładzie 12

Prawdopodobieństwa	Przykład	
	12 /N = 5000/	1/N = 5000/
p_1	0,2430	0,0376
p_2	0,0000	0,0000
p_3	0,0000	0,0000
p_4	0,0292	0,0156
p_5	0,1788	0,0972
p_o	0,2518	0,0972

powoduje wzrost kąta nachylenia wypadkowej wszystkich obciążeń do pionu, a to z kolei pociąga za sobą spadek wartości odpowiednich współczynników i_B oraz i_D /wzory (3.40)/, co powoduje większe prawdopodobieństwo wypierania gruntu spod podstawy przyczółka. Jasne jest, że tak duże prawdopodobieństwa utraty stateczności są niedopuszczalne w praktyce. Jeśli więc tak zaprojektowany przyczółek miałby zostać dopuszczony do wykonania, to należałoby zalecić, aby nasyp nie był całkowicie wykonywany aż do momentu ułożenia belki przęsłowej.

Warto tu jeszcze zwrócić uwagę, że całkowite prawdopodobieństwo utraty stateczności p_o odbiega tu dość znacznie od największego z prawdopodobieństw p_i / w tym przypadku od p_1/. W tym przykładzie jest:

$$\prod_{i=1}^{5} \left(1 - p_i\right) = 0,6035 < 1 - p_o = 0,7484 < \min\left\{ \left(1 - p_i\right);\ i = 1,\dots 5\right\} = 0,757$$

Jest to potwierdzeniem faktów opisanych w uwadze 3 w podrozdziale 7.2. Uzyskane w przykładzie charakterystyki rozkładów przedstawia tablica 7.11 / w zestawieniu z odpowiednimi wielkościami z przykł. 1 /.

Tablica 7.11

Charakterystyki zmiennych losowych Z_i oraz S_i uzyskane w przykładzie 12

Parametr	Zmienna	Przykłady 12	Przykłady 1/N=5000/	Zmienna	Przykłady 12	Przykłady 1/N=5000/
1	2	3	4	5	6	7
$\bar{Z}_1, \bar{S}_1$		50,2479	151,8905		1,1734	1,4763
σ		70,6717	84,9225		0,2336	0,2948
ν	Z_1	1,4065	0,5591	S_1	0,1991	0,1997
δ_1		-0,04998	0,01955		0,4834	0,4625
δ_2		2,9183	2,9367		3,4909	3,4346
$\bar{Z}_2, \bar{S}_2$		984,5372	1543,2079		2,2006	2,7976
σ		140,5838	144,5748		0,3596	0,4362
ν	Z_2	0,1428	0,09368	S_2	0,1634	0,1559
δ_1		-0,4127	-0,1380		0,4658	0,4591
δ_2		3,1663	3,4228		3,1005	3,0631
$\bar{Z}_3, \bar{Z}_4$		1015,907	1433,9654		2557,9525	3682,535
σ		252,4437	315,6962		1403,9179	1754,3838
ν	Z_3	0,2485	0,2202	Z_4	0,5488	0,4764
δ_1		0,1645	0,2544		0,2155	0,2586
δ_2		2,9120	2,9682		2,8451	2,8913
$\bar{S}_4, \bar{Z}_5$		1,3425	1,4479		1411,0317	2470,5160
σ		0,1917	0,2169		2052,5439	3091,3534
ν	S_4	0,1428	0,1498	Z_5	1,4546	1,2513
δ_1		0,2292	0,2941		2,9166	2,4954
δ_2		2,5466	2,9195		16,2372	11,7769

1	2	3	4
$\bar{S}_5$		2,9037	3,4817
σ		2,7692	3,1064
ν	S_5	0,9537	0,8922
δ_1		2,9166	2,5048
δ_2		16,2372	11,8836

Obserwuje się znaczne zmniejszenie się wartości średnich wszystkich zmiennych w stosunku do przykładu 1. Nieco zmniejszają się także odchylenia standardowe, lecz współczynniki zmienności są na ogół większe w przykładzie 12 /wyjątek stanowi zmienna S_4/, a w przypadku Z_1 współczynnik zmienności wzrósł ok. 2,5 raza w stosunku do przykładu 1.
Współczynniki skośności i kurtozy są na ogół zbliżone, za wyjątkiem zmiennych Z_5 oraz S_5. Ogólny kształt gęstości rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych zmiennych losowych nie uległ zmianie. Widoczne są natomiast przesunięcia histogramów w lewo. Ilustrują to podane w załączniku histogramy zmiennych: Z_1 /rys. Z 31/, Z_3 /rys. Z 32/ oraz Z_5 /rys. : 33/ - rozkład zmiennej S_5 jest zbliżony do zmiennej S_5 z przykładu 1.

Kolejny przykład /przykład nr 13/ przedstawia taką sytuację, w której sprawdzanie wszystkich pięciu kryteriów stateczności okazuje się zbędne. Tu rozważono przyczółek posadowiony na quasi-nieodkształcalnym podłożu skalnym. W związku z tym przyjęto, że konieczne jest sprawdzenie jedynie dwóch kryteriów - stateczności na przesuw oraz obrót wokół najbardziej obciążonej krawędzi.
Rozpatrywany przyczółek był identyczny jak w przykładzie 1 /rys.7.1/. Również parametry oraz miąższości dwóch pierwszych warstw pozosta-

ły bez zmian, trzecią natomiast stanowi nieodkształcalne podłoże skalne. Założono ponadto, że:

- Naziom za przyczółkiem jest wybudowany;
- Belka przęsłowa nie jest jeszcze umieszczona, a więc brak reakcji od obciążenia belką;
- Istnieje ruch pojazdów na naziomie;
- Między podstawą przyczółka a skałą znajduje się warstwa betonu wyrównawczego. Przyjmuje się, że ścięcie przy przesuwie może nastąpić na granicy tego betonu i podstawy przyczółka.

Założono, że współczynnik tarcia betonu o beton f_t jest zmienną losową o rozkładzie trójkątnym symetrycznym ze średnią $\bar{f}_t = 1,45$ i współczynnikiem zmienności $\nu = 0,1$, co daje zasięg zmienności f_t od ok. 1,10 do ok. 1,8 zgodnie z zaleceniami podanymi w normie [101]. Liczba reakcji w przykładzie 13 wynosiła N = 5000.

W wyniku obliczeń uzyskano tu następujące prawdopodobieństwa:

Prawdopodobieństwo przesuwu $p_1 = 0,0000$

Prawdopodobieństwo obrotu wokół punktu A $p_2 = 0,0200$

Charakterystyki zmiennych losowych Z_1, S_1, Z_2 i S_2 podaje tablica 7.12

Tak więc prawdopodobieństwo obrotu wokół punktu A jest tutaj niezerowe, natomiast prawdopodobieństwo przesuwu jest równe zeru. Warto zwrócić uwagę, że podobnie w innych przykładach /za wyjątkiem przykładu 2 i przykładu 6 / Z_2 wykonuje ujemną asymetrię /lewostronną/. Histogramy zmiennych losowych Z_2 i S_2 przedstawiono na rys. Z 34 i Z 35 w załączniku nr 1. Rozkłady zmiennych Z_1 i S_1 wykazują podobnie jak poprzednio duże podobieństwo do rozkładów normalnych.

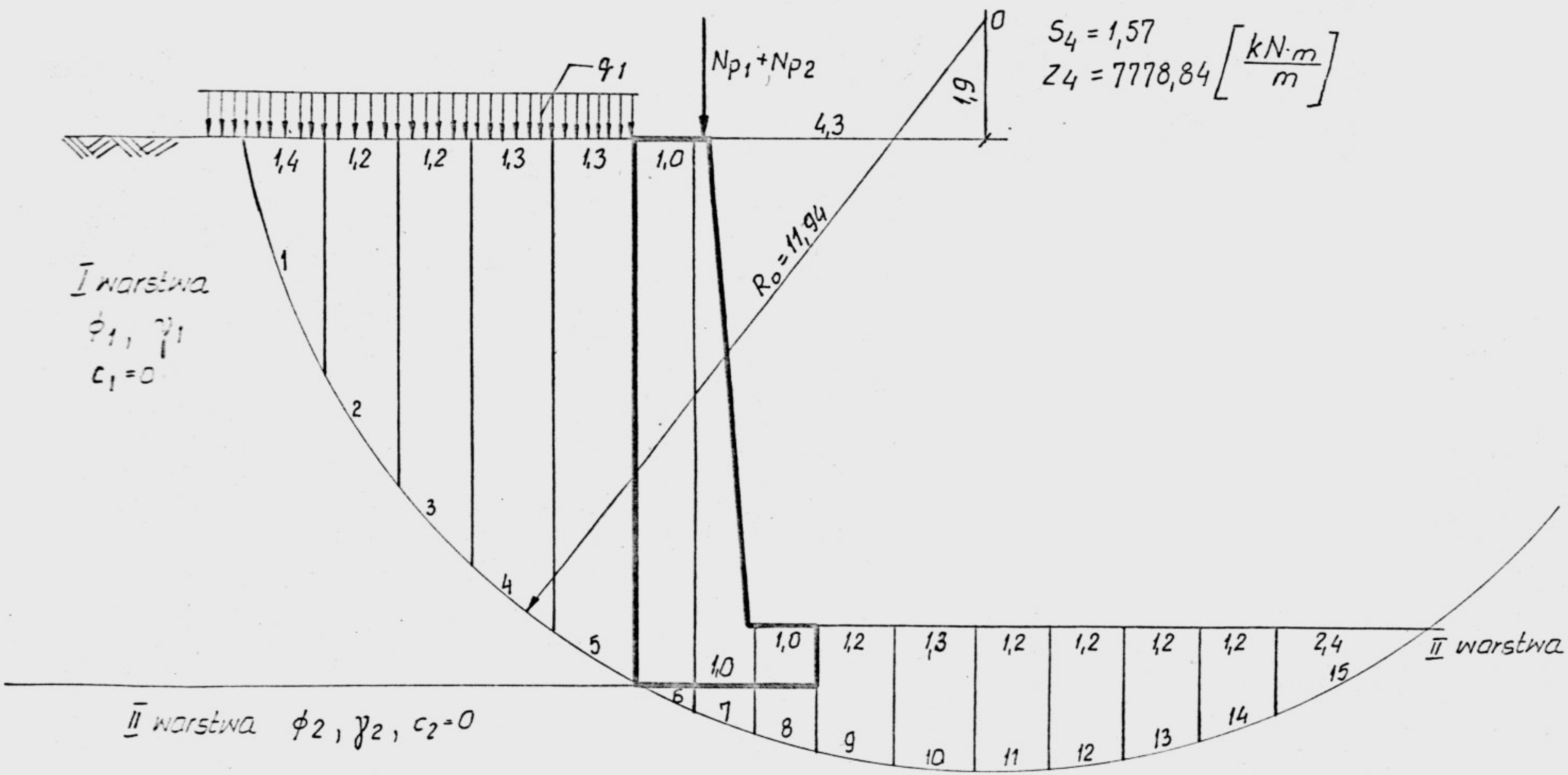
Tablica 7.12

Charakterystyki zmiennych losowych w przykładzie 13

Parametr	Zmienna	Przykład 13	Zmienna	Przykład 13
$\bar{z}_1, \bar{s}_1$		393,4596		2,2280
σ		81,2081		0,3702
v	z_1	0,2064	s_1	0,1661
δ_1		-0,06329		0,4641
δ_2		2,7379		3,3193
$\bar{z}_2, \bar{s}_2$		317,5372		1,4053
σ		140,5838		0,2301
v	z_2	0,4427	s_2	0,1637
δ_1		-0,4127		0,4682
δ_2		3,1663		3,1072

Ostatnim z serii przedstawionych w tym rozdziale przykładów będzie przykład /nr 14/ nawiązujący do omawianych w rozdziale 5 przykładów stosowania metody uproszczonej. Mianowicie rozpatrywany tam przyczółek, scharakteryzowany w podrozdziale 5.1 , poddano obliczeniom symulacyjnym. Założono, że zmienne losowe charakteryzujące parametry gruntowe mają symetryczne rozkłady trójkątne o wartościach średnich i odchyleniach standardowych takich jak w 5.1, natomiast reakcja od ruchu pojazdów Np_1 - rozkład Frecheta o średniej i odchyleniu standardowym jak w 5.1. Dodatkowe dane niezbędne przy badaniu prawdopodobieństwa powstania osuwiska podano na rysunku 7.5.

Prawdopodobieństwa utraty stateczności w przypadku przesuwu i obrotu wokół punktu A zestawiono z rezultatami uzyskanymi w rozdziale 5. Zestawienia te zawarte są w tablicy 7.13.



Rys. 7.5 Dane do obliczania prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska - przykład 14

Wartości kątów $_{i}$ /por. wzory (3.30) i (3.31)/ w radianach

$\alpha_1 = 1,2391837$; $\alpha_2 = 0,99484$; $\alpha_3 = 0,83776$; $\alpha_4 = 0,68941$; $\alpha_5 = 0,55851$; $\alpha_6 = 0,44506$; $\alpha_7 = 0,34907$;
$\alpha_8 = 0,27053$; $\alpha_9 = 0,16581$; $\alpha_{10} = 0,06981$; $\alpha_{11} = 0,05236$; $\alpha_{12} = 0,15708$; $\alpha_{13} = 0,2618$; $\alpha_{14} = 0,38397$;
$\alpha_{15} = 0,5236$

Tablica 7.13

Prawdopodobieństwa utraty stateczności przez przesuw i obrót wokół punktu A z przykł. 14 zestawione z wynikami z rozdziału 5

Prawdopodobieństwo	Przykłady							
	14	A	B	C	D	E	F	G
p_1	0,0004	0,0013	0,0008	0,0006	0,0107	0,0015	0,0002	0,0007
p_2	0,0000	0,0149	0,0150	0,0071	0,0060	-	-	-

W przypadku przesuwu uzyskane drogą symulacyjną prawdopodobieństwo jest najbliższe prawdopodobieństwom z przykładów C /rozkład logarytmonormalny i normalny/ oraz F /rozkład Frecheta i normalny/. W przypadku obrotu zerowe prawdopodobieństwo z przykładu 14 najbliższe jest prawdopodobieństwu z przykładu D, gdzie stosowano rozkład Frecheta i normalny - por. tablica 5.1.

W przykładzie 14 dalsze uzyskane prawdopodobieństwa są następujące:

$p_3 = 0,012$; $p_4 = 0,0000$

$p_5 = 0,4132$; $p_o = 0,4132$

Interesujący jest fakt, że przy tak małym prawdopodobieństwie przesunięcia przyczółka prawdopodobieństwo przekroczenia nośności granicznej jest aż tak duże.

Charakterystyki poszczególnych zmiennych losowych z przykładu 14 przedstawia tablica 7.14.

Rozkłady zmiennych Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, S_1, S_2 i S_4 są zbliżone kształtem do rozkładów normalnych - przykładowo podano rozkład zmiennej Z_4 /rys. Z 37/ w porównaniu z gęstością normalną o średniej i wariancji takich jak dla Z_4.

Tablica 7.14

Charakterystyki zmiennych losowych w przykładzie 14

Parametr	Zmienna	Przykład 14	Zmienna	Przykład 14
1	2	3	4	5
$\bar{Z}_1, \bar{S}_1$		218,8867		1,6511
σ		73,9185		0,2735
ν	Z_1	0,3377	S_1	0,1656
δ_1		0,01252		0,4215
δ_2		2,7912		3,0382
$\bar{Z}_2, \bar{S}_2$		604,9822		1,4306
σ		164,7947		0,16015
ν	Z_2	0,2724	S_2	0,1120
δ_1		-0,2579		0,2332
δ_2		2,5479		2,5416
$\bar{Z}_3, \bar{S}_3$		696,4555		1,9770
σ		257,2745		0,4905
ν	Z_3	0,3694	S_3	0,2481
δ_1		0,02876		0,6606
δ_2		2,8063		3,3984
$\bar{Z}_4, \bar{S}_4$		7273,4490		1,5816
σ		1822,1129		0,1457
ν	Z_4	0,2505	S_4	0,09212
δ_1		0,2257		0,2191
δ_2		2,6716		2,6692
$\bar{Z}_5, \bar{S}_5$		581,6039		1,5624
σ		1359,5353		1,3140
ν	Z_5	2,3376	S_5	0,8410
δ_1		2,2472		2,2450
δ_2		10,3237		10,3054

W przypadku obrotu wokół pow. cylindrycznej średni moment M_o nie był bliski zeru /prawdopodobieństwo ujemnego momentu było w tym przykładzie równe zeru $p_M = 0$/ w związku z tym zjawisko "braku stabilności" rozkładu S_3 nie wystąpiło /por. 7.2/. Otrzymany rozkład nie wykazuje już tak wielkiej asymetrii i kurtozy jak to miało miejsce w przykładzie 1. Jednak widoczna skośność prawostronna /dodatnia/ utrzymuje się /por. rys. Z 36/. Zmienne losowe Z_5 i S_5 posiadają rozkłady o kształtach zbliżonych do analogicznych zmiennych z przykładu 1, co łatwo zauważyć porównując rysunki Z 16 z Z 38 oraz Z 17 z Z 39.

Podsumowując powyższy rozdział należy stwierdzić, że przeprowadzone obliczenia potwierdziły pełną przydatność metody symulacyjnej do analizy stateczności masywnego przyczółka mostu drogowego. Skonstruowany program daje szerokie możliwości analizy, gdyż oprócz poszukiwanych prawdopodobieństw utraty stateczności otrzymuje się także rozkłady prawdopodobieństwa poszczególnych zapasów stateczności i ich charakterystyki momentowe /do czwartego momentu centralnego włącznie/. Potwierdziła się także oszczędność czasu pracy maszyny wynikająca z zastosowania rozkładów wielokątnych. Wydaje się, że w zasadzie cele przykładów obliczeniowych postawione w 7.1 zostały osiągnięte, jakkolwiek nie wszędzie udało się uzyskać jednoznaczne odpowiedzi /np. problem zastępowania rozkładów wielokątnych przez trójkątne symetryczne/.

Dodatkowym efektem przedstawionych tu przykładów są wnioski poznawcze /sformułowane w poszczególnych podrozdziałach/ dotyczące rozkładów miar stateczności ich charakterystyk momentowych oraz konkluzje związane z rozpatrywaniem zagadnienia w świetle istniejących modeli teorii niezawodności.

8. PRÓBA OCENY DOKŁADNOŚCI PRZEPROWADZONYCH BADAŃ SYMULACYJNYCH

Istnieją dwa podstawowe problemy związane z symulacyjnym obliczaniem prawdopodobieństw wystąpienia awarii konstrukcji. Pierwszym z nich jest problem polegający na znalezieniu takiej liczby realizacji w procesie symulacyjnym, aby poszukiwane prawdopodobieństwa zostały obliczone z zadowalającą dokładnością. Drugi polega na tym, że stosowane generatory nie dają w istocie liczb losowych, a jedynie liczby pseudolosowe. Nie istnieją bowiem komputerowe generatory pozwalające w idealny sposób generować liczby losowe o rozkładzie jednostajnym na $[0,1]$, a co za tym idzie także i inne rozkłady /problem ten szerzej omówiono w [142]/. W rozdziale niniejszym podane zostaną pewne propozycje i uwagi związane z obydwoma problemami w kontekście przedstawionych w rozdziale poprzednim wyników obliczeń.

8.1. Oszacowanie niezbędnej liczby realizacji

Przy szacowaniu niezbędnej liczby realizacji zakładać się będzie, że generator jest idealnie losowy, tzn., że generowanie kolejnych liczb losowych z określonego rozkładu można uznać za statystyczną próbę prostą z tego ściśle określonego rozkładu. Prawdopodobieństwo zdarzenia $\{Z<0\}$ jest estymowane przez następujący iloraz :

$$P\{Z<0\}\approx\frac{n}{N} \tag{8.1}$$

gdzie n liczba "wylosowanych" wartości Z mniejszych od zera, zaś N - liczba realizacji. W związku z poczynionym powyżej założeniem o próbie prostej kolejne wylosowane wartości Z_- można uważać za wartości niezależnych zmiennych losowych o zadanym z góry rozkładzie. Stąd :

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{(-\infty,0)} \left(Z_k(\omega)\right) \tag{8.2}$$

$$\mathbb{1}_{(-\infty,0)}(y) = \begin{cases} 1 \text{ dla } Y < 0 \\ 0 \text{ dla } Y \geqslant 0 \end{cases} \tag{8.3}$$

gdzie $\omega \in \Omega$ - przestrzeń probabilistyczna ,

$\left\{Z_k\right\}_{k=1}^{N}$ - ciąg niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie takim jak rozkład Z .

Z mocnego prawa wielkich liczb Kołmogorowa /por.np. [34] / wynika, że :

$$\frac{n}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{(-\infty,0)} \left(Z_k(\omega)\right) \xrightarrow{N\to\infty} E\left(\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z(\omega)\right)\right) \tag{8.4}$$

z prawdopodobieństwem 1 . Ale :

$$E\left(\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z(\omega)\right)\right) = 1 \cdot P\left\{Z(\omega) \in (-\infty;0)\right\} = P\left\{Z < 0\right\} \tag{8.5}$$

Ostatecznie więc :

$$\frac{n}{N} \xrightarrow{N\to\infty} P\left\{Z < 0\right\} \tag{8.6}$$

Należy teraz dla zadanego poziomu dokładności ε oszacować liczbę N tak, aby było :

$$\left| \frac{n}{N} - P\left\{Z < 0\right\} \right| < \varepsilon \qquad \text{z prawdop. 1} \tag{8.7}$$

Niestety rozpatrywanie zagadnienia w postaci /8.7/ jest niemożliwe, ze względu na trudności we wskazaniu explicite zbioru o prawdopodobieństwie 1, na którym zachodzi zbieżność /8.4/ Zagadnienie można rozpatrzyć w nieco osłabionej formie /zbieżność według prawdopodobieństwa/

$$P\left\{ \left| \frac{n}{N} - P\left\{ Z < 0\right\} \right| \geq \varepsilon \right\} < \delta \tag{8.8}$$

gdzie δ jest z góry zadaną małą liczbą /chodzi o to, aby nierówność przeciwna zachodziła z dużym prawdopodobieństwem/.

Najprostszą drogą oszacowania lewej strony /8.8/ jest zastosowanie popularnej nierówności Czebyszewa. Jednak prowadzi to do zbyt grubego oszacowania liczby N. Tu proponuje się wykorzystanie nierówności Kołmogorowa /por. np. [105] /, z której można otrzymać następujący fakt /por. [105] str. 58 § 11.4/:

$$\sum_{j=1}^{\infty} P\left(A_j(\varepsilon)\right) \leq 4 \cdot \varepsilon^{-2} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{\sigma_1^2 \ldots + \sigma_{2^j}^2}{2^{2j}} \right) \tag{8.9}$$

gdzie

$$A_j(\varepsilon) = \left\{ \left| \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z_k(\omega)\right) - P\left\{Z < 0\right\} \right| \geq \varepsilon \ \text{dla przynajmniej jednego n z przedziału} \left(2^{j-1}; 2^j\right] \right\} \tag{8.10}$$

oraz

$$\sigma_j^2 = \mathrm{Var}\left[\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z_j(\omega)\right)\right] \tag{8.11}$$

Jeżeli szereg po prawej stronie nierówności /8.9/ jest zbieżny, to dla dowolnie małego ustalonego $\delta > 0$, istnieje takie j_o, że reszta szeregu po lewej stronie /8.9/ jest dowolnie mała, czyli :

$$P\left(\bigcup_{j=j^o}^{\infty} A_j(\omega)\right) \leq \sum_{j=j^o}^{\infty} P\left(A_j(\varepsilon)\right) < \delta \tag{8.12}$$

Przyjmując wtedy $N_o = 2^{jo-1}$, otrzymuje się dla $n > N$.

$$P\left\{\left|\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z_k(\omega)\right) - P\{Z<0\}\right| \geq \varepsilon\right\} < \delta$$

Wariancja /8.11/ jest równa

$$\sigma_j^2 = Var\left[\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z_j(\omega)\right)\right] = E\left[\mathbb{1}^2_{(-\infty,0)}\left(Z_j(\omega)\right)\right] - \left(E\left[\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z(\omega)\right)\right]\right)^2$$

$$= E\left(\mathbb{1}_{(-\infty,0)}\left(Z(\omega)\right)\right) - \left(P\{Z<0\}\right)^2 = P\{Z<0\} - \left(P\{Z<0\}\right)^2 \tag{8.13}$$

Maksymalna wartość wariancji σ_j^2 jest więc oczywiście maksymalną wartością trójmianu kwadratowego $Y = x - x^2$ w przedziale /0,1/, a zatem

$$\sigma_j^2 \leq 0{,}25 \tag{8.14}$$

Wykorzystując to oszacowanie oraz nierówność /8.9/ otrzymuje się

$$\sum_{j=j_o} P(A_j(\varepsilon)) \leq 4\varepsilon^{-2} \sum_{j=j_o}^{\infty} \left(\frac{\sigma_1^2 + \ldots + \sigma_{2j}^2}{2^{2j}} \right) \leq 4\varepsilon^{-2} \sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{2j \cdot 0{,}25}{2^{2j}} =$$

$$= \varepsilon^{-2} \cdot \sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{2j}{2^{2j}} \tag{8.15}$$

Należy zatem znaleźć takie j_o, aby :

$$\varepsilon^{-2} \sum_{j=j_o} \frac{2j}{2^{2j}} < \delta \tag{8.16}$$

i wówczas żądana liczba realizacji winna być większa niż $N=2^{j_o-1}$

Reszta szeregu występującego w nierówności /8.16/ ma następujący iloraz wyrazów :

$$q(j) = \frac{\frac{2(j+1)}{2^{2(j+1)}}}{\frac{2j}{2^{2j}}} = \frac{j+1}{4j} \tag{8.17}$$

Stąd wynika, że może być ona zmajoryzowana przez resztę szeregu geometrycznego :

$$\sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{2j}{2^{2j}} < \sum_{j=j_o}^{\infty} \frac{2j_o}{2^{2j_o}} \cdot q^{(j-j_o)} = \frac{2j_o}{2^{2j_o}} \cdot \frac{1}{(1-q)} \tag{8.18}$$

przy czym q spełnia warunek :

$$1 > q \geq \frac{j+1}{4j} \xrightarrow{j \to \infty} 0{,}25 \qquad \text{dla } j \geq jo \qquad (8.19)$$

Oczywiście im mniejsze q, tym mniejsza reszta szeregu geometrycznego, ale równocześnie wzrasta jo /gdyż musi być spełniony warunek /8.19/, a to pociąga wzrost liczby realizacji N.
Dlatego dogodnie jest dokonywać oszacowań startując od niewielkich wartości jo /np. od jo=7/ i przyjmując $q = \frac{jo+1}{4jo}$, a następnie podwyższać kolejno jo i przy różnych wartościach otrzymywać wartości $\delta = \varepsilon^{-2} \cdot \frac{2jo}{2^{2jo}} \cdot \frac{1}{(1-q)}$ i liczbę realizacji $N_o = 2^{jo-1}$.
Przeprowadzone tą metodą przykładowe oszacowania przedstawiono w tablicy 8.1.

Tablica 8.1.

Liczby realizacji N_o dla zadanych wartości ε i δ

ε	δ większe lub równe niż	liczba realizacji N_o większa niż
0,1	0,0341	$2^7 = 128$
	0,00952	$2^8 = 256$
	0,000722	$2^{10} = 1024$
	0,0000531	$2^{12} = 4096$
	0,00000382	$2^{14} = 16384$
	0,00000102	$2^{15} = 32768$

0,01	0,264	$2^9 = 512$
	0,0722	$2^{10} = 1024$
	0,0197	$2^{11} = 2048$
	0,00531	$2^{12} = 4096$
	0,00143	$2^{13} = 8192$
	0,000382	$2^{14} = 16384$
	0,0001015	$2^{15} = 32768$
	0,000027	$2^{16} = 65536$
	0,00000712	$2^{17} = 131072$
	0,00000188	$2^{18} = 262144$
0,005	0,0785	$2^{11} = 2048$
	0,0213	$2^{12} = 4096$
	0,0057	$2^{13} = 8192$
	0,00153	$2^{14} = 16384$
	0,000407	$2^{15} = 32768$
	0,000108	$2^{16} = 65536$
	0,0000285	$2^{17} = 131072$
	0,00000751	$2^{18} = 262144$
0,001	0,1425	$2^{13} = 8192$
	0,0382	$2^{14} = 16384$
	0,0102	$2^{15} = 32768$
	0,0027	$2^{16} = 65536$
	0,000712	$2^{17} = 131072$
	0,000188	$2^{18} = 262144$

0,0005	0,0406	$2^{15} = 32768$
	0,0101	$2^{16} = 65536$
	0,00285	$2^{17} = 131072$
	0,000751	$2^{18} = 262144$
0,0001	0,27	$2^{16} = 65536$
	0,0712	$2^{17} = 131072$
	0,0188	$2^{18} = 262144$

Przy badaniu prawdopodobieństw stateczności konstrukcji można niejednokrotnie przewidywać, że prawdopodobieństwo $P\{Z<0\}$ nie przekroczy pewnej wartości. Jeśli $P\{Z<0\} < 0{,}25$, to można oszacować dokładniej niezbędną liczbę realizacji, uzyskując mniejszą wartość N_o. Wynika to mianowicie z nieco innego oszacowania wariancji /8.11/ :

$$\sigma_j^2 = \mathrm{Var}\left[\mathbb{1}(-\infty,0)\left(Z(\omega)\right)\right] = P\{Z<0\} - \left(P\{Z<0\}\right)^2 \leq P\{Z<0\} \tag{8.20}$$

Stosując to oszacowanie we wzorach /8.15/ dochodzi się do następującego wzoru /por.wzór(8.16)/ zakładając, że $P\{Z<0\} \neq 0$)

$$\sum_{j=j_0}^{\infty} \frac{2j}{2^{2j}} \leq \frac{\delta \cdot \varepsilon^2}{4 \cdot P\{Z<0\}} \tag{8.21}$$

i wówczas $N_o = 2^{j_o - 1}$, przy czym j_o jest najmniejszą liczbą dla której zachodzi /8.21/.

Odpowiednie oszacowanie można uzyskać korzystając z tablicy 8.1 przez pomnożenie prawdopodobieństw δ przez liczbę $4 \cdot p'$ / p' - górne oszacowanie prawdopodobieństwa $P\{Z < 0\}$/.

I tak przykładowo, gdy $P\{Z < 0\} < 0,1$, to :

$\varepsilon = 0,01$; $\delta = 0,02888$ $\Longrightarrow$ $N_o = 1024$

$\varepsilon = 0,01$; $\delta = 0,007$ $\Longrightarrow$ $N_o = 2048$

$\varepsilon = 0,01$; $\delta = 0,002124$ $\Longrightarrow$ $N_o = 4096$

$\varepsilon = 0,005$; $\delta = 0,00852$ $\Longrightarrow$ $N_o = 4096$

Gdy $P\{Z < 0\} < 0,05$, to :

$\varepsilon = 0,01$; $\delta = 0,0145$ $\Longrightarrow$ $N_o = 1024$

$\varepsilon = 0,01$; $\delta = 0,001062$ $\Longrightarrow$ $N_o = 4096$

Gdy natomiast $P\{Z < 0\} < 0,01$, to :

$\varepsilon = 0,005$; $\delta = 0,000852$ $\Longrightarrow$ $N_o = 4096$

$\varepsilon = 0,001$; $\delta = 0,0057$ $\Longrightarrow$ $N_o = 8192$

$\varepsilon = 0,0005$; $\delta = 0,0016$ $\Longrightarrow$ $N_o = 32768$

W przykładzie 1 przedstawionym w poprzednim rozdziale otrzymano $P_1 = P\{Z_1 < 0\} = 0,0376 < 0,04$, chcąc otrzymać dokładność rzędu $\varepsilon = 0,001$, przy δ mniejszym niż 0,04, należy przyjąć /zgodnie z niniejszym oszacowaniem/ liczbę realizacji N = 8192 / $\varepsilon = 0,001$; $\delta = 0,0228$/.

W przypadku prawdopodobieństwa $p_4 = P\{Z_4 < 0\} = 0,0149 < 0,015$

$\varepsilon = 0,001$ i $\delta = 0,00855$ żądana liczba realizacji $N_0 = 8192$.

Wreszcie dla prawdopodobieństwa $p_5 = 0,1002 < 0,105$

$\varepsilon = 0,01$ i $\delta = 0,031 \Rightarrow N_0 = 1024$

i przy większej dokładności

$\varepsilon = 0,001$; $\delta = 0,05985 \Rightarrow N_0 = 8192$

Chcąc tu uzyskać mniejsze prawdopodobieństwo δ , należałoby jeszcze zwiększyć liczbę realizacji i tak dla :

$\varepsilon = 0,001$ i $\delta = 0,0161$ musi ona wynosić $N_0 = 16384$.

Jak wiadomo liczba realizacji w przykładzie 1 była równa N=10000. W przykładzie tym przeprowadzono analizę dokładności polegającą na tym, że w przeciągu ostatniego tysiąca realizacji /od 9000 do 10000/ obliczone prawdopodobieństwa były drukowane co 100 realizacji. Na tej podstawie obliczono maksymalną różnicę Δ_1 pomiędzy wynikiem końcowym i bieżącym w ostatnim tysiącu realizacji oraz maksymalną różnicę Δ_2 między wszystkimi wydrukowanymi prawdopodobieństwami dla ostatniego tysiąca. Wyniki przedstawiono w tablicy 8.2.

Tablica 8.2

Dokładność prawdopodobieństw obliczonych w przykładzie 1

prawdopodobieństwa	różnica Δ_1	różnica Δ_2
$p_1 = 0,0376$	0,00073	0,00091
$p_2 = 0,0000$	0,00000	0,00000
$p_3 = 0,0000$	0,00000	0,00000
$p_4 = 0,0149$	0,00066	0,00066
$p_5 = 0,1002$	0,00063	0,00114

Jak widać postulowana dokładność dwóch cyfr znaczących jest tu zachowana, co jest zgodne z przewidywaniami teoretycznymi. Dla prawdopodobieństwa p_5 dyskusyjna może być dokładność trzeciej cyfry znaczącej, jednak według przewidywań teoretycznych istnieje spore prawdopodobieństwo / δ ok. 0,6/, że trzecia cyfra nie jest dokładna.

Jak wiadomo podane tu oszacowanie niezbędnej dla danego poziomu dokładności liczby realizacji jest oszacowaniem od góry. Nie wiadomo zatem czy przyjęcie mniejszej liczby realizacji niż 10000 w przykładzie 1 nie dałoby zadowalających rezultatów. Można tak sądzić obserwując np. prawdopodobieństwo p_1 i uzyskane dla niego różnice Δ_1 i Δ_2 /por.tab.8.2/. Zagadnienie to jest istotne ze względu na koszty pracy maszyny cyfrowej, które rosną proporcjonalnie do liczby realizacji. Dlatego też przeprowadzono także obliczenie przykładu 1 dla liczby realizacji o połowę mniejszej $N = 5000$. Porównanie prawdopodobieństw oraz różnic Δ_1 i Δ_2 dla liczby realizacji 5000 i 10000 przedstawia tablica 8.3.

Jak widać prawdopodobieństwo p_1 nie zmieniło się, różnica między prawdopodobieństwami p_4 wynosi 0,0007, zaś między p_5 - 0,003. Różnice Δ_1 i Δ_2 są oczywiście większe przy $N = 5000$.
Jeśli za zadowalającą dokładność w przypadku p_5 uzna się $\varepsilon = 0{,}01$, to widać, że można by ograniczyć się do liczby realizacji 5000. W celu lepszego rozpoznania wpływu zmniejszenia liczby realizacji na otrzymywane symulacyjnie rezultaty w tablicy 8.4 przedstawiono porównanie charakterystyk poszczególnych zmiennych losowych.

Tab.8.3.

Porównanie prawdopodobieństw i dokładności ich obliczania dla liczby realizacji N=5000 oraz N=10000 /przykład 1/

Prawdopod. utraty statecz. przez	N = 10000			N = 5000		
	p_i	Δ_1	Δ_2	p_i	Δ_1	Δ_2
przesuw	0,0376	0,00073	0,00091	0,0376	0,00167	0,00167
obrót wokół punktu A	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
obrót wokół pow. cylindr.	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
wystąpienie osuwiska	0,0149	0,00066	0,00066	0,0156	0,00068	0,00068
wyczerpanie nośności podłoża	0,1002	0,00063	0,00114	0,0972	0,00256	0,00296

Obserwacja tych wyników prowadzi do wniosku, że jedynie w przypadku kurtozy zmiennej Z_2 oraz zapasów stateczności zmiennych Z_4 i Z_5 obserwuje się znaczniejsze różnice.

Pozostałe różnice można uznać za nieznaczące. Również uzyskane histogramy rozkładów różnią się nieznacznie.

Tab.8.4

Porównanie charakterystyk zmiennych losowych dla liczby realizacji N=5000 oraz N=10000 /przykład 1/

Parametr		N=10000	N=5000		N=10000	N=5000
średnia $\bar{z}_1$, $\bar{s}_1$	z_1	151,1353	151,8905	s_1	1,4731	1,4763
odchyl. standard. σ		85,0708	84,9225		0,2948	0,2948
współcz. zmien. ν		0,5629	0,5591		0,2001	0,1997
skośność δ_1		0,03075	0,01955		0,4846	0,4628
kurtoza δ_2		2,9749	2,9367		3,4357	3,4346
$\bar{z}_2$, $\bar{s}_2$	z_2	1541,1634	1543,2079	s_2	2,7902	2,7976
σ		147,4933	144,5748		0,4363	0,4362
ν		0,09570	0,09368		0,1564	0,1559
δ_1		-0,03751	-0,1380		0,4494	0,4591
δ_2		4,5081	3,4228		3,0585	3,0631
$\bar{z}_3$, $\bar{z}_4$	z_3	1430,4265	1433,9654	z_4	3673,8997	3682,5350
σ		315,3922	315,6962		1752,4487	1754,3838
ν		0,2205	0,2202		0,4770	0,4764
δ_1		0,2496	0,2544		0,2710	0,2586
δ_2		2,9993	2,9682		2,9073	2,8913

Tab.8.4.cd

$\bar{S}_4$, $\bar{Z}_5$	S_4	1,4465	1,4479	Z_5	2452,5963	2470,5160
σ		0,2168	0,2169		3085,4197	3091,3534
ν		0,1499	0,1498		1,2580	1,2513
δ_1		0,3137	0,2941		2,4942	2,4954
δ_2		2,9453	2,9195		11,7074	11,7769
$\bar{S}_5$	S_5	3,4642	3,4817			
σ		3,1028	3,1064			
ν		0,8957	0,8922			
δ_1		2,5075	2,5048			
δ_2		11,8387	11,8836			

W załączniku zamieszczono dwa przykłady, w których zaobserwowane różnice były największe. I tak rys.Z.40 przedstawia porównanie rozkładów zmiennej Z_2, zaś rys.Z.41 - zmiennej Z_4.

Na zakończenie tego podrozdziału warto jeszcze powiedzieć, że problemem niezbędnej ilości realizacji dla danego poziomu dokładności w badaniach symulacyjnych zajmował się A.Baratta w pracy [9] . Autor ten w swoich oszacowaniach wykorzystał centralne twierdzenie graniczne, co jest pewną niekonsekwencją , gdyż ciąg zmiennych losowych typu /8.2/ jest, w myśl mocnego prawa wielkich liczb, zbieżny do miary skoncentrowanej w jednym punkcie /wartości oczekiwanej/, a nie do rozkładu normalnego.

Rozumowanie Baratty można zmodyfikować, należy jednak wykorzystać twierdzenia związane z oszacowaniem szybkości zbieżności w centralnym twierdzeniu granicznym /chodzi o twierdz.Berry-Essena por. [53] rozdz.XVI § 5/ - dziwi fakt że autor [9] zupełnie pomija to zagadnienie.

8.2. Uwagi o wpływie niedoskonałości programowego generatora liczb losowych

Jak już wspomniano, żaden generator oparty na programie i realizowany przez maszynę cyfrową /generator maszynowy/ nie jest w istocie generatorem liczb losowych, a jedynie - pseudolosowych. Wszystkie tego typu generatory obarczone są pewnymi wadami /jak np.okresowość/, które powodują, że w rzeczywistości są one w stanie generować dany rozkład prawdopodobieństwa jedynie z pewnym przybliżeniem. Zagadnienia tego typu są omawiane w literaturze dotyczącej metod symulacyjnych /jak np. [107,140,142] . Tutaj omówiony będzie tylko jeden problem związany z wyborem tzw. "parametrów początkowych". Mianowicie wykorzystany w zbudowanym tu programie symulacyjnym typowy generator rozkładu jednostajnego /por. proz. 6.2/ wymaga, aby na wejściu wprowadzona była jedna liczba $x \in [0,1]$ i $x \neq 0,5$, celem uruchomienia procedury generowania /oczywiście jedna liczba dla każdej niezależnej zmiennej losowej/.
Inne stosowane generatory multiplikatywne(addytywne, mieszane) także wymagają wprowadzenia tej liczby. Okazuje się, że wybór tych "parametrów początkowych" ma pewien wpływ na otrzymywane drogą symulacyjną wyniki.

Oczywiście wykrycie jakichkolwiek prawidłowości jest sprawą bardzo trudną. Tutaj wpływ ten zbadano dokonując obliczenia przykładu 1 dla dwóch różnych zestawów "parametrów początkowych". Dotychczas omawiane wyniki /przykład 1/ były uzyskane przy następującym zestawie "parametrów początkowych" :

0,1 0,89 0,13 0,001 0,5111 0,72 0,4231 0,3972

/po jednym parametrze dla każdej z wyjściowych niezależnych zmiennych losowych/. Dla sprawdzenia wpływu przeprowadzono przykład kontrolny /przykład 15/, w którym w stosunku do przykładu 1 zmieniono jedynie parametry początkowe na następujące /liczba realizacji N=10000/ :

0,9512 0,3286 0,2543 0,4266 0,2681 0,9137 0,4239

0,4463 .

Otrzymane prawdopodobieństwa porównano z uzyskanymi w przykładzie 1 - tablica 8.5

Tablica 8.5

Porównanie prawdopodobieństw uzyskanych w przykładzie 1 z prawdopodobieństwami z przykładu kontrolnego /15/

prawdopod. utraty statecz. przez	N=10000 przykład 1	N=10000 przykład 15	N=5000 przykład 1	N=5000 przykł. 15
przesuw	0,0376	0,0368	0,0376	0,0364
obrót wokół punktu A	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Tablica 8.5.cd

obrót wokół pow.cylindrycz.	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
wystąpienie osuwiska	0,0149	0,0122	0,0156	0,0118
wyczerpanie nośności podłoża	0,1002	0,1015	0,0972	0,1000

Jak widać wpływ "parametrów początkowych" na uzyskane prawdopodobieństwa jest dość znaczny. Jest większy aniżeli różnica wywołana zmianą liczby realizacji z N=10000 na N=5000. Z drugiej strony różnice pomiędzy prawdopodobieństwami przy N = 10000 realizacji jest mniejsza, aniżeli przy N = 5000. Świadczyłoby to o zmniejszaniu się tego wpływu wraz ze wzrostem liczby realizacji. Największa różnica występuje dla prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska. W tym przypadku jest o tyle niekorzystna, że prawdopodobieństwo to jest małe, co powoduje znaczną różnicę względną. Widać także, że różnica ta powoli maleje ze wzrostem liczby realizacji. Wydaje się, że wystąpienie największej różnicy w przypadku prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska, można tłumaczyć tym, że w związku z zastosowaniem metody pasków każda ze zmiennych losowych występuje wielokrotnie we wzorze na zapas /wskaźnik/ stateczności /więcej niż w pozostałych kryteriach/. Zatem różnice w rozkładach poszczególnych zmiennych losowych spowodowane różnymi parametrami początkowymi mogą w tym przypadku ulegać zwielokrotnieniu. Także i w przypadku charakterystyk rozkładów zmiennych losowych obserwuje się zmiany wywołane przyjęciem innych parametrów początkowych. Zilustrowano to w tablicy 8.6.

Tablica 8.6

Porównanie charakterystyk rozkładów zmiennych losowych w przykładzie 1 oraz w przykładzie 15 /ze zmienionymi parametrami początkowymi/

parametr		przykład 1	przykład 15		przykład 1	przykład 15
średnia $\bar{Z}_1$, $\bar{S}_1$	Z_1	151,1353	151,4145	S_1	1,4731	1,4724
odchyl. σ standard.		85,0708	85,5358		0,2948	0,2956
współcz. zmien. ν		0,5629	0,5649		0,2001	0,2008
skośność δ_1		0,03075	0,03474		0,4846	0,4878
kurtoza δ_2		2,9749	2,8710		3,4357	3,3133
$\bar{Z}_2$, $\bar{S}_2$	Z_2	1541,1634	1537,8086	S_2	2,7902	2,7781
σ		147,4933	146,4681		0,4363	0,4326
ν		0,0957	0,09525		0,1564	0,1557
δ_1		-0,03751	-0,2150		0,4494	0,4514
δ_2		4,5081	3,8799		3,0585	3,2360
$\bar{Z}_3$, $\bar{S}_3$	Z_3	1430,4265	1433,9368	S_3	26,3814	31,694
σ		315,3922	318,5854		142,6135	403,8786
ν		0,2205	0,2222		5,4058	12,7428
δ_1		0,2496	0,2136		28,5918	61,4644
δ_2		2,9993	2,8379		1109,6293	4418,0077

Tablica 8.6.cd

$\bar{Z}_4$, $\bar{S}_4$	Z_4	3673,8997	3699,5301	S_4	1,4465	1,4494
σ		1752,4487	1770,1705		0,2168	0,2195
ν		0,4770	0,4785		0,1499	0,1515
δ_1		0,2710	0,2537		0,3137	0,3207
δ_2		2,9073	2,7970		2,9453	2,8811
$\bar{Z}_5$, $\bar{S}_5$	Z_5	2452,5963	2498,2779	S_5	3,4642	3,5091
σ		3085,4197	3146,4959		3,1028	3,1678
ν		1,2580	1,2595		0,8957	0,9027
δ_1		2,4942	2,4058		2,5075	2,4242
δ_2		11,7074	10,9971		11,8387	11,1408

Bardzo duże różnice obserwuje się dla parametrów zmiennej S_3, co wiąże się z przyjmowaniem przez moment sił M_0 wartości bliskich zeru, a więc bardzo dużych wartości przez S_3 /por.7.2/. Ten brak"stabilności" ze względu na wybór warunków początkowych widoczny jest także przy porównaniu rozkładów /rys.Z.42/. Wyraźne różnice występują dla dużych wartości S_3. Wpływ na zmiany parametrów mają właśnie bardzo duże wartości S_3. W przykładzie 15 $P\{S_3 \geqslant 8000\} = 0{,}00022$, zaś w przykładzie 1 $P\{S_3 \geqslant 8000\} = 0$. W przedziale $[4000 ; 8000]$ także zmienna z przykł.15 przyjmuje wartości z większym prawdop. niż zmienna z przykładu 1 /por.rys. Z.42/.

Te właśnie największe wartości wywołują bardzo znaczny wzrost wariancji, skośności i kurtozy dla przykładu 15 /por.tablica 8.6/. Z tego powodu w analizie przykładów nie rozpatrywano zmiennej S_3. Przy zastosowaniu miary Z_3 zagrożenie tego typu efektami nie występuje.

Pozostałe różnice między parametrami nie są wielkie, aczkolwiek w wielu przypadkach są większe niż przy zmianie liczby realizacji z N=5000 na N=10000 /por.tabl.8.4/. Podobnie sytuacja ma się z rozkładami, gdzie największe różnice /oprócz różnic dla S_3/ zaobserwowano w przypadkach S_1 /rys.Z.43/, Z_2 /rys.Z.44/ i Z_5 /rys. Z.45/. Doświadczenia powyższe sugerują, że do uniknięcia powyższych rozbieżności niezbędna jest jeszcze większa liczba realizacji niż N=10000 /Takaoka w pracach omawianych w podrozdz.4.4 stosował N=100000/. Można zastosować także inne podejście, sugerowane przez autorów [31] , które polega na przeprowadzeniu dwóch lub kilku eksperymentów symulacyjnych dla mniejszej liczby realizacji/ oczywiście każdy musiałby zaczynać się od innych wartości początkowych/, a następnie określenie żądanych prawdopodobieństw i parametrów, jako średnich arytmetycznych odpowiednich wyników z wykonanej serii eksperymentów.

Celem uzupełnienia doświadczeń związanych z dokładnością generowania przeprowadzono próbę zgodności generowanych rozkładów wielokątnych /generatorem opisanym w rozdziale VI/ z postulowanymi w rozdz.VII /por. rysunki w załączniku rys.Z1- rys.Z8 /. Próba wykazała dobrą zgodność parametrów wygenerowanych rozkładów z postulowanymi.

Także kształty histogramów były zgodne z kształtami wykresów gęstości postulowanych rozkładów. Szczegółowe wyniki znajdują się w posiadaniu autora.

9. PORÓWNANIE PRAWDOPODOBIEŃSTW OTRZYMANYCH RÓŻNYMI METODAMI

Niejako na zakończenie niniejszej pracy przedstawia się porównanie prawdopodobieństw uzyskanych w przykładzie 1 /podstawowym/ z prawdopodobieństwami obliczonymi wg dwóch innych metod : metody linearyzacji Rżanicyna oraz metody rozwinięcia dystrybuanty względem pochodnych dystrybuanty normalnej /rozwinięcia Grama-Charliera i Edgewortha/.

9.1. Obliczenia metodą linearyzacji Rżanicyna

Metoda Rżanicyna została omówiona w rozdziale 2. Jest to metoda bardzo rozpowszechniona, jakkolwiek wiadomo /por.np. [37] i [54]/, że w przypadku gdy zapas stateczności jest funkcją nieliniową może ona prowadzić do dużych błędów.
Z tych też względów porównano wyniki uzyskane drogą symulacyjną z otrzymanymi wyżej wymienioną metodą.
Wzięto pod uwagę przykład nr 1 /por.rozdział 7/ i analizowano jedynie zapasy stateczności Z_i /i=1,..,5/.
Wartość oczekiwaną zmiennych Z_i oblicza się wg wzoru (2.22).
Przykładowo dla zmiennej Z_1 uzyskano : /oznaczenia jak w rozdz.3 i na rys.7.1/

$$EZ_1 = \bar{Z}_1 = \left(\bar{N}_{p1} + N_{p2} + N_q\right) \cdot tg k_1 \bar{\phi}_3 - a_h \cdot \bar{N}_{p1} - \left[\frac{\bar{\gamma}_1 h_1^2}{2} + h_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot \bar{N}_{p1}}{L} + q_o\right)\right] \cdot$$
$$\cdot\, tg^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_1}{2}\right) - \left[\frac{\bar{\gamma}_2 \cdot h_2^2}{2} + h_2\left(q_o + \frac{2\bar{N}_{p1}}{L} + \bar{\gamma}' h_1\right) \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\bar{\phi}_2}{2}\right) - 2\bar{c} h_2\right] \cdot$$
$$\cdot\, tg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) + \frac{\bar{\gamma}_2 \tilde{h}_2^2}{2} \cdot tg^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{\phi}_2}{2}\right) + 2\bar{c}\tilde{h}_2 \cdot tg\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\bar{\phi}_2}{2}\right) \qquad (9.1)$$

Odchylenie standardowe oblicza się ze wzoru (2.23). Przykładowo dla zmiennej Z_1 pochodne we wzorze (2.23) są równe :

$$\frac{\partial Z_1}{\partial N_{p1}} = \operatorname{tg} k_1 \phi_3 - a_h - \frac{2h_1}{L}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right) - \frac{2h_2}{L}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) \tag{9.2}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \phi_1} = \left[\frac{\gamma_1 \cdot h_1^2}{2} + h_1\left(\frac{2N_{p1}}{L} + q_0\right)\right]\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right)} \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \gamma_1} = -\frac{h_1^2}{2} \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_1}{2}\right) - h_1 \cdot h_2 \cdot \operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \phi_2} = \frac{\frac{\gamma_2 \tilde{h}_2^2}{2} \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right) + c\tilde{h}_2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right)} + \frac{\left(\frac{\gamma_2 h_2^2}{2} + h_2\left(q_0 + \frac{2N_{p1}}{L} + \gamma_1 \cdot h_1\right)\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) - c h_2}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right)} \tag{9.5}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial c} = 2\tilde{h}_2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right) + 2h_2 \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) \tag{9.6}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \gamma_2} = \frac{\tilde{h}_2^2}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\phi_2}{2}\right) - \frac{h_2^2}{2}\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\phi_2}{2}\right) \tag{9.7}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \phi_3} = \left(N_{p1} + N_{p2} + N_q\right) \cdot \frac{k_1}{\cos^2\left(k_1 \cdot \phi_3\right)} \tag{9.8}$$

$$\frac{\partial Z_1}{\partial \gamma_3} = 0 \tag{9.9}$$

Ze względu na rozwlekłość z jednej strony oraz brak miejsca z drugiej analogiczne wzory dla zmiennych Z_2, Z_3, Z_4 i Z_5 nie są tu przytaczane.

Poniżej w tablicy 9.1 podano zestawienie wyników liczbowych wartości oczekiwanych i odchyleń standardowych otrzymanych w przykładzie 1 /N = 10000/ i metodą Rżanicyna.

Tablica 9.1

Wartości oczekiwane oraz odchylenia standardowe zmiennych Z_i z przykładu 1 i metody Rżanicyna

parametr	przykład 1 /N = 10000/	metoda Rżanicyna
$\bar{Z}_1$	151,1353	151,6389
σ_{Z_1}	85,0708	84,1872
$\bar{Z}_2$	1541,1634	1545,8813
σ_{Z_2}	147,4933	148,1625
$\bar{Z}_3$	1430,4265	1433,7289
σ_{Z_3}	315,3922	334,8713
$\bar{Z}_4$	3673,8997	3585,5647
σ_{Z_4}	1752,4487	1713,3257
$\bar{Z}_5$	2452,5963	1543,8952
σ_{Z_5}	3085,4197	1914,1757

Poszczególne prawdopodobieństwa p_i /i=1,..,5/ oblicza się teraz wg wzoru

$$p_i = P\left\{ Z_i < 0 \right\} = F_o\left(- \frac{\overline{Z_i}}{\sigma_{Z_i}} \right) \tag{9.10}$$

F_o - dystrybuanta rozkładu normalnego; por. także wzór (2.24).

Porównanie tak obliczonych prawdopodobieństw z prawdopodobieństwami obliczonymi w przykładzie 1 /N = 10000/ przedstawia tablica 9.2.

Tablica 9.2

Zestawienie prawdopodobieństw - przykład 1 i metoda Rżanicyna

prawdopodob.	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5
przykład 1 N=10000	0,0376	0,0	0,0	0,0149	0,1002
metoda Rżanicyna	0,035984	mniejsze niż 10^{-11}	$9,285 \cdot 10^{-6}$	0,018187	0,209959

Z analizy wyników wynika, że w przypadku wyczerpania nośności podłoża (Z_5, p_5), zarówno prawdopodobieństwa, jak i średnia oraz wariancja różnią się zasadniczo. W przypadku linearyzacji Rżanicyna uzyskano prawdopodobieństwo o ponad 100 % większe.

Rezultat ten można tłumaczyć niedokładnością metody linearyzacyjnej.

Funkcja określająca zapas stateczności Z_5 zasadniczo różni się od liniowej /por. wzory (3.39) na N_D, N_B oraz (3.40) na i_D, i_B/. Losowe fluktuacje kąta ϕ_3 powodują zatem wahania wartości Z_5 znacznie różniące się od proporcjonalnych /por. także uwaga 3 w podrozdziale 7.3/. W związku z tym zrozumiałe jest dużo większe odchylenie standardowe uzyskane metodą symulacyjną. Losowę pojawianie się dużych wartości współczynników nośności granicznej implikuje też znacznie wyższą wartość oczekiwaną zmiennej losowej Z_5, niż by to wynikało z linearyzacji Rżanicyna. W pozostałych przypadkach większa różnica występuje jedynie w prawdopodobieństwach p_4. Zwracają uwagę też pewne różnice między odchyleniami standardowymi zmiennych Z_3 i Z_4 oraz wartościami oczekiwanymi zmiennej Z_4. Dla zmiennych Z_1 i Z_2 różnice parametrów są minimalne.

Uwaga: W związku z uzyskanymi rozbieżnościami dla prawdopodobieństwa p_5 oraz charakterystyk zmiennej Z_5 autor niniejszej pracy jest zdania, że metoda linearyzacji Rżanicyna nie powinna być stosowana do obliczania prawdopodobieństwa przekroczenia nośności granicznej podłoża /p_5/, zwłaszcza gdy na rozpatrywany fundament działają duże obciążenia poziome /taką analizę przeprowadzał autor pracy [13] przy sprawdzeniu stateczności murów oporowych metodą Rżanicyna/.

Należy podkreślić, że w wielu sytuacjach geotechnicznych nieprzekroczenie nośności granicznej podłoża /czyli w nomenklaturze niniejszej pracy spełnienie piątego kryterium stateczności/ ma znaczenie pierwszorzędne dla stateczności fundamentu i często implikuje spełnienie pozostałych kryteriów.

9.2. Rozwinięcie w szereg względem pochodnych dystrybuanty rozkładu normalnego

Niniejszy podrozdział stanowi próbę oszacowania prawdopodobieństw utraty stateczności za pomocą twierdzeń od dawna znanych w rachunku prawdopodobieństwa, lecz bardzo rzadko stosowanych w praktycznych zastosowaniach. Chodzi tu o rozwinięcie dystrybuant względem pochodnych dystrybuanty standaryzowanego rozkładu normalnego - rozwinięcie Grama - Charliera i rozwinięcie Edgewortha. Pierwsze z nich jest rozwinięciem ortogonalnym w bazie wielomianów Hermite'a i bazuje na następującym twierdzeniu /por. [46] /. Jeżeli F jest dystrybuantą zmiennej losowej X takiej, że $EX = 0$ oraz $Var(X) = 1$. Jeśli ponadto :

$$\int_{-\infty}^{-\infty} e^{\frac{x^2}{4}} \quad dF(x) < +\infty \tag{9.11}$$

to

$$F(x) = \sum \frac{c_n}{n!} F_o^{(n)}(x) \tag{9.12}$$

/dla każdego $x \in R$/,

gdzie
$$c_n = (-1)^n \int_{-\infty}^{+\infty} H_n(x) F(x) dx \quad , \tag{9.13}$$

przy czym H_n jest n-tym wielomianem Hermite'a, zaś F_o dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego , $F_o^{(n)}$ jej n-tą pochodną.

Łatwo wykazać /por.np. [46] /, że :

$$
\begin{aligned}
&C_0 = 1; \quad C_1 = C_2 = 0 \\
&C_3 = -\frac{\mu_3}{\sigma} = -\delta_1 \\
&C_4 = \frac{\mu_4}{\sigma} - 3 = \delta_2 - 3 \\
&C_5 = -\frac{\mu_5}{\sigma^5} + 10 \cdot \frac{\mu_3}{\sigma^3} \\
&C_6 = \frac{\mu_6}{\sigma^6} - 15 \cdot \frac{\mu_4}{\sigma^4} + 30
\end{aligned}
\qquad (9.14)
$$

Widać zatem, że korzystanie z powyższego twierdzenia możliwe jest tylko wówczas, gdy znanych jest przynajmniej kilka początkowych momentów rozpatrywanej zmiennej losowej.
Dla spełnienia założenia /9.11/ w rozpatrywanych w rozdziale 7 przykładzie nr 1 /a także w większości następnych/ przyjęto dla reakcji od obciążenia pojazdami obcięty rozkład Frecheta /por.podrozdział 7.1/. W ten sposób rozkłady wszystkich parametrów przyjętych jako zmienne losowe miały nośniki ograniczone i odseperowane od zera /za wyjątkiem zmiennej losowej N_{p1}/. W związku z tym, a także biorąc pod uwagę postaci wzorów na poszczególne zapasy stateczności /por.rozdział 3/, widać, że także poszczególne zmienne Z_i /i=1,..,5/ są ograniczone, co oczywiście implikuje spełnienie założenia /9.11/.
W przykładach analizowanych metodą symulacyjną obliczano jedynie pierwsze cztery momenty centralne zmiennych Z_i, co zgodnie ze wzorami /9.14/ oznacza możliwość skorzystania jedynie z pierwszych pięciu wyrazów rozwinięcia /do C_4 włącznie/.

Ze wzorów /9.12/ i /9.14/ łatwo wywnioskować, że :

$$p_i = P\{Z_i < 0\} \approx F_o\left(-\frac{\bar{Z}_i}{\sigma_{Z_i}}\right) + \frac{\delta_{1i}}{6}\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{-\bar{Z}_i}{\sigma_{Zi}}\right)^2\right]\frac{\left[1-\left(-\frac{\bar{Z}_i}{\sigma_{Zi}}\right)^2\right]}{\sqrt{2\pi}} +$$

$$+\frac{\left(\delta_{2i}-3\right)}{24}\cdot\exp\left[-\frac{1}{2}\left(-\frac{Z_i}{\sigma_{Z_1}}\right)^2\right]\cdot\frac{\left[3\cdot\left(-\frac{\bar{Z}_1}{\sigma_{Z_1}}\right)-\left(\frac{\bar{Z}_1}{\sigma_{Z_1}}\right)^3\right]}{\sqrt{2\pi}} \qquad (9.15)$$

/Wartości $\bar{Z}_i$, σ_{Z_i}, δ_{1i}, δ_{2i} z wyników uzyskanych metodą symulacyjną w przykł.1/.

Obliczone ze wzoru /9.15/ przybliżone prawdopodobieństwa przedstawia tablica 9.3.

Jak sugeruje Cramer [46] znając jedynie niewielką liczbę pierwszych momentów centralnych /która to sytuacja często występuje w praktyce /, na ogół dokładniejsze przybliżenie powinno się uzyskać stosując nieco inne rozwinięcie - tzw. rozwinięcie Edgewortha.

Podejście Edgewortha polega na nieco innym rozwinięciu funkcji charakterystycznej danego rozkładu w szereg /szczegóły w [46] /. Korzystne jest to, że znając pierwsze cztery momenty centralne badanego rozkładu można podać pierwszych siedem wyrazów tego rozwinięcia.

$$F(x) = F_o(x) + \frac{(-\delta_1)}{3\,!}F_o^{(3)}(x) + \frac{\delta_2}{4\,!}F_o^{(4)}(x) + \frac{10\,(\delta_1)^2}{6\,!}F_o^{(6)}(x) \qquad (9.16)$$

/współczynniki przy $F_o^{(1)}$, $F_o^{(2)}$, $F_o^{(5)}$ są równe zeru/.

W związku z tym przy obliczaniu prawdopodobieństw p_i do wzoru z prawej strony /9.15/ dodaje się jeszcze jeden następujący składnik :

$$\frac{10(\delta_1)^2}{6\,!} \cdot \frac{\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)}{\sqrt{2\pi}} \left[\left(\frac{\bar{z}_i}{\sigma_i}\right)^5 - 10\left(\frac{\bar{z}_i}{\sigma_i}\right)^3 + 15\,\frac{z_i}{\sigma_i}\right] \qquad (9.17)$$

Poniżej w tablicy 9.3 zestawiono prawdopodobieństwa obliczone metodą Gramma - Charliera /wzór (9.15)/ oraz metodą Edgewortha (/9.15/ + /9.17/) i porównano z wartościami w tablicy 9.2.

Tablica 9.3

Zestawienie prawdopodobieństw obliczonych różnymi metodami

prawdopodob.	metoda Charliera	metoda Edgewortha	metoda Rżanicyna	przykład nr 1 N=10000
p_1	0,03689	0,03687	0,035984	0,0376
p_2	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	$< 10^{-11}$	0,0
p_3	-	$4,174 \cdot 10^{-6}$	$9,285 \cdot 10^{-6}$	0,0
p_4	0,01073	0,01246	0,018187	0,0149
p_5	0,05583	0,2455	0,209959	0,1002

W związku z uzyskanymi wynikami można sformułować następujące uwagi :

1. Dla rozkładów, które zdecydowanie różnią się od rozkładu normalnego /Z_5/, a więc δ_1 jest istotnie różne od zera i δ_2 znacznie różni się od 3 , stosowanie rozwinięć Gramma-Charliera

czy Edgewortha przy znajomości jedynie pierwszych czterech momentów centralnych, nie daje wiarygodnych rezultatów /p_5 /.

2. Przy rozwinięciach uwzględniających tylko pierwsze cztery momenty centralne zmiennych Z_i rozwinięcie Edgewortha nie musi prowadzić do dokładniejszych wyników niż rozwinięcie Charliera.
3. Dla prawdopodobieństw bliskich zeru niedokładności wynikające z "obcięcia" reszty w szeregu Charliera mogą spowodować otrzymanie ujemnych wartości prawdopodobieństw /taka sytuacja wystąpiła przy obliczaniu prawdopodob.p_3 metodą Charliera/.
4. W przypadku p_1 metody Charliera i Edgewortha dały rezultaty bardzo zbliżone do otrzymanego metodą symulacyjną /bliższe niż metoda Rżanicyna/. Należy tu przypomnieć, że zmienna losowa Z_1 miała rozkład bardzo zbliżony do normalnego /por.podrozdział 7.2 oraz rys. Z.8a/.
5. Prawdopodobieństwo p_4 obliczone metodą Edgewortha jest bliższe prawdop.uzyskanemu w przykładzie 1 niż prawdop.obliczone metodą Charliera czy Rżanicyna.

Wobec powyższych uwag należy stwierdzić, że metody korzystające z rozwinięć względem pochodnych dystrybuanty rozkładu normalnego, przy znajomości jedynie pierwszych czterech momentów centralnych zmiennych losowych Z_i, nie zawsze są korzystne i dają wiarogodne rezultaty wtedy, gdy rozkład danej zmiennej Z_i jest zbliżony do rozkładu normalnego.
W innych przypadkach pożądana jest znajomość większej liczby początkowych momentów centralnych.

10. WNIOSKI KOŃCOWE

Przeprowadzone w poprzednich rozdziałach rozważania oraz komentarze oparte na przeprowadzonych badaniach i analizach przykładów obliczeniowych pozwalają na podsumowanie ich w postaci wniosków końcowych, które sformułowano i przedstawiono poniżej.

1. Metoda symulacyjna okazała się bardzo pożyteczna przy analizie stateczności masywnych przyczółków mostów drogowych. Podstawowe argumenty przemawiające za tym stwierdzeniem to:

a/ możliwość obliczania prawdopodobieństwa utraty stateczności w pięciu omówionych przypadkach (rozdz.3), pomimo zwykle bardzo skomplikowanych analitycznie i nieliniowych związków między wyjściowymi zmiennymi losowymi /parametrami gruntowymi oraz reakcją od ruchu pojazdów/, a miarami /kryteriami/ stateczności w postaci zapasu stateczności lub współczynnika pewności;

b/ możliwość wyznaczania ogólnego /całkowitego/ prawdopodobieństwa utraty stateczności bez konieczności analizowania struktur modeli niezawodnościowych, co w rozpatrywanym przypadku może okazać się trudne /uwaga podrozdz. 7.2/;

c/ możliwość uwzględnienia dużej liczby wyjściowych zmiennych losowych / w przypadku wystąpienia kilku warstw gruntowych/;

d/ możliwość dokonywania analizy w różnych stadiach budowy i eksploatacji przyczółka;

e/ możliwość przybliżonego określenia rozkładów prawdopodobieństwa odpowiednich zapasów czy współczynników pewności oraz wyznaczenia momentów statystycznych tych rozkładów; daje to wyobrażenie o charakterze i stopniu zmienności losowej danej miary stateczności;

f/ pozwala na analizę wpływu losowych fluktuacji poszczególnych parametrów gruntowych oraz reakcji od obciążeń ruchomych na prawdopodobieństwo utraty stateczności i rozkłady miar stateczności.

2. Przy zastosowaniu metody symulacyjnej w analizie stateczności masywnego przyczółka mostowego korzystne jest zastosowanie wielokątnych rozkładów prawdopodobieństwa, a to z następujących powodów (podrozdział 4.3):

a/ możliwość opisu empirycznych rozkładów prawdopodobieństwa dla niezbędnych tu cech gruntowych ϕ, c, γ, potwierdzone statystycznymi testami zgodności;

b/ prosty i efektywny generator liczb losowych z tego rozkładu, co wpływa na skrócenie czasu pracy maszyny cyfrowej, a w związku z tym obniżenie kosztów przeprowadzanych badań (podrozdział 6.1);

c/ możliwość aproksymacji różnorodnych histogramów, w tym także niesymetrycznych; /podrozdział 6.1/;

d/ ograniczony nośnik tych rozkładów co koresponduje z dość zwykle wąskimi przedziałami zmienności poszczególnych parametrów gruntowych;

e/ w przypadku stosowania rozkładów trójkątnych możliwość szybkiego wyznaczenia rozkładu adekwatnego do wyników badań doświadczalnych przy zastosowaniu metody momentów /podrozdział 4.3/.

Powyższe wnioski /1 i 2 / pozwalają autorowi stwierdzić, że cel pracy /por. podrozdział 1.2/, którym było podanie sposobu obliczenia prawdopodobieństwa utraty stateczności przez masywny przyczółek mostu drogowego i oszacowanie rozkładu prawdopodobieństwa użytych miar stateczności oraz zaproponowanie rozkładów prawdopodobieństwa wejściowych zmiennych losowych, został osiągnięty.

Przykłady obliczeniowe pozwoliły na sformułowanie dalszych wniosków poznawczych.

3. Ze względu na stwierdzony brak niezależności pomiędzy zmienny-

mi losowymi będącymi zapasami stateczności w poszczególnych przypadkach zastosowanie prostego modelu szeregowego dla niezawodności przyczółka jest tu niemożliwe. Znacznie bardziej adekwatny jest tu model szeregowy o skorelowanych wytrzymałościach /por. uwaga 7 w 7.2 oraz odpowiednie uwagi w 7.3, 7.4 i 7.6 /.

4. Rozkłady zmiennych losowych będących zapasami stateczności dla przesuwu, obu obrotów oraz wystąpienia osuwiska są zbliżone do rozkładów normalnych; podobnie jest z rozkładami współczynników pewności dla przypadku przesuwu, obrotu wokół punktu A oraz wystąpienia osuwiska. Natomiast obie miary statecznosci w przypadku wypierania gruntu spod przyczółka zdecydowanie różnią się od rozkładu normalnego, wykazując dodatnią skośność i dużą kurtozę. Rozkład zmiennej S_5 wykazuje duże podobieństwo do rozkładu lognormalnego. Ponadto zmienne Z_5 i S_5 wykazują największe współczynniki zmienności /por. 7.2/.

5. Zdecydowanie największy i zasadniczy wpływ na prawdopodobieństwo utraty stateczności oraz na rozkłady i charakterystyki momentowe poszczególnych miar stateczności ma losowość kąta tarcia wewnętrznego gruntu znajdującego się pod podstawą przyczółka /por. 7.3 /.

6. Przy założeniu, że kąt, o którym mowa powyżej jest wielkością stałą, zdecydowanie maleją współczynniki zmienności poszczególnych zapasów i wskaźników stateczności /za wyjątkiem Z_2 oraz S_2/, zaś rozkład zapasu stateczności w przypadku wypierania gruntu /Z_5, S_5/ staje się zbliżony do rozkładu normalnego /por. 7.3/.

7. Istotne znaczenie ma także losowość kąta tarcia wewnętrznego gruntu za ścianą boczną przyczółka /jeśli różni się on od kąta wzmiankowanego we wn.5,6/. Wpływ losowosci pozostałych parametrów gruntowych jest już znacznie mniejszy i uzależniony takimi czynnikami jak miąższość poszczególnych warstw, geometria przyczółka,

współczynniki zmienności poszczególnych parametrów.

8. Losowość reakcji od obciążenia pojazdami ma niewielki wpływ na prawdopodobieństwo utraty stateczności przez przyczółek, mimo, że zmienna ta posiada bardzo duży współczynnik zmienności. Mały wpływ związany jest z proporcjami w obciążeniach, w których procentowy wkład reakcji od obciążenia pojazdami jest mały / podrozdział 7.4, wnioski 2 i3 /.

9. W przypadku braku obciążeń pojazdami prawdopodobieństwo przesuwu przyczółka nieco wzrasta, zaś prawdopodobieństwo wypierania gruntu spod fundamentu maleje /por. podrozdział 7.4 , wniosek 4/.

10. Użycie rozkładów wielokątnych powoduje znaczne skrócenie czasu pracy maszyny w stosunku do korzystania z rozkładu normalnego /generowanego w oparciu o centralne twierdzenie graniczne - podrozdział 7.5 /.

11. Przeprowadzona analiza dokładności wykazała, że przy założeniu idealnego generatora możliwe jest oszacowanie niezbędnej liczby realizacji w procesie symulacyjnym, aby obliczone prawdopodobieństwa były wyznaczone z żądanym poziomem dokładności /podrozdział 8.1 /.

12. Dosyć znaczny wpływ na otrzymane wyniki mają wartości początkowe wprowadzone do generatora w celu zainicjowania procesu symulacji. W celu zredukowania tego zjawiska można albo zwiększyć liczbę realizacji, albo też zastosować więcej niż jeden przebieg programu z różnymi wartościami początkowymi i przyjąć wyniki końcowe jako średnie arytmetyczne z rezultatów wszystkich przebiegów /podrozdział 8.2 /.

13. Porównanie wyników uzyskanych metodą symulacyjną z wynikami otrzymanymi przez zastosowanie linearyzacji Rżanicyna wykazało, że w przypadku wypierania gruntu spod podstawy przyczółka, różnią

się one zasadniczo. Należy uznać, że w tym przypadku metoda Rżanicyna nie powinna być stosowana (podrozdział 9.1).

14. Natomiast w przypadkach przesuwu, obrotów oraz wystąpienia osuwiska metoda symulacyjna i metoda Rżanicyna dały zbliżone rezultaty. Wniosek ten koresponduje z faktem otrzymania w tych przypadkach rozkładów zapasów stateczności zbliżonych do rozkładu normalnego (por. podrozdział 9.1).

15. Rozwinięcia Grama - Charliera i Edgewortha z wykorzystaniem jedynie pierwszych czterech momentów centralnych pozwalają otrzymać wiarygodne prawdopodobieństwa tylko w tych przypadkach, w których rozkłady zapasów stateczności nie różnią się zasadniczo od rozkładu normalnego (podrozdział 9.2).

16. W kontekscie projektowania istotne jest, że w przypadku wypierania gruntu spod podstawy przyczółka wartość współczynnika pewności S_5 obliczana dla srednich wartości poszczególnych zmiennych losowych może różnić się znacznie od wartości oczekiwanej zmiennej losowej S_5 (por. wniosek 12 w podrozdziale 7.2). Ponadto nawet w przypadku, gdy obie powyższe wartości są dość duże (np. większe niż 2,5) może istniec znaczne prawdopodobieństwo wypierania gruntu spod przyczółka (wniosek 12 - podrozdz. 7.2).

17. Warto zauważyć, że dla zastosowania opisanej tu procedury symulacyjnej znajomość sytuacji geotechnicznej podłoża przez inżyniera nie musi być istotnie większa niż w przypadku zwykłych obliczeń zalecanych przez normę [100]. Norma ta zaleca w takich przypadkach stosowanie tzw. metody A polegającej na oszacowaniu poszczególnych niezbędnych parametrów geotechnicznych bezposrenio na podstawie opracowania statystycznej analizy wyników pewnej ilosci próbek gruntu. Należy zatem jedynie zadbac, aby liczba przeprowadzonych badań geotechnicznych gruntu (prób) była wystarczająca do obróbki statystycznej i sporządzenia odpowiednich histogramów (por. także [23] i [24]).

Wnioski poznawcze 3,10 ÷ 13 oraz 15 ÷ 17 mają charakter ogólny, natomiast wnioski 4 ÷ 9 dotyczą prezentowanych w pracy przykładów obliczeniowych.Jednak zdaniem autora niniejszej pracy (ze względu między innymi na przeprowadzenie analizy dla więcej niż jednego przykładu) także i wnioski 4 ÷ 9 odzwierciedlają pewne prawidłowości i mogą pozostać słuszne dla wielu innych przykładów.

Metodyka zaproponowana w niniejszej pracy może być łatwo zaadaptowana do analizy probabilistycznej innych fundamentów masywnych, w szczególności - murów oporowych.

Sformułowana w podrozdziale 1.2 teza pracy brzmi:

Metoda symulacyjna stanowi dogodne narzędzie do wyznaczania prawdopodobieństw utraty stateczności masywnego przyczółka mostowego.Pozwala ona także na analizę wpływu losowej zmienności poszczególnych czynników na stateczność przyczółka.Przy stosowaniu tej metody pożytecznie jest korzystać z rozkładów wielokątnych jako rozkładów prawdopodobieństwa kąta tarcia wewnętrznego - ϕ, spójności - c,oraz ciężaru objętościowego - γ .

Z przedstawionych tu wniosków wynika,że powyższa teza jest uzasadniona.

LITERATURA

1 Alonso E., Risk analysis of slopes and its application to slopes in Canadian sensitive clays. Geotechnique 1976, 26 nr 3 s.453-472

2 Alonso E., Krizek R.J., Stochastic formulation of soil properties. Proc. of ICASP-2, Aachen, vol.2, s.9-32

3 Alonso E., Lloret A., Evaluation in time of the reliability of slopes in partially saturated soils, Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.2, s.1363-1376

4 Athanasiou-Grivas D., How reliable are present methods of slope failure prediction. Proc. of the 10th Int. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng.,Stockholm 1981, vol.3, s.427-430

5 Athanasiou-Grivas D., Harrop-Williams K., Joint Distribution of the Components of Soil Strenght. Proc. of ICASP-3, Sydney 1979, s.189-197

6 Asplund S.O., Probabilities of traffic loads on bridges. Proc. of ASCE, 1955, 585,81

7 Aurinet G., Bouvard D., Stochastic characteristics of granular soil structure. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.2 , s.1169-1180

8 Baghery S., Magnan J.P., Analyse probabiliste de la stabilite et des tasements des remblais du site experimental de Cubzac--les-Ponts, Ministere de l 'Urbanisme et du Logement Ministere des Transports. Laboratoire Central des Ponts et Chausses. Rapport de recherche. 1983, LPC, No 122

9 Baratta A., Non-linear truss reliability by the Monte-Carlo sampling. Proc. of ICASP-3, Sydney 1979 s.136-148

10 Barczenkow A.G., Wierojatnaja ocenka kwazistatisticzeskogo i dinamiczeskogo diejstwia podwiżnoj nagruzki na awtomobilnyje mosti. Pr. Nauk. Inst. Inż. Ląd. Pol. Wr. 1976 nr 17, Ser. Konf. nr 4 s.49-50

11 Bergado D.T., Anderson L.R., Stochastic analysis of earth slopes. Proc. of ICASP-4, Florence, vol.2, s.1377-1388

12 Benjamin J.R., Cornell C.A., Rachunek prawdopodobieństwa, statystyka matematyczna i teoria decyzji dla inżynierów. WNT, Warszawa 1977

13 Bielski R., Analiza niezawodności konstrukcji oporowej w ujęciu probabilistycznym. Praca doktorska, Gdańsk ,Pol.Gdańska, 1982

14 Biernatowski K., Stateczność fundamentów cz.I - Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa dla cechy współczynników bezpieczeństwa przy sprawdzaniu fundamentów. Arch. Hydrot., 1966, t.13 nr 2 s.239-262

15 Biernatowski K., Stateczność fundamentów cz.II - Stateczność na obrót i przesunięcia w ujęciu probabilistycznym, Arch. Hydrot 1966, t.13 nr 2, s.283-302

16a Biernatowski K., Stability of slopes in probabilistic solution. Proc. of 7th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Mexico, 1968, vol.2, s.527-530

16b Biernatowski K., Stateczność fundamentów cz.III - Stateczność fundamentów na wypieranie gruntu w ujęciu probabilistycznym, Arch. Hydrot. t.15, s.261-280

17 Biernatowski K., Stateczność fundamentów cz.IV - Kryteria stateczności fundamentów, Arch. Hydrot., 1969, t.16 s.209-217

18 Biernatowski K., Stability of slopes in variational and probabilistic solutions. Proc. of the 6th Europ. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. Wien 1976, s.3-7

19 Biernatowski K., Stability of rigid structures in probabilistic formulation. Proc. of the 5th Europ. Conf. on Soil Mech. and Found. Eng. Madrid 1972, vol.1, s.111-116

20 Biernatowski K., Margin of safety for slope stability. Proc. of ICASP-3, Sydney 1979, vol.2, s.431-436

21 Biernatowski K., Parametry geotechniczne w metodzie stanów granicznych. Mat. VI Kraj. Konf. Mech. Gruntów i Fund., Warszawa 1981, s.17-25

22 Biernatowski K., Metody statystyczne w geotechnice. Pr. Nauk. Inst. Geotech. PWr., nr 34, Wrocław, 1982, Ser. Monogr. nr 11.

23 Biernatowski K., Statystyczna charakterystyka środowiska geologiczno-inżynierskiego, Pr.Nauk.Inst.Geotech.PWr 1984 nr 44 Ser. Konf. nr 17, s.5-12

24 Biernatowski K., Kryteria statyczne charakterystyki geotechnicznej podłoża gruntowego. Mat. VII Kraj. Konf. Mech. Gruntów i Fund., Poznań 1984, s.139-144

25 Biernatowski K., Brząkała W., A stochastic model of subsoil deformations, Proc. of ICASP-4, Florence 1983, s.1389-1399

26 Biernatowski K., Puła W., Rozkłady statystyczne parametrów gruntowych do symulacyjnych badań bezpieczeństwa konstrukcji. Mat. VII Kraj. Konf. Mech. Gruntów i Fund., Poznań 1984, s.145-150

27 Biernatowski K., Rybak C., Sarniak W., Fundamentowanie, projektowanie. Wrocław, PWr., 1981

28 Biernatowski K., Nguyen Thi Phuong Thao, Parametry statystyczne charakterystyk geotechnicznych warstw gruntowych wybranego podłoża gruntowego. Mat. Kraj. Konf. Mech. Gruntów i Fund., Poznań 1984, s.151-156

29 Bjerager P., Skov K., Reliability of series systems using the Rackwitz-Fiessler Algorithm on the single mode safety margins. DIALOG 6-1982, Reliability theory of structural eng. systems, Danmarks Ingeniorakademi , Lyngby, s.47-78

30 Bjerager P., Ditlevsen O., Influence of uncertainty of local friction angle and cohesion on the stability of slope in Coulomb soil. Report presented at NATO Advanced Study Institute Reliability Theory and its Application in Structural and Soil Mechanics, Bornholm 1982

31 Björck A., Dahlquist G., Metody numeryczne. Warszawa PWN 1983

32 Bołotin W.M., Metody statystyczne w mechanice budowli. Warszawa, Arkady, 1978.

33 Bołotin W.M., Prediction of Enginnering System. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, s.851-866

34 Borowkow A.A., Rachunek prawdopodobieństwa. Warszawa, PWN 1971

35 Brameld H., A statistical formulation of highway bridge live loads. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.2, s.1073-1084

36 Brinch Hansen J., A revised and extended formula for bearing capacity. The Danish Geotech. Inst., Bull. Nr 28, Copenhagen 1970

37 Breitung K., An Asymptotic Formula for the failure probability DIALOG 6-82 Reliability theory of Structural Enginnering Systems, Danmarks Ingeniorakademi , Lyngby 1982, s.19-45

38 Breitung K., Asymptotic approximations for multinormal domain and surface integrals. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.2 s.755-767

39 Brząkała W., Losowość parametrów podłoża gruntowego. Arch. Inż. Ląd. t.27 , 1981 , z.4, s.599-606

40 Brząkała W., Pewne problemy brzegowe w ośrodku stochastycznym. Arch. Gór. t.28, z.1, 1983, s.117-133

41 Chen X., Lind N., Fast probability integration by three-parameter normal tail approximation. Struc. Saf., vol.1, No 4, September 1983, s.269-276

42 Cherubini C., Cottechia V., Renna G., Schiraldi B., The use of biveriete probability functions in Monte Carlo simulations of slope stability in soils. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.2, s.1401-1411

43 Chowdhury R.N., Athanasiou-Grivas D., Probabilistic model of failure of slopes. Proc. of ASCE, Journal of the Geotech. Eng. Div. vol.108, 1982 No GT6, s.803-819

44 Cornell C.A., Metody probabilistyczne pierwszego rzędu. W: Stochastyczna mechanika konstrukcji. Warszawa Oss.1973 , s.84-127

45 Corotis R.B., Azzouz A.S., Krizek R.J., Estimation of the mean for soil properties, and constrained modulus. Proc. of ICASP-2, Aachen 1975, vol.2 , s.273-293

46 Cramer H., Mathematical Methods of Statistics, Princeton Univ. Press. 1974

47 Dahlquist G., Björck A., Metody numeryczne, Warszawa PWN 1983

48 Dembicki E., Parcie, odpór i nośność gruntu. Warszawa Arkady 1979

49 Dembicki E., Tejchman A., Wybrane zagadnienia fundamentowania budowli hydrotechnicznych. Warszawa PWN 1981

50 Dobak P., Zmienność wartości parametrów geotechnicznych a kryteria wydzielania warstw geotechnicznych. Pr. Nauk. Inst. Geotech. PWr 1984 nr 44, Ser. Konf. nr 17, s.23-30

51 Eimer C., Podstawy teorii bezpieczeństwa konstrukcji. Rozpr. Inż. t.11, z.1 1963 s.53-135

52 Evangelista A., Pellegrino A., Vigogioni C., The influence of the variability of coarse grained materials properties on the stability of earth dams. Proc. of ICASP-2, Aachen 1975 vol.2 s.71-87

53 Feller W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa. Warszawa PWN 1978, t.2

54 Fiessler B., Neumann H., Rackwitz R., Quadratic Limit States in structural reliability. J. of the Eng. Mech. Div. ASCE, vol.105, 1979 EM4, s.661-676

55 First Order Reliability Concepts for Design Codes. Joint Committee on Structural Safety, CEB Bull. 112 PARIS 1976

56 Fisz M., Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Warszawa PWN 1969

57 Förster W., Weber E., Influences on the probability of failures of slopes. Proc. of the 10th Int. Conf. of Soil Mech. and Found. Eng. Stockholm 1982, vol.3, s.127-130

58 Fortran-biblioteka podprogramów, Elektroniczna maszyna cyfrowa Odra 1304, dokumentacja techniczno-naukowa, oprogramowanie. WZE Elwro 1971

59 Fredlund D., Krahn J., Variability in the engineering properties on natural soil deposits. Proc. of ICASP-4, Florence 1983 s.1017-1029

60 Greń J., Modele i zadania statystyki matematycznej. Warszawa PWN 1972

61. Harman D., Davenport A.G., Wong W.S., A statistical approach to traffic loading on bridges. Proc. of ICASP-4, vol.2, Florence 1983, s.1101-1112

62. Hasofer A.M., Lind N.C., Exact and invariant second-moment code format. J. of the Eng. Mech. Div. ASCE vol.100, EM1, 1974, s.111-121

63. Holtz R.D., Krizek R.J., Statistical evaluation of soil test data. Proc. of ICASP-1, Hong-Kong 1981, s.230-278

64. Ingles O., Soil variability, construction quality control and performance reliability. Proc. Univ. of New South Wales, Sydney 1980

65. Kaczmarczyk J., Proces utraty stateczności zbocza w statystycznie niejednorodnym gruncie. Kom. Inst. Geotech. PWr nr 169 Wrocław 1977. Praca doktorska

66. Kay J.N., Krizek R.J., Estimation of the mean for soil properties. Proc. of ICASP-1, Hong-Kong 1971, s.280-286

67. Kaźmierska E., Knabe W., Probabilistyczna analiza stateczności uwarstwionego zbocza po cylindrycznej powierzchni poślizgu metodą symulacji. W: Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w geotechnice, Wrocław Oss. 1982

68. Kluk K., Losowe modele obciążeń użytkowych mostów drogowych. Kom. Inst. Inż. Ląd. PWr 1981. Praca doktorska

69. Kluk K., Losowy model obciążenia mostu drogowego. Pr. Nauk. Inst. Inż. Ląd. PWr nr 29, Ser. Konf. nr 10 Wrocław 1982, s.221-228

70. Knabe W., Przewłócki J., Analiza stateczności zbocza uwarstwionego po cylindrycznej powierzchni poślizgu metodą estymacji wartości oczekiwanej i wariancji współczynnika stateczności. W: Zastosowanie rachunku prawdopodobieństwa w geotechnice. Wrocław, Oss. 1982, s.199-224

71 Kopociński B., Zarys teorii odnowy i niezawodności. Warszawa PWN 1973

72 Levi R., La securite des constructions, Recherche d 'une methode concrete. III Kongr. AIPC, Publ. Prel., Liege 1948

73 Levi R., Calculs probabilites de la securite des constructions. An. P.C., VII/VIII, 1949

74 Lambe T.W., Whitman R.V., Soil mechanics, New York, J.Wiley 1969

75 Lumb P., The variability of natural soils. Can. Geotech. J., vol.3, 1966, nr 2, s.74-79

76 Lumb P., Holt J., The undrained shear strength of a soft marine clay from Hong-Kong. Geotechnique 18, 1968, s.25-36

77 Lumb P., Safety factors and the probability distribution of soil strength. Can. Geotech.J., vol.7, 1970 nr 3, s.225-242

78 Lumb P., Precision and accuracy of soil tests. Proc. of ICASP-1 Hong-Kong 1971, s.330-345

79 Lumb P., Spatial variability of soil properties. Proc.of ICASP--2, Aachen 1975, s.397-421

80 Madsen H.O., Some experience with the Rackwitz-Fiessler algorithm for the calculation of structural reliability under combined loading. DIALOG-77, Dep. of Civil Engin., Danmarks Ingeniørakademi , Lyngby, Danmark, Feb. 1978, s.73-98

81 Maier M., Die Sicherheist der Bauwerke und ihre Berechnung nach Granzkräften anstatt nach zulässingen Spannungen. Springer-Verlag, Berlin 1926

82 Matsuo M., Ueno M., Prediction of slope slide by probability of failure. Proc. of ICASP-3, vol.2, Sydney 1979, s.449-458

83. McAnally P.A., Reliability of the bearing capacity design of shallow footings in sands. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, s.1545-1556

84. Mendera Z., Probabilistyczna teoria obciążeń budowli. W: Losowe obciążenia i nośność konstrukcji, Wrocław Oss. 1979

85. Meyerhof G.G., Safety factors in soil mechanics. Can. Geotech. J., vol.7 Nov. 1970, nr 4, s.349-355

86. Murzewski J., Bezpieczeństwo konstrukcji budowlanych. Warszawa, Arkady, 1970

87. Murzewski J., Probabilistyczne modele obciążenia mostów. Pr. Nauk. Inst. Inż. Ląd. PWr 1976 nr 17 Ser. Konf. nr 4, s.321-328

88. Murzewski J., Użyteczność i nośność losowa konstrukcji. W: Losowe obciążenia i nośność konstrukcji, Wrocław Oss. 1979, s.207-259

89. Murzewski J., Safety of complex structural systems. W: Analysis of random capacity of structures, Wrocław Oss. 1982, s.15-87

90. Murzewski J., Miary bezpieczeństwa i niezawodność konstrukcji mostowych, Pr. Nauk. Inst. Inż. Ląd. PWr 1982 nr 29, Ser. Konf. nr 10 s.267-273

91. Murzewski J., Evaluation of characteristic strenght of complex structural systems. DIALOG-6 -82, Reliability theory of structural eng. systems, Danmarks, Ingeniørakademi, Lyngby, 1982, s.129-142

92. Murzewski J., Distribution-based level-2 design. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.1, s.585-596

93. Murzewski J., Winiarz A., Obciążenie losowe konstrukcji jako funkcja stochastyczna z niezależnymi przyrostami. Mech. Teoret.I Stos. t.10, z.2 1972 s.441-448

94 Murzewski J., Sowa A., Zagadnienie statystycznej estymacji i weryfikacji. W: Losowe obciążenia i nośność konstrukcji, Wrocław Oss. 1979, s.261-301

95 Murzewski J., Sowa A., Zarys teorii niezawodności konstrukcji Kraków, Pol. Krak. 1983

96 Nguyen Thi Phuong Thao, Parametry statystyczne własności geotechnicznych wybranych warstw geologicznych podłoża gruntowego dla określonego rejonu m.Wrocławia, Pr.Nauk.Inst.Geotech.PWr 1984, nr 44, Ser. Konf. nr 17 s.85-95

97 Nowacki W., Mechanika budowli. Warszawa,PWN 1973

98 Orłowski W., Podpory kamienne , betonowe i żelbetowe mostów. Warszawa,Wyd. Komunikacyjne 1958

99 Oboni F., Bourdeau P.L., Determination of the critical slip surface in stability problems. Proc. of ICASP-4, Florence, 1983, s.1413-1424

100 PN-81/B-03020, Posadowienie bezpośrednie budowli

101 PN-82/B-02001, Obciążenia budowli-obciążenia stałe

102 PN-83/B-03010, Ściany oporowe. Obliczenia statyczne i projektowanie

103 Papantonopoulos C.J., An information theory approach to stability slope. Proc. of ICASP-3, vol.2, Sydney 1979, s.446-475

104 Papoulis, Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. Warszawa,WNT 1972

105 Parthasarathy K.R., Wwiedenie w teoriu wierojatnosti, Moskwa, Mir 1983

106. Pawłowski Z., Statystyka matematyczna, Warszawa, PWN 1975

107. Perkowski P., Technika symulacji cyfrowej. Warszawa,WNT 1980

108 Prot M., Note sur la notion de coeficient de securite. Ann. P.C., 7,2 1936

109 Puła W., Obliczanie prawdopodobieństwa stateczności masywnego przydzółka mostowego. Pr. Nauk. Inst. Geotech. PWr 1984 nr 44, Ser. Konf. nr 17, s.61-70

110 Rackwitz R., Fiessler B., Structural reliability under combined random load sequences. Com. and Struc. vol.9, 1978 s.489-494

111 Rossiński B., Fundamentowanie. Warszawa Arkady 1969

112 Rżanicyn A.R., Opredelenie zapasa procznosti sooruženii, Stroit. Prom. 1947, nr 8

113 Rżanicyn A.R., Mietod opredelenia dopuskajemych nagruzok na sooružeenia. Issledowatielskije raboty po inżyniernym konstrukcjam (red.Burgman W.W.) 1949

114 Rżanicyn A.R., K problemie rasczotow sooruženi na bezopastnost. W: Waprosy biezopastnosti i procznosti stroitelnych konstrukcji, 1952

115 Schultze E., Frequency Distributions and corelations of soil properties. Proc. of ICASP-1 , Hong-Kong 1971, s.371-387

116 Schultze E., Some aspects concerning the application of statistics and probability to foundation structures. Proc. of ICASP-2, vol.2, Aachen 1975, s.457-493

117 Singh A., How reliable is the factor of safety in foundation engineering. Proc. of ICASP-1, Hong-Kong 1971, s.390-424

118 Sobczyk K., O stochastycznych modelach ośrodków niejednorodnych. Pr. Nauk. Inst. Geotech. PWr nr 24 1971 Ser. Konf. nr 9, s.17-28

119 Stomatopuolos A.C., Kotzias P.C., The relative value of increasing number observations. Proc. of ICASP-2, Aachen 1975 vol.2, s.495-510

120 Stephenson H.K., Highway bridge live loads based on laws of chance. Proc. of ASCE, vol.83, No ST4, 1957

121 Stoyan D., Förster W., Weber E., On the probability of failure of slopes. Proc. of ICASP-3, Sydney 1979, vol.2, s.459-465

122 Strielecki N.S., K woprosu obszczego koefficienta bezopastnosti. Projekt i standard. Nr 10, 1935

123 Strielecki N.S., Osnowy statisticzeskiego uczeta koefficienta zapasa proczností sooruženii. Strojizdat 1947

124 Szczepankiewicz E., Pewne klasy pól losowych i ich zastosowanie. Pr. Opolskiego Towarzystwa Przyjaciół Nauk PAN, 1981

125 Takaoka P.N., Reliability analysis of highway bridges subjected to vehicular loads using theory of random processes and simulation method. DIALOG-6-82, Danmarks Ingeniørakademi Lyngby 1982, s.185-213

126 Takaoka P.N., Reliability analysis of structures. W: Analysis of random capacity of structures. Wrocław Oss. 1982, s.89-135

127 Vanmarcke E., Probabilistic modeling of soil profiles. J. of the Geotech. Eng. Div. Proc. ASCE, vol.103 1977 ,GT11, s.1227-1245

128 Vanmarcke E., Reliability of earth slopes. J. of the Geotech. Div. Proc. ASCE, vol.103 1977 , GT11, s.1247-1265

129 Vanmarcke E., Efficient modeling of random media, W: Analysis of random capacity of structures, Wrocław Oss. 1982, s.197-246

130 Wentzell A.D., Wykłady z teorii procesów stochastycznych. Warszawa PWN 1980

131 Wierzbicki W., Bezpieczeństwo budowli jako zagadnienie prawdopodobieństwa. Prz. Tech., 1936 , s.690

132 Wilde P., Modele dyskretne pól losowych podłoża. Pr. Nauk. Inst.Geotech. PWr nr 24, 1977 Ser.Konf. nr 9, Wrocław 1977 s.5-16

133 Wilde P., Dyskretyzacja pól losowych w obliczeniach inżynierskich. Warszawa PWN 1981

134 Wiłun Z., Zarys geotechniki. Warszawa WKiŁ 1976

135 Wu T., Kraft L.M., The probability of foundation safety. J. of the Soil Mech. and Found. Eng. Div. Proc. ASCE, vol.93 1967 , Nr SM5, s. 213-231

136 Wu T., Kraft L.M., Safety analysis of slopes. J. of the Soil Mech. and Found. Eng. Div. Proc. ASCE, vol.96 1970 No SM2

137 Wysokowski A., Mańko Zb., Zasady oceny rezerwy trwałości eksploatacyjnej mostów stalowych. Mat. Konf. SITK Metody badań i oceny stanu technicznego mostów stalowych, Gdańsk 1984 /w druku/

138 Yücemen M.S., Three-dimensional reliability of earth slopes under seismic loads. DIALOG6-82, Euromech155, Reliability theory of structural engineering systems, Danmarks Ingeniørakademi Lyngby 1982

139 Yücemen M.S., Tang W.H., Long term stability of soil slopes - - a reliability approach. Proc. of ICASP-2, Aachen 1975, vol.2 s.215-229

140 Zieliński R., Metody Monte Carlo, Warszawa WNT 1970

141. Zieliński R., Tablice statystyczne. Warszawa PWN 1972

142 Zieliński R., Generatory liczb losowych. Warszawa WNT, 1979

Uzupełnienia :

143 Cornell C.A., First order uncertainty analysis of soil deformation and stability. Proc. of ICASP-1, Hong-Kong 1971, s.130-144

144 Yücemen M.S., Vanmarcke E.H., Three-dimensional reliability analysis of earth slopes. Proc. of ICASP-4, Florence 1983, vol.1, s.197-210

145 Wilde P., Sulikowska I., Uwzględnienie błędu pomiaru w ocenie rozkładu prawdopodobieństwa granicy plastyczności. Pr. Nauk. Inst. Geotech. PWr nr 44 Ser. Konf. nr 17, s.97-102

146 Freudenthal A.M., Safety and the probability of structural failure. Proc. of ASCE, 468, 80, 1954

Wojciech Puła

PROBABILISTYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI MASYWNYCH PRZYCZÓŁKÓW MOSTOWYCH METODĄ SYMULACYJNĄ

Streszczenie

Przedstawiono probabilistyczną analizę stateczności masywnych przyczółków mostów drogowych z geotechnicznego punktu widzenia. Rozważono pięć przypadków - kryteriów utraty stateczności: przesunięcie, obrót wokół najbardziej obciążonej krawędzi podstawy, obrót wokół powierzchni cylindrycznej, wystąpienie uskoku naziomu oraz wypieranie gruntu spod podstawy przyczółka. Jako miarę stateczności w poszczególnych przypadkach przyjmuje się zapas stateczności rozumiany jako różnica sił (lub momentów) przeciwstawiających się utracie stateczności oraz sił powodujących utratę stateczności, a także współczynnik pewności, będący ilorazem tych wartości. Za zmienne losowe przyjęto kąt tarcia wewnętrznego, spójność oraz ciężar objętościowy w każdej warstwie geotechnicznej, a ponadto reakcję od obciążeń pojazdami przejeżdżającymi przez most. Podano propozycję charakteryzowania parametrów gruntowych przez zmienne losowe o rozkładach wielokątnych, którą poparto statystycznymi testami zgodności. Ponadto przedyskutowano sposoby estymacji parametrów rozkładu wielokątnego przy posiadanych wynikach prób statystycznych poszczególnych parametrów geotechnicznych. Na podstawie propozycji przedstawionych w dostępnej literaturze przyjęto, że reakcja przyczółka od obciążeń pojazdami jest zmienną losową o rozkładzie Frecheta (dla maksimów). Do obliczenia prawdopodobieństw utraty stateczności w poszczególnych przypadkach zastosowano metodę symulacyjną, co podyktowane było dużą liczbą rozpatrywanych zmiennych losowych oraz skomplikowanymi zależnościami funkcyjnymi pomiędzy poszczególnymi zmiennymi losowymi w wyrażeniach na zapasy stateczności. Dodatkowo metoda ta daje możliwość przybliżonego wyznaczenia rozkładów prawdopodobieństwa poszczególnych zapasów stateczności.

Opracowano generator liczb pseudolosowych o rozkładach wielokątnych charakteryzujący się dużą efektywnością w porównaniu z generatorami innych rozkładów oraz program na maszynę cyfrową pozwalający na obliczenie prawdopodobieństw utraty stateczności w poszczególnych przypadkach, całkowitego prawdopodobieństwa utraty stateczności przez przyczółek i przybliżone wyznaczenie rozkładów zapasów stateczności lub współczynników pewności.

Następnie przedstawiono szereg przykładów obliczeniowych, które potwierdziły skuteczność zastosowanej metody, przydatność użytych rozkładów wielokątnych oraz pozwoliły na sformułowanie szeregu wniosków poznawczych dotyczących wpływu losowości poszczególnych parametrów na prawdopodobieństwa utraty stateczności i rozkłady zapasów stateczności (współczynników pewności). Wykazano decydujący wpływ losowości kąta tarcia wewnętrznego w warstwie gruntowej zalegającej bezpośrednio podpodstawą przyczółka. Ponadto wskazano na **nieprzadatność** prostego modelu szeregowego do probabilistycznej analizy masywnych przyczółków.

Przedyskutowano także dokładność rezultatów otrzymanych metodą symulacyjną, zwracając uwagę na niezbędną dla zadanej dokładności liczbę realizacji (dokonano odpowiednich oszacowań) oraz na problem wpływu parametrów początkowych generatora liczb pseudolosowych na wyniki końcowe.

W celu porównania przeprowadzono (dla jednego z analizowanych przykładów) obliczenia metodą linearyzacji Rżanicyna oraz metodą rozwinięć szeregowych Grama-Charliera i Edgewortha. W przypadku wypierania gruntu spod podstawy przyczółka prawdopodobieństwo obliczone metodą symulacyjną różniło się znacznie od obliczonego metodą Rżanicyna.

Wojciech Puła

THE PROBABILISTIC ANALYSIS OF A MASSIVE BRIDGE ABUTMENTS STABILITY USING SIMULATION METHOD

Summary

The probabilistic analysis of massive abutments of road bridges stability from geotechnical viewpoint is presented in this paper. Five cases of the loss of stability of a massive abutment have been analysed: occurence of shifting, rotation around the point, rotation along a cylinder surface, rotation along the most dangerous slip surface and bearing capacity exceeding. As a measure of stability the safety margin, which is a difference between the forces (moments of forces) counteracting the loss of stability and forces tending the loss of stability and the factor of safety - ratio of this two kinds of forces - are applied.

As random variables the angle of internal friction, cohesion and the unit weight in each geotechnical layer are treated. The reaction of the abutment under random traffic loads on the bridge is the additional random variable. The polygonal probability disrtibutions for random variables, which characterized geotechnical properties are proposed. This proposition is verified by statistical tests for some cases of real investigations of soil properties. Some cases of the estimation of parameters of the polygonal distribution, when the empirical distribution function is known, are discussed. The random reaction of an abutment has Frechet distribution (extreme value type II).

For the calculation of the probability of the loss of stability in every case the simulation method is applied. The reason of using this method was large quantity of random variables and complicated functional dependence between random variables in expressions for safety margins and safety factors. Additionally using the simulation method gives a possibility to evaluate probability distributions of safety margins. The random number generator for polygonal distribution is constructed in this paper. This generator is more effective then generators for many popular distributions. This generator is applied in special computer program, which can calculate probability of the loss of stability in five cases, general probability of the loss of stability and evaluate probability distributions of safety margins and factors of safety.

There are many calculation examples in this paper. These examples have proved the efficency of the simulation method to probabilistic analysis of massive abutments stability. Also the usefulness of polygonal distributions was proved. The examples considered have allowed to formulate some conclusions connected with randomness of geotechnical parameters of subsoil and probability distributions of safety margins. The most important is the randomness of the angle of internal friction in the geotechnical layer, which occurs just below the base of the abutment. It is checked by calculation that the simple series reliability model should not be applied to this analysis.

The accurancy of the results obtained by simulation was discused, namely the number of realisations in simulation process necessary for desired accurancy was evaluated and some problems connected with the influence of initial parameters of random number generator on final results were presented.

For comparisan of results (for one of the numerical examples analysed) the Rzanicyn's linearization, the Gram-Charlier's expension and the Edgeworth's expansion also were used. In the case of bearing capacity exceeding the results obtained by simulation and by the Rzanicyn's method were significantly different.

Wykaz odbiorców

		ilość egzemplarzy
1.	Prof. dr hab. inż. Kazimierz Biernatowski-promotor	1
2.	Recenzenci	2
3.	Prof. dr P. N. Takaoka, Tottori Unicersity, Japonia	1
4.	Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
5.	Biblioteka Instytutu Geotechniki Politechniki Wrocławskiej	1
6.	Autor	4
	Razem	10

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raporty serii PRE nr

PROBABILISTYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI MASYWNYCH PRZYCZÓŁKÓW MOSTOWYCH METODA SYMULACYJNA

Wojciech Puła

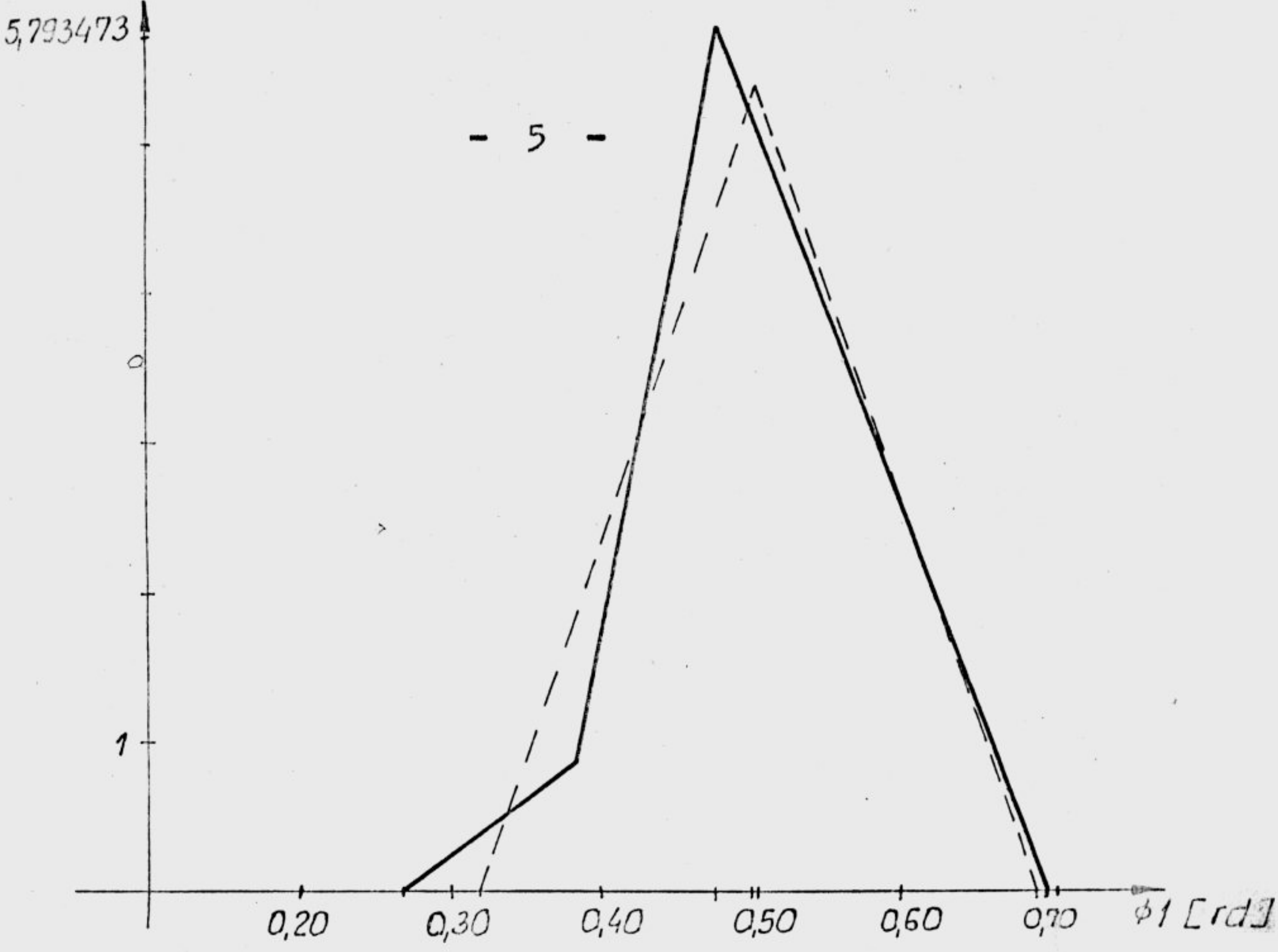
Załącznik do pracy doktorskiej
nr 1

Rysunki dotyczące rozkładów prawdopodobieństwa występujących w przykładach obliczeniowych

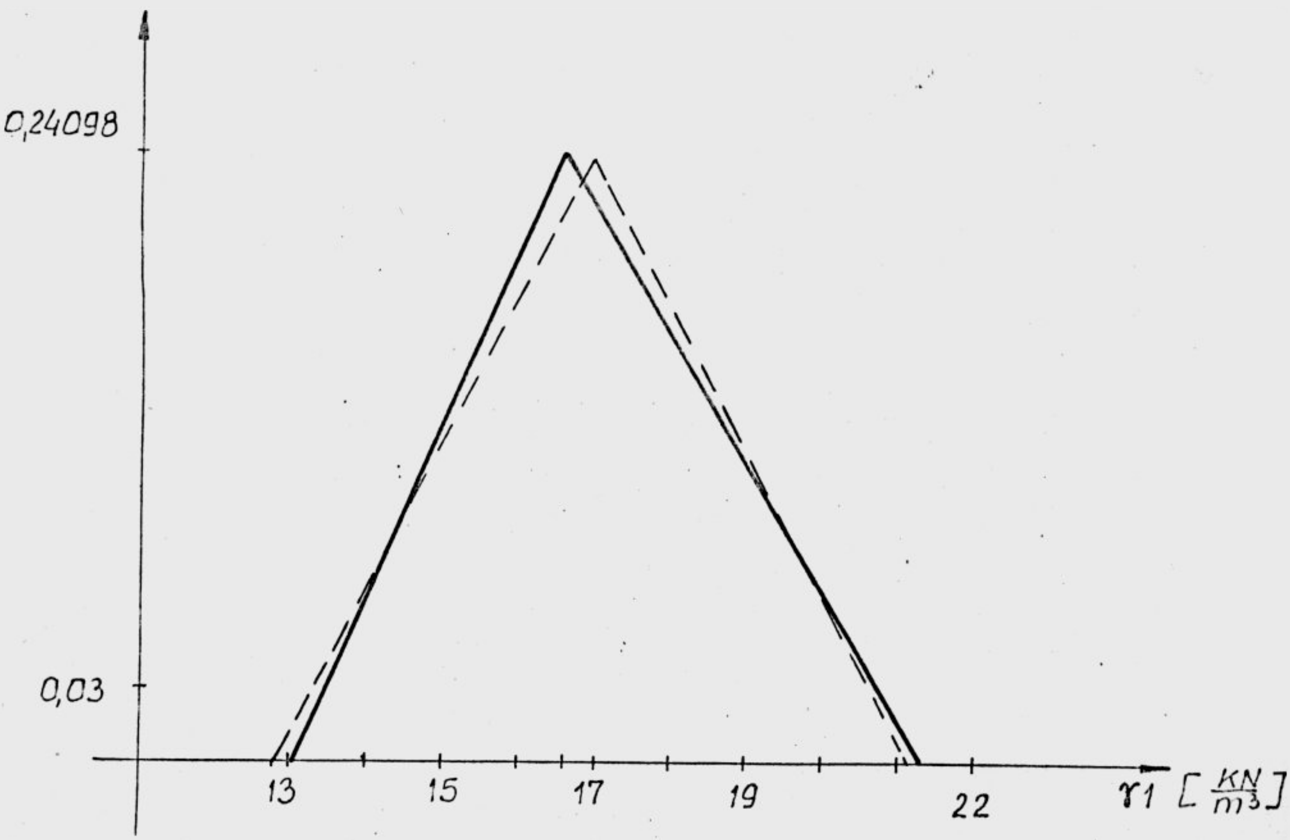
Wrocław 1984

SPIS RYSUNKÓW

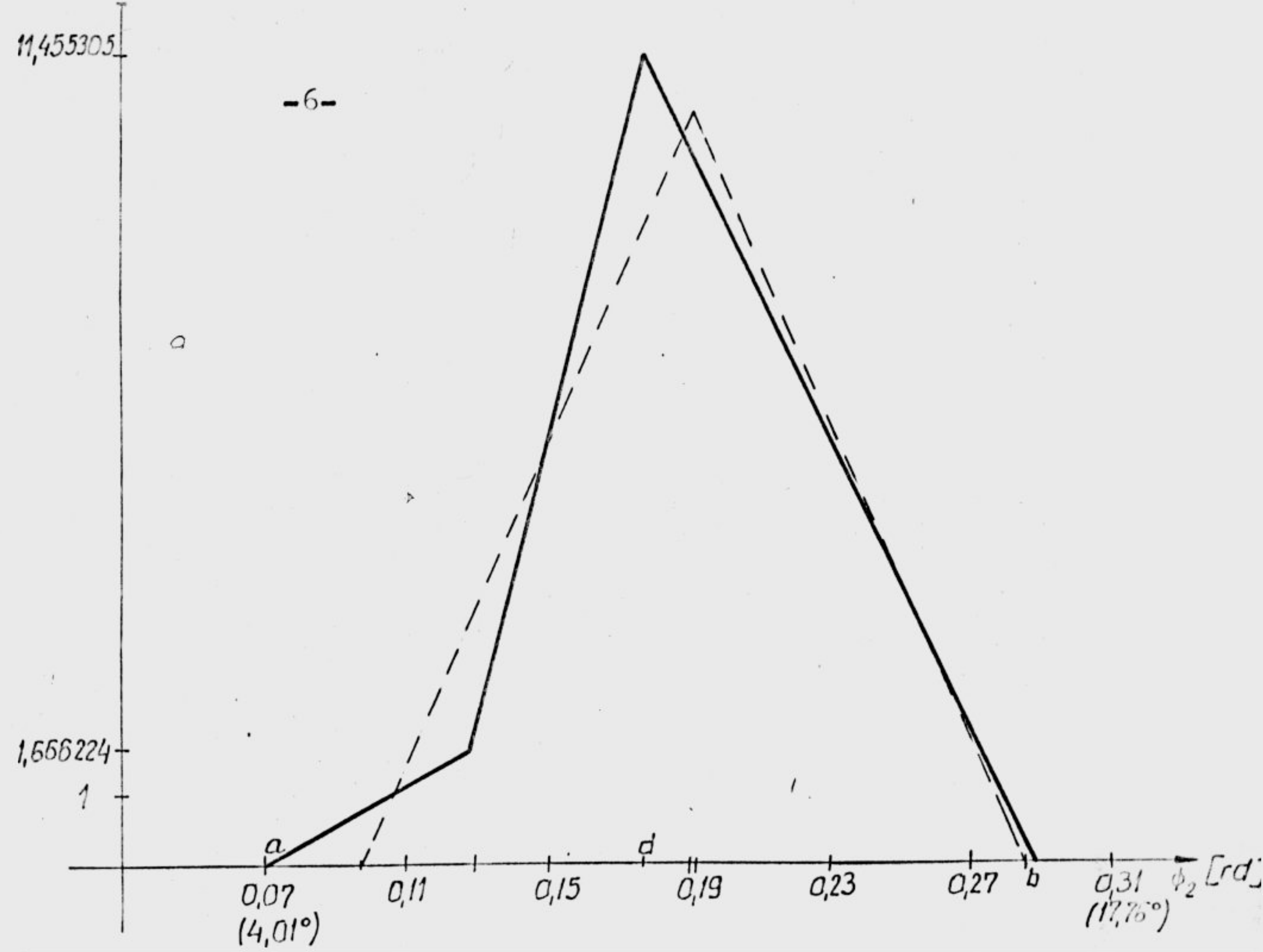
RYSUNEK Str.



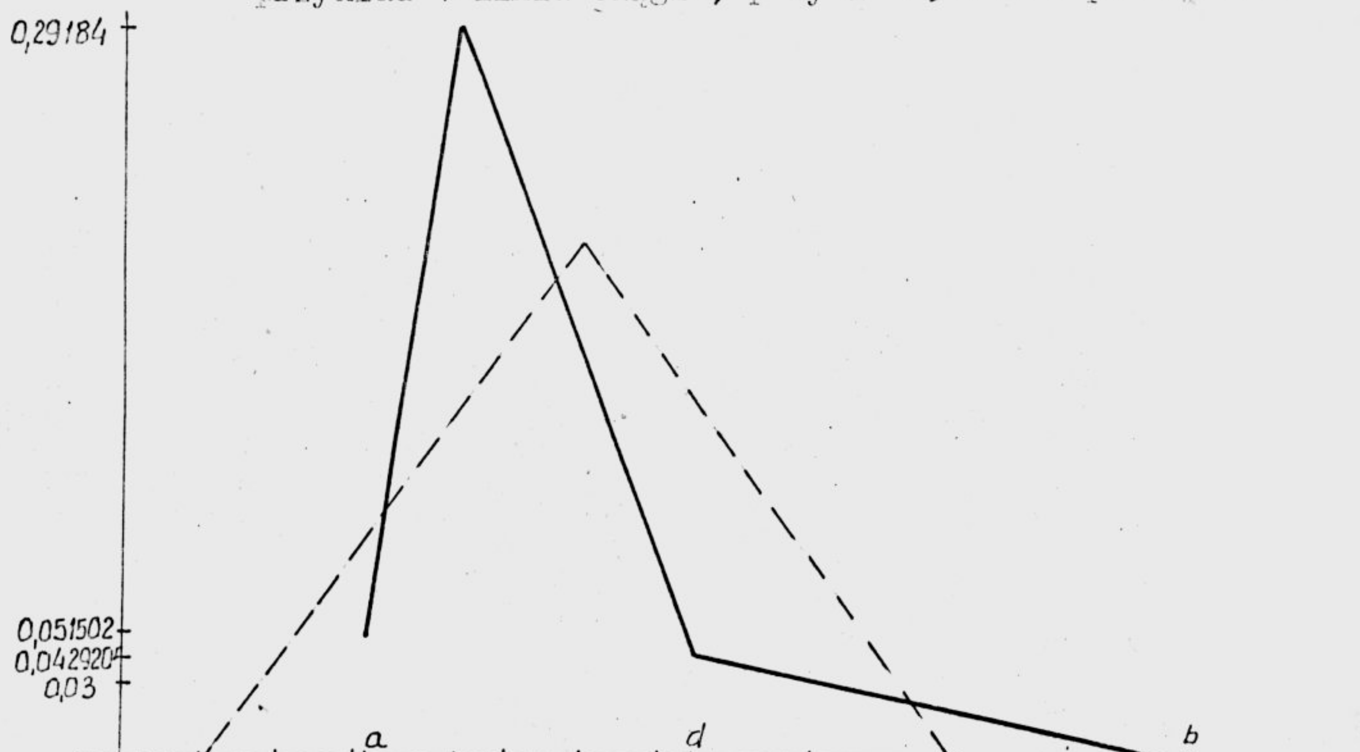
Rys.Z.1.Wykres gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ϕ_1
przykład 1-linia ciągła; przykład 9-linia przerywana



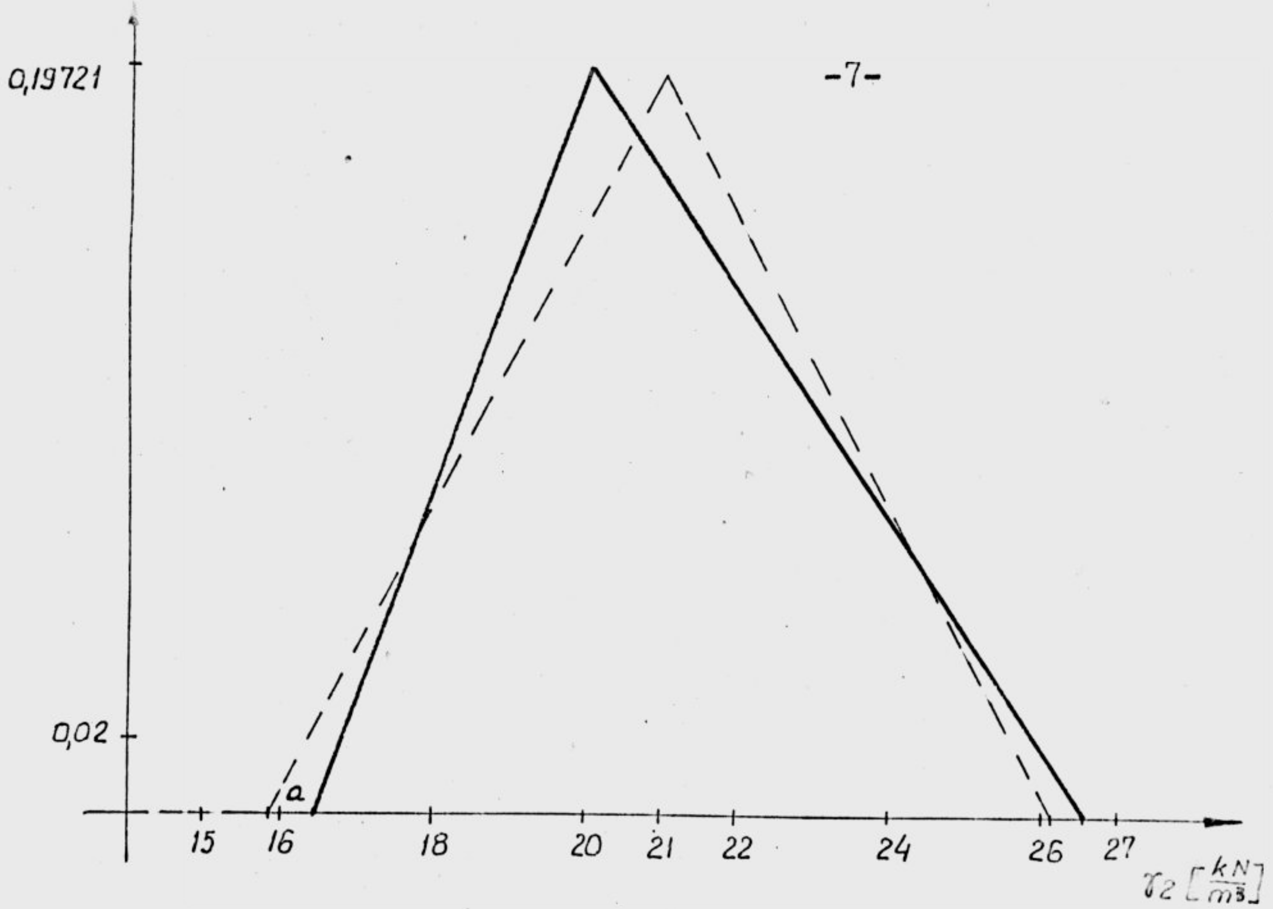
Rys.Z.2.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej γ_1
przykład 1-linia ciągła; przykład 9-linia przerywana



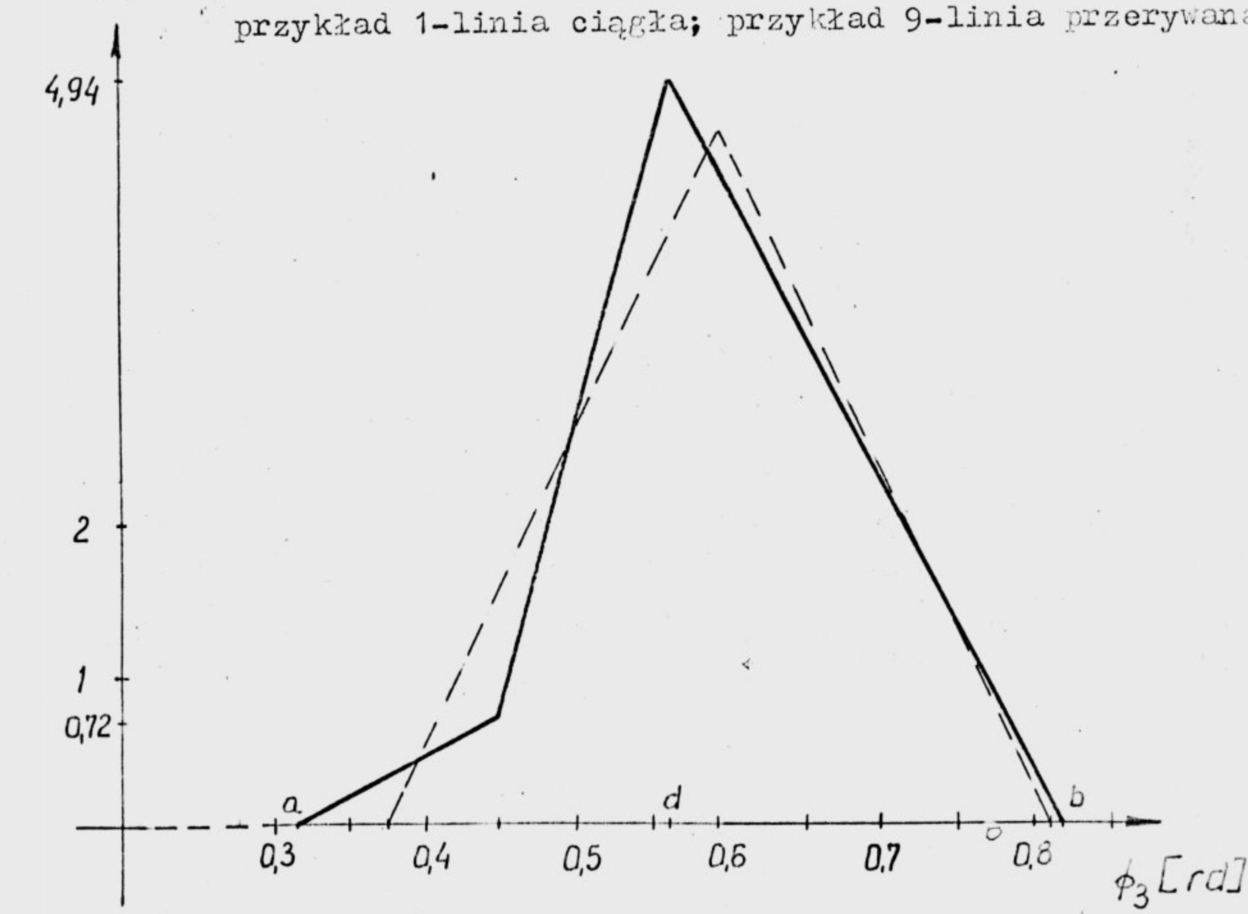
Rys.Z.3.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej ϕ_2
przykład 1-linia ciągła; przykład 9-linia przerywana



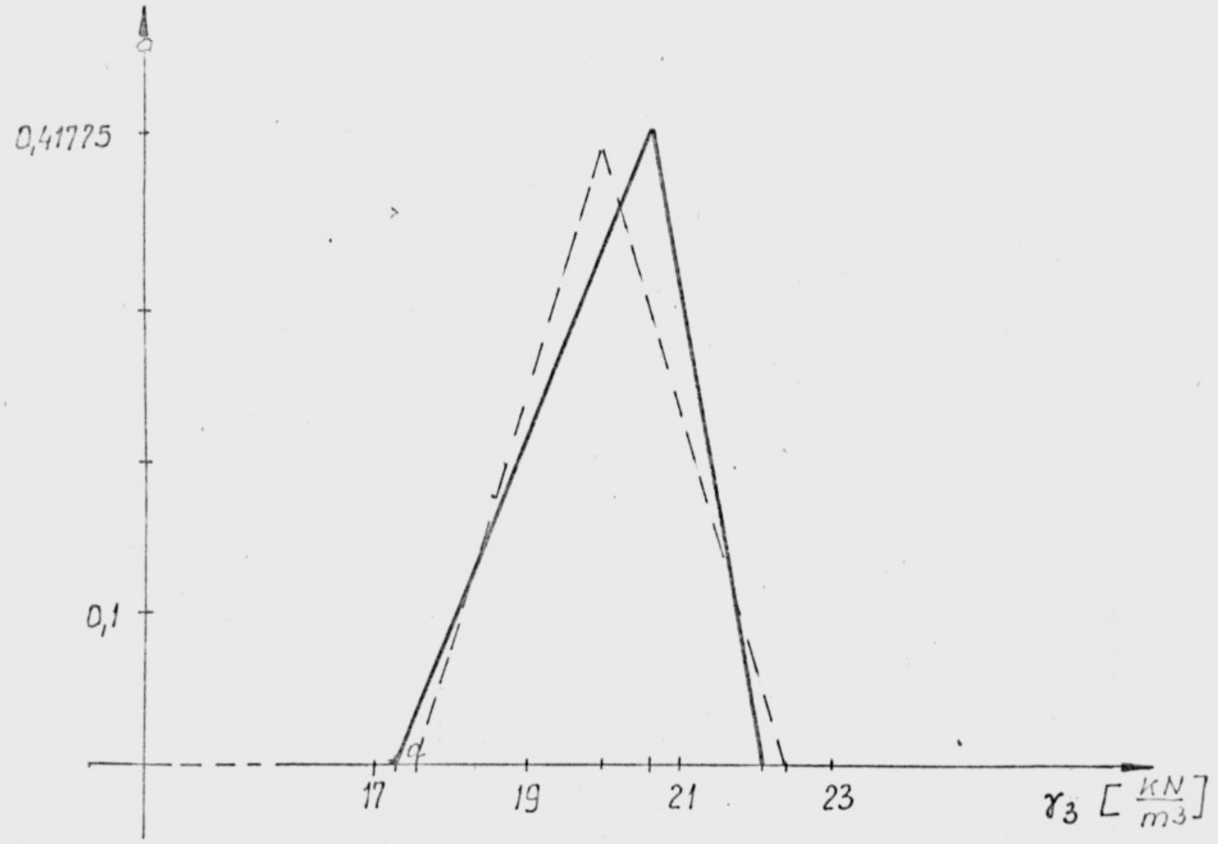
Rys.Z.4.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej c
przykład 1-linia ciągła; przykład 9-linia przerywana



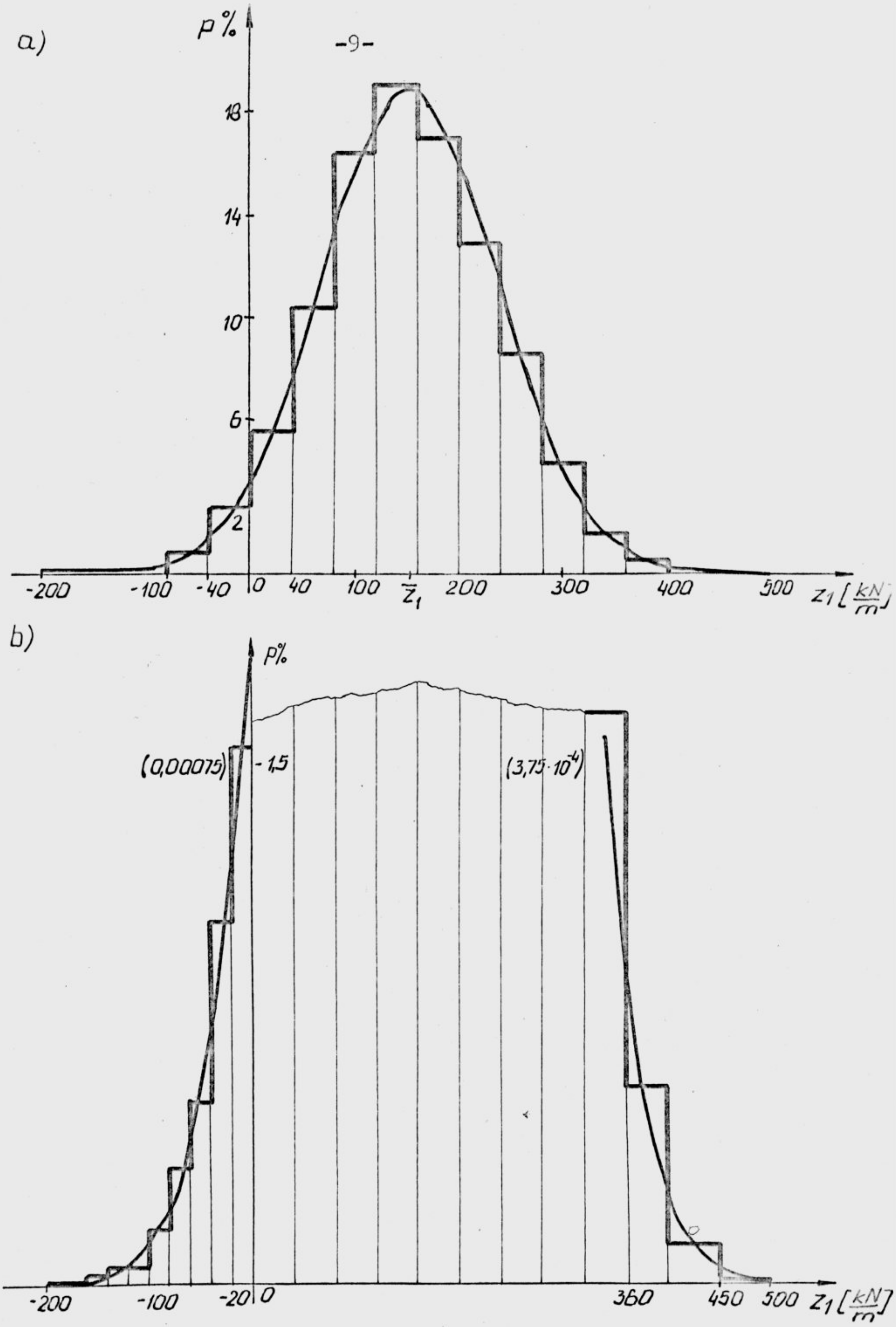
Rys.Z.5.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej γ_2
przykład 1-linia ciągła; przykład 9-linia przerywana



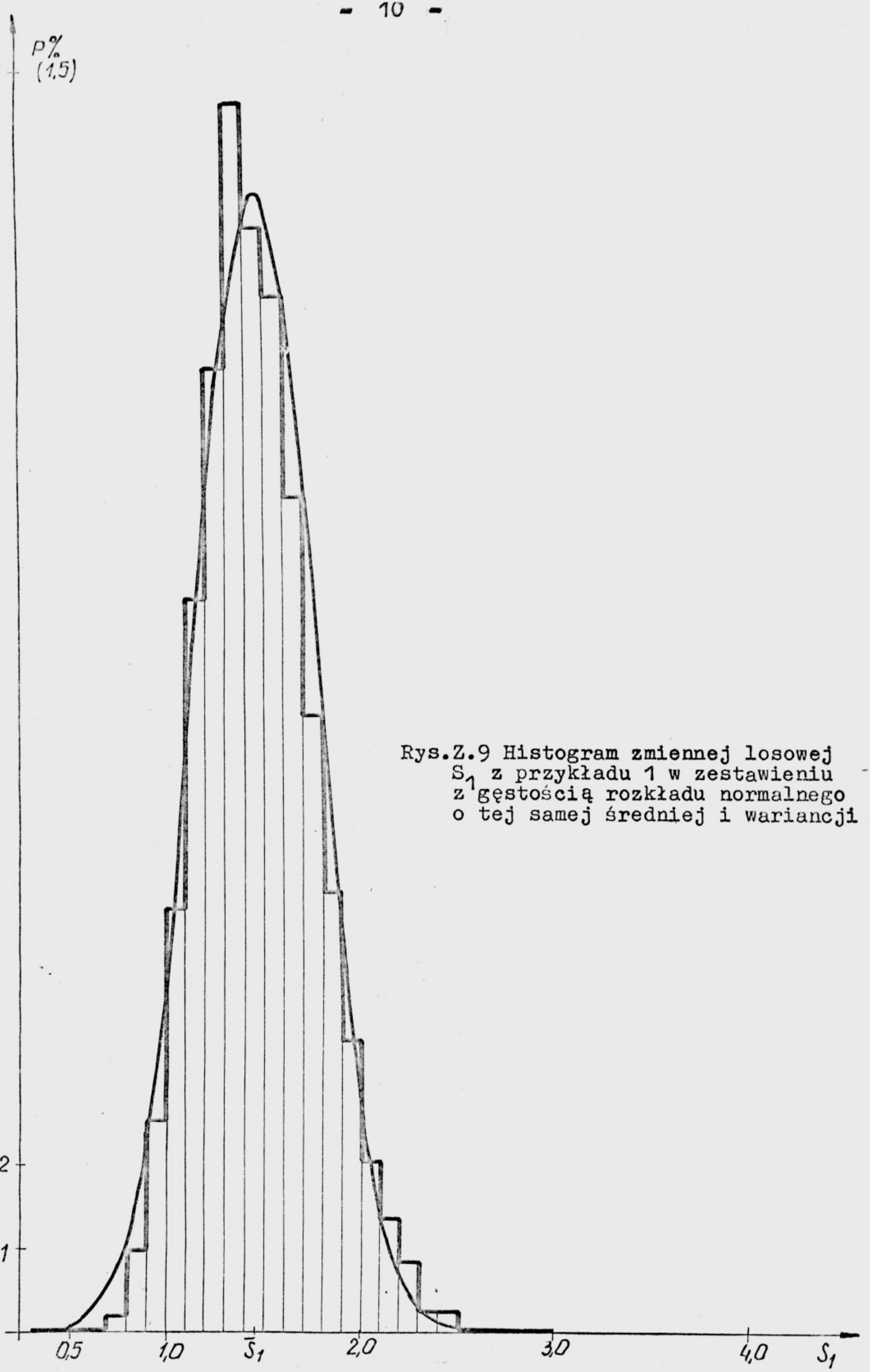
Rys.Z.6.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej
ϕ_3 przykład 1-linia ciągła;przykład 9-linia przerywana



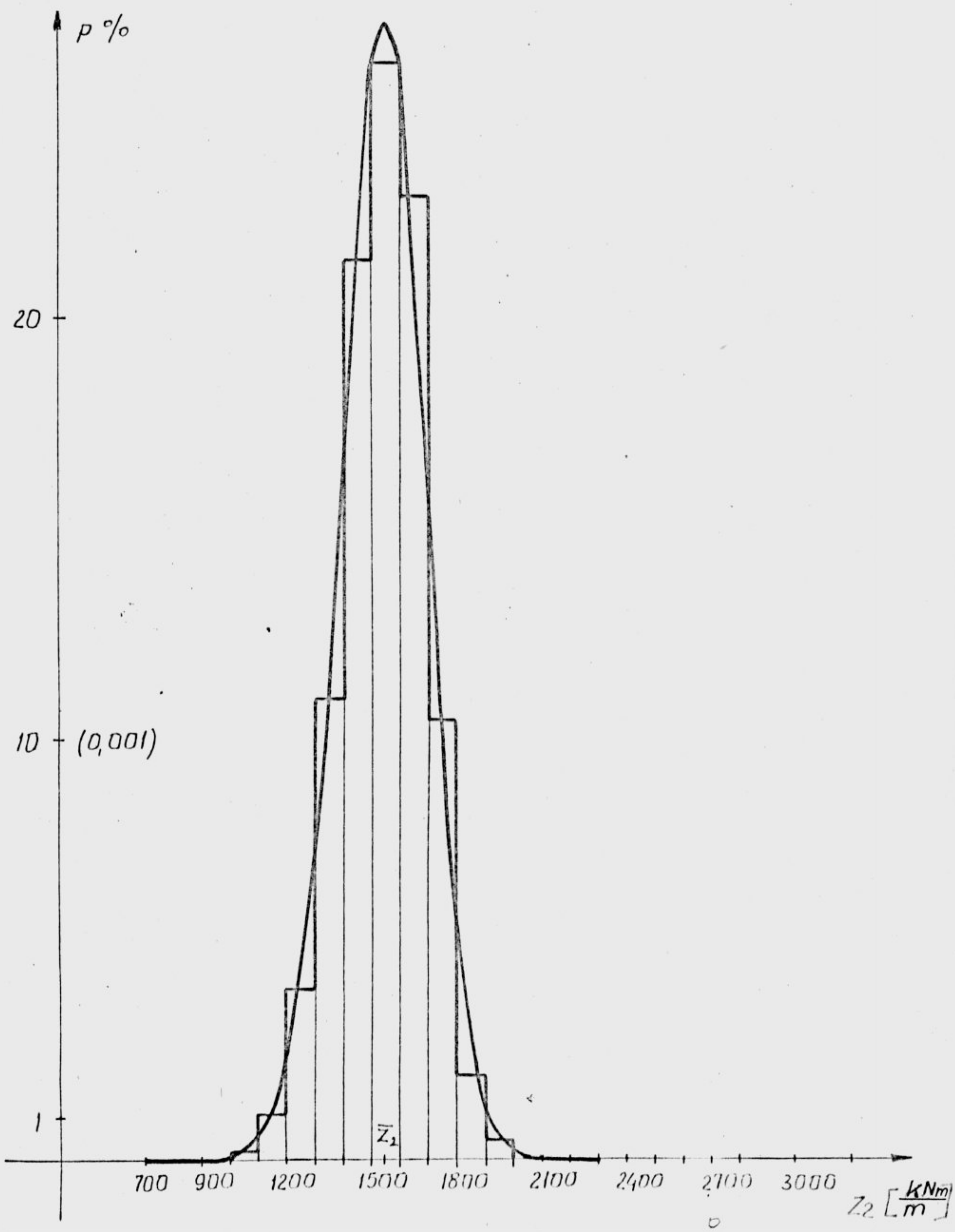
Rys.Z.7.Wykresy gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej γ_3
przykład 1-linia ciągła;przykład 9-linia przerywana



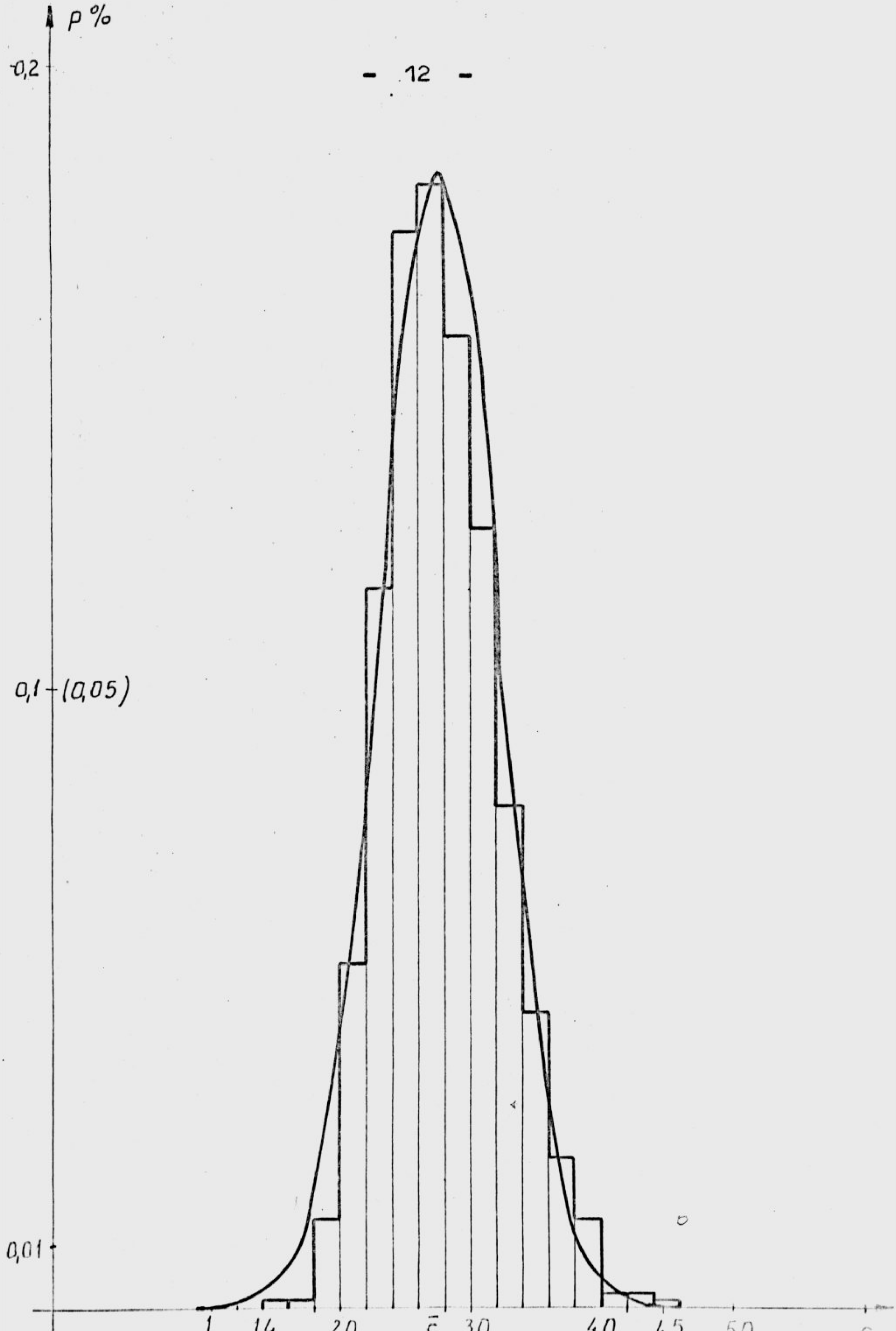
Rys.Z.8.a) Histogram zmiennej losowej Z_1 w przykładzie 1 oraz gęstość rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji. b) Histogram Z_1 w przykładzie 1 dla skrajnych wartości tej zmiennej.



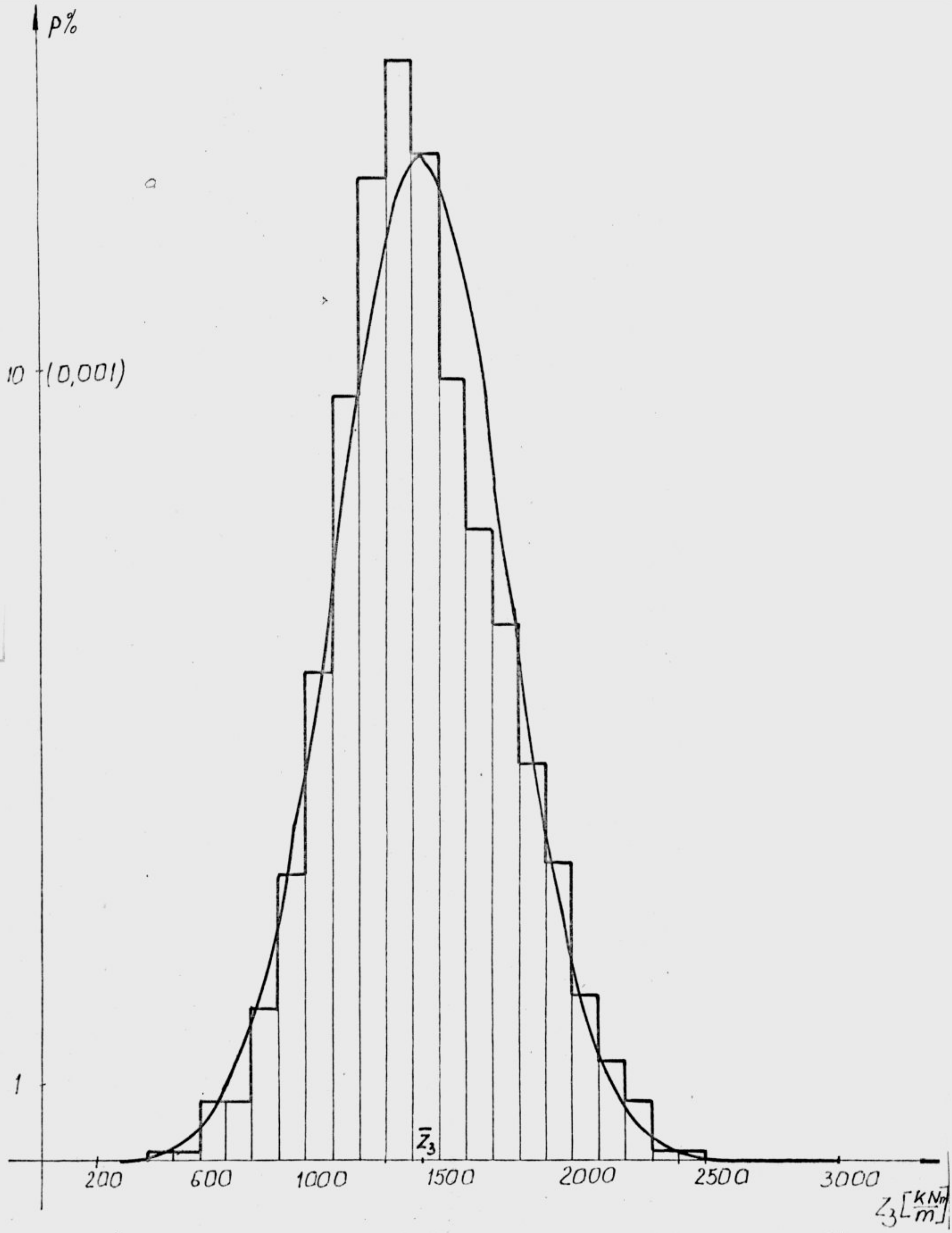
Rys.Z.9 Histogram zmiennej losowej S_1 z przykładu 1 w zestawieniu z gęstością rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji



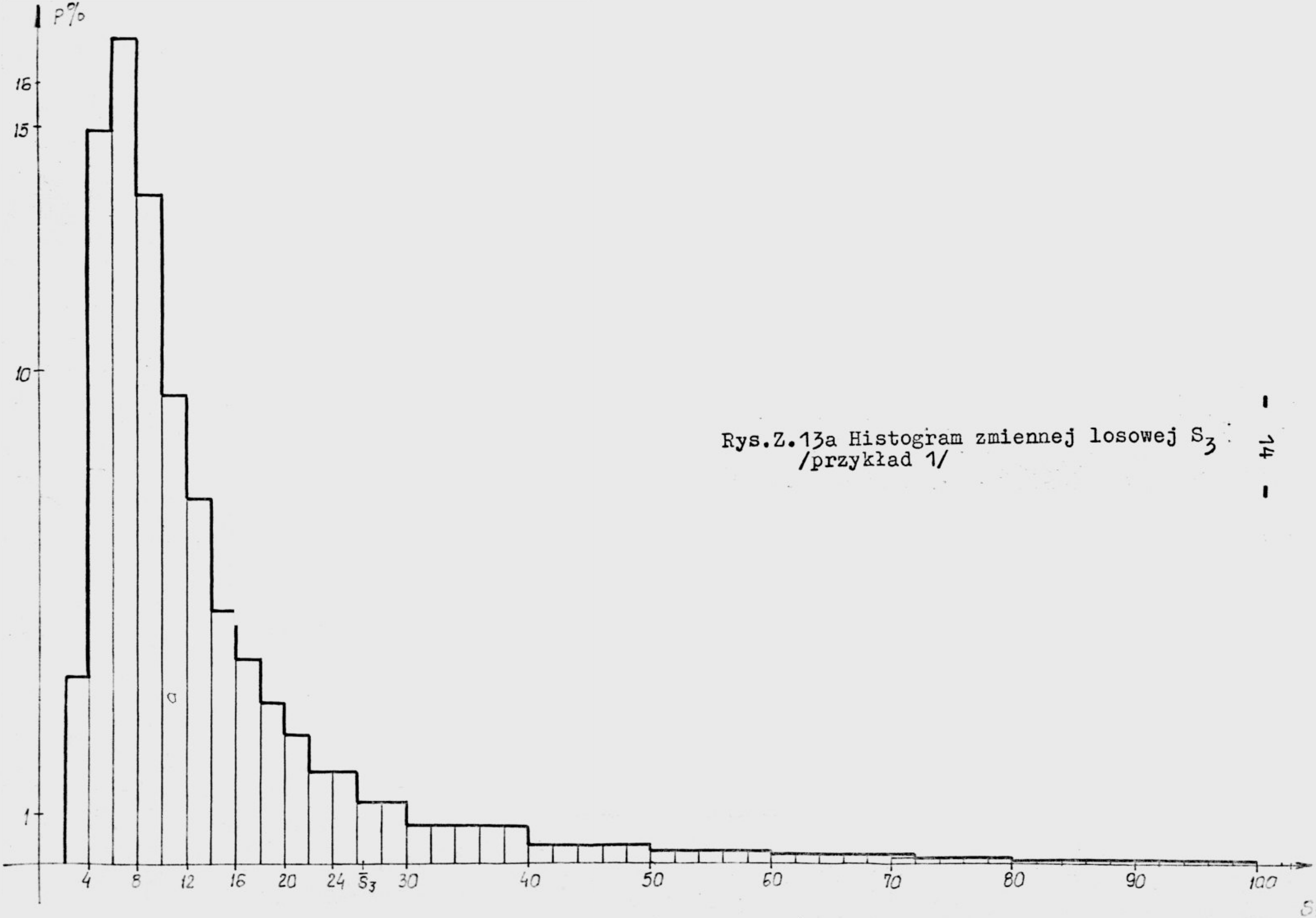
Rys.Z.10 Histogram zmiennej losowej Z_2 w przykładzie 1 oraz gęstość rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji



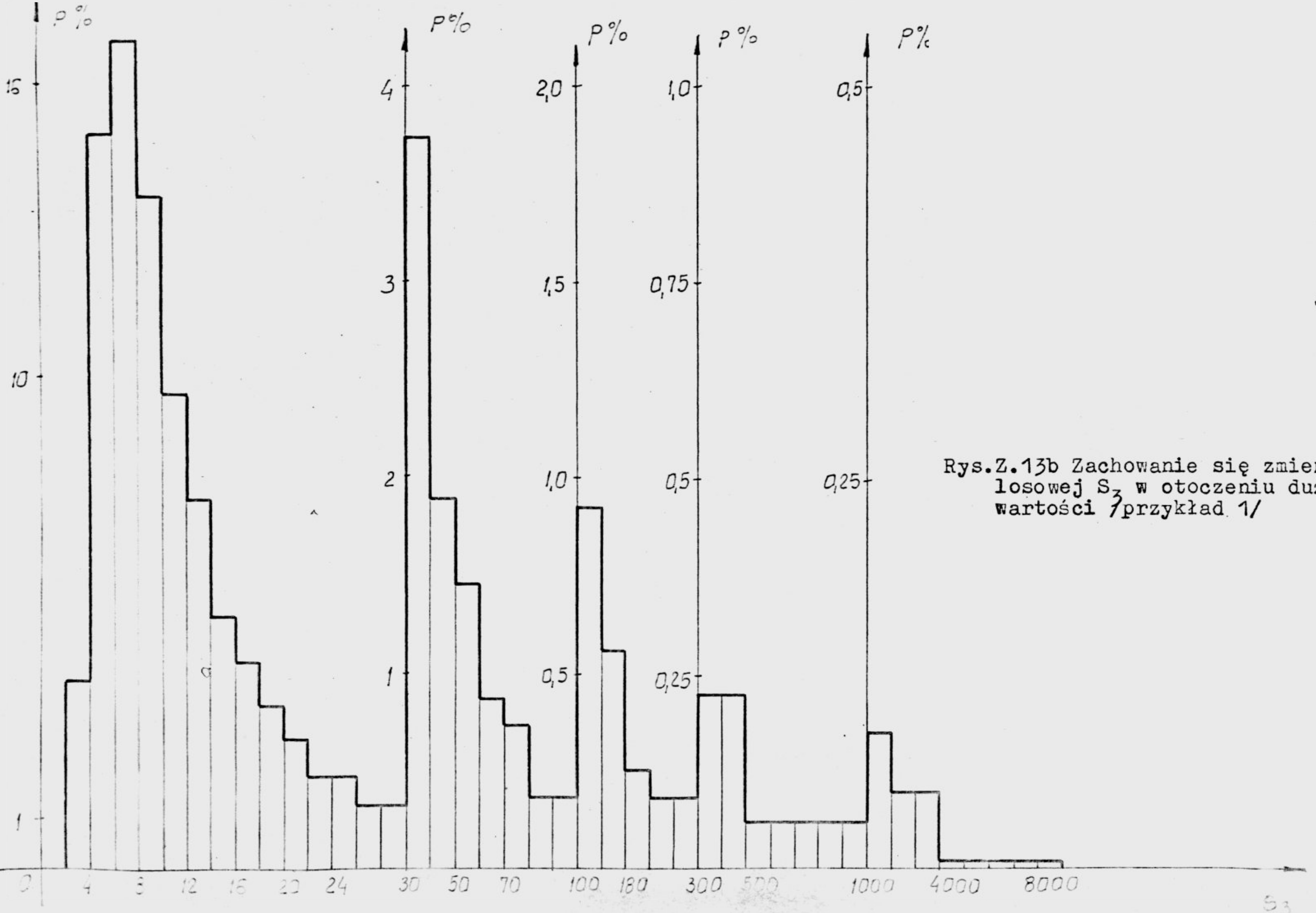
Rys.Z.11 Histogram zmiennej S_2 /przykład 1/ i odpowiednia gęstość rozkładu normalnego



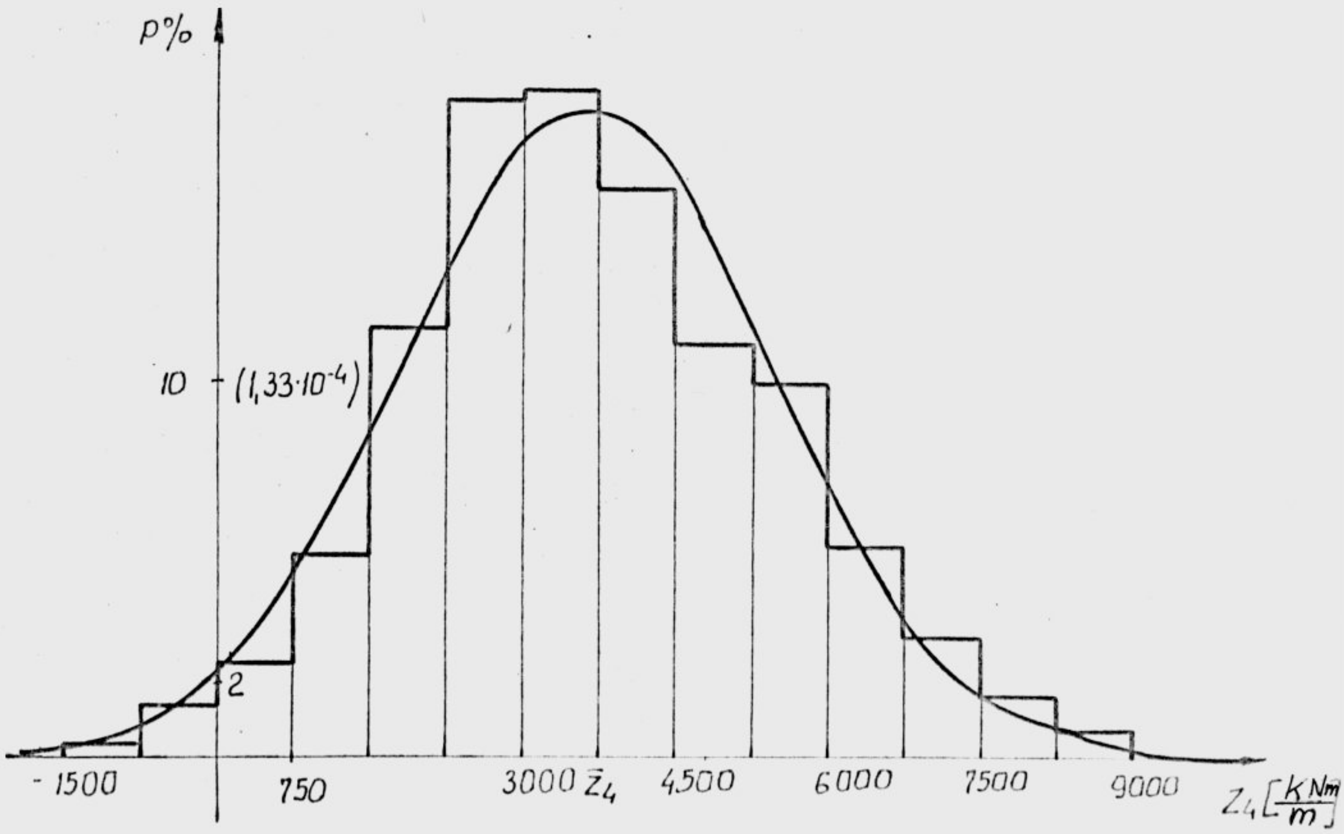
Rys.Z.12 Histogram zmiennej losowej Z_3 /przykład 1/ i odpowiednia gęstość rozkładu normalnego

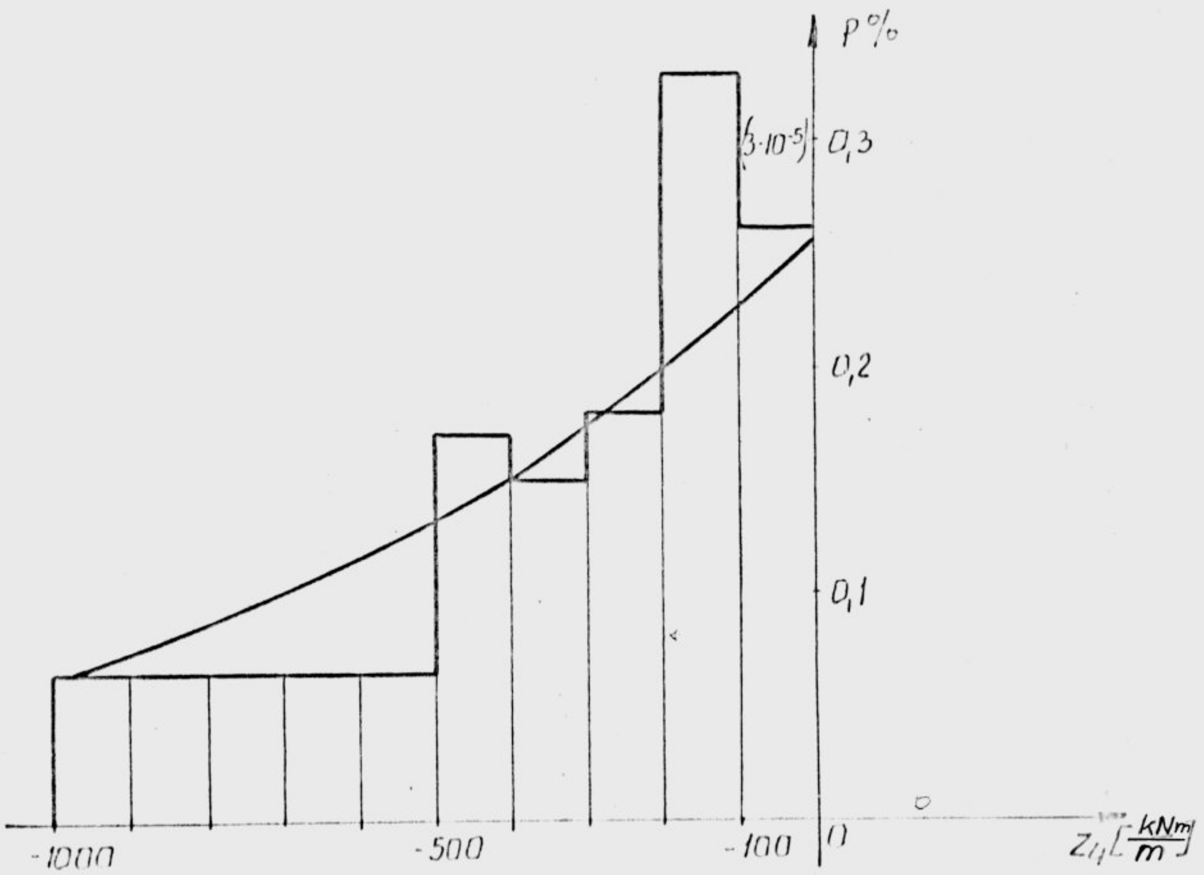


Rys.Z.13a Histogram zmiennej losowej S_3
/przykład 1/



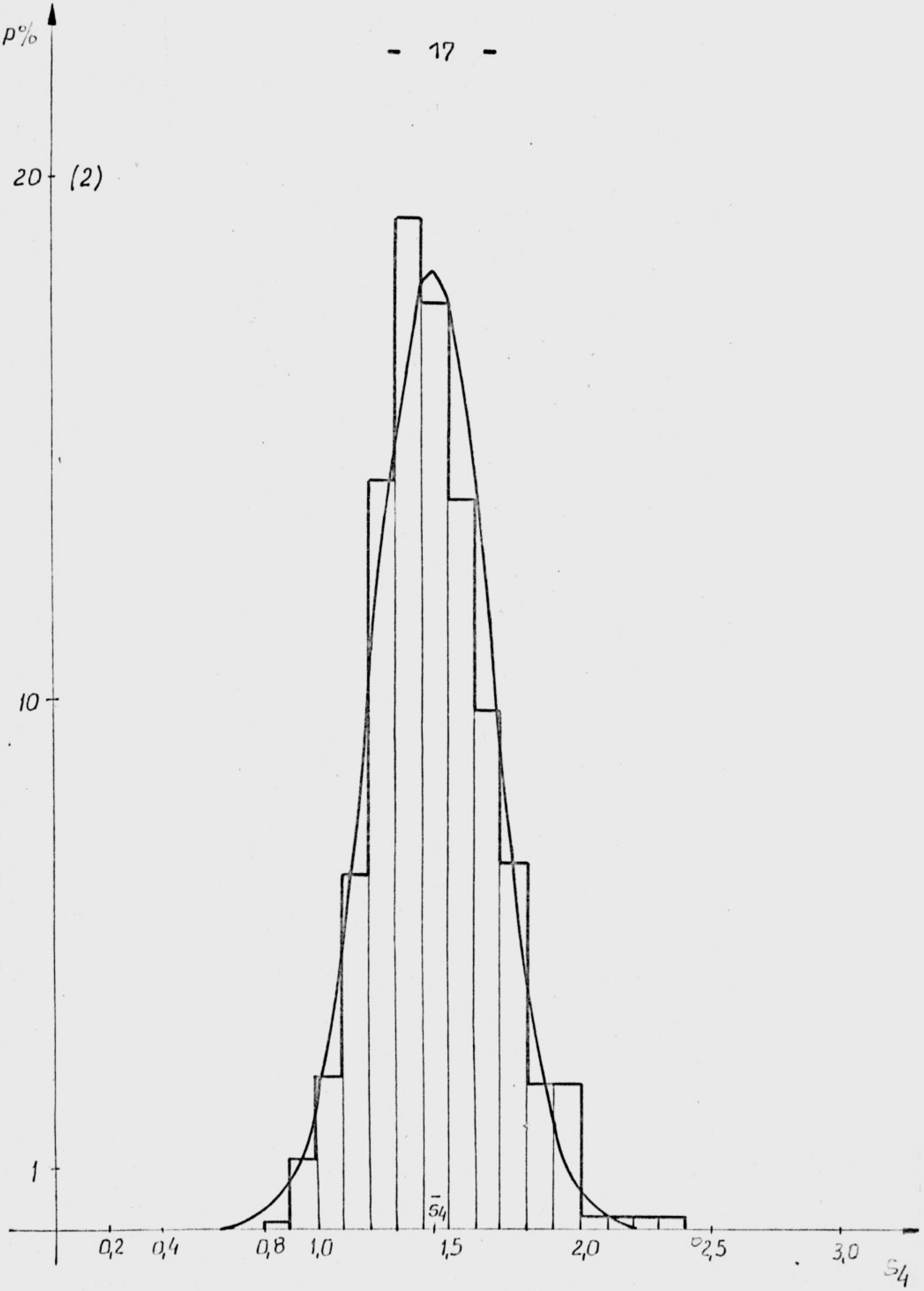
Rys.Z.13b Zachowanie się zmiennej losowej S_3 w otoczeniu dużych wartości /przykład 1/



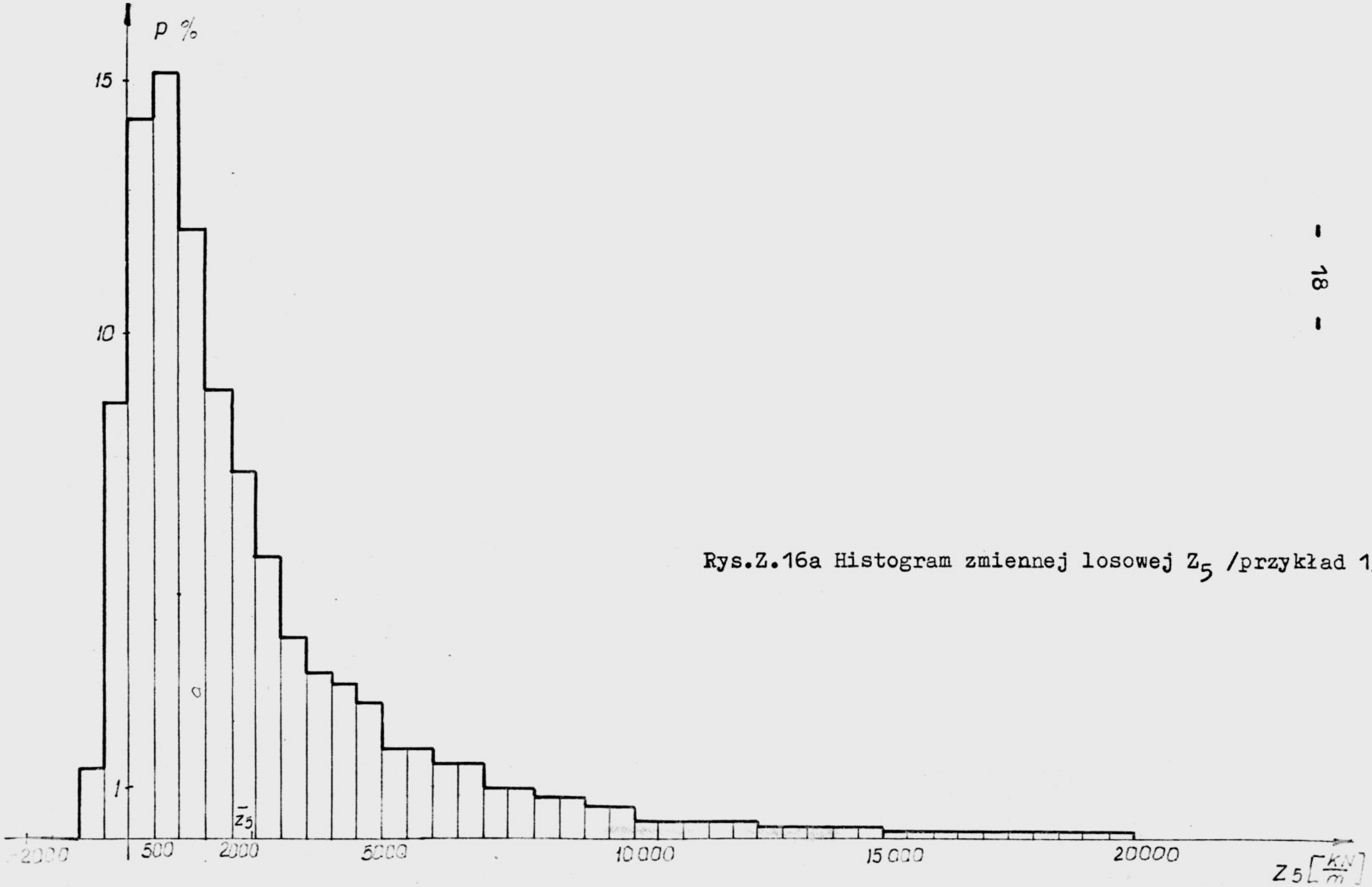


Rys.Z.14a Histogram zmiennej Z_4 i odpowiednia gęstość rozkładu normalnego

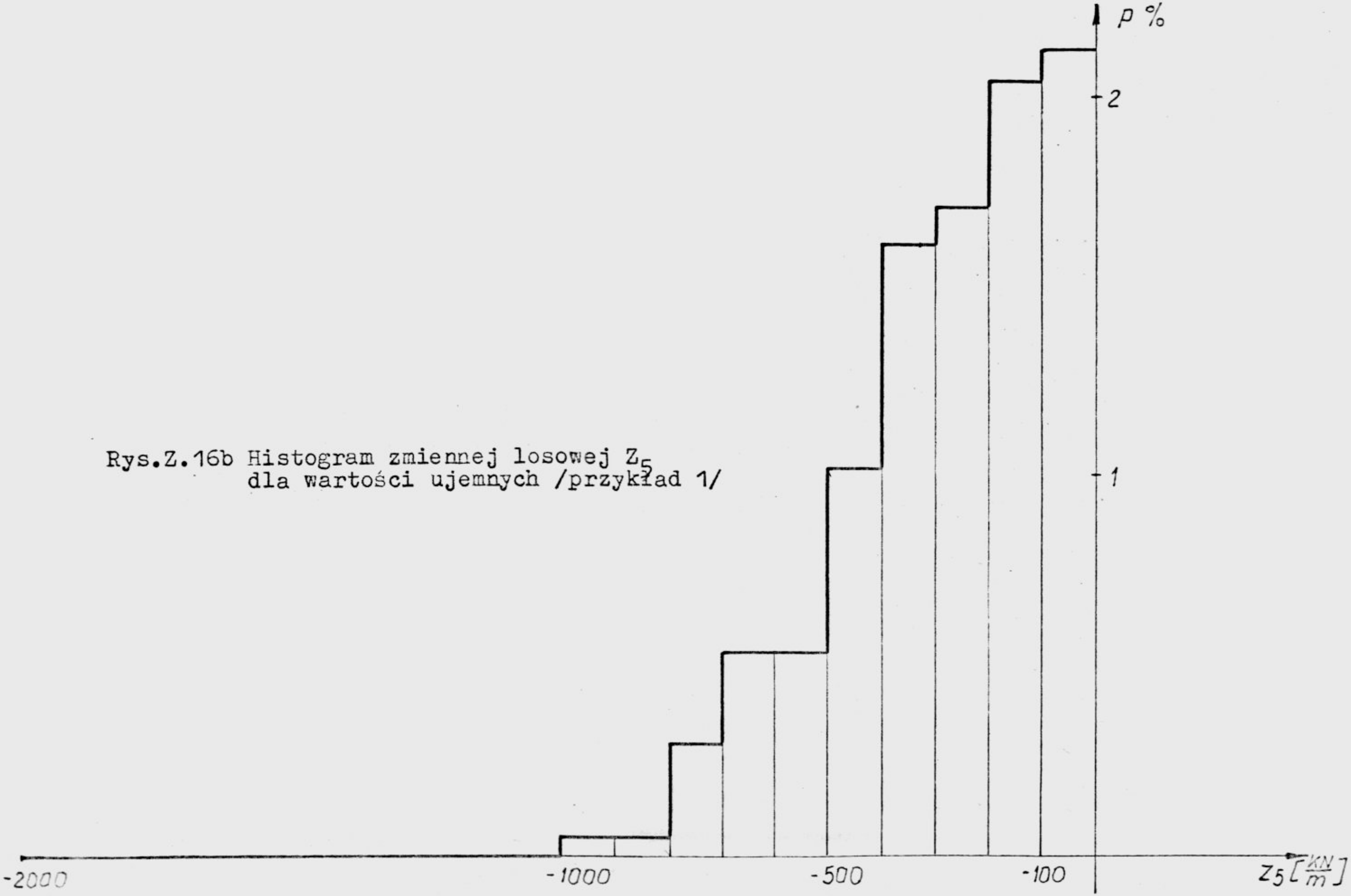
Rys.Z.14b Histogram zmiennej losowej Z_4 dla ujemnych wartości /przykład 1/



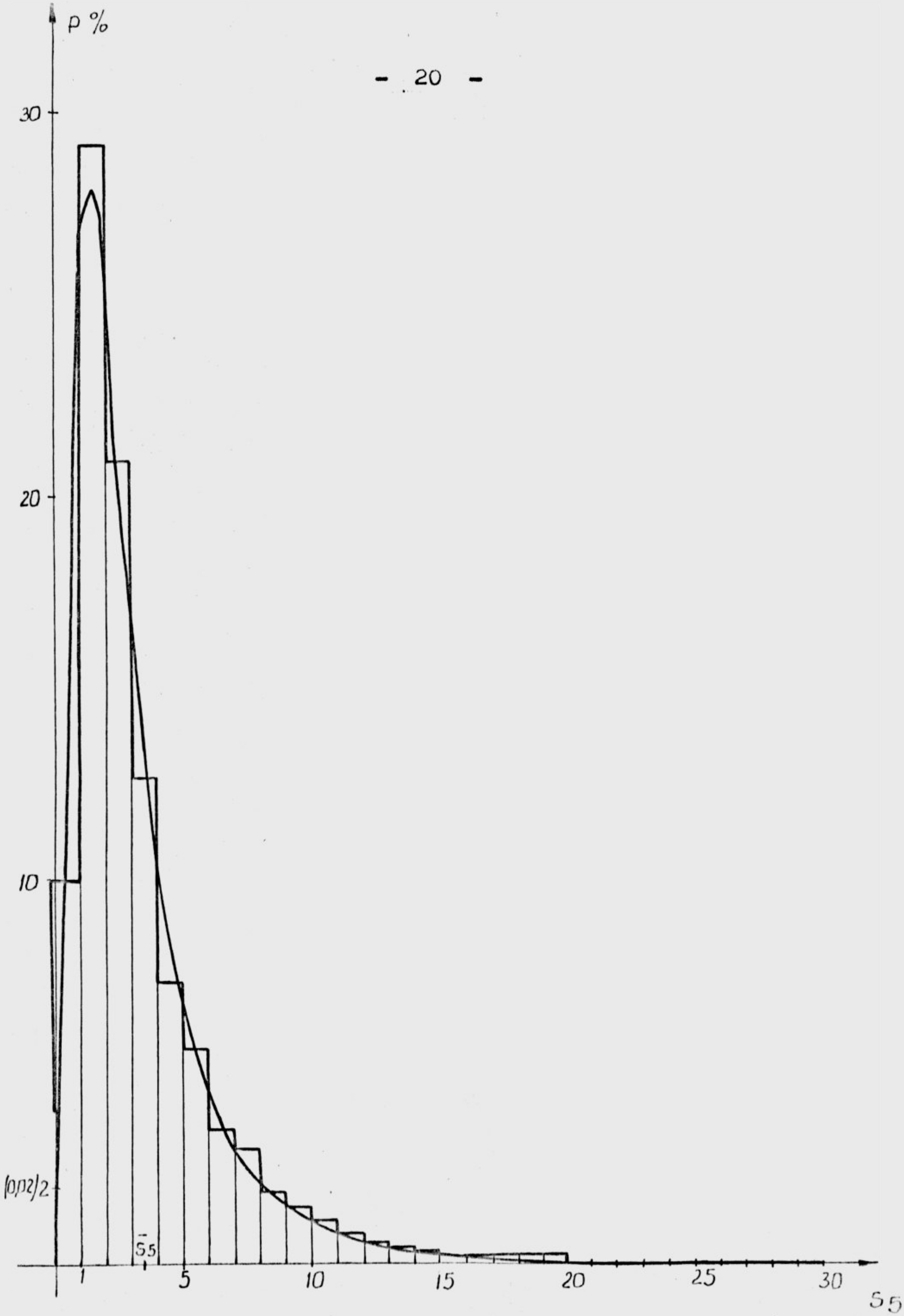
Rys.Z.15 Histogram zmiennej losowej S_4 /przykład 1/ i odpowiednia gęstość rozkładu normalnego



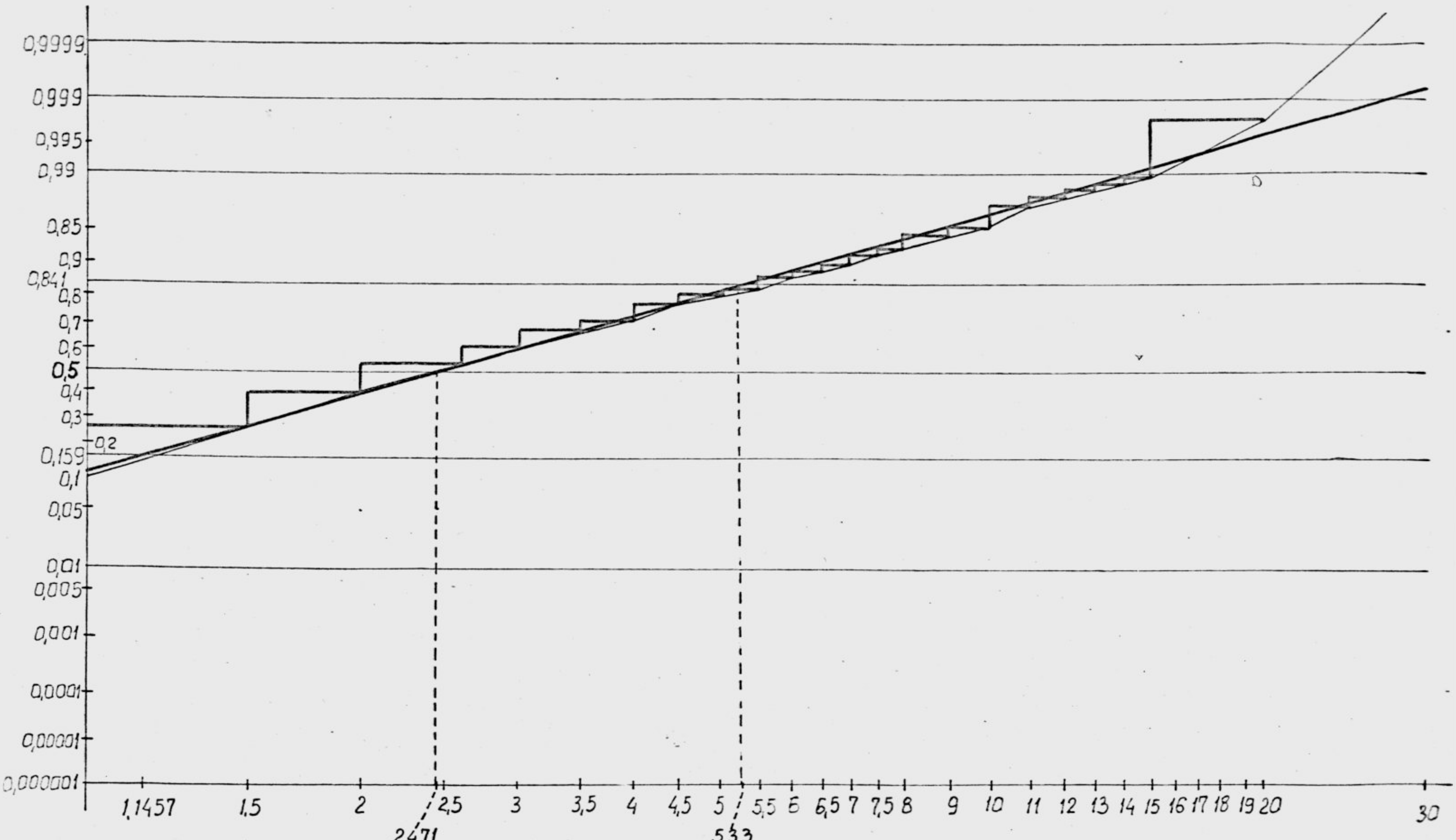
Rys.Z.16a Histogram zmiennej losowej Z_5 /przykład 1/



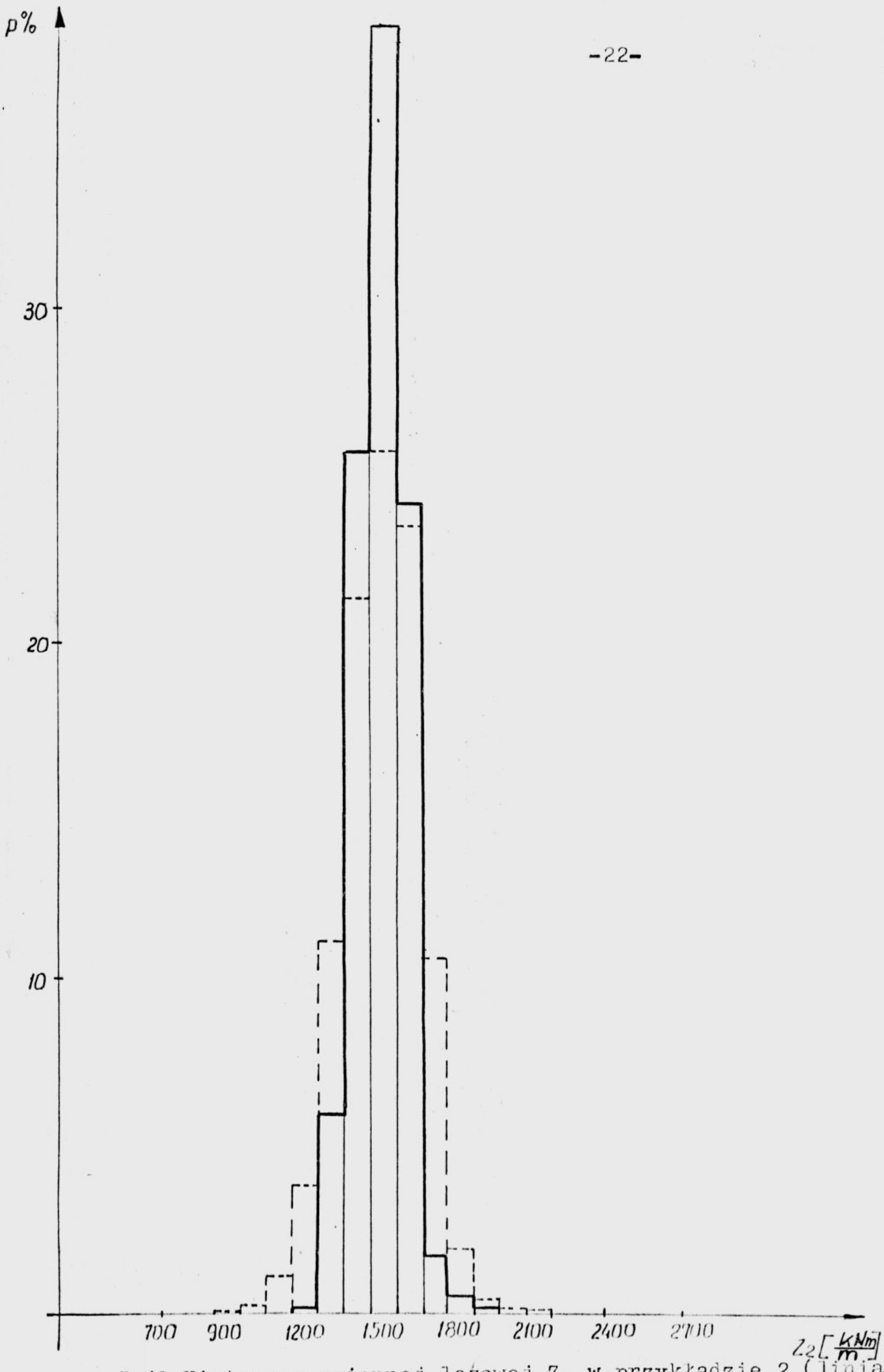
Rys.Z.16b Histogram zmiennej losowej Z_5
dla wartości ujemnych /przykład 1/



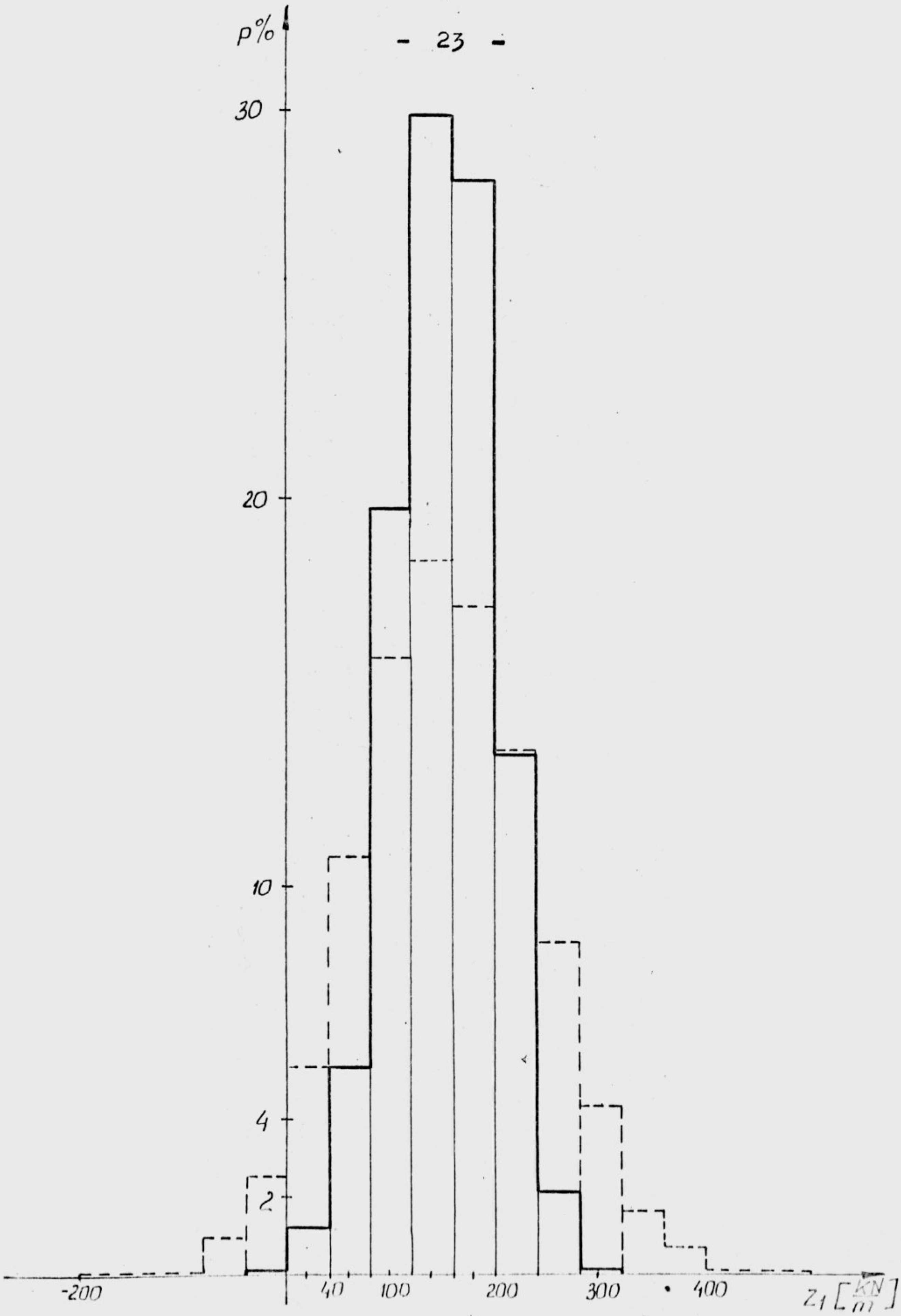
Rys.Z.17. Histogram zmiennej losowej S_5 oraz wykres gęstości rozkładu lognormalnego tej zmiennej otrzymanego metodą kolokacji graficznej.



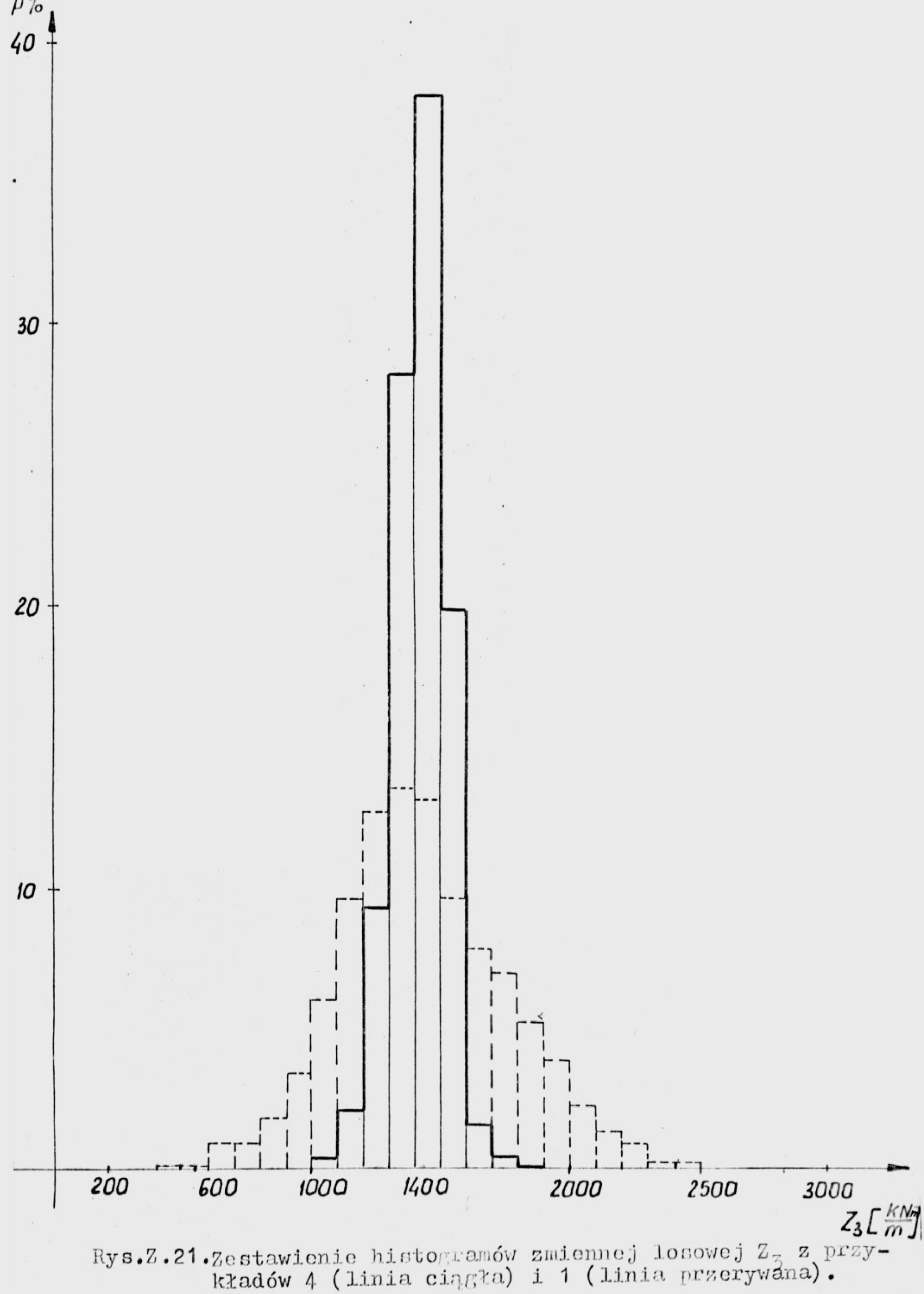
Rys.Z.18 Wyznaczanie parametrów rozkładu lognormalnego zmiennej losowej S_5 metodą kolokacji graficznej /przykład 1/



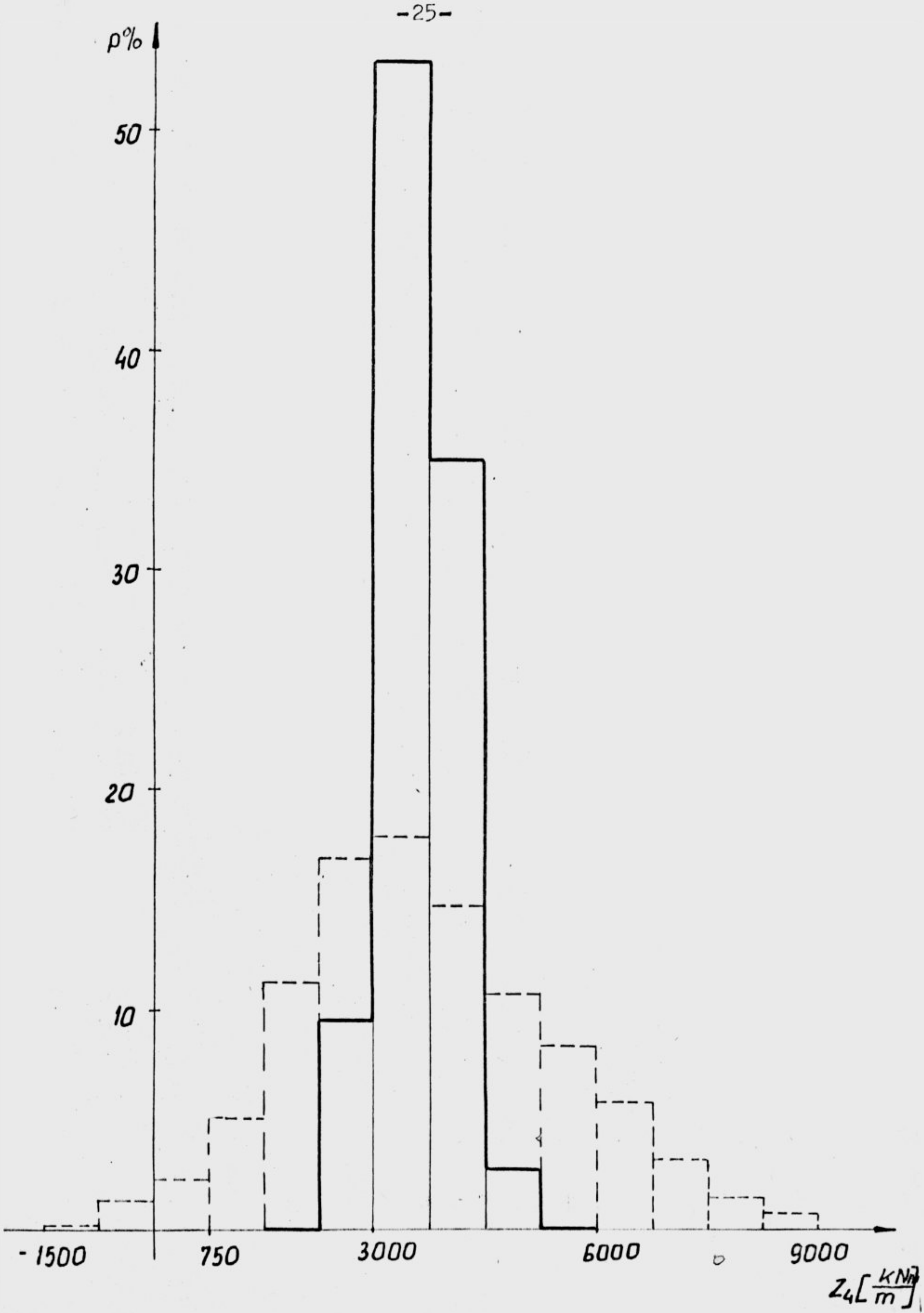
Rys.Z.19.Histogram zmiennej losowej Z_2 w przykładzie 2 (linia ciągła) i histogram zmiennej losowej Z_2 w przykładzie 1 (linia przerywana).



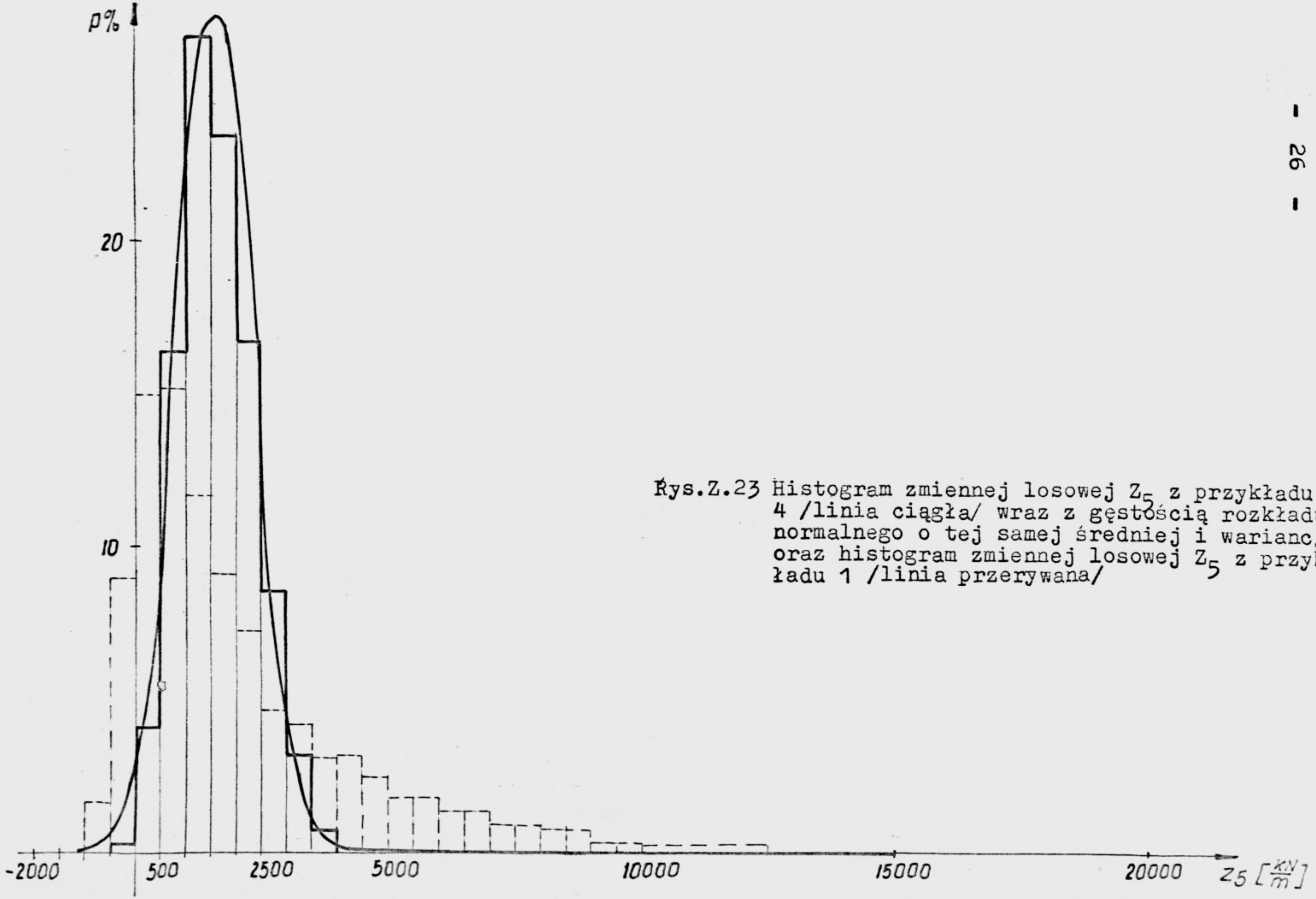
Rys.Z.20 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_1 z przykładów 4 i 1 /4-linia ciągła ; 1-linia przerywana/



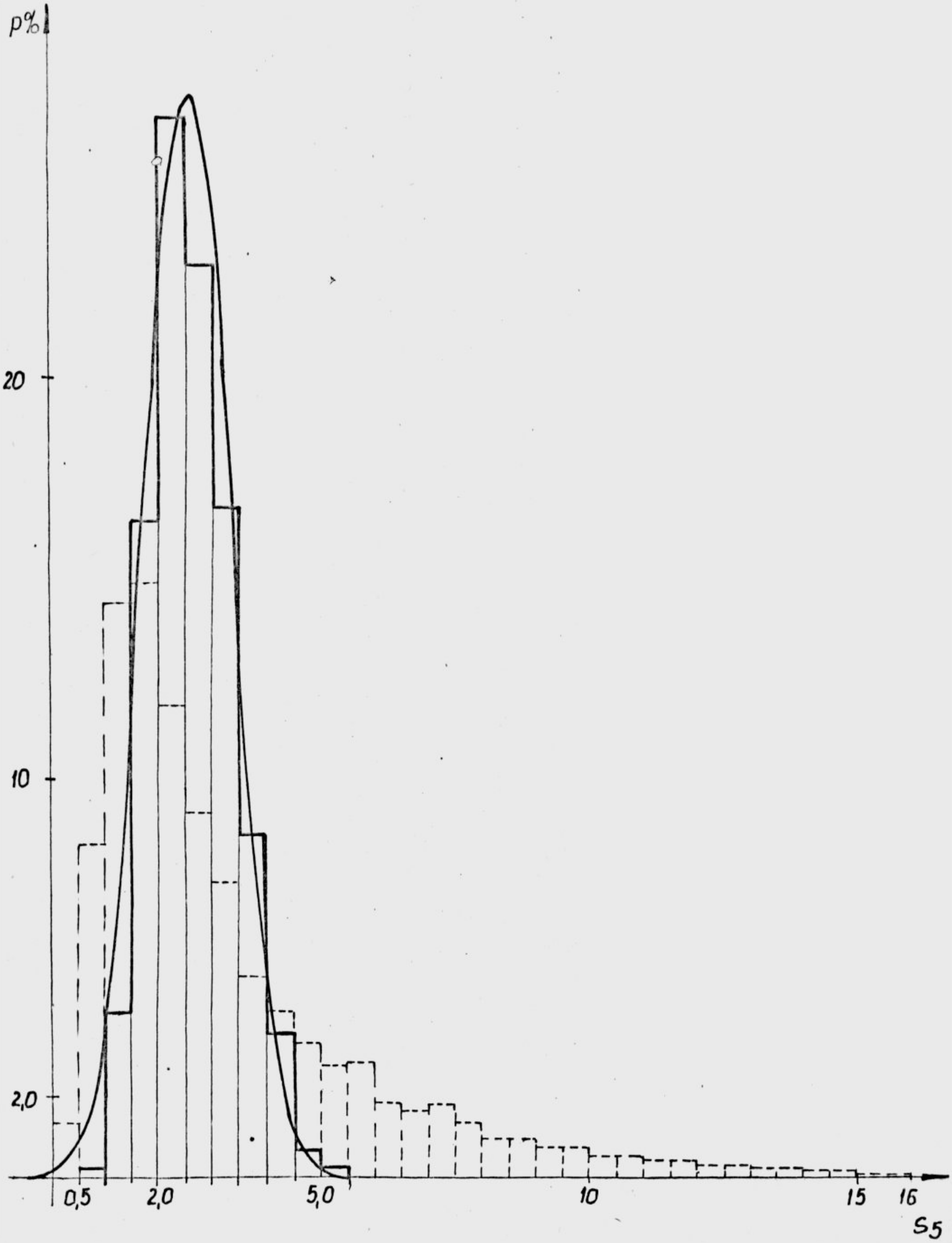
Rys.Z.21. Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_3 z przykładów 4 (linia ciągła) i 1 (linia przerywana).



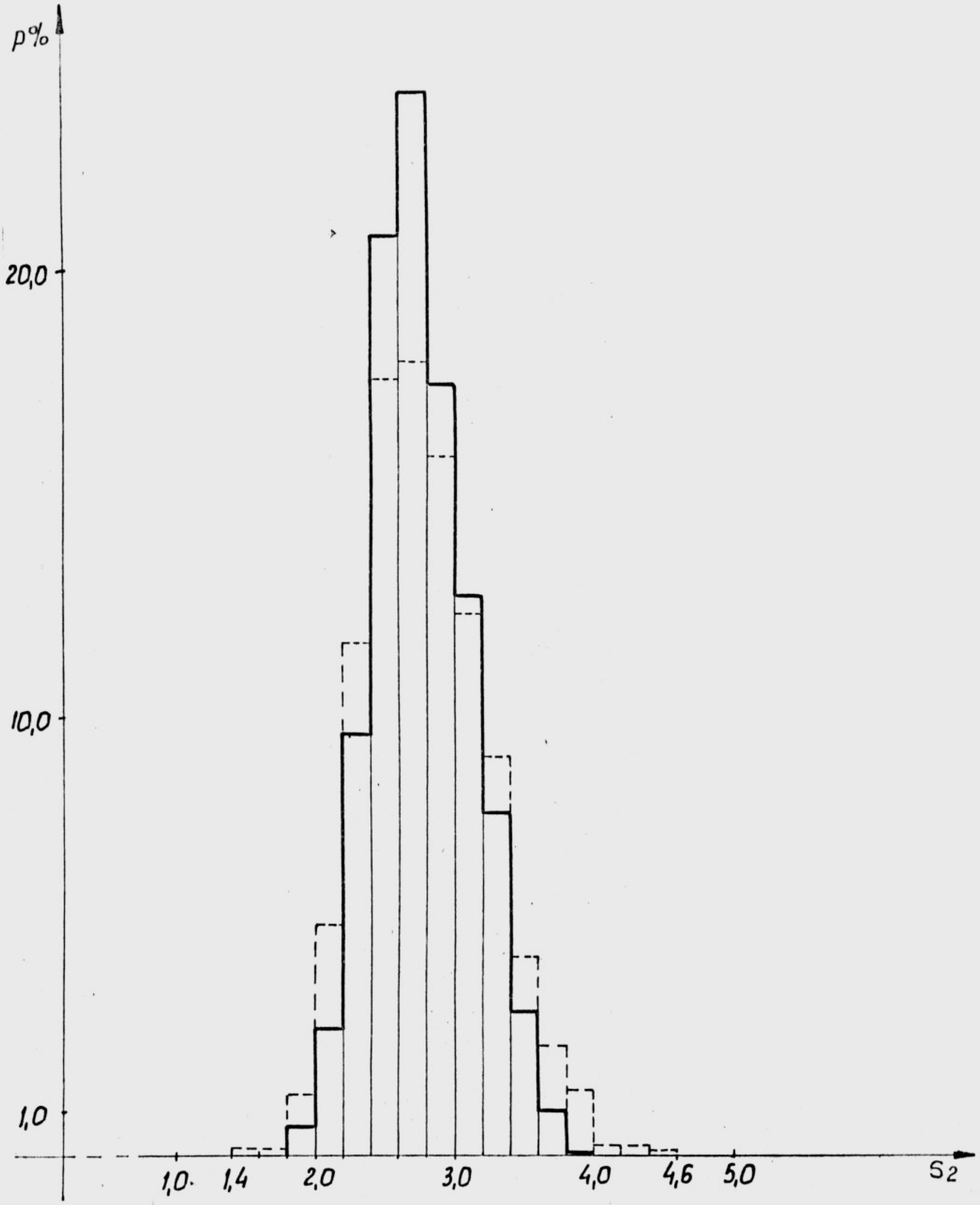
Rys.Z.22.Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_4 z przykładów 4 (linia ciągła) i 1 (linia przerywana).



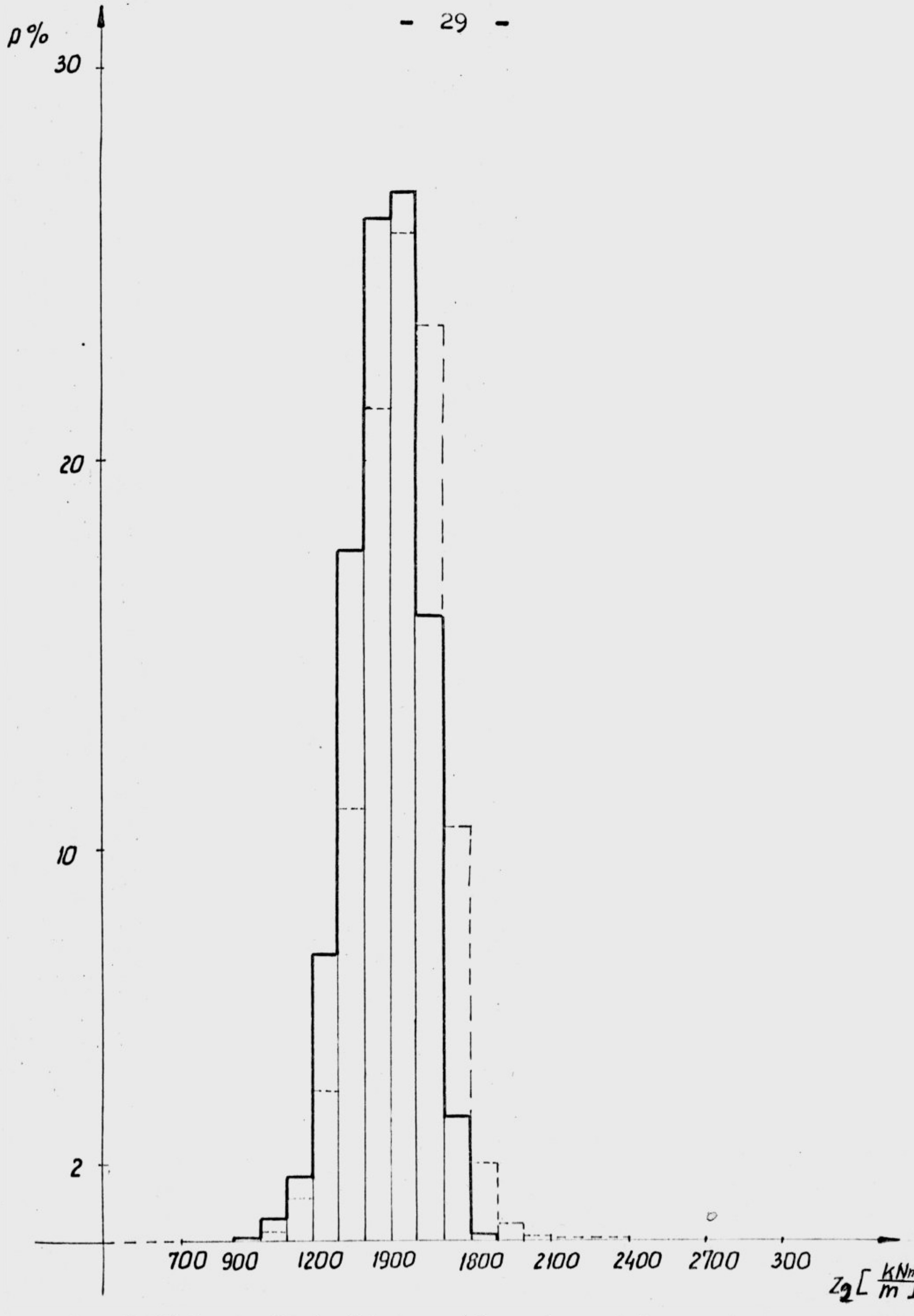
Rys.Z.23 Histogram zmiennej losowej Z_5 z przykładu 4 /linia ciągła/ wraz z gęstością rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji oraz histogram zmiennej losowej Z_5 z przykładu 1 /linia przerywana/



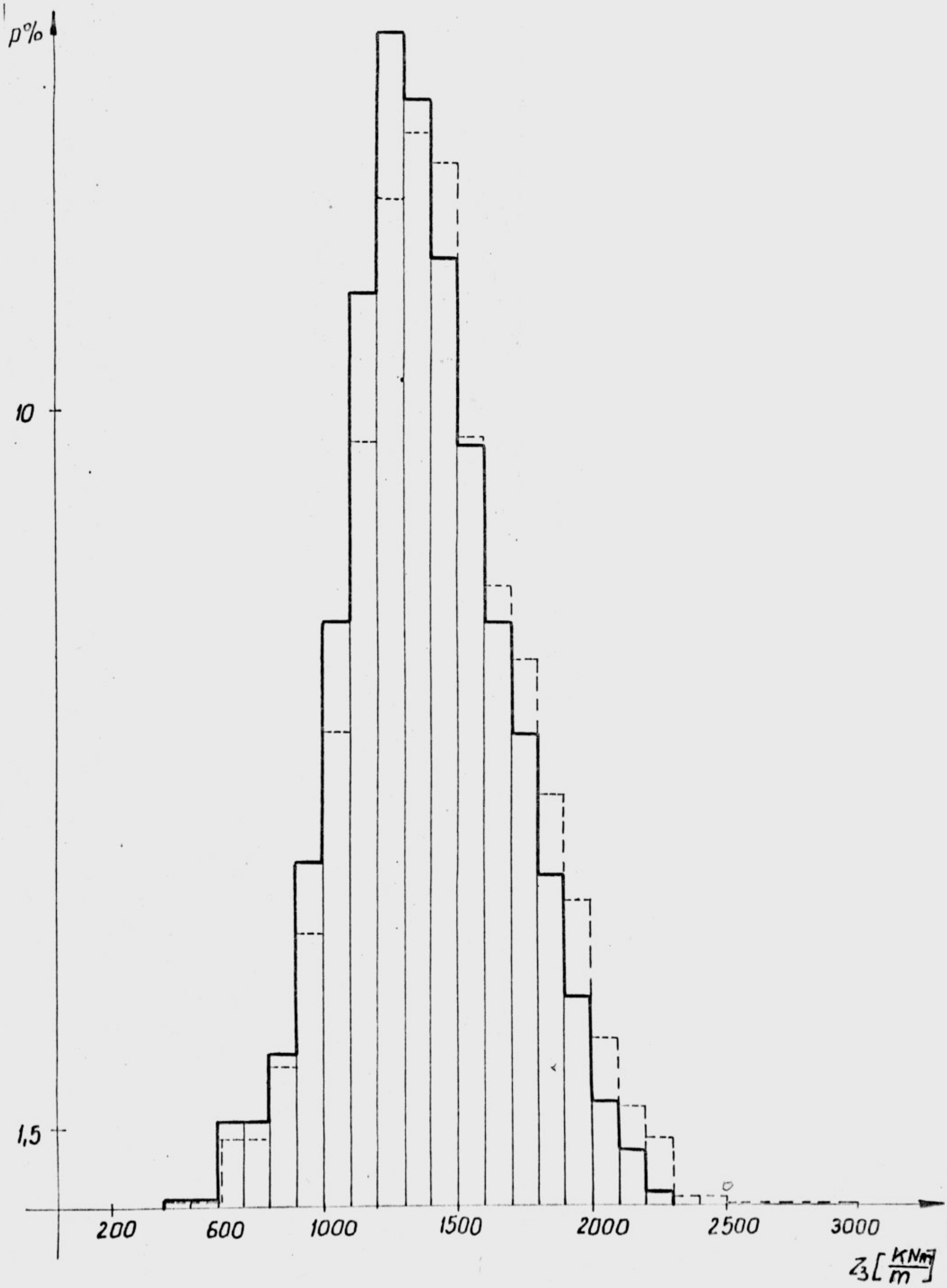
Rys.Z.24. Histogram zmiennej losowej S_5 w przykładzie 4 (linia ciągła) wraz z gęstością rozkładu normalnego o tej samej wartości oczekiwanej i wariancji oraz histogram zmiennej losowej S_5 uzyskanej w przykładzie 1 (linia przerywana).



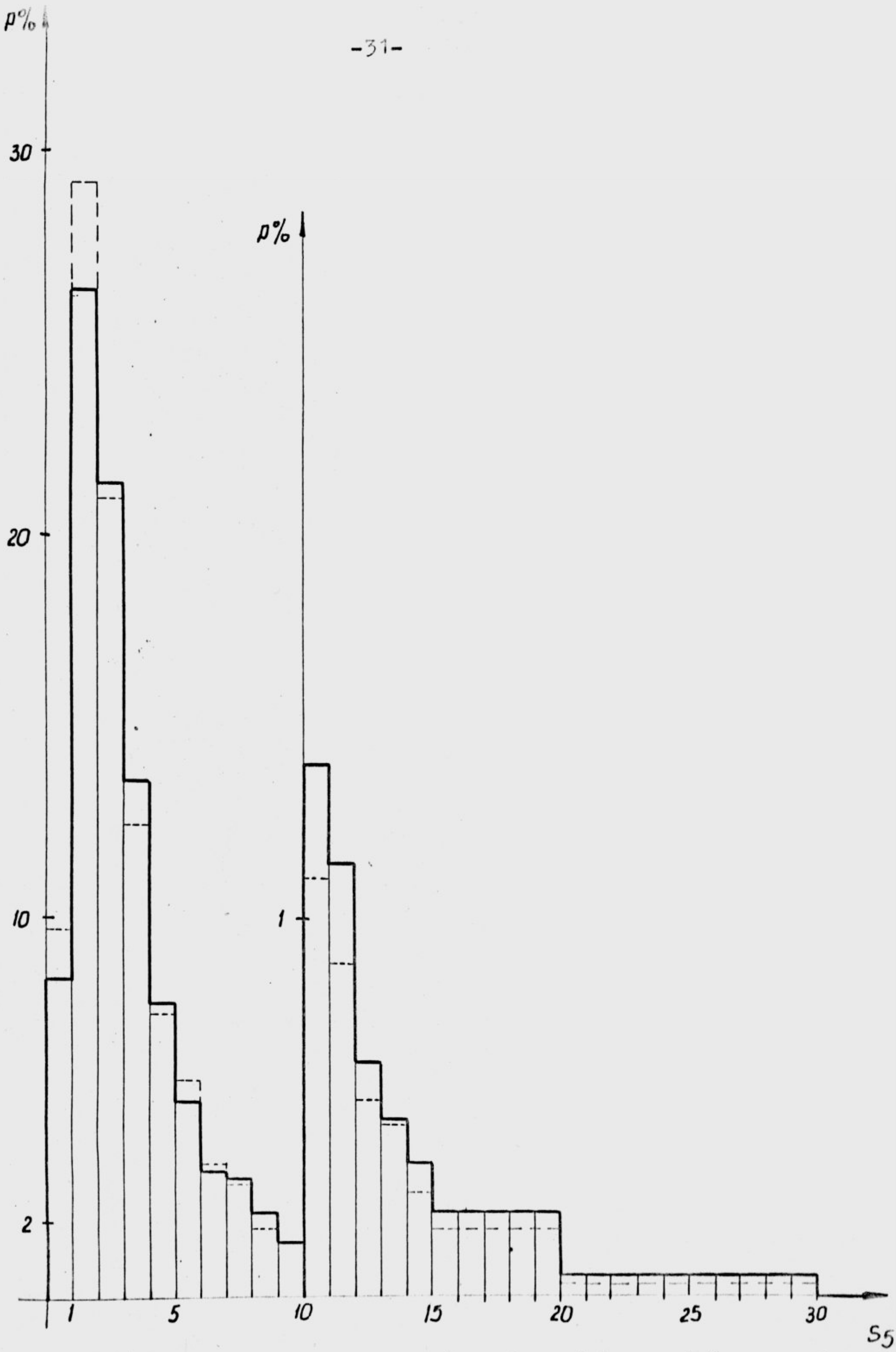
Rys.Z.25 Zestawienie histogramu zmiennej losowej S_2 z przykładów 6/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



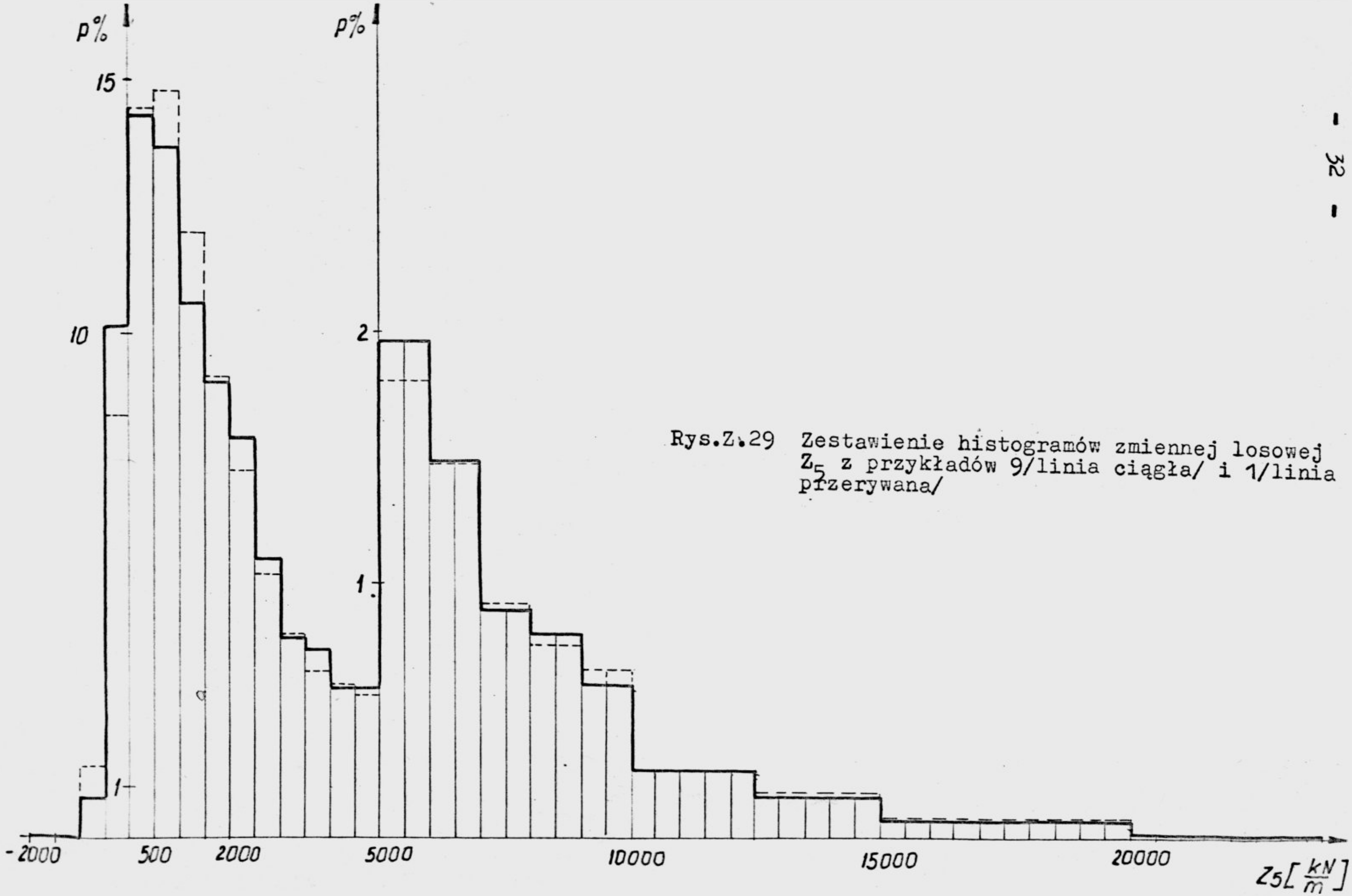
Rys.Z.26 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_2 z przykładów 8/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



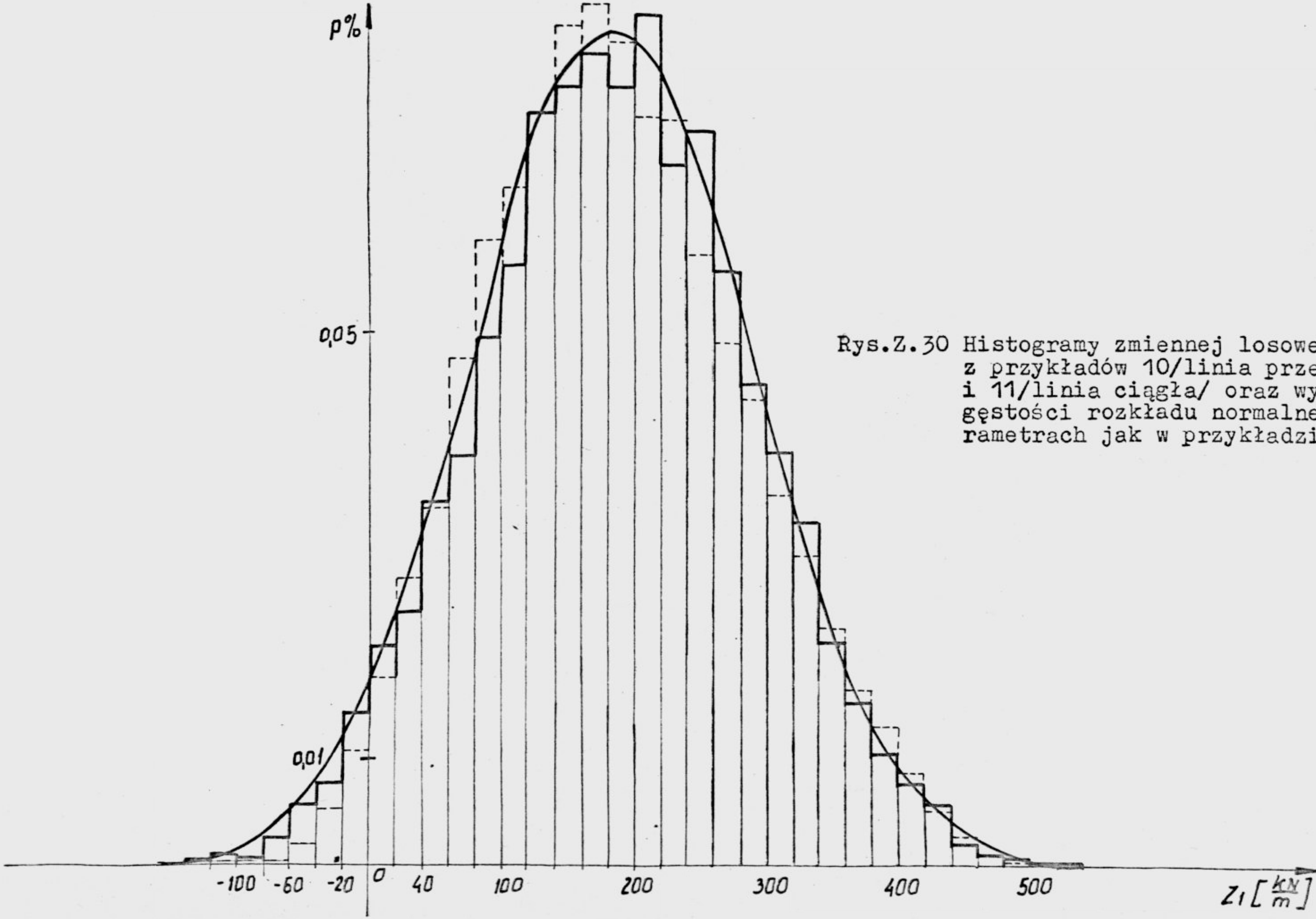
Rys.Z.27 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_3 z przykładów 8/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



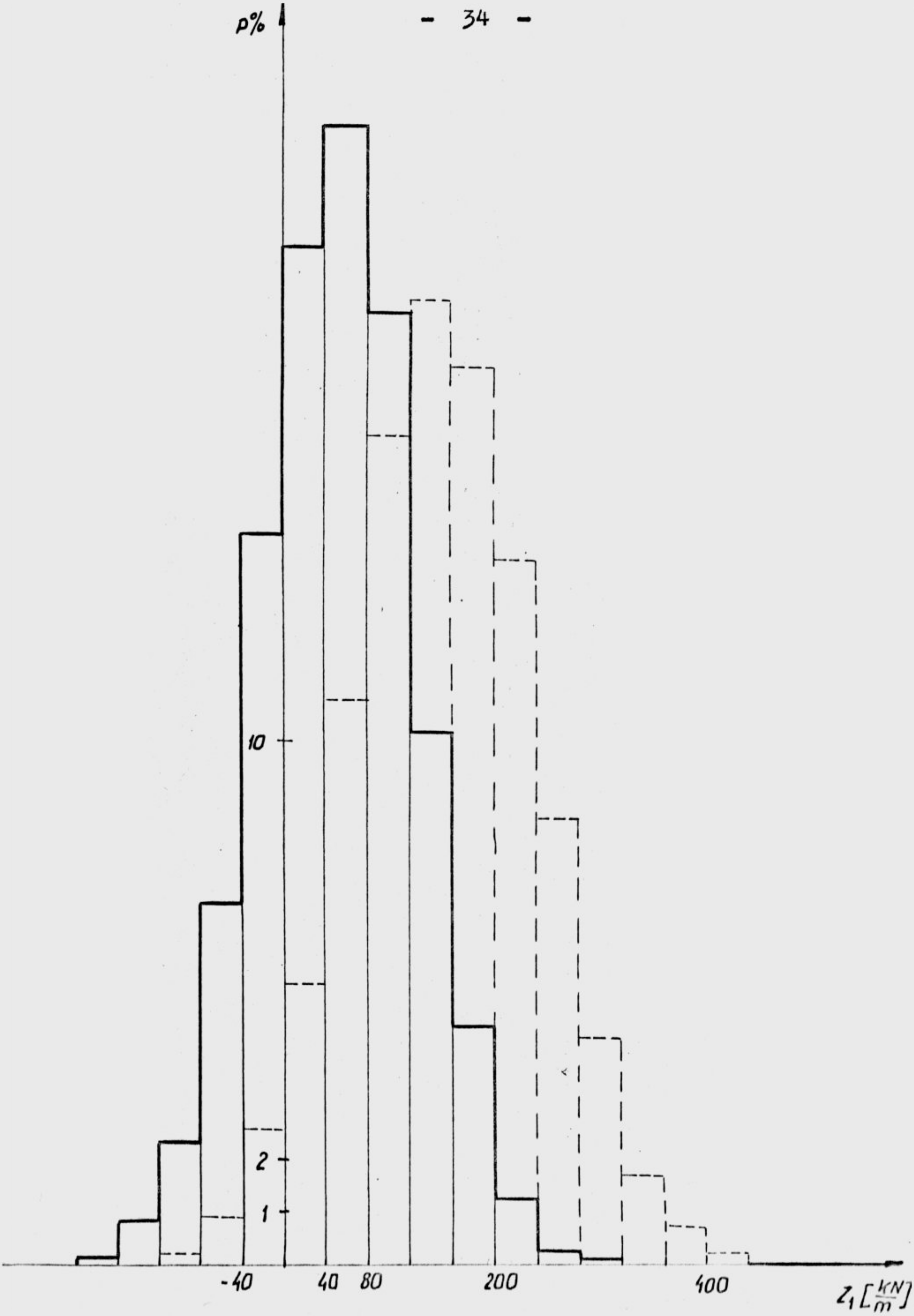
Rys.Z.28.Zestawienie histogramów zmiennej losowej S_5 z przykładów 8 (linia ciągła) i 1 (linia przerywana)



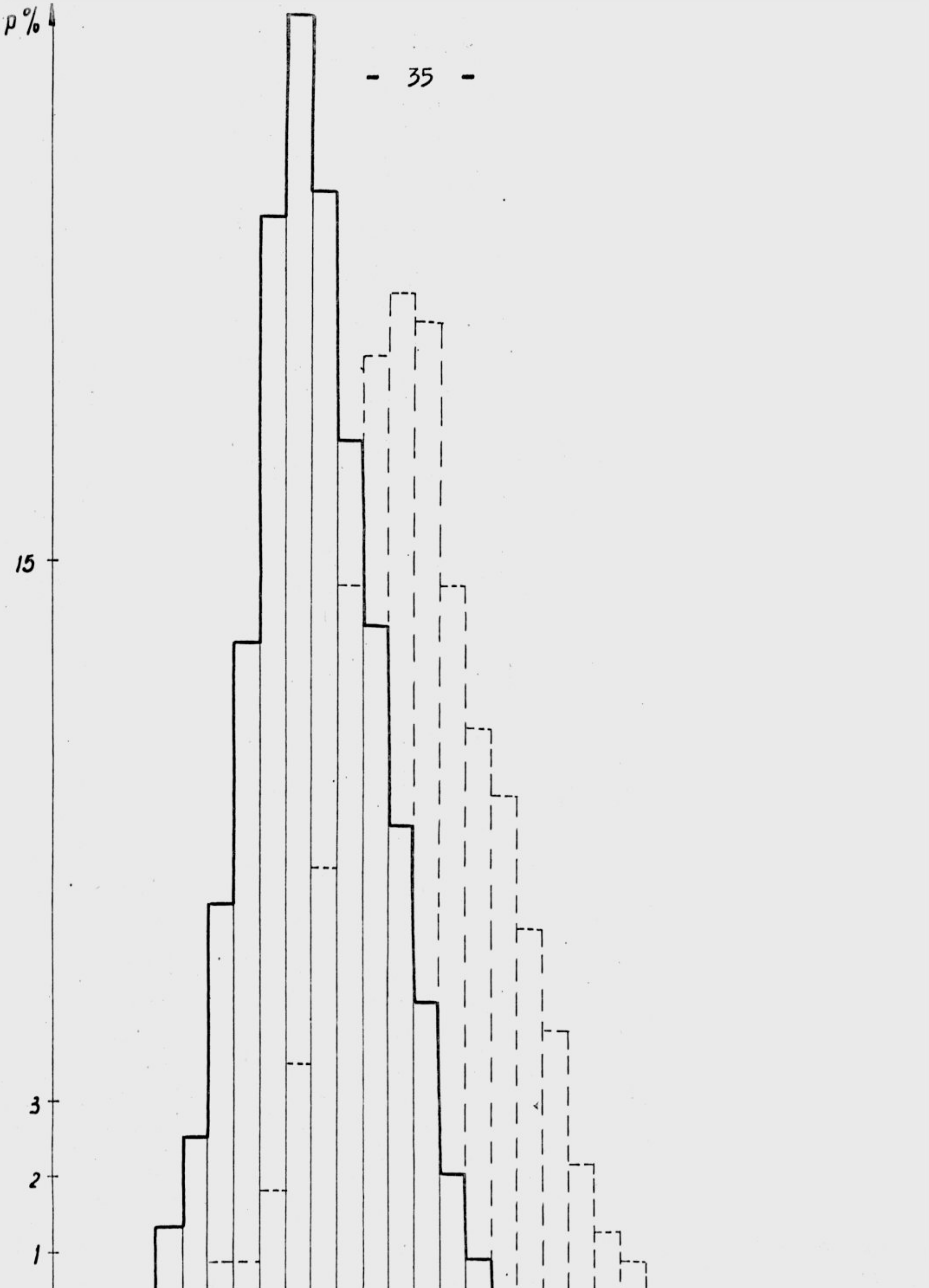
Rys.Z.29 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_5 z przykładów 9/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



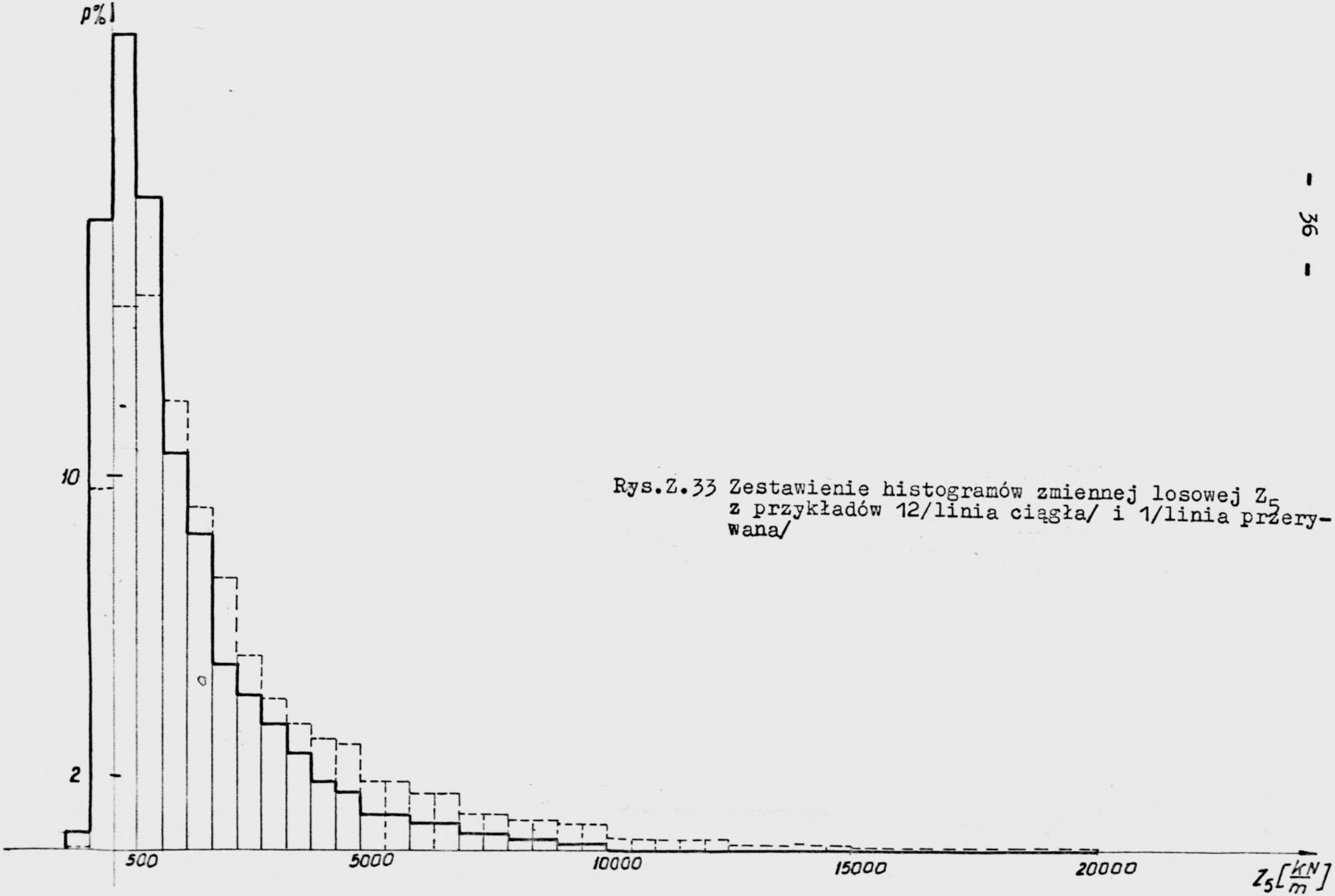
Rys.Z.30 Histogramy zmiennej losowej Z_1 z przykładów 10/linia przerywana/ i 11/linia ciągła/ oraz wykres gęstości rozkładu normalnego o parametrach jak w przykładzie 11



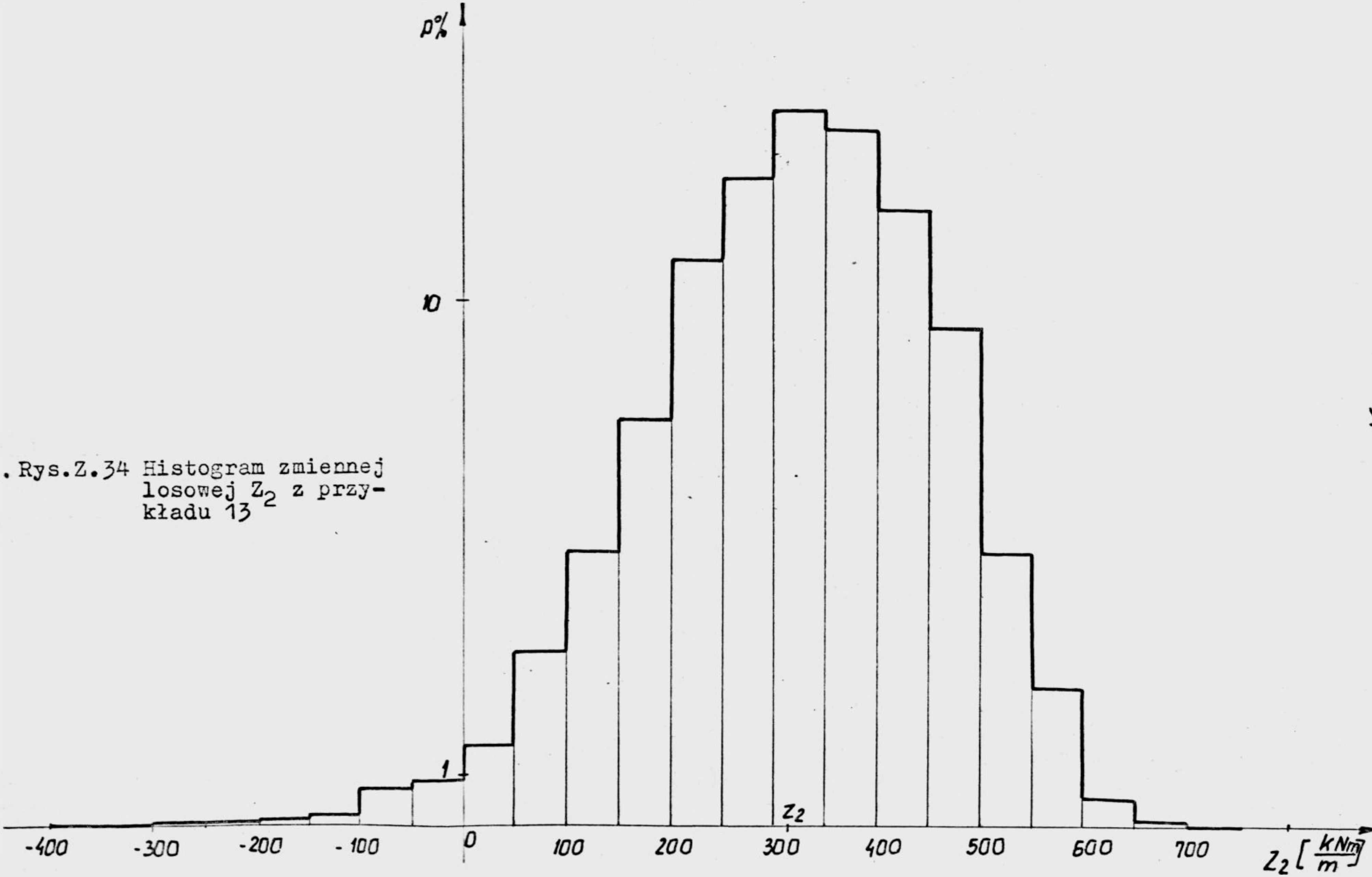
Rys.Z.31 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_1 z przykładów 12/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



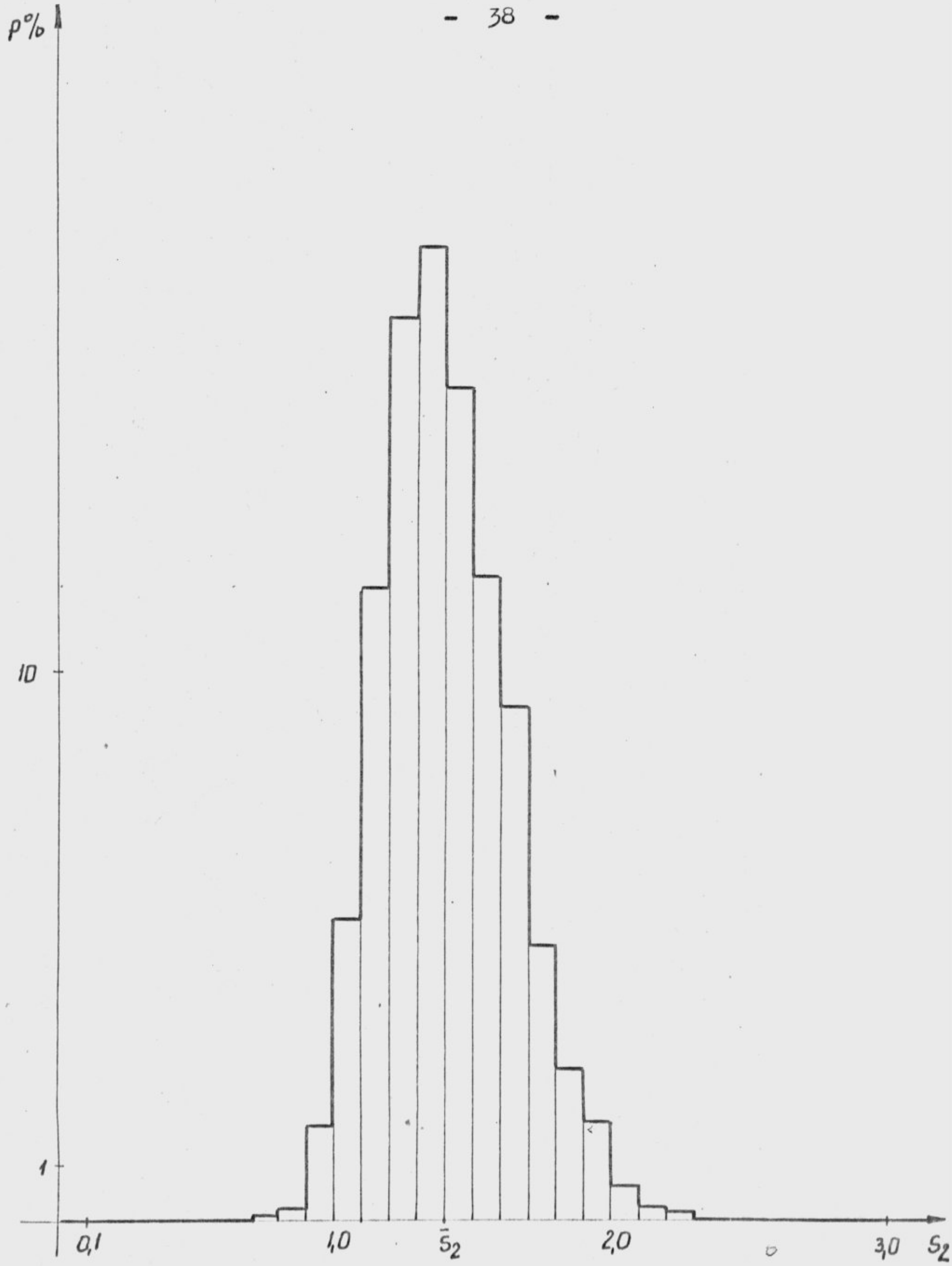
Rys.Z.32 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_3 z przykładów 12/linia ciągła/i 1/linia przerywana/



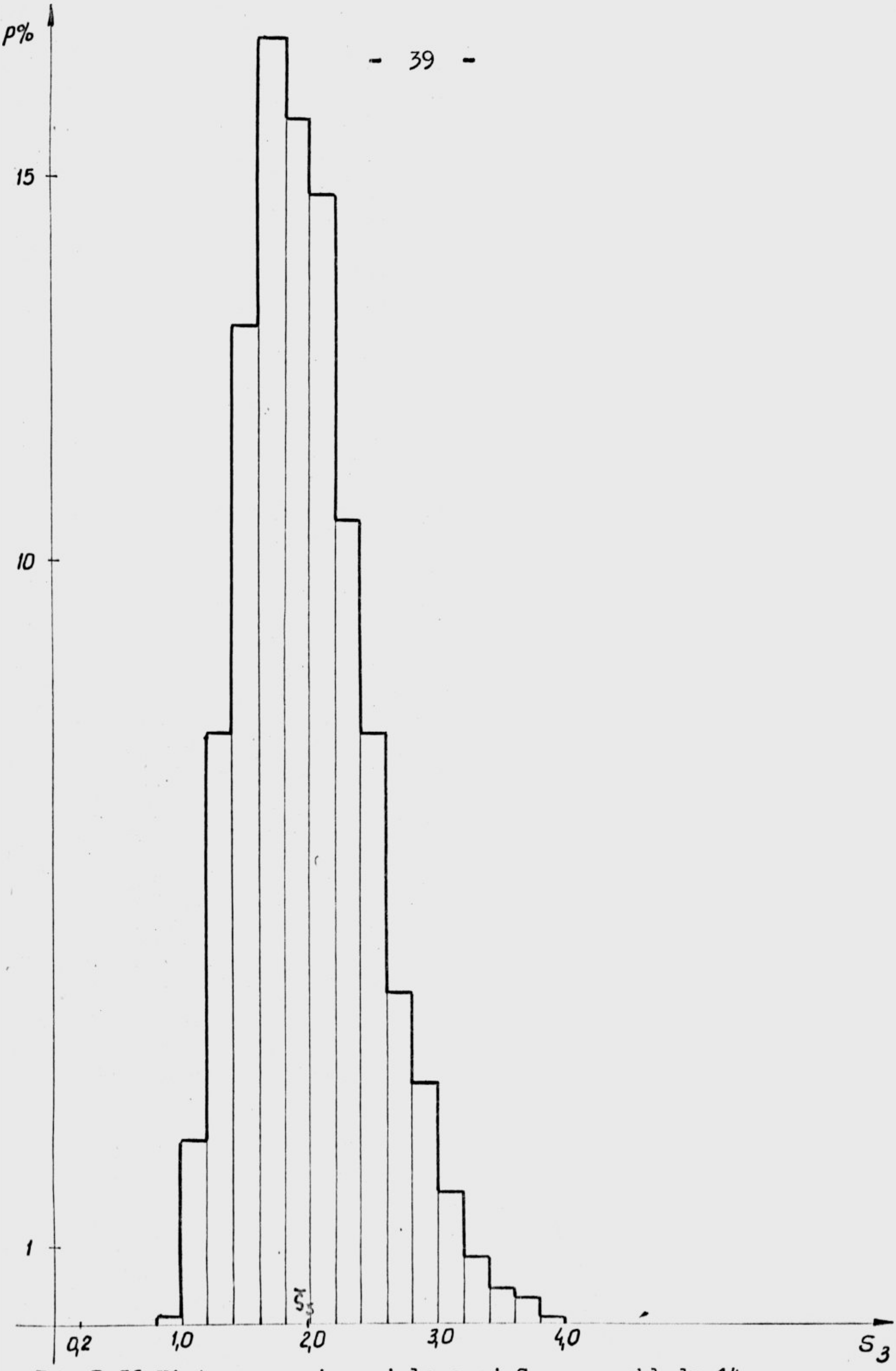
Rys.Z.33 Zestawienie histogramów zmiennej losowej Z_5 z przykładów 12/linia ciągła/ i 1/linia przerywana/



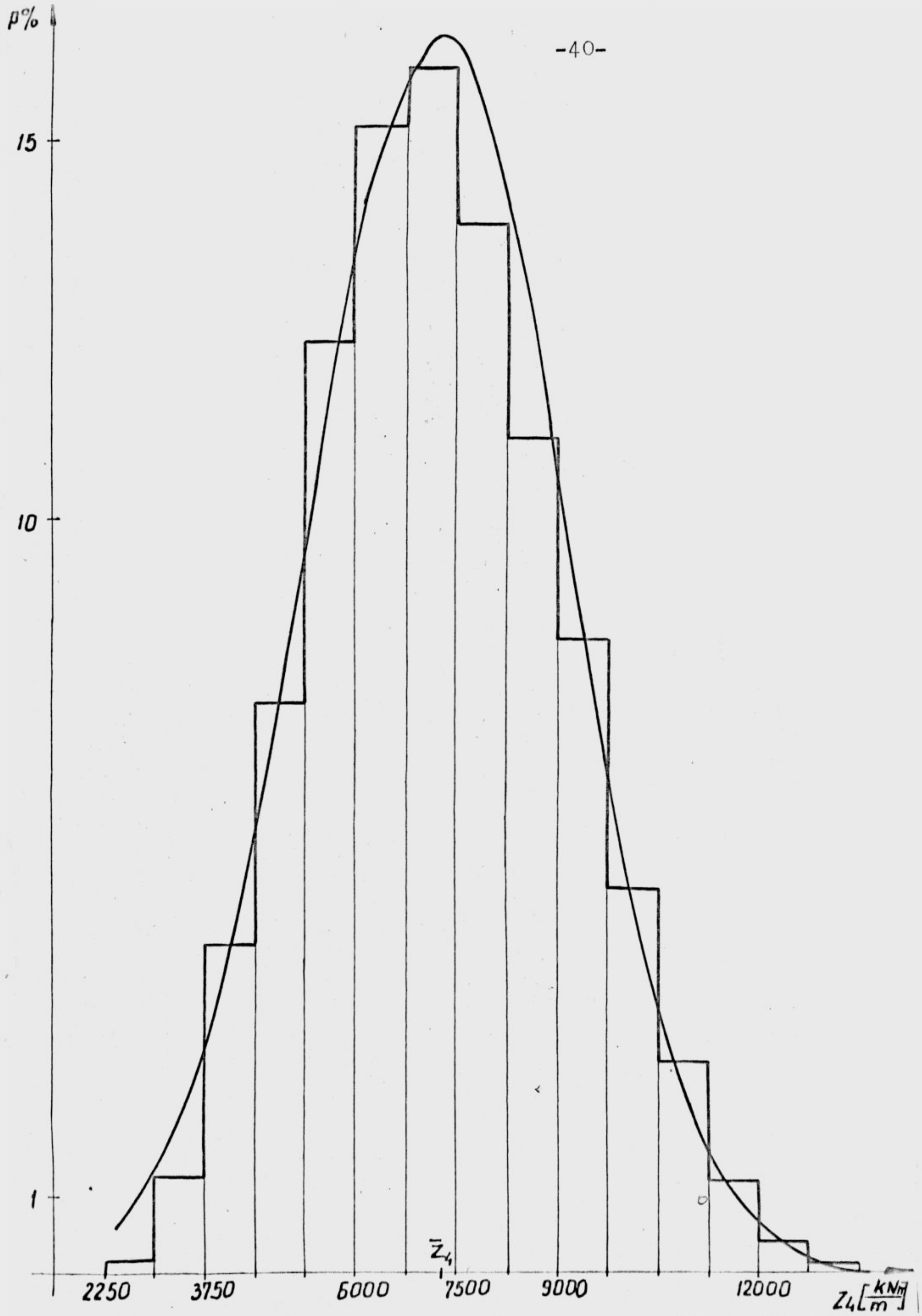
. Rys.Z.34 Histogram zmiennej losowej Z_2 z przykładu 13



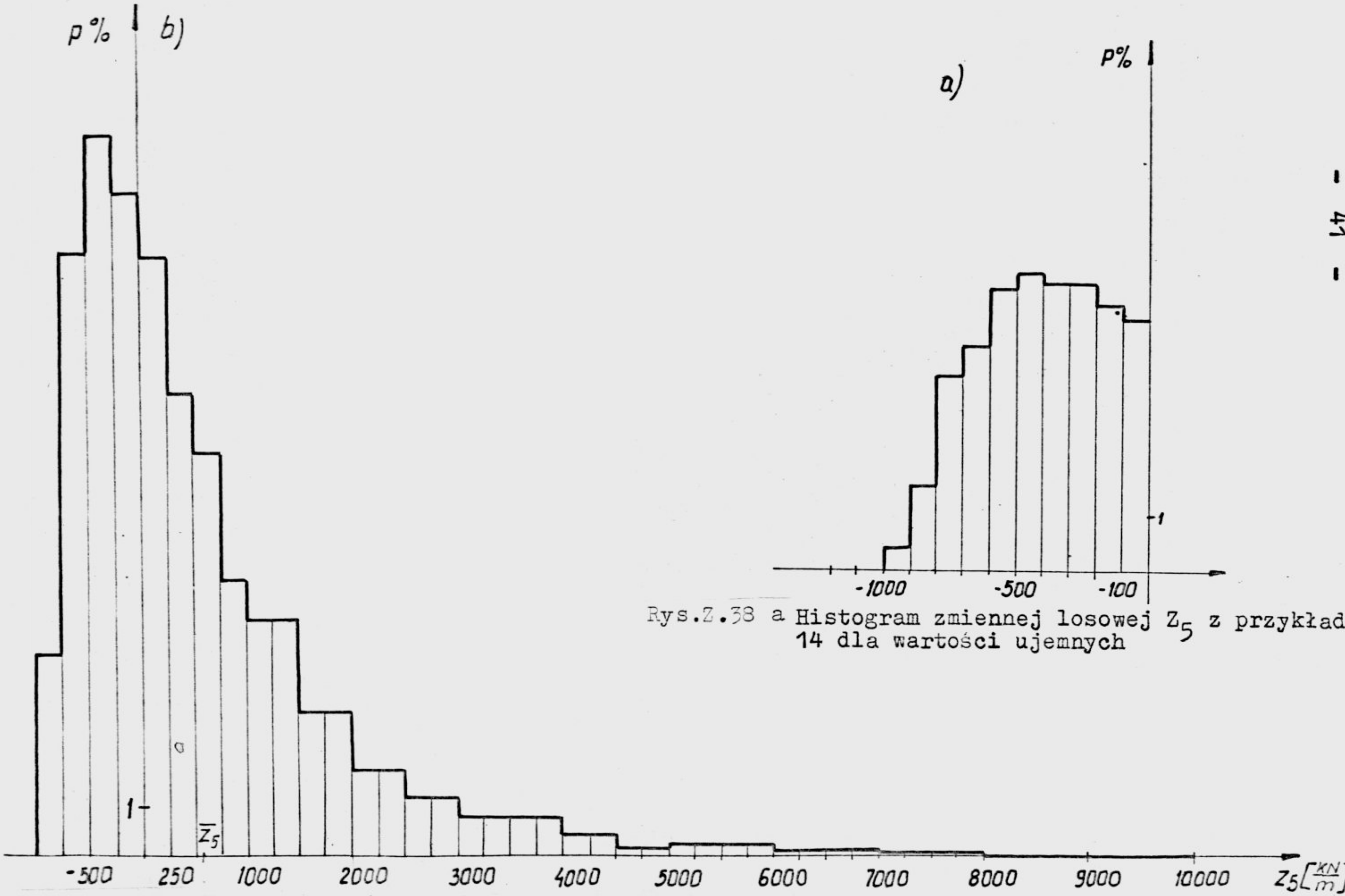
Rys.Z.35.Histogram zmiennej S_2 w przykładzie 13.



Rys.Z.36 Histogram zmiennej losowej S_3 z przykładu 14

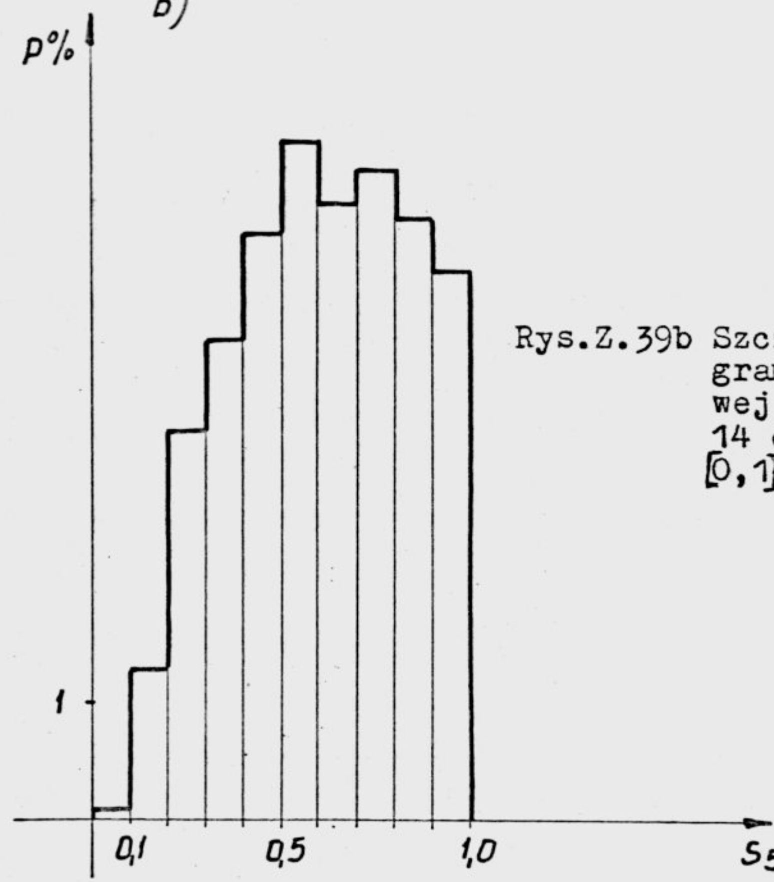


Rys.Z.37. Histogram zmiennej losowej Z_4 z przykładu 14 wraz z gęstością rozkładu normalnego o tej samej średniej i wariancji.

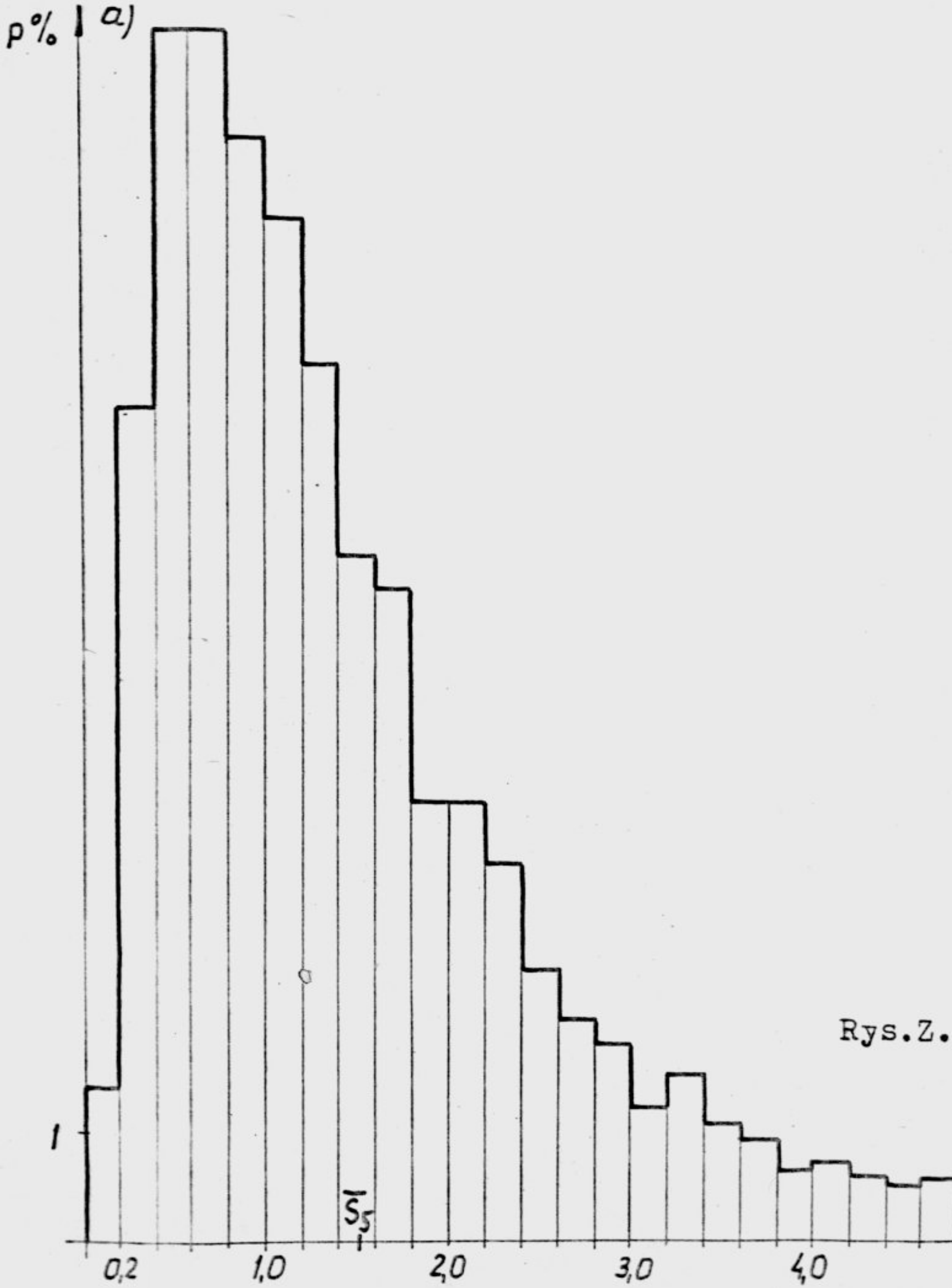


Rys.Z.38 a Histogram zmiennej losowej Z_5 z przykładu 14 dla wartości ujemnych

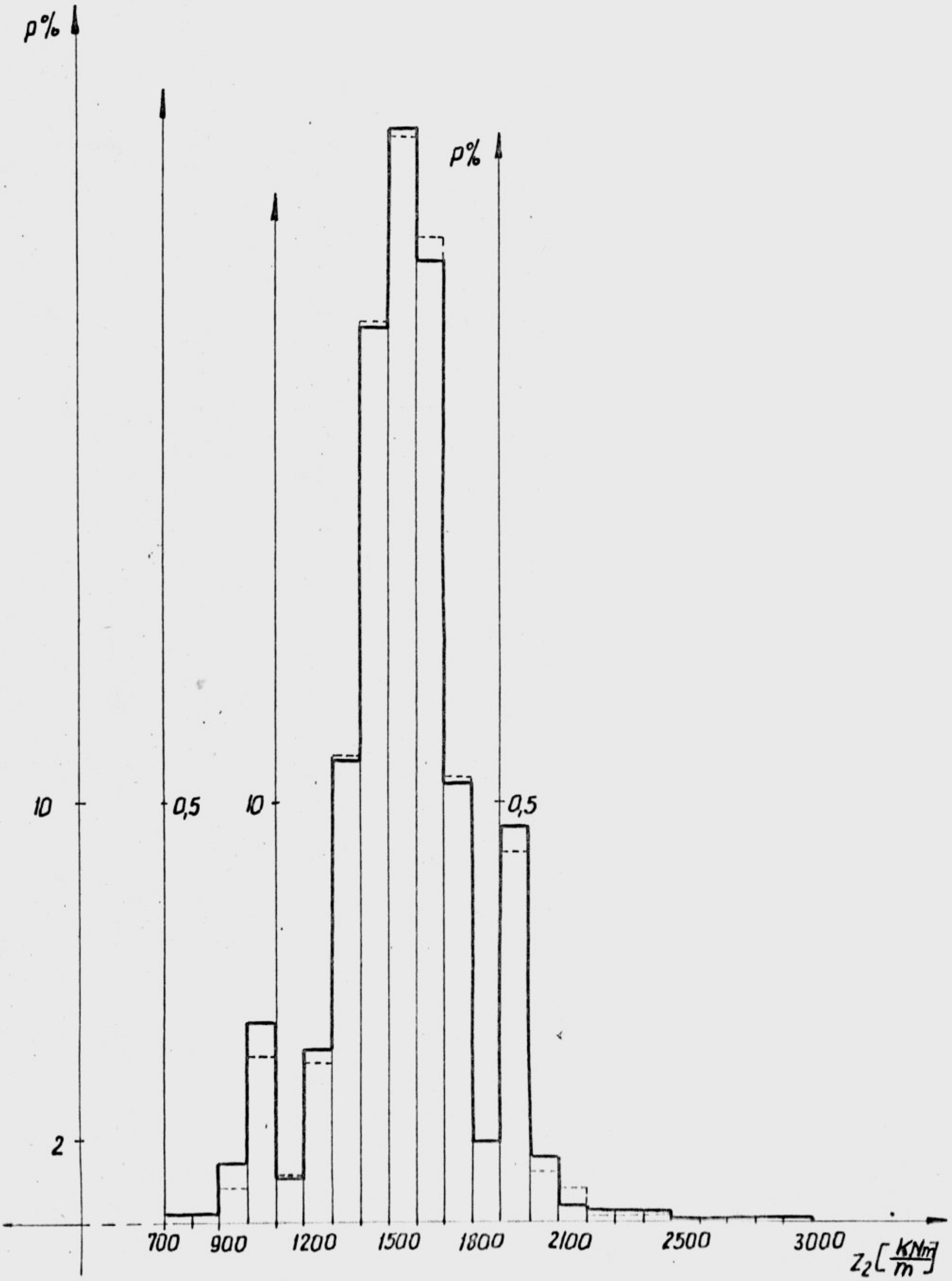
Rys.Z.38 b Histogram zmiennej losowej Z5 z przykładu 14



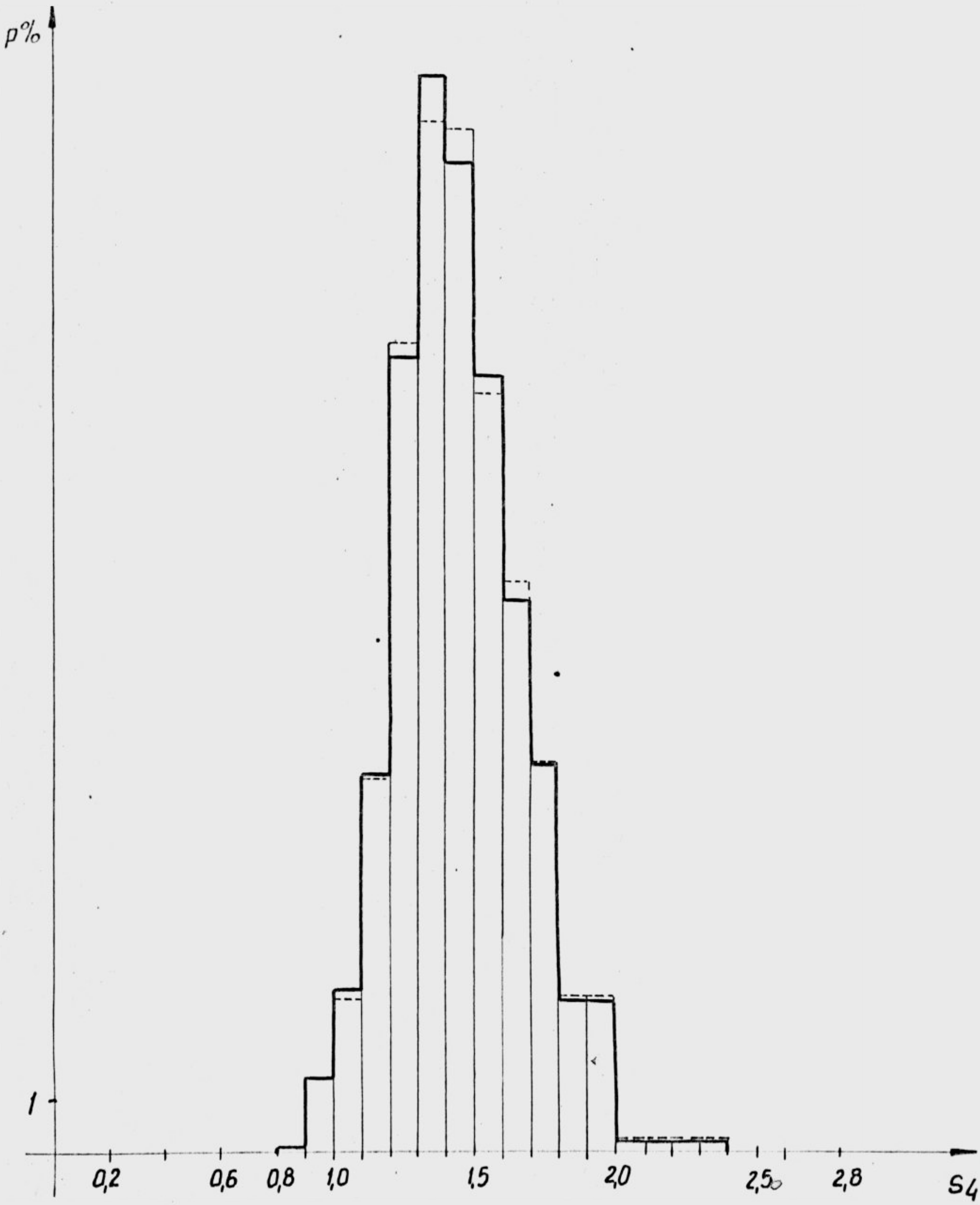
Rys.Z.39b Szczegółowy histogram zmiennej losowej S_5 z przykładu 14 dla przedziału $[0,1]$



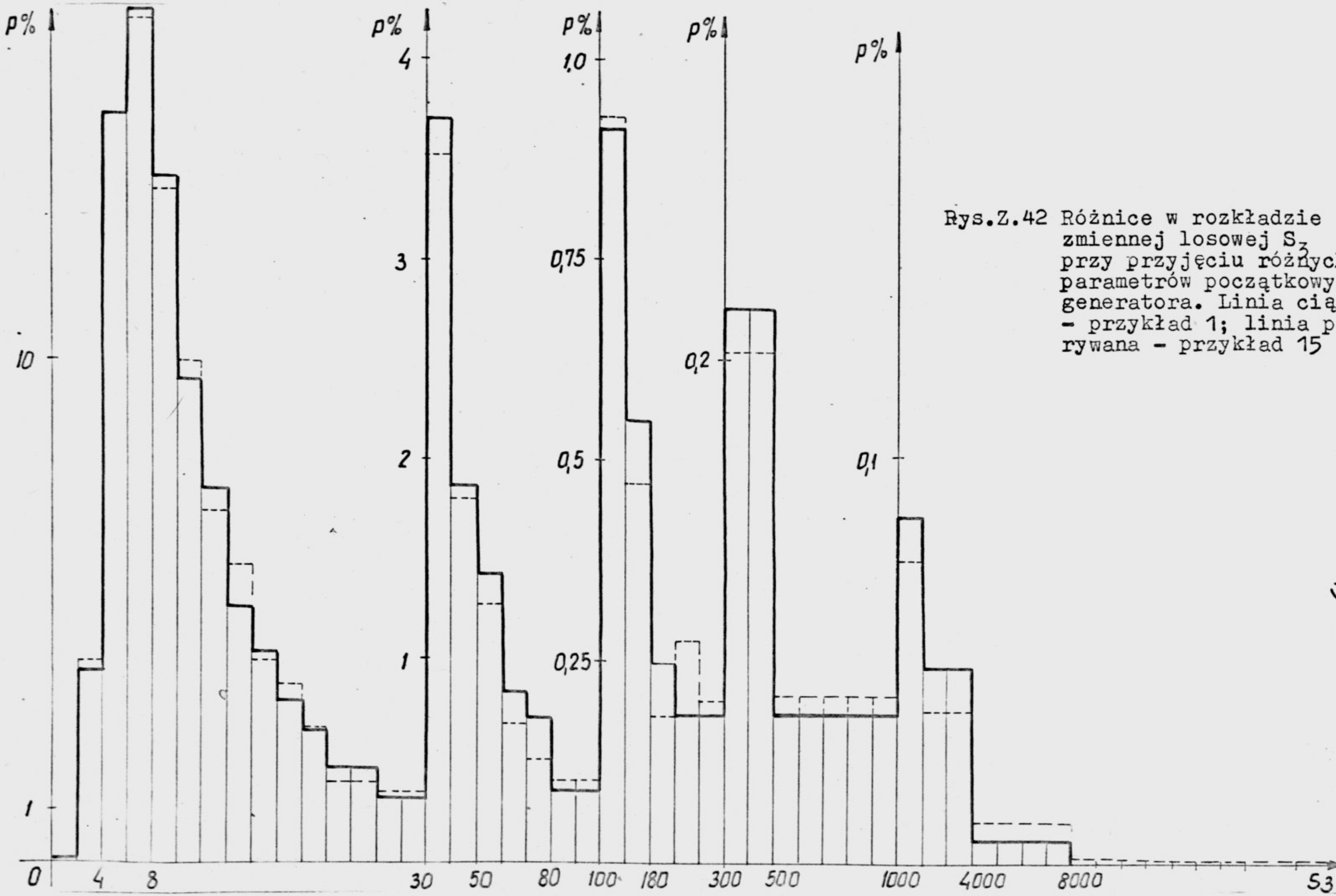
Rys.Z.39a Histogram zmiennej losowej S_5 z przykładu 14



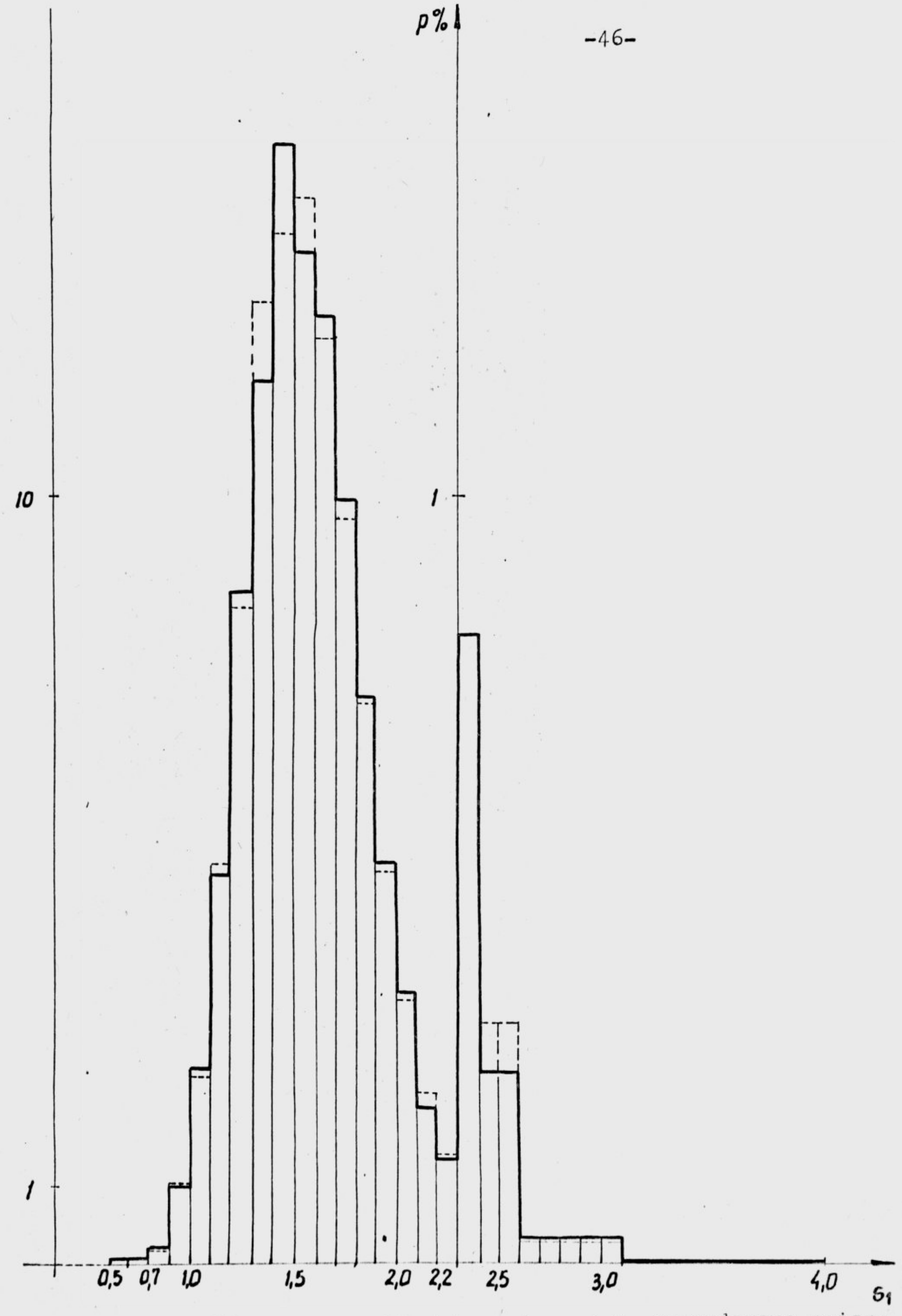
Rys.Z.40.Porównanie uzyskanych histogramów zmiennej Z_2 dla N=10000 realizacji (linia ciągła) i N=5000 (linia przerywana).



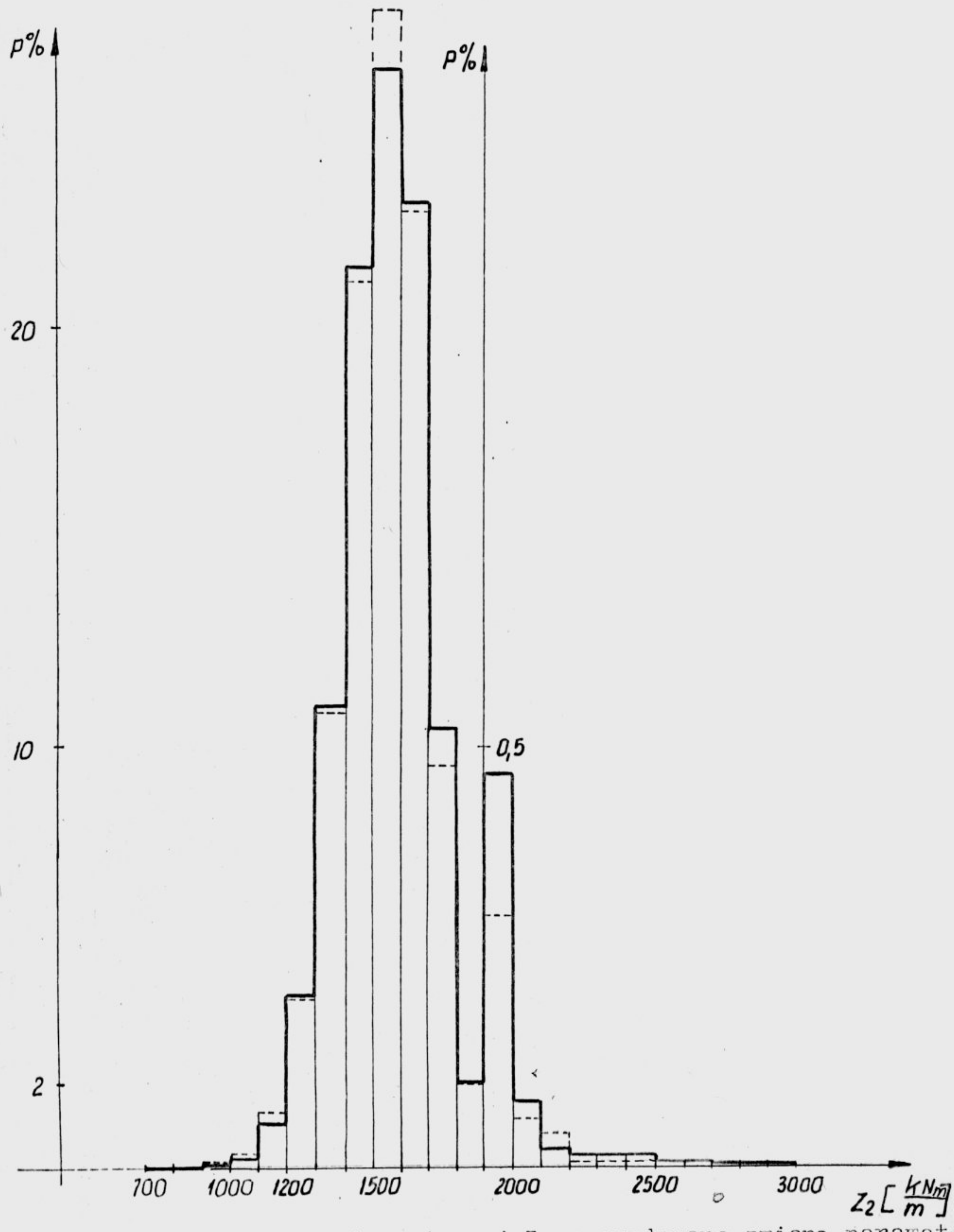
Rys.Z.41 Porównanie histogramów zmiennej losowej S_4 dla liczby realizacji N=10000/linia ciągła/ i N=5000 /linia przerywana/



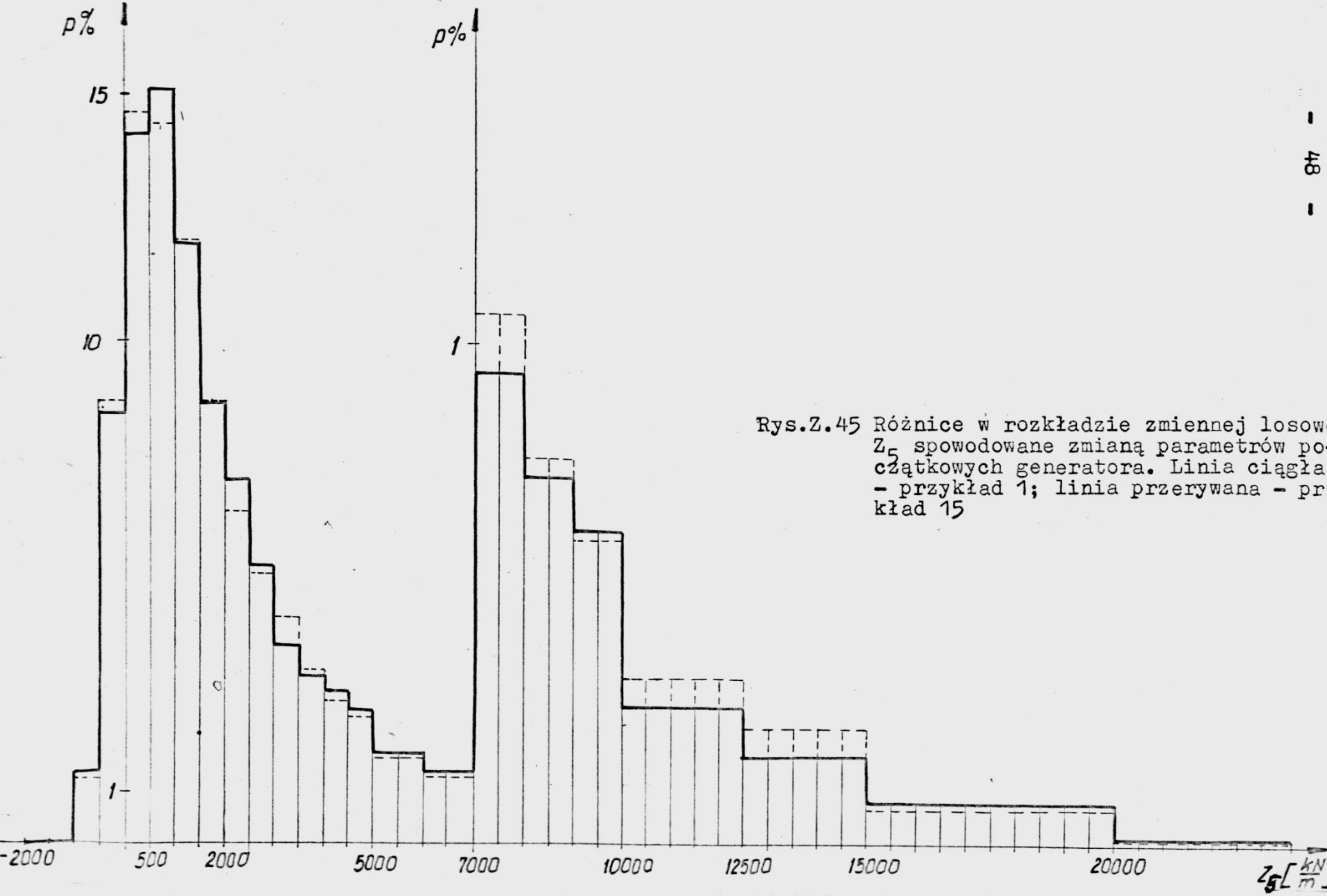
Rys.Z.42 Różnice w rozkładzie zmiennej losowej S_3 przy przyjęciu różnych parametrów początkowych generatora. Linia ciągła - przykład 1; linia przerywana - przykład 15



Rys.Z.43. Różnice w rozkładzie zmiennej S_1 spowodowane zmianą parameterów początkowych generatora. Linia ciągła-przykład 1; linia przerywana-przykład 15.



Rys.Z.44.Różnice w rozkładzie zmiennej Z_2 spowodowane zmianą parametrów początkowych generatora.Linia ciągła-przykład 1; linia przerywana-przykład 15.



Rys.Z.45 Różnice w rozkładzie zmiennej losowej Z_5 spowodowane zmianą parametrów początkowych generatora. Linia ciągła - przykład 1; linia przerywana - przykład 15

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raporty serii PRE nr

PROBABILISTYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI MASYWNYCH PRZYCZÓŁKÓW MOSTOWYCH METODĄ SYMULACYJNĄ

Wojciech Puła

Załącznik nr 2 do pracy doktorskiej

PROGRAM SYMULACYJNY WP01
Charakterystyka danych wejściowych
Wydruk protokołu z kompilacji
Wydruk wyników przykładu obliczeniowego nr 1

Wrocław 1984

Program symulacyjny WPO1 opracowany został w języku FORTRAN dla maszyny cyfrowej Odra 1305. Wykorzystuje on typowy podprogram o nazwie FPGCRV służący do generowania liczb pseudolosowych o rozkładzie jednostajnym na odcinku (0,1) i znajdującym się w typowym oprogramowaniu wyżej wymienionej maszyny. (por. [58]).

CHARAKTERYSTYKA DANYCH WEJSCIOWYCH

Jako dane wejściowe podawane są:

1. Liczba realizacji - zmienna LIRE
2. Liczby przedziałów na lewo od zera, w których mają być obliczane częstości występowania wartości poszczególnych zmiennych losowych Z_i - tablica NZERO (I), I=1,2,...,5
3. Granice przedziałów, w których oblicza się prawdopodobieństwo celem wyznaczenia rozkładu danej zmiennej
   a) dla zmiennych Z_i(i=1,...,5) - tablica PHZ(I,J)
   b) dla zmiennych S_i(i=1,...,5) - tablica PHF(I,J)
4. Parametry początkowe generatora rozkładu jednostajnego (por. rozdział 8) - tablica S(I)

   Każdej występującej w programie niezależnej zmiennej losowej odpowiada jeden parametr początkowy, będący liczbą z przedziału (0,1) różną od $\frac{1}{2}$.
5. Parametry dystrybuant rozkładów parametrów gruntowych (w postaci (4.8)) - tablica PG(I,J)

   I=2,3,...,10 - wskaźnik parametru gruntowego, przy czym numeracja parametrów jest następująca:

I=2 - kąt tarcia wewnętrznego w pierwszej wartwie

I=3 - kąt tarcia wewnętrznego w drugiej warstwie

I=4 - spójność w drugiej warstwie

I=5 - ciężar objętościowy w pierwszej warstwie

I=6 - ciężar objętościowy w drugiej warstwie

I=7 - kąt tarcia wewnętrznego w trzeciej warstwie

I=8 - ciężar objętościowy w trzeciej warstwie

I=9 - spójność w warstwie trzeciej

I=10 - spójność w warstwie pierwszej

J=1,...,11 - wskaźnik parametru dystrybuanty danego parametru gruntowego, przy czym

$PG(I,1)=m_1$

$PG(I,2)=m_2$

$PG(I,3)=m_3$

$PG(I,4)=\alpha_1$

$PG(I,5)=\alpha_2$ dla parametru gruntowego o numerze I

$PG(I,6)=\alpha_3$

$PG(I,7)=\beta_1$

$PG(I,8)=\beta_2$

$PG(I,9)=\beta_3$

$PG(I,10)=e$

$PG(I,11)=d$

6.Wartości zmiennych deterministycznych występujących w wyrażeniach określających zapasy stateczności oraz parametry pomocnicze - macierz X(I).Kolejno wczytuje się (oznaczenia jak w pracy)

$X(1)=N_{p2}$

$X(2)=N_q$

$X(3)=a_h$

$X(4)=h_1$

$X(5)=L$

$X(6)=q_o$

$X(7)=h_2$

$X(8)=\tilde{h}_2$

$X(9)=k_1$

$X(10)=B$

$X(11)=k_2$

X(12) - ramię siły N_{p2} względem punktu A

X(13) - ramię ciężaru własnego przyczółka względem punktu A

X(14) - ramię siły H_h względem punktu A

X(15) -ramię siły N_{p2} względem osi powierzchni cylindrycznej

X(16) - ramię siły N_q względem osi powierzchni cylindrycznej

X(17) - objętość (powierzchnia) gruntu warstwy drugiej zawarta pomiędzy powierzchnią cylindryczną a ścianami przyczółka

X(18) - promień powierzchni cylindrycznej

X(19) - pole wycinka powierzchni (długość łuku) cylindrycznej znajdującej się w warstwie drugiej

X(20) - promień najniekorzystniejszej linii poślizgu

$$X(21) = \begin{cases} 1 & \text{jeśli pierwszą warstwę stanowi grunt spoisty} \\ 0 & \text{w przeciwnym przypadku} \end{cases}$$

X(22),X(23) - analogicznie jak X(21) odpowiednio dla drugiej i trzeciej warstwy

X(24)=D

X(25),X(26) - analogicznie jak X(17) odpowiednio dla trzeciej i pierwszej warstwy gruntowej

X(27) - ramię siły N_4 względem osi powierzchni cylindrycznej

X(28),X(29) - analogicznie jak X(19) odpowiednio dla trzeciej i pierwszej warstwy gruntowej

X(30) - wysokość parcia trzeciej warstwy gruntowej

X(31) - kąt nachylenia podstawy przyczółka

X(32) - dodatkowe obciążenie naziomu występujące od strony minimalnego zagłębienia

7.Parametry (liczby całkowite) związane z obliczaniem prawdopodobieństwa wystąpienia osuwiska - tablica $Q_2(I)$

Uwaga:numeracja pasków i usytuowanie jak na rys.3.6 w pracy

$Q_2(1)$ - liczba pasków

$Q_2(2)$ - numer ostatniego paska, którego podstawa znajduje się w pierwszej warstwie - przed przejściem linii poślizgu do warstwy drugiej

Q(3) - numer ostatniego paska, którego podstawa znajduje się w drugiej warstwie - przed przejściem linii poślizgu do linii trzeciej

Q(4) - numer ostatniego paska, którego podstawa znajduje się w trzeciej warstwie

Q(5) - numer ostatniego paska, którego podstawa znajduje się w warstwie drugiej po przejściu przez warstwę trzecią, albo Q(4) gdy linia poślizgu kończy się w warstwie trzeciej

Q(6) - numer ostatniego paska

Q(7) - liczba pasków z lewej strony ośrodka obrotu

8. Tablica pomocnicza do obliczania ciężaru pasków Y(I,J)

Y(I,J) ma wymiar: liczba pasków x 3

$$Y(I,1) = \begin{cases} 1 & \text{dla tych pasków, w których w górnej podstawie występuje obciążenie naziomu} \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

$$Y(I,2) = \begin{cases} 1 & \text{dla tych pasków, które obejmują elementy przyczółka} \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

$$Y(I,3) = \begin{cases} 1 & \text{dla tego paska, w którym przyłożone są siły } N_{p1} \text{ i } N_{p2} \\ 0 & \text{dla pozostałych} \end{cases}$$

9. Pola pasków - tablice PE1(I), PE2(I), PE3(I)

PE1(I) - pole części i-tego paska zawartej w pierwszej warstwie

PE2(I) - pole części i-tego paska zawartej w drugiej warstwie

PE3(I) - pole części i-tego paska zawartej w trzeciej warstwie

Uwaga: Jeśli pasek nie przechodzi przez którąś z warstw należy wpisać zero.

10, Długości podstawy pasków

PL1(I) - długości górnych podstaw pasków

PL2(I) - długości dolnych podstaw pasków

Uwaga: Jeśli dolna podstawa i-tego paska znajduje się w warstwie gruntu niespoistego, to w tablicy PL2(I) należy na i-tym miejscu wpisać zero.

11. Ciężary elementów przyczółka zawartych w poszczególnych paskach - tablica Q3(I)

Jeśli i-ty pasek nie zawiera żadnych fragmentów przyczółka, to w macierzy Q3(I) na i-tym miejscu wpisuje się zero.

12. Wartości kątów α_i (por. wzory (3.30) i (3.31)) - macierz A(I)

13. Parametry rozkładu Frecheta

$PU=u_F$

$PK=k_F$

$$POBC = \begin{cases} 1-p_* \text{ gdy stosuje się obcięty rozkład Frecheta} \\ 1 \text{ dla nieobciętego rozkładu Frecheta} \end{cases}$$

(por. wzór (6.24))

14. Parametry związane z częstotliwością pojawiania się wydruków kontrolnych - JW, LW1, LW2

JW - liczba realizacji, przy któRrej następuje zmiana częstotliwości drukowania

LW1 - liczba wskazująca, co ile realizacji ma nastąpić wydruk, gdy liczba realizacji jest mniejsza niż JW

LW2 - liczba wskazująca, co ile realizacji ma nastąpić wydruk, gdy liczba realizacji jest większa niż JW.

Uwaga: Jeśli parametry dystrybuant wg wzoru (4.8) nie są obliczone z dużą dokładnością, to w celu uniknięcia niepożądanych konsekwencji niedokładnego obliczania granic przedziałów we wzorze (6.7), należy zastosować dodatkową macierz W(I,J)

W(I,1) = wartość dystrybuanty i-tego parametru gruntowego w punkcie e

W(I,2) = wartość dystrybuanty i-tego parametru gruntowego w punkcie d.

NAZWY INNYCH WAŻNIEJSZYCH ZMIENNYCH I TABLIC WYSTEPUJACYCH W PROGRAMIE WPO1

Z1,...,Z5 - zapasy stateczności $Z_1,\ldots,Z_5$

F(I),(I=1,...,5) - tablica,współczynników pewności $S_i (i=1,\ldots,5)$

LIHZ(I,J) - tablica,w której zapamiętywane są krotności pojawiania się zmiennych Z_i w J-tym przedziale

LIHF(I,J) - macierz analogiczna do LIHZ(I,J) dla zmiennych S_i

PSTW(I,J) -macierz rozkładów prawdopodobieństw zmiennych Z_i

PSTWF(I,J) - macierz rozkładów prawdopodobieństw zmiennych S_i

P(I) - macierz prawdopodobieństw utraty stateczności

MZ(K,I),MC(K,I),MCN(K,I) - macierze momentów odpowiednio zwykłych,centralnych oraz centralnych obliczanych według estymatorów nieobciążonych dla zmiennych Z_i

MF(K,I),MFC(K,I),MFCN(K,I) - analogiczne do powyższych macierze dla zmiennych S_i

SS(I) - macierz układu podstawowych zmiennych losowych

$SS(1)=N_{p1}$: SS(I) dla I=2,...,10 są oznaczone analogicznie w punkcie 5 opisu danych wejściowych

$N1=N_{p1}+N_{p2}$

$N2=N_q$

$N3=N_4$

$H1=H_h$

H21,H22,H31,H32,H3,H41,H42 - siły parcia gruntu

XM-wypadkowy moment sił względem osi powierzchni cylindrycznej

Q1(I) - macierz ciężarów pasków do obliczania prawdopodobieństwa powstania uskoków naziomu

$QF=Q_f$

$NB=N_B$: $ND=N_D$

$DB=d_B$: $DD=d_D$

$SB=s_B$: $SD=s_D$

$IB=i_B$: $ID=i_D$

E02 - mimośród wypadkowej względem środka podstawy

Na następnych stronach przedstawiono wydruk kompilacji oraz jako przykład wydruk wyników przykładu obliczeniowego nr 1 omówionego w rozdziale 7 pracy.

```
      LIST
      LIBRARY (SUBGROUPFSCE)
      PROGRAM (UP01)
      MIXED SEGMENTS
      INPUT1=CR1
      OUTPUT 2 = LP1
      TRACE 2
      END
      MASTER ORGANIZATOR
      INTEGER LIHZ(5,61),O2(7),NPHZ(5),NZERO(5)
      INTEGER NPHF(5),NZEROF(5),LIHF(5,61)
      INTEGER LURE(5)
      REAL LIRE1(5)
      REAL MZ(4,5),MC(4,5),MF(4,5),MFC(4,5),MFCN(4,5),MCN(4,5)
      REAL N1,N2,N3,NO,ND,NB,NC,ID,IB,IC,QF
      DIMENSION PHZ(5,60),PG(10,11),S(10),X(32),SS(10),PSTW(5,61),ZZ(5),
     1PP(5),P(5)
      DIMENSION PSTWF(5,61),F(5),PHF(5,60),PF(5),PPF(5)
      DIMENSION W(10,2)
      DIMENSION Y(20,3),PE1(20),PE2(20),PE3(20),PL1(20),PL2(20),Q3(20),
     1A(20),Q1(20)
      DO 400 I=1,5
      DO 400 J=1,61
  400 LIHZ(I,J)=0
      DO 560 I=1,5
      DO 560 J=1,61
  560 LIHF(I,J)=0
      DO 8 K=1,4
      DO 8 L=1,5
    8 MZ(K,L),MC(K,L),MF(K,L),MFC(K,L),MFCN(K,L),MCN(K,L)=0.
      DO 450 I=1,5
  450 LURE(I)=0
      DO 460 L=1,5
  460 LIRE1(L)=0.
      PR=0.
      PR1=0.
      READ (1,100) LIRE
      READ (1,110) (NZERO(I),I=1,5)
      DO 405 I=1,5
      READ (1,100) NPHZ(I)
      NNN=NPHZ(I)
  405 READ (1,101) (PHZ(I,J),J=1,NNN)
      READ (1,103) ((PG(I,J),I=2,8),J=1,11)
      READ (1,102) (S(I),I=1,8)
      READ (1,104) (X(I),I=1,32)
      READ (1,105) (Q2(I),I=1,6)
      READ (1,106) ((Y(I,J),I=1,20),J=1,3)
      READ (1,107) (PE1(I),I=1,20),(PE2(J),J=1,20),(PE3(K),K=1,20),
     1(PL1(L),L=1,20),(PL2(N),N=1,20)
      READ (1,108) (Q3(I),I=1,20)
      READ (1,108) (A(I),I=1,20)
      READ (1,109) PU,PK,PORC
      READ (1,111) JW,LU1,LU2
      READ (1,112) ((W(I,J),I=1,10),J=1,2)
      READ (1,115) (NZEROF(I),I=1,5)
      DO 406 I=1,5
      READ (1,113) NPHF(I)
```

```
      NNN3=NPHF(I)
  406 READ (1,114) (PHF(I,J),J=1,NNN3)
      DO 72 I=9,10
   72 SS(I)=0.
      DO 10 J=1,NIRE
      DO 1 I=1,8
      S(I) = FPHCRV(S(I))
    1 CONTINUE
      SS(1)=(-ALOG(POBC*S(1)))**(-1./PK)
      SS(1) = PU*SS(1)
      DO 16 K=2,8
      IF (S(K).LT.W(K,1)) GO TO 11
      IF (S(K).LT.W(K,2)) GO TO 12
      DD3=(2./PG(K,3))*(S(K)+((PG(K,4)+PG(K,5)+PG(K,6))*(PG(K,4)+PG(K,5)
     1+PG(K,6))-2.*PG(K,3)*(PG(K,7)+PG(K,8)+PG(K,9)))/(2.*PG(K,3)))
      IF (DD3.LT.0.) GO TO 550
      IF(PG(K,3).LT.0) GO TO 13
      SS(K)=-(PG(K,4)+PG(K,5)+PG(K,6))/PG(K,3)+SQRT(DD3)
      GO TO 16
   13 SS(K)=-(PG(K,4)+PG(K,5)+PG(K,6))/PG(K,3)-SQRT(DD3)
      GO TO 16
   11 DD1=(2./PG(K,1))*(S(K)+(PG(K,4)*PG(K,4)-2.*PG(K,1)*PG(K,7))/
     1(2.*PG(K,1)))
      IF (DD1.LT.0.) GO TO 550
      IF(PG(K,1).LT.0) GO TO 14
      SS(K)=-PG(K,4)/PG(K,1)+SQRT(DD1)
      GO TO 16
   14 SS(K)=-PG(K,4)/PG(K,1)-SQRT(DD1)
      GO TO 16
   12 DD2=(2./PG(K,2))*(S(K)+((PG(K,4)+PG(K,5))*(PG(K,4)+PG(K,5))-2.*
     1PG(K,2)*(PG(K,7)+PG(K,8)))/(2.*PG(K,2)))
      IF (DD2.LT.0.) GO TO 550
      IF(PG(K,2).LT.0) GO TO 15
      SS(K)=-(PG(K,4)+PG(K,5))/PG(K,2)+SQRT(DD2)
      GO TO 16
   15 SS(K)=-(PG(K,4)+PG(K,5))/PG(K,2)-SQRT(DD2)
      GO TO 16
  550 WRITE (2,350) J,K,S(K)
   16 CONTINUE
      PI=3.14159265359
      N1=SS(1)+X(1)
      N2=X(2)
      N3=X(17)*SS(6)+X(25)*SS(8)
      H1=X(3)*SS(1)
      H21=SS(5)*X(4)*X(4)/2*TAN(PI/4-SS(2)/2)*TAN(PI/4-SS(2)/2)
      H22=X(4)*(2*SS(1)/X(5)+X(6))*TAN(PI/4-SS(2)/2)*TAN(PI/4-SS(2)/2)
      H31=((X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(9)*X(4))*X(7)*TAN(PI/4-SS(3)/2)-2*SS(4)
     1*X(7))*TAN(PI/4-SS(3)/2)
      H32=SS(6)*X(7)*X(7)/2*TAN(PI/4-SS(3)/2)*TAN(PI/4-SS(3)/2)
      H3=((SS(6)*X(7)*X(7)/2+X(7)*(X(6)+2*SS(1)/X(5)+X(4)*SS(5)))*TAN
     1(PI/4-SS(3)/2)-2*SS(4)*X(7)+(X(6)+2*SS(1)/X(5)+X(4)*SS(5))*(X(6)
     1+2*SS(1)/X(5)+X(4)*SS(5))/(2*SS(6))*TAN(PI/4-SS(3)/2)-2*SS(4)*(X(6
     1)+2*SS(1)/X(5)+X(4)*SS(5))/SS(6))*TAN(PI/4-SS(3)/2)+2*SS(4)*SS(4
     1)/SS(6)
      H41=SS(6)*X(8)*X(8)/2*TAN(PI/4+SS(3)/2)*TAN(PI/4+SS(3)/2)
      H42=2*SS(4)*X(8)*TAN(PI/4+SS(3)/2)
      Z11=(N1+N2)*TAN(X(9)*SS(7))-H1-H21-H22+H41+H42
      F11=(N1+N2)*TAN(X(9)*SS(7))+H41+H42
      F12 = H1+H21+H22
```

```
      IF ((X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4)).GE.(2*SS(4)/TAN(PI/4-SS(3)/2
     1))) GO TO 26
      D12=H3
      Z1=Z11-D12
      F(1)=F11/(F12+D12)
      GO TO 27
   26 D11=H31+H32
      Z1=Z11-D11
      F(1)= F11/(F12+D11)
   27 CONTINUE
      IF (Z1.GE.0.) GO TO 93
      PR=PR+1
   93 CONTINUE
      MZ(1,1)=MZ(1,1)+Z1
      MZ(2,1)=MZ(2,1)+Z1*Z1
      MZ(3,1)=MZ(3,1)+Z1*Z1*Z1
      MZ(4,1)=MZ(4,1)+Z1*Z1*Z1*Z1
      MF(1,1)=MF(1,1)+F(1)
      MF(2,1)=MF(2,1)+F(1)**2.
      MF(3,1)=MF(3,1)+F(1)**3.
      MF(4,1)=MF(4,1)+F(1)**4.
      Z22=X(12)*H1+X(13)*H2-X(14)*H1-(X(7)+X(4)/3)*H21-(X(7)+X(4)/2)*
     1H22+X(8)*H41/3+X(8)*H42/2
      F21=X(12)*H1+X(13)*H2+X(8)*H41/3+X(8)*H42/2
      F22= X(14)*H1+(X(7)+X(4)/3)*H21+(X(7)+X(4)/2)*H22
      IF ((X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4)).GE.(2*SS(4)/TAN(PI/4-SS(3)/2
     1))) GO TO 50
      D22=H3*((SS(6)*X(7)+X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4))/(3*SS(6))-2*SS
     1(4)/(3*TAN(PI/4-SS(3)/2)*SS(6)))
      Z2=Z22-D22
      F(2)=F21/(F22+D22)
      GO TO 51
   50 D21=H31*X(7)/2+H32*X(7)/3
      Z2=Z22-D21
      F(2)=F21/(F22+D21)
   51 CONTINUE
      IF (Z1.LT.0.) GO TO 94
      IF (Z2.GE.0.) GO TO 94
      PR=PR+1
   94 CONTINUE
      MZ(1,2)=MZ(1,2)+Z2
      MZ(2,2)=MZ(2,2)+Z2*Z2
      MZ(3,2)=MZ(3,2)+Z2*Z2*Z2
      MZ(4,2)=MZ(4,2)+Z2*Z2*Z2*Z2
      MF(1,2)=MF(1,2)+F(2)
      MF(2,2)=MF(2,2)+F(2)*F(2)
      MF(3,2)=MF(3,2)+F(2)**3.
      MF(4,2)=MF(4,2)+F(2)**4.
      XM1=(X(14)-X(8)/2)*H1+(X(7)+X(4)/3-X(8)/2)*H21+(X(7)+X(4)/2-X(8)
     1/2)*H22+(X(8)/2-X(8)/3)*H41+X(18)*N1+X(19)*N2+X(27)*N3
      IF ((X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4)).GE.(2*SS(4)/TAN(PI/4-SS(3)/2
     1))) GO TO 40
      XM12=((SS(6)*X(7)+X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4))/(3*SS(6))-2*SS(4)
     1/(3*TAN(PI/4-SS(3)/2)*SS(6))-X(8)/2)*H3
      XM=XM1+XM12
      IF (XM.LE.0.) GO TO 440
      W2=(H21+H22+H3+H1-H41-H42)*(H21+H22+H3+H1-H41-H42)+(N1+N2+N3)*
     1(N1+N2+N3)
      Z3=SQRT((X(18)**2)*W2-XM*XM)*TAN(SS(7))+X(18)*SS(4)*X(19)-XM
```

```
      F(3)=(SQRT((X(18)**2)*U2-XM*XM)*TAN(SS(7))+X(18)*X(19)+SS(4))/XM
      GO TO 41
   40 XM11=(X(7)/2-X(8)/2)*H31+(X(7)/3-X(8)/2)*H32
      XM=XM1+XM11
      IF (XM.LE.0.) GO TO 440
      U1=(H21+H22+H31+H32+H1-H41-H42)*(H21+H22+H31+H32+H1+H41-H42)*(H1
     1+H2+H3)*(H1+H2+H3)
      Z3=SQRT((X(18)**2)*U1-XM*XM)*TAN(SS(7))+X(18)*X(19)+SS(4)-XM
      F(3)=(SQRT((X(18)**2)*U1-XM*XM)*TAN(SS(7))+X(18)*X(19)+SS(4))/XM
   41 CONTINUE
      IF (Z1.LT.0.) GO TO 95
      IF (Z2.LT.0.) GO TO 95
      IF (Z3.GE.0.) GO TO 95
      PR=PR+1
   95 CONTINUE
      MZ(1,3)=MZ(1,3)+Z3
      MZ(2,3)=MZ(2,3)+Z3*Z3
      MZ(3,3)=MZ(3,3)+Z3*Z3*Z3
      MZ(4,3)=MZ(4,3)+Z3*Z3*Z3*Z3
      MF(1,3)=MF(1,3)+F(3)
      MF(2,3)=MF(2,3)+F(3)*F(3)
      MF(3,3)=MF(3,3)+F(3)*F(3)*F(3)
      MF(4,3)=MF(4,3)+F(3)*F(3)*F(3)*F(3)
      ZZ(3)=Z3
      IF (ZZ(3).GE.PHZ(3,NPHZ(3))) GO TO 442
      K=0
  443 K=K+1
      IF (ZZ(3).LT.PHZ(3,K)) GO TO 444
      GO TO 443
  444 LIHZ(3,K)=LIHZ(3,K)+1
      GO TO 445
  442 LIHZ(3,NPHZ(3)+1)=LIHZ(3,NPHZ(3)+1)+1
  445 CONTINUE
      IF (F(3).GE.PHF(3,NPHF(3))) GO TO 447
      K=0
  448 K=K+1
      IF(F(3).LT.PHF(3,K)) GO TO 449
      GO TO 448
  449 LIHF(3,K)=LIHF(3,K)+1
      GO TO 451
  447 LIHF(3,NPHF(3)+1)=LIHF(3,NPHF(3)+1)+1
  451 CONTINUE
      PP(3)=0.
      DO 446 K=1,NZERO(3)
  446 PP(3)=PP(3)+FLOAT(LIHZ(3,K))/FLOAT(J-LURE(3))
      GO TO 441
  440 LURE(3)=LURE(3)+1
  441 CONTINUE
      DO 50 I=1,Q2(1)
   50 Q1(I)=SS(5)*PE1(I)+SS(6)*PE2(I)+SS(8)*PE3(I)+Y(I,2)*Q3(I)+Y(I,3)*
     1(SS(1)+X(1))+Y(I,1)*PL1(I)*(X(6)+2*SS(1)/X(5))
      Z411=0.
      DO 51 I=1,Q2(2)
   51 Z411=Z411+Q1(I)*COS(A(I))*TAN(SS(2))+X(21)*SS(10)*PL2(I)
      N11=Q2(2)+1
      IF (N11.GT.Q2(3)) GO TO 65
      Z412=0.
      DO 52 I=N11,Q2(3)
   52 Z412=Z412+Q1(I)*COS(A(I))*TAN(SS(3))+X(22)*SS(4)*PL2(I)
```

```
      N12=Q2(3)+1
      IF (N12.GT.Q2(6)) GO TO 66
      IF (N12.GT.Q2(5)) GO TO 67
      Z413=0.
      DO 53 I=N12,Q2(4)
   53 Z413=Z413+Q1(I)*COS(A(I))*TAN(SS(7))+X(23)*SS(9)*PL2(I)
      N13=Q2(4)+1
      IF (N13.GT.Q2(6)) GO TO 68
      Z414=0.
      DO 54 I=N13,Q2(5)
   54 Z414=Z414+Q1(I)*COS(A(I))*TAN(SS(3))+X(22)*SS(4)*PL2(I)
      GO TO 71
   67 Z413=0.
      Z414=0.
   71 N14=Q2(5)+1
      IF (N14.GT.Q2(6)) GO TO 69
      Z415=0.
      DO 55 I=N14,Q2(6)
   55 Z415=Z415+Q1(I)*COS(A(I))*TAN(SS(2))+X(21)*SS(10)*PL2(I)
      GO TO 70
   65 Z412=0.
      Z413=0.
      Z414=0.
      Z415=0.
      GO TO 70
   66 Z413=0.
      Z414=0.
      Z415=0.
      GO TO 70
   68 Z414=0.
      Z415=0.
      GO TO 70
   69 Z415=0.
   70 Z41=X(20)*(Z411+Z412+Z413+Z414+Z415)
      Z421=0.
      N15=Q2(7)+1
      DO 56 I=N15,Q2(1)
   56 Z421=Z421+Q1(I)*SIN(A(I))
      Z42=X(20)*Z421
      Z431=0.
      DO 57 I=1,Q2(7)
   57 Z431=Z431+Q1(I)*SIN(A(I))
      Z43=X(20)*Z431
      Z4=Z41+Z42-Z43
      F(4)=(Z41+Z42)/Z43
      IF (Z1.LT.0.) GO TO 96
      IF (Z2.LT.0.) GO TO 96
      IF (Z3.LT.0.) GO TO 96
      IF (Z4.GE.0.) GO TO 96
      PR=PR+1
   96 CONTINUE
      MZ(1,4)=MZ(1,4)+Z4
      MZ(2,4)=MZ(2,4)+Z4*Z4
      MZ(3,4)=MZ(3,4)+Z4*Z4*Z4
      MZ(4,4)=MZ(4,4)+Z4*Z4*Z4*Z4
      MF(1,4)=MF(1,4)+F(4)
      MF(2,4)=MF(2,4)+F(4)**2.
      MF(3,4)=MF(3,4)+F(4)**3.
      MF(4,4)=MF(4,4)+F(4)**4.
```

```
      ZZ(1)=Z1
      ZZ(2)=Z2
      ZZ(3)=Z3
      ZZ(4)=Z4
      DO 401 L=1,4
      IF (L.EQ.3) GO TO 401
      IF (ZZ(L).GE.PHZ(L,NPHZ(L))) GO TO 2
      K=0
    4 K=K+1
      IF (ZZ(L).LT.PHZ(L,K)) GO TO 3
      GO TO 4
    3 LIHZ(L,K)=LIHZ(L,K)+1
      GO TO 21
    2 LIHZ(L,NPHZ(L)+1)=LIHZ(L,NPHZ(L)+1)+1
   21 CONTINUE
  401 CONTINUE
      DO 408 L=1,4
      IF (L.EQ.3) GO TO 408
      IF (F(L).GE.PHF(L,NPHF(L))) GO TO 409
      K=0
  410 K=K+1
      IF (F(L).LT.PHF(L,K)) GO TO 411
      GO TO 410
  411 LIHF(L,K)=LIHF(L,K)+1
      GO TO 412
  409 LIHF(L,NPHF(L)+1)=LIHF(L,NPHF(L)+1)+1
  412 CONTINUE
  408 CONTINUE
      IF (Z2.LT.0) GO TO 80
      N0=N1+N2
      ND=(TAN(PI/4+SS(7)/2))*(TAN(PI/4+SS(7)/2))*EXP(PI*TAN(SS(7)))
      NB=1.5*(ND-1)*TAN(SS(7))
      DB=1.0
      DD=1+2*TAN(SS(7))*((1.-SIN(SS(7)))**2)*(X(24)/X(10))
      BD=EXP(-2*X(31)*TAN(SS(7)))
      BB=EXP(-2.7*X(31)*TAN(SS(7)))
      SD=1.
      SB=1.
      EA=Z2/N0
      E01=X(10)/2.-EA
      E02=ABS(E01)
      B1=X(10)-2*E02
      IF ((X(6)+2*SS(1)/X(5)+SS(5)*X(4)).GE.(2*SS(4)/TAN(PI/4+SS(5)/2)))
     1GO TO 83
      H02=(H21+H22)+H3+H1-(H41+H42)
      IB=(1-0.7*(H02/(N0+X(10)*SS(9)*COT(SS(7)))))**5
      ID=(1-0.5*(H02/(N0+X(10)*SS(9)*COT(SS(7)))))**5
      GO TO 84
   83 H01=H21+H22+H51+H52+H1-(H41+H42)
      IB=(1-0.7*(H01/(N0+X(10)*SS(9)*COT(SS(7)))))**5
      ID=(1-0.5*(H01/(N0+X(10)*SS(9)*COT(SS(7)))))**5
   84 CONTINUE
      QF=B1*(SS(8)/2*B1*NB*SB*DB*IB*BB+(X(32)+SS(6)*X(24)+SS(9)*COT(SS
     1(7)))*ND*SD*DD*ID*BD-SS(9)*COT(SS(7)))
      Z5=QF-N0
      F(5)=QF/N0
      IF (Z1.LT.0.) GO TO 97
      IF (Z2.LT.0.) GO TO 97
      IF (Z3.LT.0.) GO TO 97
```

```
      IF (Z4.LT.0.) GO TO 97
      IF (Z5.GE.0.) GO TO 97
      PR=PR+1
   97 CONTINUE
      MZ(1,5)=MZ(1,5)+Z5
      MZ(2,5)=MZ(2,5)+Z5*Z5
      MZ(3,5)=MZ(3,5)+Z5*Z5*Z5
      MZ(4,5)=MZ(4,5)+Z5*Z5*Z5*Z5
      MF(1,5)=MF(1,5)+F(5)
      MF(2,5)=MF(2,5)+F(5)**2.
      MF(3,5)=MF(3,5)+F(5)**3.
      MF(4,5)=MF(4,5)+F(5)**4.
      ZZ(5)=Z5
      IF (ZZ(5).GE.PHZ(5,NPHZ(5))) GO TO 85
      K=0
   86 K=K+1
      IF (ZZ(5).LT.PHZ(5,K)) GO TO 87
      GO TO 86
   87 LIHZ(5,K)=LIHZ(5,K)+1
      GO TO 88
   85 LIHZ(5,NPHZ(5)+1)=LIHZ(5,NPHZ(5)+1)+1
   88 CONTINUE
      IF (F(5).GE.PHF(5,NPHF(5))) GO TO 430
      K=0
  413 K=K+1
      IF (F(5).LT.PHF(5,K)) GO TO 414
      GO TO 413
  414 LIHF(5,K)=LIHF(5,K)+1
      GO TO 415
  430 LIHF(5,NPHF(5)+1)=LIHF(5,NPHF(5)+1)+1
  415 CONTINUE
      PP(5)=0.
      DO 89 K=1,NZERO(5)
   89 PP(5)=PP(5)+FLOAT(LIHZ(5,K))/FLOAT(J-LURE(5))
      GO TO 453
   80 LURE(5)=LURE(5)+1
  453 JJ1=J/LW1
      JJ2=J/LW2
      IF (J.LT.JW.AND.J.NE.JJ1*LW1) GO TO 500
      IF (J.GE.JW.AND.J.NE.JJ2*LW2) GO TO 500
      DO 402 L=1,4
      IF (L.EQ.3) GO TO 402
      PP(L)=0.
      DO 20 K=1,NZERO(L)
   20 PP(L)=PP(L)+FLOAT(LIHZ(L,K))/FLOAT(J)
  402 CONTINUE
      DO 417 L=1,4
      IF (L.EQ.3) GO TO 417
      PPF(L)=0.
      DO 418 K=1,NZEROF(L)
  418 PPF(L)=PPF(L)+FLOAT(LIHF(L,K))/FLOAT(J)
  417 CONTINUE
      WRITE(2,4444)
      WRITE (2,300) J
      WRITE (2,301) (SS(K),K=1,8)
      WRITE (2,302) Z1,Z2,Z3,Z4,Z5
      WRITE (2,320) (F(I),I=1,5)
      WRITE (2,303) (PP(I),I=1,5)
  500 CONTINUE
```

```
   10 CONTINUE
      DO 404 L=1,5
      DO 6 J=1,NPHZ(L)+1
    6 PSTU(L,J)=FLOAT(LIHZ(L,J))/FLOAT(LIRE-LURE(L))
      P(L)=0.
      DO 5 K=1,NZERO(L)
    5 P(L)=P(L)+PSTU(L,K)
  404 CONTINUE
      DO 431 L=1,5
      DO 419 J=1,NPHF(L)+1
  419 PSTUF(L,J)=FLOAT(LIHF(L,J))/FLOAT(LIRE-LURE(L))
  431 CONTINUE
      DO 28 K=1,4
      DO 28 L=1,5
      MF(K,L)=MF(K,L)/FLOAT(LIRE-LURE(L))
      MZ(K,L)=MZ(K,L)/FLOAT(LIRE-LURE(L))
   28 CONTINUE
      DO 29 L=1,5
      LIRE1(L)=FLOAT(LIRE-LURE(L))
      MC(1,L)=MZ(1,L)
      MC(2,L)=MZ(2,L)-MZ(1,L)*MZ(1,L)
      MC(3,L)=MZ(3,L)-3*MZ(2,L)*MZ(1,L)+2*MZ(1,L)*MZ(1,L)*MZ(1,L)
      MC(4,L)=MZ(4,L)-4*MZ(3,L)*MZ(1,L)+6*MZ(1,L)*MZ(1,L)*MZ(2,L)-3*
     1MZ(1,L)*MZ(1,L)*MZ(1,L)*MZ(1,L)
      MFC(1,L)=MF(1,L)
      MFC(2,L)=MF(2,L)-MF(1,L)*MF(1,L)
      MFC(3,L)=MF(3,L)-3*MF(2,L)*MF(1,L)+2*MF(1,L)*MF(1,L)*MF(1,L)
      MFC(4,L)=MF(4,L)-4*MF(3,L)*MF(1,L)+6*MF(1,L)*MF(1,L)*MF(2,L)-3*
     1MF(1,L)*MF(1,L)*MF(1,L)*MF(1,L)
      MCN(1,L)=MC(1,L)
      MCN(2,L)=LIRE1(L)/(LIRE1(L)-1)*MC(2,L)
      MCN(3,L)=LIRE1(L)**2/((LIRE1(L)-1)*(LIRE1(L)-2))*MC(3,L)
      MCN(4,L)=LIRE1(L)/((LIRE1(L)-1)*(LIRE1(L)-2)*(LIRE1(L)-3))*((LIRE
     11(L)**2-2*LIRE1(L)+3)*MC(4,L)-3*(2*LIRE1(L)-3)*(MC(2,L)**2))
      MFCN(1,L)=MFC(1,L)
      MFCN(2,L)=LIRE1(L)/(LIRE1(L)-1)*MFC(2,L)
      MFCN(3,L)=LIRE1(L)**2/((LIRE1(L)-1)*(LIRE1(L)-2))*MFC(3,L)
      MFCN(4,L)=LIRE1(L)/((LIRE1(L)-1)*(LIRE1(L)-2)*(LIRE1(L)-3))*((LIRE
     11(L)**2-2*LIRE1(L)+3)*MFC(4,L)-3*(2*LIRE1(L)-3)*(MFC(2,L)**2))
   29 CONTINUE
      PR=PR/FLOAT(LIRE)
      PR10 = FLOAT(LURE(3))/FLOAT(LIRE)
  100 FORMAT (1I0)
  101 FORMAT(60F0.0)
  102 FORMAT (8F0.0)
  103 FORMAT (77F0.0)
  104 FORMAT (32F0.0)
  105 FORMAT (7I0)
  106 FORMAT (60F0.0)
  107 FORMAT(100F0.0)
  108 FORMAT (20F0.0)
  109 FORMAT (3F0.0)
  110 FORMAT (5I0)
  111 FORMAT (3I0)
  112 FORMAT (20F0.0)
  113 FORMAT (1I0)
  114 FORMAT (60F0.0)
  115 FORMAT (5I0)
 4444 FORMAT(1H1)
```

```
  300 FORMAT (///15X,29HLICZBA REALIZACJI      LIRE = ,I8)
  301 FORMAT (//15X,27HWARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH//10X,37HREAKCJA NA  O
     1BCIAZENIA RUCHOMA  RP1 = ,F12.5/10X,26HKAT TARCIA WEWN.1    FI1 = ,
     1F8.5/10X,26HKAT TARCIA WEWN.2    FI2 = ,F8.5/10X,15HSPOJNOSC    C =
     1,F10.5/10X,24HCIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = ,F8.5/10X,24HCIEZAR OBJ.2
     1GAMMA2 = ,F8.5/10X,26HKAT TARCIA WEWN.3    FI3 = ,F8.5/10X,24HCIEZA
     1R OBJ.3    GAMMA3 = ,F8.5/)
  302 FORMAT (//15X,19HZAPASY STATECZNOSCI//10X,5HZ1 = ,F20.5/10X,5HZ2 =
     1 ,F20.5/10X,5HZ3 = ,F20.5/10X,5HZ4 = ,F20.5/10X,5HZ5 = ,F20.5)
  320 FORMAT (///15X,22HWSKAZNIKI STATECZNOSCI//10X,5HF1 = ,F22.7/10X,5H
     1F2 = ,F22.7/10X,5HF3 = ,F22.7/10X,5HF4 = ,F22.7/10X,5HF5 = ,F22.7)
  303 FORMAT (///10X,45HPRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ///1
     15X,20HPRZESUNIECIE    P1 = ,F7.5//15X,35HOBROT WOKOL KRAWEDZI PODST
     1AWY P2 = ,F7.5//15X,36HOBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = ,F7.5//
     115X,26HWYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = ,F7.5//15X,30HPRZEKROCZENIE NOSNO
     1SCI PODLOZA P5 = ,F7.5//)
      WRITE(2,4444)
      WRITE (2,304)
  304 FORMAT (///25X,12H************///)
      WRITE (2,300) LIRE
      WRITE (2,303) (P(I),I=1,5)
      WRITE (2,345) PR10
  345 FORMAT (/10X,46HPRAWDOPODOB. WYSTAPIENIA UJEMNEGO MOMENTU PRZY/10X
     1,33HOBROCIE WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ PM = ,F7.5//)
      WRITE (2,305) PR
  305 FORMAT (/5X,49HCALKOWITE PRAWDOPODOB. UTRATY STATECZNOSCI    P = ,F
     17.5//)
      WRITE(2,4444)
      WRITE (2,306)
  306 FORMAT (/15X,29HROZKLADY ZAPASOW STATECZNOSCI/)
      DO 318 J=1,5
      IF (J.EQ.3.OR.J.EQ.5) GO TO 1112
      GO TO 1113
 1112 WRITE(2,4444)
 1113 WRITE (2,307) J
  307 FORMAT (//20X,10HZMIENNA  Z,I1//)
      WRITE (2,308)
  308 FORMAT (15X,21HGRANICE   PRZEDZIALOW,9X,18HPRAWDOPODOBIENSTWA/)
      WRITE (2,309) PHZ(J,1),PSTW(J,1)
  309 FORMAT (16X,7H-NIESK.,5X,F8.1,14X,F7.5)
      DO 310 I=2,NPHZ(J)
      WRITE (2,311) PHZ(J,I-1),PHZ(J,I),PSTW(J,I)
  311 FORMAT (16X,F8.1,4X,F8.1,14X,F7.5)
  310 CONTINUE
      NNN1=J
      NNN2=NPHZ(J)
      WRITE (2,312) PHZ(NNN1,NNN2),PSTW(NNN1,NNN2+1)
  312 FORMAT (16X,F8.1,4X,7H+NIESK.,15X,F7.5)
  318 CONTINUE
      WRITE(2,4444)
      WRITE (2,322)
  322 FORMAT (/15X,32HROZKLADY WSKAZNIKOW STATECZNOSCI/)
      DO 323 J=1,5
      IF (J.EQ.3.OR.J.EQ.5) GO TO 1114
      GO TO 1115
 1114 WRITE(2,4444)
 1115 WRITE(2,324) J
  324 FORMAT (//20X,10HZMIENNA  F,I1/)
      WRITE (2,325)
```

```
  325 FORMAT (15X,21HGRANICE    PRZEDZIALOW,9X,18HPRAWDOPODOBIENSTWA/)
      WRITE (2,326) PHF(J,1),PSTWF(J,1)
  326 FORMAT (20X,3H0.0,6X,F7.2,14X,F7.5)
      DO 327 I=2,NPHF(J)
      WRITE (2,328) PHF(J,I-1),PHF(J,I),PSTWF(J,I)
  328 FORMAT (16X,F8.2,4X,F8.2,14X,F7.5)
  327 CONTINUE
      NNN4=J
      NNN5=NPHF(J)
      WRITE (2,340) PHF(NNN4,NNN5),PSTWF(NNN4,NNN5+1)
  340 FORMAT (16X,F8.2,4X,7H+NIESK.,15X,F7.5)
  323 CONTINUE
      WRITE(2,4444)
      WRITE (2,313)
  313 FORMAT (/////24X,13HM O M E N T Y///)
      DO 314 J=1,5
      WRITE (2,315) J,J
  315 FORMAT (//13X,20HMOMENTY  ZMIENNEJ  Z,I1,8X,24HMOMENTY CENTRALNE Z
     1MIENNEJ  Z,I1/)
      DO 316 K=1,4
      WRITE (2,317) K,MZ(K,J),MC(K,J)
  317 FORMAT (10X,I1,5X,E16.9,10X,E16.9)
  316 CONTINUE
      WRITE (2,329) J,J
  329 FORMAT (//13X,20HMOMENTY  ZMIENNEJ  F,I1,8X,24HMOMENTY CENTRALNE Z
     1MIENNEJ  F,I1/)
      DO 330 K=1,4
      WRITE (2,331) K,MF(K,J),MFC(K,J)
  331 FORMAT (10X,I1,5X,E16.9,10X,E16.9)
  330 CONTINUE
      WRITE (2,351)
  351 FORMAT(//16X,47HESTYMATORY  NIEOBCIAZONE  MOMENTOW  CENTRALNYCH/)
      WRITE (2,352) J,J
  352 FORMAT (22X,1HZ,I1,31X,1HF,I1/)
      DO 353 K=1,4
      WRITE (2,354) K,MCN(K,J),MFCN(K,J)
  354 FORMAT (10X,I1,5X,E16.9,10X,E16.9)
  353 CONTINUE
  314 CONTINUE
  350 FORMAT (//15X,35HUJEMNY ARGUMENT FUNKCJI PIERWIASTEK/15X,25HLICZBA
     1 REALIZACJI LIRE = ,I8/15X,25HNUMER CECHY GRUNTY K = ,I3/
     115X,27HWARTOSC LICZBY LOSOWEJ S = ,F14.11///)
      PAUSE
      END
      FINISH
```

```
LICZBA REALIZACJI      LIRE =      1000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =      55.51439
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.41902
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.21714
SPOJNOSC   C =    9.26779
CIEZAR OBJ.1   GAMMA1 = 14.31056
CIEZAR OBJ.2   GAMMA2 = 23.65826
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.64159
CIEZAR OBJ.3   GAMMA3 = 21.16997


ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =              220.40564
Z2 =             1562.53791
Z3 =             1582.93963
Z4 =             5117.28157
Z5 =             3649.00823


WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =               1.7114292
F2 =               2.7912526
F3 =              11.1637525
F4 =               1.6687704
F5 =               4.6610370


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

    PRZESUNIECIE    P1 = 0.04400

    OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

    OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

    WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01300

    PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10600
```

```
LICZBA REALIZACJI      LIRE =      2000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =      42.09731
KAT TARCIA WEWN.1     FI1 =  0.40717
KAT TARCIA WEWN.2     FI2 =  0.24014
SPOJNOSC    C =    14.76945
CIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = 15.11754
CIEZAR OBJ.2    GAMMA2 = 22.48124
KAT TARCIA WEWN.3     FI3 =  0.62475
CIEZAR OBJ.3    GAMMA3 = 19.27139


ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =              239.73374
Z2 =             1542.06727
Z3 =             1492.87825
Z4 =             5052.47435
Z5 =             3285.90035


WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =                1.8187583
F2 =                2.7558505
F3 =                9.3050809
F4 =                1.6511597
F5 =                4.3417160


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.04000

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01300

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09350
```

```
LICZBA REALIZACJI        LIRE =      3000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =    133.42494
KAT TARCIA WEWN.1      FI1 =  0.50423
KAT TARCIA WEWN.2      FI2 =  0.24168
SPOJNOSC    C =      8.64118
CIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = 15.80032
CIEZAR OBJ.2    GAMMA2 = 20.81312
KAT TARCIA WEWN.3      FI3 =  0.45658
CIEZAR OBJ.3    GAMMA3 = 21.10868


ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =                  89.52943
Z2 =                1705.03973
Z3 =                1087.25650
Z4 =                1710.38815
Z5 =                   9.59599


WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =                  1.2803907
F2 =                  2.8812581
F3 =                  6.2146779
F4 =                  1.2049164
F5 =                  1.0089296


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.03933

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01500

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09900
```

```
LICZBA REALIZACJI     LIRE =     4000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =     68.70063
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.50027
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.26982
SPOJNOSC    C =   14.80907
CIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = 18.42235
CIEZAR OBJ.2    GAMMA2 = 18.19057
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.50423
CIEZAR OBJ.3    GAMMA3 = 19.73434


ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =              137.08011
Z2 =             1560.40724
Z3 =             1145.27274
Z4 =             2530.34920
Z5 =              395.40991


WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =               1.4428887
F2 =               2.7144307
F3 =               7.0100314
F4 =               1.2927806
F5 =               1.3915335


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.03850

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POWI. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01575

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.00950
```

LICZBA REALIZACJI LIRE = 5000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 56.41256
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.59334
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.17699
SPOJNOSC C = 11.26176
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 18.00845
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 19.13440
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.53040
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 19.78441

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 112.84810
Z2 = 1622.76237
Z3 = 1310.57261
Z4 = 2388.25468
Z5 = 630.02069

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 1.3456571
F2 = 2.9954706
F3 = 17.1471320
F4 = 1.2809647
F5 = 1.6375428

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03760

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01560

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09720

LICZBA REALIZACJI LIRE = 6000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 44.11217
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.45896
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.22098
SPOJNOSC C = 10.19040
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 15.55913
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 21.90385
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.59906
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 18.53368

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =	182.84525
Z2 =	1552.03462
Z3 =	1425.72108
Z4 =	4015.41270
Z5 =	2006.82836

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =	1.5904213
F2 =	2.8090837
F3 =	10.8121077
F4 =	1.5104109
F5 =	3.0367437

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03717

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01533

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09867

```
LICZBA REALIZACJI      LIRE =      7000

     WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =      81.39149
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.56188
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.17258
SPOJNOSC   C =   15.23800
CIEZAR OBJ.1   GAMMA1 = 15.93052
CIEZAR OBJ.2   GAMMA2 = 20.62012
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.71196
CIEZAR OBJ.3   GAMMA3 = 19.97026


     ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =             3191.58372
Z2 =            17301.19575
Z3 =            20081.60563
Z4 =            67211.93196
Z5 =            86571.51018


     WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =               2.0906134
F2 =               5.2331093
F3 =              35.4251097
F4 =               1.8282698
F5 =               9.4662451


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.03614

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01514

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09600
```

```
     LICZBA REALIZACJI      LIRE =      8000

     WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =     29.03838
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.52137
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.17044
SPOJNOSC    C =    9.04290
CIEZAR OBJ.1   GAMMA1 = 18.99998
CIEZAR OBJ.2   GAMMA2 = 21.74738
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.81045
CIEZAR OBJ.3   GAMMA3 = 20.77374


     ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =              271.38373
Z2 =             1419.38735
Z3 =             2209.62531
Z4 =             7744.62292
Z5 =            12930.08314


     WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =                1.7193520
F2 =                2.4950700
F3 =               12.5618872
F4 =                1.8891466
F5 =               14.3267075


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.03712

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01500

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09837
```

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 64.53029
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.38157
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.21483
SPOJNOSC C = 8.49514
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 17.03716
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 20.70591
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.49926
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 19.66384

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 38.13651
Z2 = 1352.42890
Z3 = 967.64345
Z4 = 1713.13625
Z5 = -114.16539

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 1.1011282
F2 = 2.2314023
F3 = 3.9655180
F4 = 1.2056964
F5 = 0.8864851

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03744

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01556

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09978

```
LICZBA REALIZACJI     LIRE =     9100

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =     55.23286
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.55450
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.25181
SPOJNOSC    C =    12.23325
CIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = 16.76365
CIEZAR OBJ.2    GAMMA2 = 22.06604
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.56448
CIEZAR OBJ.3    GAMMA3 = 20.50074


ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =              196.19763
Z2 =             1670.91418
Z3 =             1410.53055
Z4 =             3796.06091
Z5 =             1964.86170


WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =                1.6855709
F2 =                3.1619492
F3 =               20.1035063
F4 =                1.4599524
F5 =                2.9718957


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE    P1 = 0.03736

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01549

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09989
```

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9200

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 74.01038
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.47107
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.12749
SPOJNOSC C = 7.64232
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 19.65046
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 23.77216
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.56150
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 19.02622

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 5.37285
Z2 = 1310.75895
Z3 = 1199.75145
Z4 = 1979.73253
Z5 = 85.58413

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 1.0118331
F2 = 2.1330192
F3 = 4.7138928
F4 = 1.2161300
F5 = 1.0843019

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03739

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POWL. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01543

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09957

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9300

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 171.60070
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.45107
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.19182
SPOJNOSC C = 7.63347
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 17.00239
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 22.92806
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.32296
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 20.52055

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = -89.78358
Z2 = 1565.68817
Z3 = 589.61801
Z4 = -1074.54818
Z5 = -789.04875

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 0.7749054
F2 = 2.3863031
F3 = 2.9734705
F4 = 0.8794811
F5 = 0.2909344

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03763

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01538

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09989

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9400

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME HP1 = 39.51935
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.44021
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.17723
SPOJNOSC C = 8.30994
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 17.86761
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 20.95417
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.54168
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 19.70002

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1	=	54.05699
Z2	=	1362.12961
Z3	=	1137.94052
Z4	=	2145.98143
Z5	=	229.90560

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1	=	1.1416608
F2	=	2.3226031
F3	=	5.3107325
F4	=	1.2544559
F5	=	1.2344255

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03745

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01532

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.09979

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9500

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 45.85627
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.54344
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.12053
SPOJNOSC C = 8.95170
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 18.80893
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 19.43710
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.73561
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 21.33094

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 192.56096
Z2 = 1449.19063
Z3 = 1944.73374
Z4 = 5649.26532
Z5 = 4974.39586

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 1.4904966
F2 = 2.5198189
F3 = 12.0880694
F4 = 1.6512176
F5 = 6.0396274

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03726

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01526

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10021

LICZBA REALIZACJI   LIRE =   9600

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 =   51.01776
KAT TARCIA WEWN.1   FI1 = 0.58463
KAT TARCIA WEWN.2   FI2 = 0.18172
SPOJNOSC   C =   9.25189
CIEZAR OBJ.1   GAMMA1 = 16.19988
CIEZAR OBJ.2   GAMMA2 = 20.65685
KAT TARCIA WEWN.3   FI3 = 0.65450
CIEZAR OBJ.3   GAMMA3 = 19.83488

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =   223.86382
Z2 =   1667.09523
Z3 =   1735.28371
Z4 =   4884.29574
Z5 =   4049.10175

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =   1.7324767
F2 =   3.2151685
F3 =   45.4845725
F4 =   1.6076318
F5 =   5.0808600

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE   P1 = 0.03687

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01510

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10010

LICZBA REALIZACJI LIRE = 9700

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 55.53859
KAT TARCIA WEWN. 1 FI1 = 0.61571
KAT TARCIA WEWN. 2 FI2 = 0.17509
SPOJNOSC C = 8.94530
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 18.29527
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 19.56076
KAT TARCIA WEWN. 3 FI3 = 0.57866
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 19.49863

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 131.44496
Z2 = 1618.70991
Z3 = 1461.30876
Z4 = 3027.74589
Z5 = 1231.29485

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 1.3904553
F2 = 3.0002013
F3 = 21.8528879
F4 = 1.3527185
F5 = 2.2353237

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03711

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01505

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10021

```
      LICZBA REALIZACJI      LIRE =      9800

      WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =     37.96683
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.51698
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.21075
SPOJNOSC    C =     8.74731
CIEZAR OBJ.1   GAMMA1 = 16.82003
CIEZAR OBJ.2   GAMMA2 = 20.06117
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.73404
CIEZAR OBJ.3   GAMMA3 = 19.56425


      ZAPASY STATECZNOSCI

Z1  =              268.41571
Z2  =             1549.66332
Z3  =             1929.67664
Z4  =             6359.13286
Z5  =             7606.53612


      WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1  =               1.8387524
F2  =               2.8451622
F3  =              16.9530268
F4  =               1.7831235
F5  =               8.7683761


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

      PRZESUNIECIE    P1 = 0.03765

      OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

      OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

      WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01520

      PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10071
```

```
LICZBA REALIZACJI      LIRE =      9900

     WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA  OBCIAZENIA RUCHOME  NP1 =       34.25360
KAT TARCIA WEWN.1    FI1 =  0.45117
KAT TARCIA WEWN.2    FI2 =  0.24665
SPOJNOSC    C =   10.98198
CIEZAR OBJ.1    GAMMA1 = 16.70804
CIEZAR OBJ.2    GAMMA2 = 21.03760
KAT TARCIA WEWN.3    FI3 =  0.68680
CIEZAR OBJ.3    GAMMA3 = 20.84046


     ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 =               246.10536
Z2 =              1491.28723
Z3 =              1687.67549
Z4 =              5729.80290
Z5 =              5018.16739


     WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 =                 1.7792670
F2 =                 2.6583187
F3 =                10.0670500
F4 =                 1.7069217
F5 =                 0.1444450


PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

     PRZESUNIECIE    P1 = 0.03778

     OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

     OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

     WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01505

     PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10051
```

LICZBA REALIZACJI LIRE = 10000

WARTOSCI ZMIENNYCH LOSOWYCH

REAKCJA NA OBCIAZENIA RUCHOME NP1 = 45.01617
KAT TARCIA WEWN.1 FI1 = 0.65201
KAT TARCIA WEWN.2 FI2 = 0.18071
SPOJNOSC C = 11.35754
CIEZAR OBJ.1 GAMMA1 = 14.74550
CIEZAR OBJ.2 GAMMA2 = 24.84972
KAT TARCIA WEWN.3 FI3 = 0.72305
CIEZAR OBJ.3 GAMMA3 = 18.93141

ZAPASY STATECZNOSCI

Z1 = 332.09228
Z2 = 1802.96586
Z3 = 923.59693
Z4 = 7092.46803
Z5 = 12550.38614

WSKAZNIKI STATECZNOSCI

F1 = 2.2533411
F2 = 3.9464020
F3 = 5.5711491
F4 = 1.9158230
F5 = 13.7339082

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0.03760

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0.00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0.00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0.01490

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0.10020

****

LICZBA REALIZACJI LIRE = 10000

PRAWDOPODOBIENSTWO UTRATY STATECZNOSCI PRZEZ:

PRZESUNIECIE P1 = 0,03760

OBROT WOKOL KRAWEDZI PODSTAWY P2 = 0,00000

OBROT WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ P3 = 0,00000

WYSTAPIENIE OSUWISKA P4 = 0,01490

PRZEKROCZENIE NOSNOSCI PODLOZA P5 = 0,10020

PRAWDOPODOB. WYSTAPIENIA UJEMNEGO MOMENTU PRZY
OBROCIE WOKOL POW. CYLINDRYCZNEJ PM = 0,07030

CALKOWITE PRAWDOPODOB. UTRATY STATECZNOSCI P = 0,10020

ZMIENNA Z1

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
-NIESK.	-300.0	0.00000
-300.0	-200.0	0.00000
-200.0	-150.0	0.00020
-150.0	-100.0	0.00120
-100.0	-80.0	0.00160
-80.0	-60.0	0.00340
-60.0	-40.0	0.00530
-40.0	-20.0	0.01050
-20.0	0.0	0.01540
0.0	40.0	0.05580
40.0	80.0	0.10400
80.0	120.0	0.16350
120.0	160.0	0.18890
160.0	200.0	0.16930
200.0	240.0	0.12850
240.0	280.0	0.08600
280.0	320.0	0.04260
320.0	360.0	0.01660
360.0	400.0	0.00570
400.0	450.0	0.00140
450.0	500.0	0.00010
500.0	600.0	0.00000
600.0	800.0	0.00000
800.0	1000.0	0.00000
1000.0	+NIESK.	0.00000

ZMIENNA Z2

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
-NIESK.	0.0	0.00000
0.0	500.0	0.00000
500.0	700.0	0.00000
700.0	900.0	0.00020
900.0	1000.0	0.00070
1000.0	1100.0	0.00240
1100.0	1200.0	0.01100
1200.0	1300.0	0.04130
1300.0	1350.0	0.04070
1350.0	1400.0	0.06900
1400.0	1450.0	0.09200
1450.0	1500.0	0.12170
1500.0	1550.0	0.12940
1550.0	1600.0	0.13130
1600.0	1650.0	0.12880
1650.0	1700.0	0.10060
1700.0	1750.0	0.06790
1750.0	1800.0	0.03690
1800.0	1850.0	0.01380
1850.0	1900.0	0.00600
1900.0	1950.0	0.00350
1950.0	2000.0	0.00120
2000.0	2100.0	0.00080
2100.0	2200.0	0.00020
2200.0	2500.0	0.00040
2500.0	3000.0	0.00020
3000.0	+NIESK.	0.00000

ZMIENNA Z3

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
-NIESK.	0.0	0.00000
0.0	400.0	0.00011
400.0	600.0	0.00183
600.0	800.0	0.01560
800.0	900.0	0.01958
900.0	1000.0	0.03636
1000.0	1100.0	0.06153
1100.0	1200.0	0.09659
1200.0	1300.0	0.12380
1300.0	1400.0	0.13854
1400.0	1500.0	0.12703
1500.0	1600.0	0.09885
1600.0	1700.0	0.07960
1700.0	1800.0	0.06798
1800.0	1900.0	0.05034
1900.0	2000.0	0.03765
2000.0	2100.0	0.02119
2100.0	2200.0	0.01280
2200.0	2300.0	0.00764
2300.0	2500.0	0.00269
2500.0	3000.0	0.00032
3000.0	3500.0	0.00000
3500.0	+NIESK.	0.00000

ZMIENNA Z4

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
-NIESK.	-1000.0	0.00070
-1000.0	-500.0	0.00330
-500.0	-400.0	0.00170
-400.0	-300.0	0.00150
-300.0	-200.0	0.00180
-200.0	-100.0	0.00330
-100.0	0.0	0.00260
0.0	750.0	0.02390
750.0	1500.0	0.05270
1500.0	2250.0	0.11320
2250.0	3000.0	0.17310
3000.0	3750.0	0.17470
3750.0	4500.0	0.14920
4500.0	5250.0	0.10860
5250.0	6000.0	0.08180
6000.0	6750.0	0.05490
6750.0	7500.0	0.03160
7500.0	8250.0	0.01480
8250.0	9000.0	0.00590
9000.0	10000.0	0.00070
10000.0	12500.0	0.00000
12500.0	15000.0	0.00000
15000.0	20000.0	0.00000
20000.0	+NIESK.	0.00000

ZMIENNA Z5

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
-NIESK.	-2000.0	0.00000
-2000.0	-1000.0	0.00010
-1000.0	-750.0	0.00110
-750.0	-500.0	0.01320
-500.0	-400.0	0.01090
-400.0	-300.0	0.01610
-300.0	-200.0	0.01710
-200.0	-100.0	0.02040
-100.0	0.0	0.02130
0.0	250.0	0.06750
250.0	500.0	0.07440
500.0	750.0	0.07610
750.0	1000.0	0.07510
1000.0	1500.0	0.12030
1500.0	2000.0	0.08820
2000.0	2500.0	0.07230
2500.0	3000.0	0.05510
3000.0	3500.0	0.03950
3500.0	4000.0	0.03270
4000.0	4500.0	0.03020
4500.0	5000.0	0.02660
5000.0	6000.0	0.03510
6000.0	7000.0	0.02840
7000.0	8000.0	0.01880
8000.0	9000.0	0.01460
9000.0	10000.0	0.01230
10000.0	12500.0	0.01350
12500.0	15000.0	0.00880
15000.0	20000.0	0.00810
20000.0	30000.0	0.00220
30000.0	50000.0	0.00000
50000.0	+NIESK.	0.00000

ROZKLADY WSKAZNIKOW STATECZNOSCI

ZMIENNA F1

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
0.0	0.50	0.00000
0.50	0.70	0.00060
0.70	0.80	0.00200
0.80	0.85	0.00380
0.85	0.90	0.00610
0.90	0.93	0.00480
0.93	0.95	0.00530
0.95	0.97	0.00690
0.97	1.00	0.00810
1.00	1.10	0.05050
1.10	1.20	0.08750
1.20	1.30	0.11470
1.30	1.40	0.14590
1.40	1.50	0.13160
1.50	1.60	0.12320
1.60	1.70	0.09950
1.70	1.80	0.07370
1.80	1.90	0.05220
1.90	2.00	0.03510
2.00	2.10	0.02040
2.10	2.20	0.01330
2.20	2.30	0.00820
2.30	2.50	0.00500
2.50	3.00	0.00150
3.00	4.00	0.00010
4.00	+NIESK	0.00000

ZMIENNA F2

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
0.0	1.00	0.00000
1.00	1.40	0.00000
1.40	1.80	0.00240
1.80	2.00	0.01440
2.00	2.20	0.05590
2.20	2.40	0.11640
2.40	2.60	0.17390
2.60	2.80	0.18140
2.80	3.00	0.15710
3.00	3.20	0.12580
3.20	3.40	0.08050
3.40	3.60	0.04730
3.60	3.80	0.02410
3.80	4.00	0.01470
4.00	4.50	0.00600
4.50	5.00	0.00010
5.00	+NIESK	0.00000

ZMIENNA F3

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
0.0	1.00	0.00000
1.00	1.50	0.00000
1.50	2.00	0.00054
2.00	2.50	0.00118
2.50	3.00	0.00570
3.00	4.00	0.03173
4.00	6.00	0.14940
6.00	8.00	0.16866
8.00	10.00	0.13650
10.00	12.00	0.09627
12.00	14.00	0.07465
14.00	16.00	0.05098
16.00	18.00	0.04173
18.00	20.00	0.03205
20.00	22.00	0.02603
22.00	26.00	0.03689
26.00	30.00	0.02452
30.00	40.00	0.03711
40.00	50.00	0.01872
50.00	60.00	0.01441
60.00	70.00	0.00850
70.00	80.00	0.00721
80.00	100.00	0.00710
100.00	120.00	0.00613
120.00	140.00	0.00301
140.00	180.00	0.00549
180.00	220.00	0.00247
220.00	260.00	0.00183
260.00	300.00	0.00183
300.00	500.00	0.00441
500.00	1000.00	0.00290
1000.00	2000.00	0.00086
2000.00	4000.00	0.00097
4000.00	8000.00	0.00022
8000.00	20000.00	0.00000
20000.00	*NIESK.	0.00000

ZMIENNA F4

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
0.0	0.50	0.00000
0.50	0.80	0.00000
0.80	0.90	0.00140
0.90	0.93	0.00150
0.93	0.95	0.00220
0.95	0.97	0.00390
0.97	1.00	0.00590
1.00	1.10	0.02940
1.10	1.20	0.06780
1.20	1.30	0.14350
1.30	1.40	0.19370
1.40	1.50	0.17770
1.50	1.60	0.13960
1.60	1.70	0.09920
1.70	1.80	0.07000
1.80	2.00	0.05560
2.00	2.40	0.00860
2.40	2.80	0.00000
2.80	3.20	0.00000
3.20	4.00	0.00000
[illegible]	[illegible]	0.00000

ZMIENNA F5

GRANICE	PRZEDZIALOW	PRAWDOPODOBIENSTWA
0.0	0.25	0.00080
0.25	0.50	0.01310
0.50	0.60	0.01120
0.60	0.70	0.01590
0.70	0.80	0.01740
0.80	0.90	0.02090
0.90	1.00	0.02090
1.00	1.50	0.14140
1.50	2.00	0.15020
2.00	2.50	0.12030
2.50	3.00	0.08870
3.00	3.50	0.07290
3.50	4.00	0.05350
4.00	4.50	0.04000
4.50	5.00	0.03360
5.00	5.50	0.02910
5.50	6.00	0.02660
6.00	6.50	0.01810
6.50	7.00	0.01710
7.00	7.50	0.01710
7.50	8.00	0.01290
8.00	9.00	0.01870
9.00	10.00	0.01450
10.00	11.00	0.01120
11.00	12.00	0.00780
12.00	13.00	0.00530
13.00	14.00	0.00410
14.00	15.00	0.00350
15.00	20.00	0.01020
20.00	30.00	0.00300
30.00	50.00	0.00000
50.00	+NIESK.	0.00000

M O M E N T Y

	MOMENTY ZMIENNEJ Z1	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ Z1
1	0.151135337E 03	0.151135337E 03
2	0.300781988E 05	0.723630870E 04
3	0.675212515E 07	0.189225361E 05
4	0.168071609E 10	0.155778883E 09

	MOMENTY ZMIENNEJ F1	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ F1
1	0.147309458E 01	0.147309458E 01
2	0.225689748E 01	0.868898314E-01
3	0.359302826E 01	0.124109353E-01
4	0.593931084E 01	0.259381466E-01

ESTYMATORY NIEOBCIAZONE MOMENTOW CENTRALNYCH

	Z1	F1
1	0.151135337E 03	0.147309458E 01
2	0.723703240E 04	0.868985212E-01
3	0.189282142E 05	0.124146595E-01
4	0.155809787E 09	0.259439941E-01

	MOMENTY ZMIENNEJ Z2	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ Z2
1	0.154116344E 04	0.154116344E 04
2	0.239693685E 07	0.217521100E 05
3	0.376099825E 10	-0.120306812E 06
4	0.595288549E 13	0.213289446E 10

	MOMENTY ZMIENNEJ F2	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ F2
1	0.279015573E 01	0.279015573E 01
2	0.797531829E 01	0.190349318E 00
3	0.233519018E 02	0.373133030E-01
4	0.700241810E 02	0.110818179E 00

ESTYMATORY NIEOBCIAZONE MOMENTOW CENTRALNYCH

	Z2	F2
1	0.154116344E 04	0.2790155[illegible]3E 01
2	0.217542855E 05	0.19036[illegible]355E 00
3	-0.120342913E 06	0.373244996E-01
4	0.2133403[illegible]4E 10	0.110840775E 00

	MOMENTY ZMIENNEJ Z3	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ Z3
1	0.143042650E 04	0.143042650E 04
2	0.214556152E 07	0.994615443E 05
3	0.336146976E 10	0.782823812E 07
4	0.548212982E 13	0.296704803E 11

1	0.263813829E 02	0.263813829E 02
2	0.210323947E 05	0.203364173E 05
3	0.845333420E 08	0.829054727E 08
4	0.467644411E 12	0.458810360E 12

ESTYMATORY NIEOBCIAZONE MOMENTOW CENTRALNYCH

	Z3	F3
1	0.143042650E 04	0.263813829E 02
2	0.994722436E 05	0.203386050E 05
3	0.783070481E 07	0.829322318E 08
4	0.296768639E 11	0.459007580E 12

	MOMENTY ZMIENNEJ Z4	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ Z4
1	0.367389972E 04	0.367389972E 04
2	0.165683087E 08	0.307076956E 07
3	0.848916552E 11	0.145815170E 10
4	0.479713971E 15	0.274150017E 14

	MOMENTY ZMIENNEJ F4	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ F4
1	0.144651816E 01	0.144651816E 01
2	0.213941090E 01	0.469961218E-01
3	0.323385330E 01	0.319509977E-02
4	0.499320272E 01	0.650376326E-02

ESTYMATORY NIEOBCIAZONE MOMENTOW CENTRALNYCH

	Z4	F4
1	0.367389972E 04	0.144651816E 01
2	0.307107667E 07	0.470008219E-01
3	0.145858924E 10	0.319605852E-02
4	0.274203118E 14	0.650504003E-02

	MOMENTY ZMIENNEJ Z5	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ Z5
1	0.245259632E 04	0.245259632E 04
2	0.155340918E 08	0.951886312E 07
3	0.158029221E 12	0.732385067E 11
4	0.215880611E 16	0.106063633E 16

	MOMENTY ZMIENNEJ F5	MOMENTY CENTRALNE ZMIENNEJ F5
1	0.346421537E 01	0.346421537E 01
2	0.216274639E 02	0.962667575E 01
3	0.216502962E 03	0.746830133E 02
4	0.297178717E 04	0.109695854E 04

ESTYMATORY NIEOBCIAZONE MOMENTOW CENTRALNYCH

	Z5	F5
1	0.245259632E 04	0.346421537E 01
2	0.951981510E 07	0.962763851E 01
3	0.732604834E 11	0.749054834E 02
4	0.106100637E 16	0.109734187E 04

INSTYTUT GEOTECHNIKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ
Raporty serii PRE nr

PROBABILISTYCZNA ANALIZA STATECZNOŚCI MASYWNYCH PRZYCZÓŁKÓW MOSTOWYCH METODĄ SYMULACYJNĄ

WOJCIECH PUŁA

Załącznik nr 3 do pracy doktorskiej

Załącznik do rozdziału 4

Wrocław 1984

SPIS RZECZY

str.

W niniejszej pracy przyjęto (zgodnie z [12] i [60]),że dystrybuanta empiryczna określona jest następująco:

Jeżeli próbkę uporządkuje się w ciąg niemalejący

$$x_{(1)} \leqslant x_{(2)} \quad \cdots \quad x_{(n)}$$

to dystrybuanta empiryczna zdefiniowana jest wzorem:

$$F_n^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{jeżeli } x < x_{(1)} \\ \frac{m}{n} & \text{jeżeli } x_{(m)} \leqslant x < x_{(m+1)} \quad ; \quad 1 \leqslant m \leqslant n-1 \\ 1 & \text{jeżeli } x \geqslant x_n \end{cases} \qquad (Z.3.1)$$

Tablica Z.3.1

Wartości dystrybuanty empirycznej kąta tarcia wewnętrznego (glina)

ϕ [°]	5,0	6,0	7,0	8,0	9,0	10,0	11,0	12,0	13,0	14,0	15,0	16,0
$F_n^*(\phi)$	0,02	0,16	0,26	0,38	0,50	0,68	0,84	0,90	0,94	0,96	0,98	1,0

Tablica Z.3.2

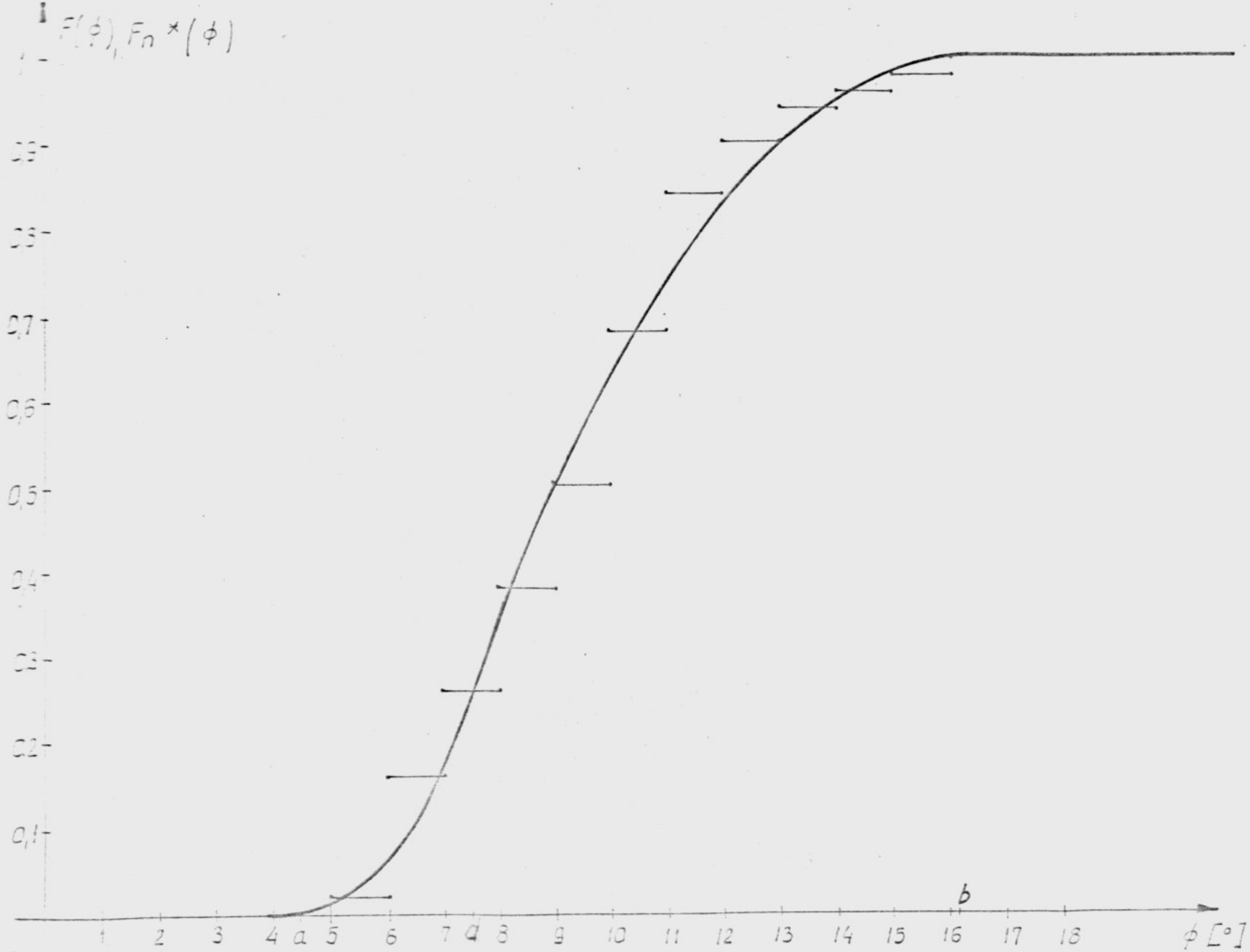
Wartości dystrybuanty empirycznej spójności (glina)

c [kPa]	5	10	11	15	17	18	19	20	22	24	25	26
$F_n^*(c)$	0,02	0,04	0,06	0,08	0,1	0,12	0,16	0,3	0,42	0,44	0,48	0,50
c [kPa]	27	28	29	30	32	36	38	40	41	42	46	50
$F_n^*(c)$	0,54	0,56	0,58	0,68	0,7	0,74	0,76	0,86	0,88	0,9	0,92	0,96
c [kPa]	59	70										
$F_n^*(c)$	0,98	1										

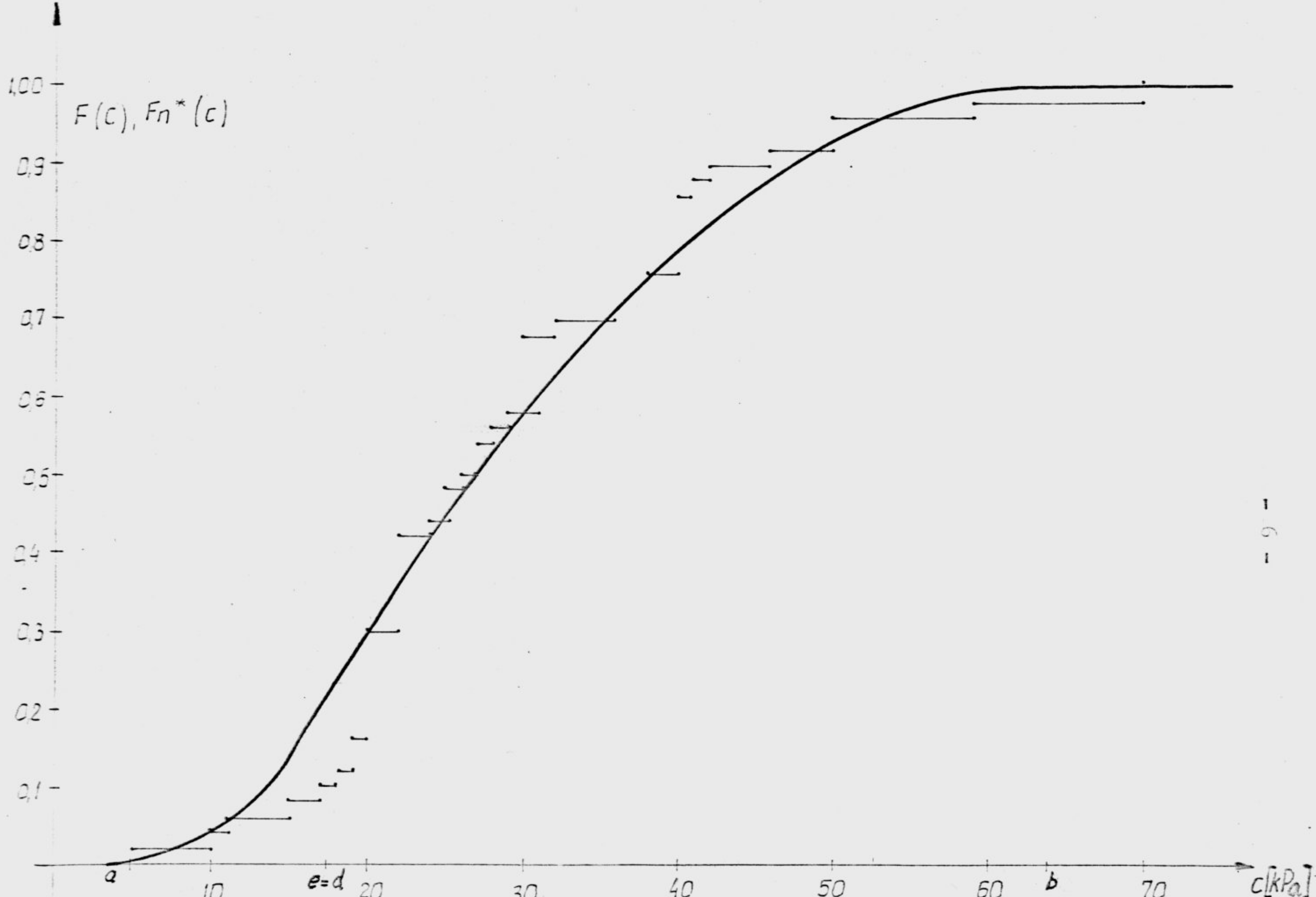
Tablica Z.3.3

Wartości dystrybuanty empirycznej ciężaru objętościowego (glina)

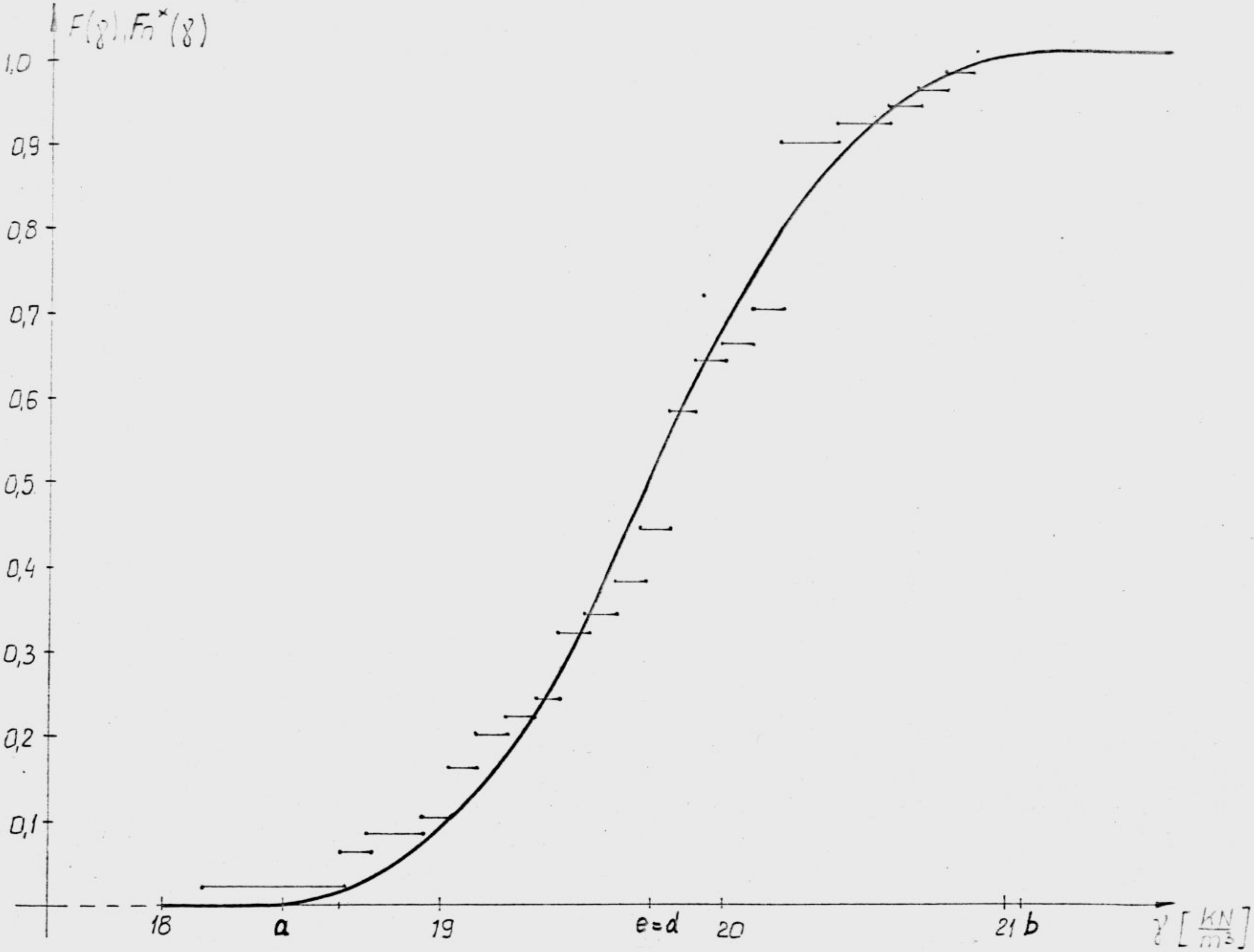
$\gamma\left[\frac{kN}{m^3}\right]$	18,15	18,64	18,74	18,93	19,03	19,13	19,23	19,33
$F_n^*(\gamma)$	0,02	0,06	0,08	0,10	0,16	0,20	0,22	0,24
$\gamma\left[\frac{kN}{m^3}\right]$	19,42	19,52	19,62	19,72	19,82	19,91	20,01	20,11
$F_n^*(\gamma)$	0,32	0,34	0,38	0,44	0,58	0,64	0,66	0,70
$\gamma\left[\frac{kN}{m^3}\right]$	20,21	20,41	20,60	20,70	20,80	20,90		
$F_n^*(\gamma)$	0,90	0,92	0,94	0,96	0,98	1,0		



Rys. Z.3.1. Wykres dystrybuanty empirycznej kąta tarcia wewnętrznego /dla gliny/ oraz wykres odpowiedniej dystrybuanty rozkładu trójkątnego otrzymanej metodą momentów.



Rys. Z.3.2. Wykres dystrybuanty empirycznej spójności /dla gliny/ oraz wykres odpowiedniej dystrybuanty rozkładu trójkątnego otrzymanej metodą momentów.



Rys. Z.3.3. Wykres dystrybuanty empirycznej ciężaru objętościowego i wykres odpowiedniej dystrybuanty empirycznej otrzymanej metodą momentów.

Tablica Z.3.4

Wartości dystrybuanty empirycznej spójności (glina piaszczysta)

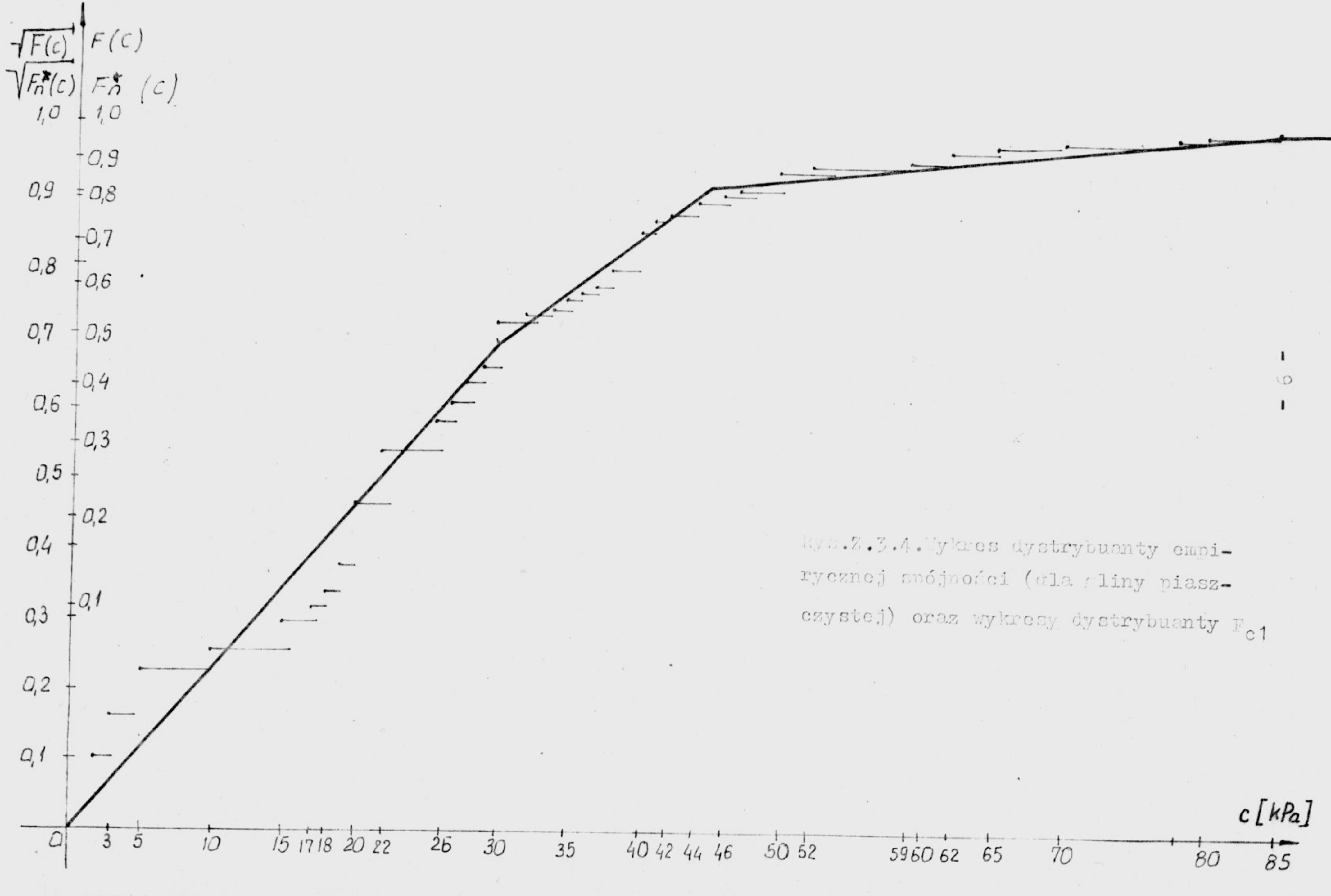
c [kPa]	2	3	5	10	15	17	18	19
$F_n^*(c)$	0,0127	0,0253	0,0506	0,0633	0,0886	0,1013	0,1139	0,1392
c [kPa]	20	22	24	25	26	27	28	29
$F_n^*(c)$	0,2152	0,2911	0,3038	0,3291	0,3418	0,3671	0,4051	0,4304
c [kPa]	30	32	34	35	36	37	38	40
$F_n^*(c)$	0,5190	0,5317	0,5443	0,5696	0,5823	0,5949	0,6329	0,7215
c [kPa]	41	42	44	46	47	50	52	59
$F_n^*(c)$	0,7468	0,7595	0,7848	0,8101	0,8228	0,8734	0,8361	0,8987
c [kPa]	60	62	65	70	78	80	85	
$F_n^*(c)$	0,9241	0,9367	0,9494	0,9620	0,9747	0,9873	1,0	

Tablica Z.3.5

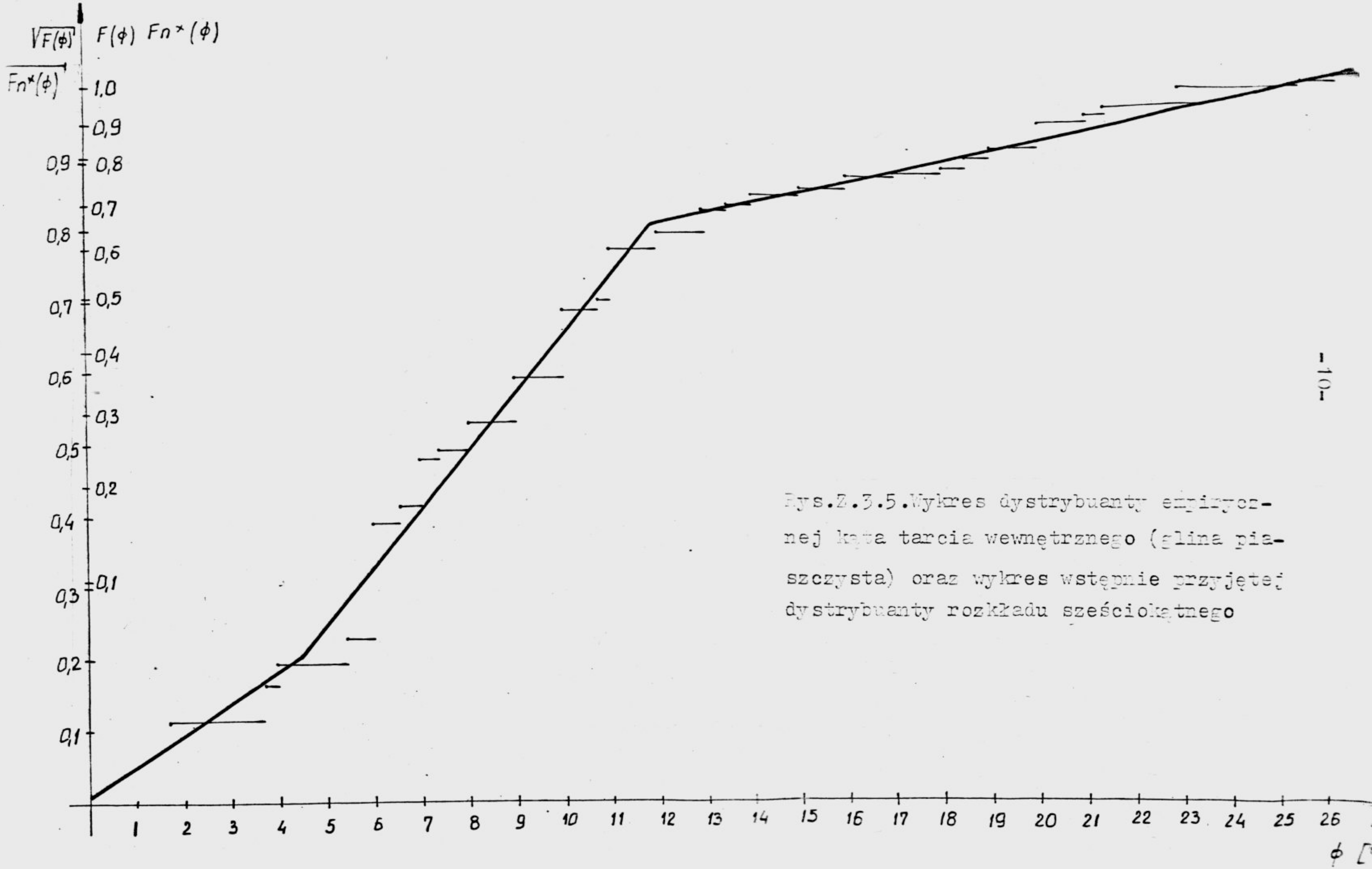
Wartości dystrybuanty empirycznej kąta tarcia wewnętrznego

(glina piaszczysta)

ϕ [°]	1,72	3,72	4,00	5,45	6,00	6,57	7,00	7,42
$F_n^*(\phi)$	0,0127	0,0253	0,0380	0,0506	0,1519	0,1646	0,2279	0,2405
ϕ [°]	8,00	9,00	10,00	10,77	11,00	12,00	13,00	13,50
$F_n^*(\phi)$	0,2785	0,3544	0,4684	0,4810	0,5949	0,6329	0,6709	0,6835
ϕ [°]	14,00	15,00	16,00	17,00	18,00	18,50	19,00	20,00
$F_n^*(\phi)$	0,7089	0,7215	0,7468	0,7595	0,7722	0,7975	0,8228	0,8861
ϕ [°]	21,00	21,33	23,00	25,50	26,17			
$F_n^*(\phi)$	0,8987	0,9241	0,9747	0,9873	1,00			



Rys.Z.3.4.Wykres dystrybuanty empirycznej spójności (dla gliny piaszczystej) oraz wykresy dystrybuanty F_{c1}



Rys.Z.3.5.Wykres dystrybuanty empirycznej kąta tarcia wewnętrznego (glina piaszczysta) oraz wykres wstępnie przyjętej dystrybuanty rozkładu sześciokątnego

Tablica Z.3.6

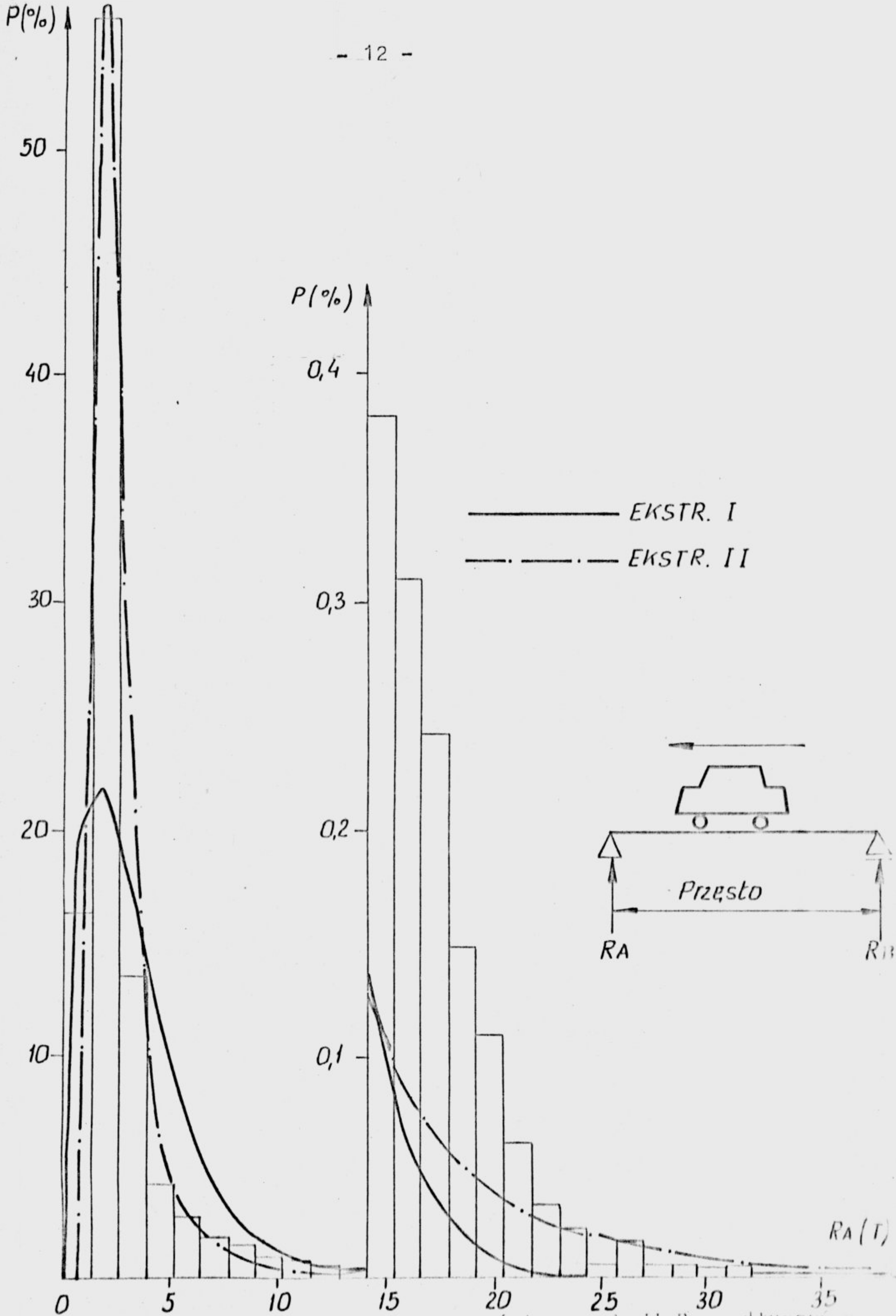
Parametry rozkładów R_A i R_B wg Takaoki (suplement do pracy [126])

Długość przęsła [m]		wartość średnia X [T]	wariancja Var X [T^2]	k_F	u_F	α_G	u_G
25	R_A	2,7181	7,1079	2,5478	1,8463	0,48107	1,5182
	R_B	2,8199	8,8746	2,4822	1,8852	0,43053	1,4792
50	R_A	5,5853	17,138	2,8704	4,0423	0,30981	3,7222
	R_B	5,7829	20,275	2,8041	4,1380	0,28483	3,7564
100	R_A	11,413	40,272	3,3566	3,3566	0,20210	8,5568
	R_B	11,669	43,769	3,3179	3,3179	0,19386	8,6919

k_F, u_F - parametry rozkładu Frecheta (por. wzór (4.40))

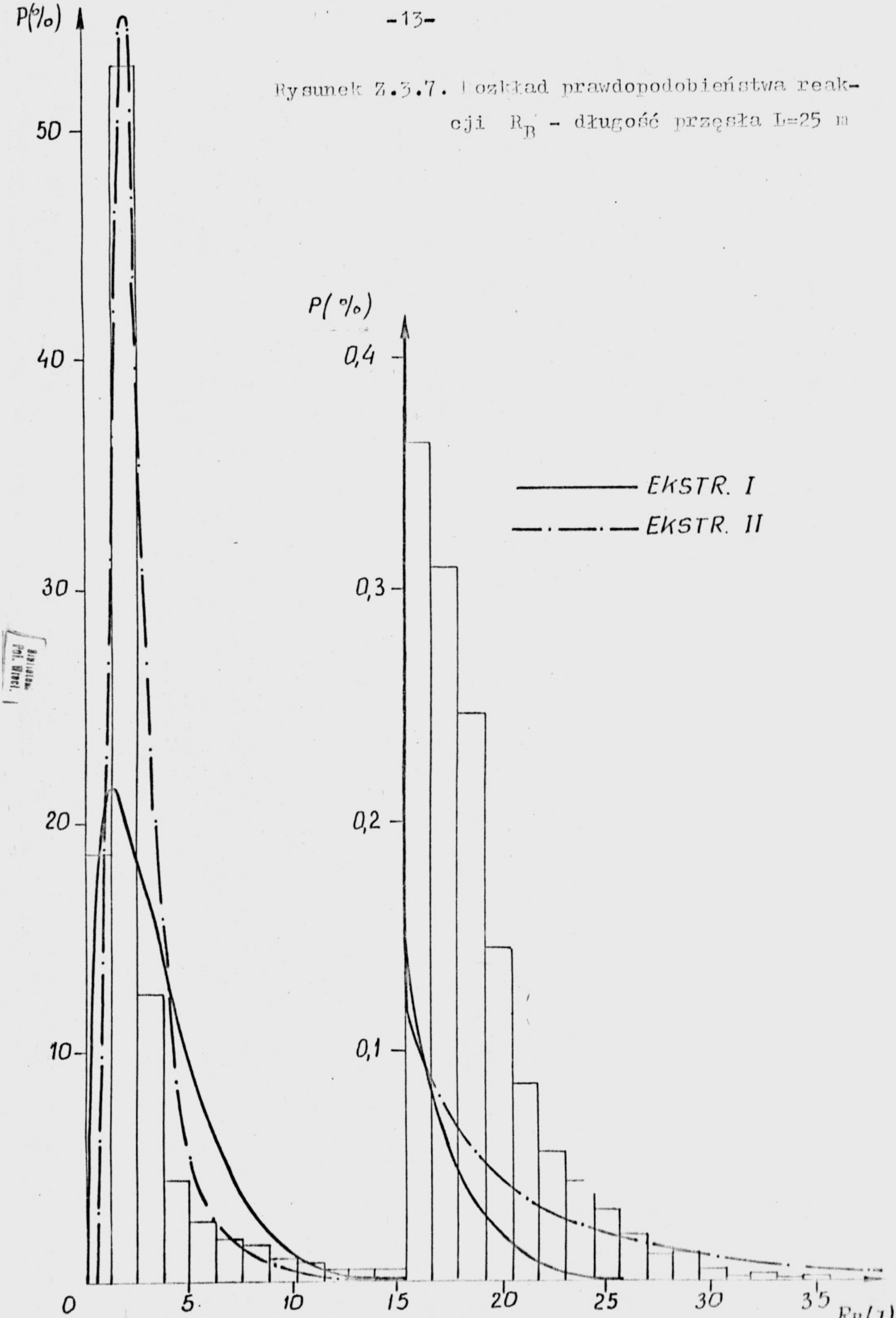
α_G, u_G - parametry rozkładu Gumbela (por. wzór (4.39))

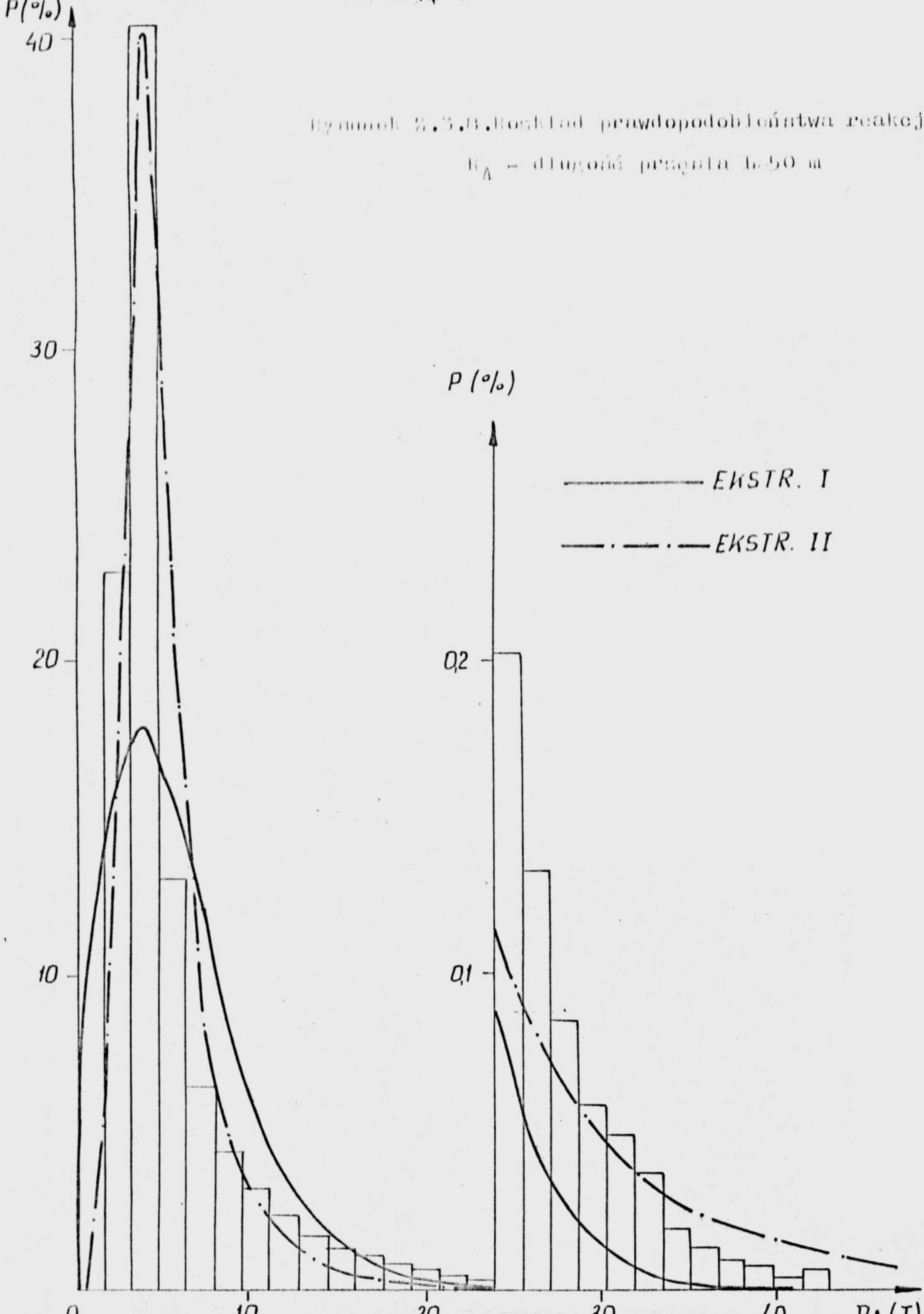
Na następnych stronach zamieszczono histogramy oraz wykresy odpowiednich gęstości Gumbela i Frecheta podane przez Takaokę w suplemencie do pracy [126].



Rysunek Z.3.6.Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_A - długość przęsła L=25 m

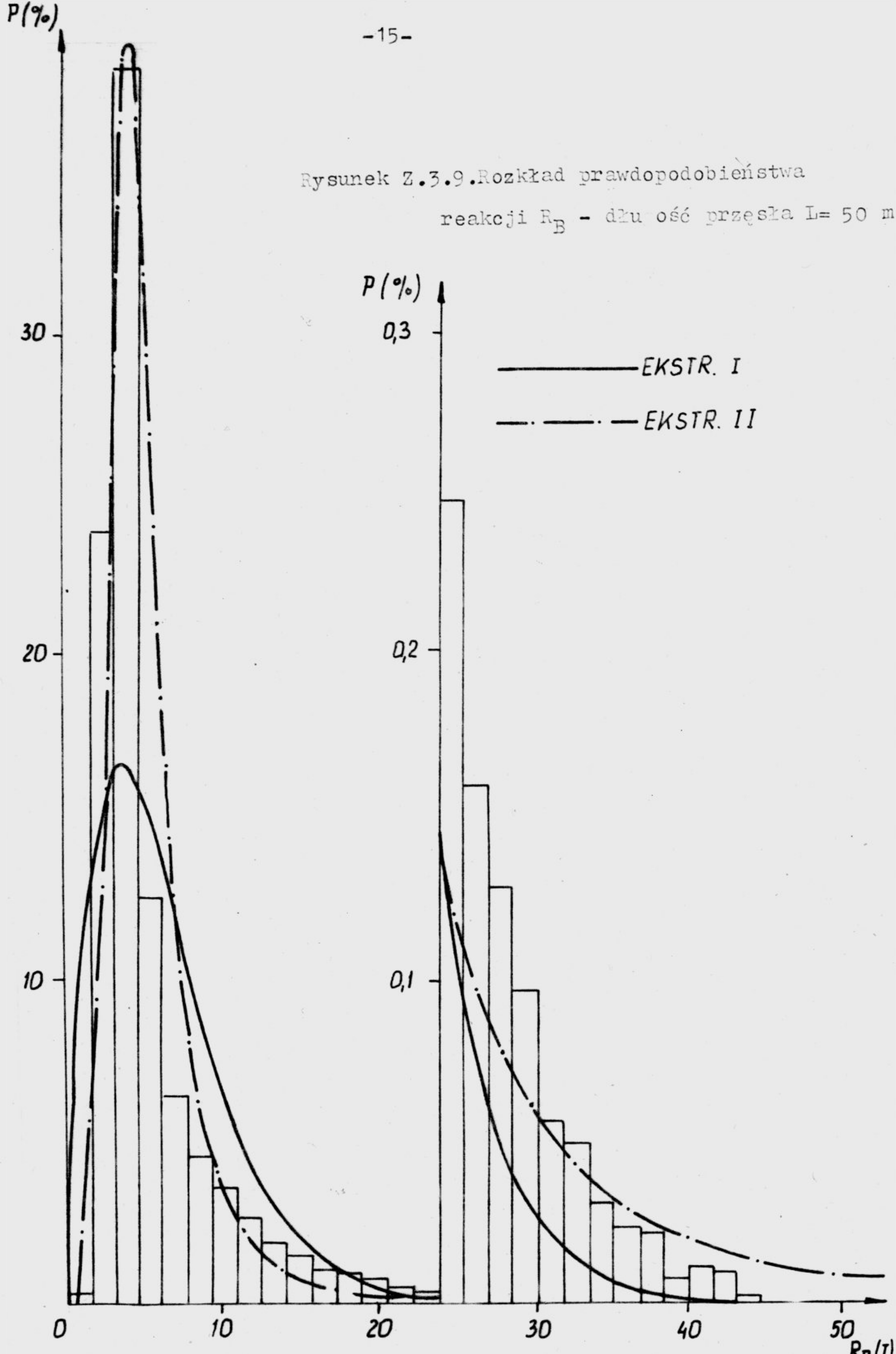
Rysunek Z.3.7. Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_B - długość przęsła L=25 m

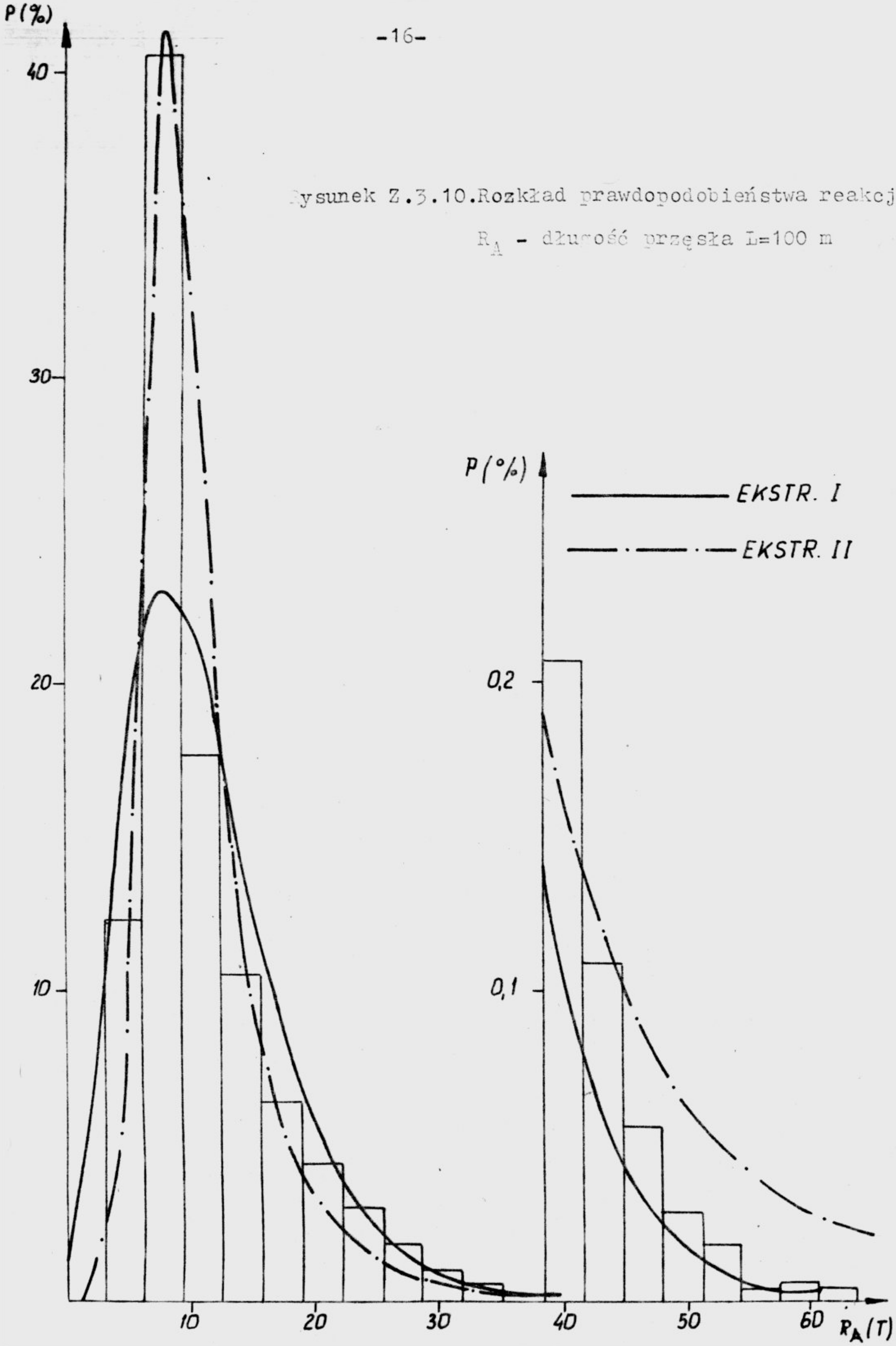




Rysunek 2.3.8. Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_A - długość przęsła 6.50 m

Rysunek Z.3.9.Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_B - długość przęsła L= 50 m





Rysunek Z.3.10.Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_A - długość przęsła L=100 m

Rysunek Z.3.11.Rozkład prawdopodobieństwa reakcji R_B - długość przęsła L=100 m