

Katarzyna Kuziak

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

METODY MATEMATYCZNE W PROCESIE ZARZĄDZANIA RYZYKIEM RYNKOWYM*

1. Zarządzanie ryzykiem rynkowym

Podjęcie ryzyka wpisane jest w każdą działalność gospodarczą. Chociaż podmioty nie mają wpływu na otoczenie, w którym funkcjonują, mogą jednak świadomie minimalizować pojawiające się zagrożenia i wykorzystywać trafiające się szanse.

W niniejszym opracowaniu skupimy się na ryzyku rynkowym. Ryzyko rynkowe jest określane jako ryzyko wynikające ze zmian cen na rynkach, zwłaszcza na rynkach finansowych. Rodzajem ryzyka rynkowego jest ryzyko stopy procentowej, czyli ryzyko tego, że aktywa, pasywa bilansu, pozycje pozabilansowe lub zysk czy stopa zwrotu mogą zmienić swoją wartość, jeśli zmieniają się stopy procentowe na rynku. Podobnie można określić ryzyko kursu walutowego, cen akcji, cen towarów (metali, produktów rolnych).

Na zarządzanie ryzykiem składa się pewien proces, w którym można wyróżnić następujące etapy (szerzej w pracach [Wojtasiak 2002; Culp 2001]):

- 1) identyfikacja,
- 2) pomiar,
- 3) sterowanie,
- 4) monitorowanie.

W etapie identyfikacji następuje określenie obszaru, w jakim ryzyko będzie rozpatrywane, i rozważenie wszystkich rodzajów ryzyka, na które narażony jest podmiot, oraz dokonanie ich klasyfikacji. W etapie pomiaru następuje ilościowe

* Pracę napisano w ramach projektu badawczego nr 1 H02B 01426 nt. *Metody ekonometryczno-statystyczne w zintegrowanym systemie zarządzania ryzykiem w przedsiębiorstwie finansowanego przez Komitet Badań Naukowych w latach 2004-2006.*

określenie poziomu ryzyka każdej posiadanej pozycji i portfeli pozycji, prognozowanie czynników ryzyka oraz badanie ekspozycji. Etap sterowania to etap decyzyjny, w którym podmiot podejmuje decyzje odnośnie do określonych strategii działania, bazując na wielkości ryzyka, na jakie jest narażony, wrażliwości na ryzyko, na ograniczeniach i możliwych do zawarcia transakcjach. Ponieważ proces zarządzania ryzykiem nie jest statyczny, ostatni etap obejmuje monitorowanie i weryfikację poprawności przyjętych rozwiązań, tj. procedur szacowania ryzyka, poziomów limitów dla pozycji, ich skuteczności, czyli tego, czy cel procesu zarządzania ryzykiem jest realizowany. Jeśli w trakcie monitorowania zidentyfikowane zostaną wady, to nieprawidłowości systemu zarządzania ryzykiem powinny być wyeliminowane. To powoduje, że proces zarządzania ryzykiem jest ciągły. W ramach etapu sterowania i monitorowania mogą być podejmowane następujące działania:

- a) unikanie ryzyka przez nieangażowanie się w transakcje, przy których ryzyko wydaje się bardzo wysokie,
- b) przenoszenie ryzyka na inne podmioty, głównie przez ubezpieczenie lub zawieranie transakcji terminowych,
- c) dywersyfikacja ryzyka – zmniejszanie poziomu ryzyka poprzez umiejętny dobór inwestycji,
- d) konstruowanie strategii zabezpieczających (*hedging*) – strategię z wykorzystaniem instrumentów pochodnych.

Celem niniejszej publikacji jest systematyzacja metod matematycznych wykorzystywanych na każdym z etapów zarządzania ryzykiem. Metody te zostaną podzielone na dwie główne grupy, tj. analityczne i symulacyjne. Będą one bardzo syntetycznie przedstawione oraz wskazane zostaną przykładowe źródła literaturowe.

2. Metody wykorzystywane w procesie zarządzania ryzykiem

W etapie pomiaru (tj. prognozowania czynników ryzyka, badania ekspozycji oraz pomiaru ryzyka) i sterowania (tj. strategii zarządzania ryzykiem) w procesie zarządzania ryzykiem mogą być wykorzystywane różne metody, wśród których wyróżnimy dwie podstawowe grupy:

- metody heurystyczne (ryzyko oceniane subiektywnie na podstawie profesjonalnego osądu audytora wewnętrznego lub grupy eksperckiej),
- metody matematyczne (ryzyko szacowane z wykorzystaniem aparatu formalnego, tj. konstrukcji teoretycznych, takich jak np. modele ekonometryczne czy modele wywodzące się z teorii finansów).

W niniejszej pracy przedmiotem analizy będą tylko metody matematyczne. Metody te podzielimy również na dwie podstawowe grupy:

- metody analityczne,
- metody symulacyjne (deterministyczne, stochastyczne).

Tam, gdzie zastosowanie metod analitycznych (jawna postać modelu) jest zawodne, mają zastosowanie metody przybliżone, tzw. metody numeryczne, w tym symulacyjne (pominiemy drzewa dwumianowe i metody różnic skończonych). Symulacja stochastyczna opiera się na procesach stochastycznych, które zbudowane są z sekwencji losowo wygenerowanych wartości. W symulacji deterministycznej nie wykorzystuje się losowych zdarzeń (w tym przypadku symulacja nie podlega prawdopodobieństwu). W pracy tej będziemy się koncentrować na najbardziej uniwersalnej metodzie numerycznej, tj. metodzie symulacji Monte Carlo (jest to symulacja stochastyczna).

Pierwsza przedstawiona zostanie grupa metod analitycznych, za pomocą których analizowane są modele w etapie pomiaru z podziałem na prognozowanie czynników ryzyka, badanie ekspozycji i pomiaru ryzyka oraz w etapie sterowania z wyróżnieniem strategii zarządzania ryzykiem.

2.1. Metody analityczne

Prognozowanie czynników ryzyka

W prognozowaniu cen akcji, stóp procentowych, kursów walut wykorzystywane są metody prognozowania:

- a) analiza i prognozowanie szeregów czasowych,
- b) analiza techniczna i fundamentalna,
- c) modelowanie przyczynowo-skutkowe (modele matematyczne i ekonometryczne).

Metody analizy i prognozowania szeregów czasowych w diagnozowaniu przeszłości zjawiska korzystają z informacji o dotychczasowym kształtowaniu się zmiennej prognozowanej (zmiennych prognozowanych). Informacje te mogą mieć postać jedno- lub wielowymiarowego szeregu czasowego. Podstawowe metody analizy dynamiki to:

- średnia ruchoma,
- wygładzanie wykładnicze,
- ekstrapolacja trendu.

Drugą grupę modeli stanowią modele wywodzące się z koncepcji procesu stochastycznego, a liczba tych modeli jest bardzo duża. Istotną część tych modeli może być zapisana w ogólnej postaci jako:

$$\begin{aligned}X_t &= g(F_{t-1}) + \sqrt{h(F_{t-1})}\varepsilon_t, \\g(F_{t-1}) &= \mu_t = E(X | X_{t-1}, \dots), \\h(F_{t-1}) &= \sigma_t^2 = V(X | X_{t-1}, \dots).\end{aligned}$$

W tak określonej postaci ogólnej model składa się z dwóch części: warunkowej średniej oraz warunkowej wariancji. Każda składowa może być modelem liniowym lub nieliniowym, można zatem wyróżnić następujące grupy modeli (szerzej

np. w pracach: [Engle 1982; 1995; Bollerslev 1986; Giovannini, Jorion 1989; Gourieroux 1997; Mills 1993; Tsay 2002]:

1) modele liniowe średniej i liniowe wariancji (np. stacjonarne modele szeregów czasowych ARMA, niestacjonarne modele zintegrowanych szeregów czasowych ARIMA, modele sezonowe SARIMA),

2) modele liniowe średniej i nieliniowe wariancji – modele liniowe, w których wariancja jest modelowana osobno za pomocą np. modeli ARCH, GARCH;

3) modele nieliniowe średniej i nieliniowe wariancji (np. autoregresyjne modele progowe TAR, autoregresyjne modele płynnego przejścia STAR, modele przełącznikowe Hamiltona).

Poza klasyczne metody prognozowania wykraczają analizy techniczna i fundamentalna. Analiza techniczna polega na badaniu zachowania się cen i wolumenu obrotów różnych instrumentów finansowych (głównie akcji, kursów walutowych). Podstawowymi metodami analizy technicznej są analizy wykresów cen i wolumenu obrotów (analiza trendów i formacji, średnie ruchome) oraz wskaźników technicznych (skonstruowanych na podstawie cen i wolumenu obrotu). Analiza fundamentalna koncentruje się na sytuacji wewnętrznej spółki i branży oraz otoczenia. Poza metodami heurystycznymi podstawową metodą jest analiza wskaźników finansowych i rynkowych.

Istotą metod grupy modelowania przyczynowo-skutkowego jest określenie modelu wyjaśniającego mechanizm zmian zmiennych prognozowanych (endogenicznych) przez zmiany zmiennych objaśniających (endogenicznych, egzogenicznych). Do tej grupy zaliczamy modele:

1. Matematyczne, stanowiące formalny zapis teorii badanego zjawiska. Modele te zazwyczaj nie zawierają wartości liczbowych parametrów, kryterium ich jakości stanowi zaś zgodność z teorią. Przykładem są teorie kursu walutowego, do których należą: teoria parytetu siły nabywczej, teoria parytetu stóp procentowych, model bilansu płatniczego, model aktywów finansowych. Modele mogą również podlegać weryfikacji empirycznej (np. szacowaniu ekonometrycznemu). Na przykład do badania teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych wykorzystywane są następujące metody:

- szacowanie regresji dotyczącej zmian stopy procentowej i spreadu,
- wykorzystanie modelu wektorowej autoregresji (VAR),
- analiza kointegracji.

2. Ekonometryczne, charakteryzujące się tym, że ich parametry szacowane są na podstawie próby, a kryterium jakości stanowi zgodność z danymi empirycznymi. Modele te zawierają parametry, których wartości liczbowe wyznaczono na podstawie materiału statystycznego opisującego kształtowanie się zmiennej objaśnianej i zmiennych objaśniających. Model w takiej sytuacji jest budowany w celu wyznaczenia przyszłej wartości zmiennej opisującej prognozowane zjawisko. W przypadku modeli dla kursu walutowego [Tong 1990; Kantor, Giacomelli 2002;

Hakala, Wystup 2002], cen akcji (Ross 1976; Ferson Harvey 1991] stosowane są klasyczne metody wykorzystywane w konstrukcji modeli:

- metody doboru zmiennych objaśniających,
- metody estymacji parametrów.

W terminowej strukturze stóp procentowych (tj. funkcji opisującej zależność stóp zwrotu od długości okresu pozostającego do terminu wykupu) estymacja polega na dopasowaniu do danych empirycznych krzywej *spot* lub innej funkcji opisującej terminową strukturę stóp procentowych w taki sposób, aby to dopasowanie było możliwie dobre i funkcja była dostatecznie gładka. Metody estymacji wykorzystywane w tym celu to metoda sekwencyjna, tzw. *bootstrapping* oraz metoda prostych wielomianów stopnia k [Ziarko-Siwek 2003].

Badanie ekspozycji

Badanie ekspozycji polega na określeniu funkcji lub równania opisującego wpływ czynników ryzyka na wartość (stopę zwrotu, zysk). Badanie to może zostać przeprowadzone z wykorzystaniem metod dających wynik dokładny (funkcyjny) lub przybliżony.

Dokładne zależności można określić na podstawie modeli wyceny instrumentów finansowych [Black, Scholes 1973; Garman, Kohlhagen 1983; Merton 1973; Fabozzi 2000; Fabozzi, Fong 2000], tj. modeli wyceny obligacji (metoda zdyskontowanych przychodów), akcji (metoda zdyskontowanych przychodów, metoda zysku nadwyżkowego, zdyskontowanych wolnych przepływów pieniężnych), europejskich opcji zwykłych (podejście arbitrażowe¹) i kontraktów terminowych (podejście arbitrażowe).

Przybliżone zależności pomiędzy wartością a czynnikami ryzyka mogą zostać wyprowadzone z rozwinięcia funkcji w szereg Taylora. Ten sposób jest wykorzystywany w badaniu ryzyka stopy procentowej w przypadku pozycji o stałym oprocentowaniu [Macaulay 1938; Cox, Ingersoll, Ross 1979] oraz ryzyka cen instrumentu bazowego (w przypadku pozycji w opcjach), np.:

$$\Delta P = -MD(YTM_1 - YTM_0) + C(YTM_1 - YTM_0)^2 + S_3(YTM_1 - YTM_0)^3 + \dots$$

gdzie: ΔP – zmiana wartości pozycji narażonych na ryzyko stopy procentowej, MD – zmodyfikowany *duration* (pierwsza pochodna), C – wypukłość (druga pochodna), S_3 – *velocity* (trzecia pochodna), YTM_0 – stopa dochodu w terminie do wykupu przed zmianą, YTM_1 – stopa dochodu w terminie do wykupu po zmianie.

Pomiar ryzyka

Miary ryzyka rynkowego można podzielić na trzy podstawowe grupy: miary zmienności, wrażliwości i miary zagrożenia. Miary zmienności są to klasyczne miary rozproszenia rozkładu stóp zwrotu (odchylenie standardowe stopy zwrotu, odchylenie przeciętne stopy zwrotu, odchylenie ćwiartkowe, współczynnik zmienności). Ogólnie miary te można określić jako k -ty moment centralny rozkładu stóp zwrotu. Wariancja może być również oszacowana jako warunkowa wariancja w

¹ Zestawienie modeli wyceny opcji przedstawione zostało w pracy [Kuziak 2000].

modelu, np. GARCH, IGARCH. W zarządzaniu ryzykiem stosuje się czasem pomiar zmienności instrumentu finansowego (np. opcji) nie na podstawie danych historycznych, lecz jako tzw. zmienność implikowaną (tj. wyznaczoną na podstawie modelu wyceny, w którym cena instrumentu jest znana).

Miary wrażliwości mierzą wpływ czynników ryzyka na ceny $P = g(X_1, X_2, \dots, X_m, \epsilon)$ lub stopy zwrotu $R = g(X_1, X_2, \dots, X_m, \epsilon)$. W analizie ryzyka, w zależności od badanego instrumentu i czynnika ryzyka, najczęściej stosuje się następujące miary wrażliwości:

a) *duration* i zmodyfikowany *duration* – miara wrażliwości ceny instrumentu dłużnego na zmiany stopy procentowej,

b) współczynnik beta akcji – miara wrażliwości stopy zwrotu akcji na zmiany portfela rynkowego,

c) współczynniki greckie (delta, gamma, vega, rho, theta) – miary wrażliwości ceny opcji na zmiany ceny instrumentu podstawowego, zmienności, stopy wolnej od ryzyka, czasu do terminu wygaśnięcia,

d) współczynnik zabezpieczenia dla kontraktu terminowego – miara wrażliwości ceny spot na zmiany ceny futures.

Miary zagrożenia mierzą wielkość negatywnych efektów oddziaływania ryzyka. Podstawową miarą jest VaR (*value at risk*) – wartość narażona na ryzyko, wartość zagrożona ryzykiem – opracowana przez instytucję finansową JP Morgan [Morgan 1996]. W tych trzech grupach miar stosowane są odpowiednio następujące metody szacowania [Lucas, Klaassen 1998; Jajuga 1999; 2000a; 2000b]:

- analiza rozkładu stopy zwrotu – miary zmienności,
- wyznaczenie pochodnej cząstkowej – miary wrażliwości,
- metoda wariancji-kowariancji do oszacowania VaR (jest to jedna z metod szacowania VaR).

Z koncepcji wartości zagrożonej VaR wywodzi się również Expected Shortfall (szerzej w pracach [Acerbi, Nordino, Sirtori 2001; Acerbi, Tasche 2001]).

Strategie zarządzania ryzykiem

W etapie sterowania podejmowane jest działanie polegające na dywersyfikacji ryzyka, tj. umiejętne tworzenie portfela, szczególnie uwzględnianie w nim par akcji o niskich lub nawet ujemnych współczynnikach korelacji stóp zwrotu, które prowadzi do zmniejszenia ryzyka przy jednoczesnym zachowaniu tej samej lub nawet zwiększeniu oczekiwanej stopy zwrotu. Jest to tzw. dywersyfikacja Markowitza i ma ona charakter metody analitycznej [Markowitz 1952; Markowitz 1959]. W tym przypadku metodami wykorzystywanymi w konstrukcji portfela są:

- analiza rozkładu stóp zwrotu,
- analiza wariancji-kowariancji,
- programowanie matematyczne (metoda programowania kwadratowego).

Drugim działaniem w etapie sterowania, w którym stosuje się metody analityczne, jest konstrukcja strategii hedgingowych. Wykorzystuje się w tym przypadku obliczone miary wrażliwości w celu skonstruowania pozycji niewrażliwej na

wybrany czynnik ryzyka. Na przykład *delta hedging*, *delta-gamma hedging*, *delta-gamma-vega hedging* wykorzystuje współczynnik delta (oraz gamma i vega), określający liczbę akcji przypadającą na jedną sprzedaną opcję, którą powinien mieć inwestor, aby móc skonstruować strategię o zerowym ryzyku [Ahn i in. 1999]. Podobnie immunizacja wykorzystuje *duration* w celu uodpornienia pozycji wrażliwej na zmianę stopy procentowej od jej zmian [Bierwag i in. 1981; Bierwag, Khang 1979]. Rozwiązania optymalne tych zagadnień są dokonywane za pomocą programowania matematycznego, tj. metodą programowania liniowego [Fabozzi, Fong 2000].

Drugą grupą metod matematycznych w zarządzaniu ryzykiem są metody symulacyjne. Podobnie jak w przypadku metod analitycznych, przedstawione zostaną symulacje z podziałem na prognozowanie czynników ryzyka, badanie ekspozycji i pomiaru ryzyka oraz monitorowania. W obszarze zarządzania ryzykiem rynkowym bardzo często wykorzystywana jest metoda symulacji Monte Carlo, m.in. do numerycznego obliczania wartości instrumentów finansowych czy pomiaru ryzyka. Symulacja Monte Carlo jest metodą umożliwiającą generowanie zmiennych losowych w postaci wartości oczekiwanej skomplikowanych rozkładów gęstości prawdopodobieństwa. Tam, gdzie stosowanie metod analitycznych w celu uzyskania rozwiązania dokładnego nie jest możliwe, stosuje się właśnie metodę symulacji, głównie symulacji stochastycznej Monte Carlo (w skrócie symulacji MC). Przedstawimy teraz te obszary w procesie zarządzania ryzykiem, w których stosuje się symulację MC i symulację deterministyczną.

2.2. Metody symulacyjne

Prognozowanie czynników ryzyka

W przypadku modeli prognostycznych stopy procentowej, np. w modelach Coxa, Ingersolla, Rossa i Vasička [Vasiček 1977; Cox, Ingersoll, Ross 1985] sposoby estymacji parametrów modeli jednoczynnikowych na podstawie szeregu czasowego krótkookresowej stopy procentowej ograniczają się do metody największej wiarygodności oraz uogólnionej metody momentów, gdzie do estymacji parametrów wykorzystuje się symulację MC [Zagst 2002].

Badanie ekspozycji

Symulacja MC może być stosowana w określeniu rozkładu zmiennej losowej oraz parametrów rozkładu najlepiej przybliżających rozkład empiryczny stopy zwrotu instrumentów finansowych. Nie wszystkie rozkłady mają jednak jawnie określoną funkcję gęstości, np. wyznaczenie empirycznej wartości funkcji gęstości rozkładu Levy'ego rozkładu α -stabilnego nie jest możliwe metodą analityczną.

Określenie funkcji lub równania opisującego wpływ czynników ryzyka na wartość (stopę zwrotu, zysk) może być przeprowadzone poprzez generowanie scenariuszy metodą symulacji MC.

Metoda symulacji MC jest również wykorzystywana w wycenie instrumentów finansowych [Boyle 1977; Duan 1995; Broadie, Glasserman 1995]:

- a) opcji zwykłych, gdy uchylimy założenia stabilności parametru zmienności w czasie, rozkładu normalnego oraz dla opcji na stopę procentową,
- b) opcji amerykańskich,
- c) skomplikowanych instrumentów pochodnych, opcji egzotycznych.

Pomiar ryzyka

Do szacowania VaR stosuje się różne podejścia (wspomniana metoda analityczna wariancji-kowariancji). Jeśli chodzi o symulacje, to stosowane są [Zienios 1996; Dowd 1998; Gourieroux, Laurent, Scaillet 2000; Jorion 2001]:

- deterministyczna – tzw. symulacja historyczna na podstawie danych historycznych – np. z ostatnich 200 lub 250 dni roboczych określa się rozkład historyczny stóp zwrotu, a następnie wyznacza się kwantyl tego rozkładu (czyli VaR),
- Monte Carlo – na podstawie modelu opisującego mechanizm kształtowania się cen (stóp zwrotu) instrumentów finansowych generuje się wiele (np. kilka tysięcy) obserwacji cen (stóp zwrotu) instrumentów finansowych, otrzymując w efekcie rozkład stopy zwrotu instrumentu finansowego, a następnie wyznacza się kwantyl tego rozkładu (czyli VaR),
- Monte Carlo – w podejściach wyznaczania kwantyla dowolnego rozkładu, wykorzystujących teorię wartości ekstremalnych, w podejściach bazujących na wartościach pochodzących z ogona rozkładu [Embrechts, Klüppelberg, Mikosch 1997; McNeil 1999],
- Monte Carlo – w podejściu wykorzystującym funkcję powiązań – *copula function* [Nelsen 1999; Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Rank 2002; Embrechts, Höing, Juri 2002; Cherubini, Luciano, Vecchiato 2004].

Monitorowanie ryzyka

W etapie monitorowania ryzyka symulacja deterministyczna wykorzystywana jest w dwóch obszarach [Allen 2003; Crouhy, Galai, Mark 2001; Jorion 2001; Aragonés, Blanco, Dowd 2001; Kerkhof, Melenberg 2004]:

- uzupełnienia pomiaru, czyli tzw. *stress testing* (scenariusze katastrofalne i najgorszego wypadku),
- weryfikacji – *back testing*.

Stress testing określa, w jaki sposób portfel instrumentów finansowych zachowa się w razie ekstremalnych wydarzeń (obserwowanych np. w ciągu ostatnich dwudziestu lat). Jest to inaczej analiza zdarzeń ekstremalnych (ekstremalne zmiany cen będą pochodzić z ogona rozkładu, co oznacza, że wielkość ryzyka nie będzie wynikać z oszacowania, ale będzie wynikiem katastrofalnej zmiany ceny z przeszłości) – obszar badań teorii wartości ekstremalnych. *Back testing* to określenie, jak wynik sprawdza się na danych z przeszłości, to weryfikacja wykorzystywanego modelu. *Back testing* jest porównaniem *ex post* pomiaru ryzyka, wynikającego z przyjętego modelu, zarówno z rzeczywistymi dziennymi zmianami wartości portfela w dłuższych okresach (aktualny rozkład zysków i strat), jak również ze zmianami hipotetycznymi (hipotetyczny rozkład zysków i strat).

Literatura

- Acerbi, Nordino, Sirtori, *Expected Shortfall as a Tool for Financial Risk Management*, maszynopis, <http://www.gloriamundi.org> 2001.
- Acerbi, Tasche, *Expected Shortfall a Natural Coherent Alternative to Value at Risk*, maszynopis, <http://www.gloriamundi.org/> 2001.
- Ahn D., Boudoukh J., Richardson M., Whitelaw R.F., *Optimal Risk Management Using Options*, „Journal of Finance” 1999, nr 54, s. 359-375.
- Allen S.L., *Financial Risk Management: A Practitioners Guide to Managing Market and Credit Risk*, Wiley, New York 2003.
- Aragones J.R., Blanco C., Dowd K., *Incorporating Stress Tests into Market Risk Modeling*, maszynopis, <http://www.gloriamundi.org/> 2001.
- Bierwag G.O., Kaufman G.G., Schweitzer R., Toevs A., *The Art of Risk Management in Bond Portfolios*, „Journal of Portfolio Management” 1981, nr 7 (3), s. 27-36.
- Bierwag G.O., Khang, *An Immunization Strategy is a Minimax Strategy*, „Journal of Finance” 1979, nr 34 (2), s. 389-399.
- Black F., Scholes M., *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, „Journal of Political Economy” 1973, nr 81, s. 637-659.
- Bollerslev T., *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, „Journal of Econometrics” 1986, nr 31, s. 307-327.
- Boyle P.P., *Options: a Monte Carlo Approach*, „Journal of Financial Economics” 1977, nr 4, s. 323-338.
- Broadie M., Glasserman P., *Pricing American-Style Securities Using Simulation*, working paper, Columbia University, Columbia 1995.
- Cox, J.C., Ingersoll J.E., Ross S.A., *Duration and the Measurement of Basis Risk*, „Journal of Business” 1979, nr 52 (1), s. 51-61.
- Cox, J.C., Ingersoll, J.E., Ross, S.A., *A Theory of the Term Structure of Interest Rates*, „Econometrica” 1985, nr 53 (2), s. 385-467.
- Crouhy, M., Galai, D. and Mark, R., *Risk Management*, McGraw-Hill, New York 2001.
- Cherubini U., Luciano E., Vecchiato W., *Copula Methods in Finance*, Wiley, New York 2004.
- Culp C.L., *The Risk Management Process*, Wiley, New York 2001.
- Dowd K., *Beyond Value at Risk. The New Science of Risk Management*, Wiley, Chichester 1998.
- Dowd K., *Measuring Market Risk*, Wiley, Chichester 2002.
- Duan J., *The GARCH Option Pricing Model*, „Mathematical Finance” 1995, nr 5, s. 13-32.
- Embrechts P., Klüppelberg C., Mikosch T., *Modelling Extremal Events for Insurance and Finance*, Springer Verlag, Berlin 1997.
- Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, raport, ETHZ, Zurich 2001.
- Embrechts P., Höing A., Juri A., *Using Copulae to Bound the Value-at-Risk for Functions of Dependent Risks*, raport, ETHZ, Zurich 2002.

- Engle R., *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of UK Inflation*, „Econometrica” 1982, nr 50, s. 987-1008.
- Engle R., *ARCH: Selected Readings*, Oxford University Press, New York 1995.
- Fabozzi F.J., *Rynki obligacji, analiza, strategie*, WIG-Press, Warszawa 2000.
- Fabozzi F.J., Fong G., *Zarządzanie portfelem inwestycji finansowych przynoszących stały dochód*, Wydawnictwo PWN, Warszawa 2000.
- Ferson W.E., Harvey C.R., *The Variation of Economic Risk Premiums*, „Journal of Political Economy” 1991, nr 99, s. 285-315.
- Garman M.B., Kohlhagen S.W., *Foreign Currency Option Values*, „International Money and Finance” 1983, nr 2, s. 231-237.
- Giovannini A., Jorion P., *The Time Variation of Risk and Return in the Foreign Exchange and Stock Markets*, „Journal of Finance” 1989, nr 44, s. 307-325.
- Gourieroux C., *ARCH Models in Financial Applications*, Springer Verlag, Amsterdam 1997.
- Gourieroux C., Laurent J.P. Scaillet O., *Sensitivity Analysis of Values at Risk*, „Journal of Empirical Finance” 2000, nr 7, s. 225-245.
- Hakala J., Wystup U., *Foreign Exchange Risk*, Risk Publications, London 2002.
- Jajuga K., *Miary ryzyka rynkowego – część pierwsza*, „Rynek Terminowy” 1999, nr 6, s. 67-68.
- Jajuga K., *Miary ryzyka rynkowego – część druga*, „Rynek Terminowy” 2000a, nr 7, s. 115-121.
- Jajuga K., *Miary ryzyka rynkowego – część trzecia*, „Rynek Terminowy” 2000b, nr 8, s. 112-117.
- Jorion, P., *Value at Risk*, 2nd edition, McGraw-Hill, New York 2001.
- Kantor L., Giacomelli D., *A Framework for Long-Term Currency Valuation*, Materiały JP Morgan Chase Bank, New York 2002.
- Kerkhof J., Melenberg B., *Backtesting for Risk-Based Regulatory Capital*, „Journal of Banking & Finance” 2004, nr 8, s. 1845-1865.
- Kuziak K.E., *Arbitraż w teorii i praktyce rynków finansowych*, praca doktorska, AE, Wrocław 2000.
- Lucas, A., Klaassen, P., *Extreme Returns, Downside Risk, and Optimal Asset Allocation*, „Journal of Portfolio Management” 1998, vol. 25, nr 1, s. 71-79.
- Macaulay, F.R., *Some Theoretical Problems Suggested by the Movement of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in U.S. since 1856*, National Bureau of Economic Research, New York 1938.
- Markowitz H. M., *Portfolio Selection*, „Journal of Finance” 1952, vol. 7, nr 1, s. 77-91.
- Markowitz H.M., *Portfolio Selection*, Wiley, New York 1959.
- Merton R., *Theory of Rational Option Pricing*, „Bell Journal Economics and Management Science” 1973, nr 4, s. 141-183.
- Mills T.C., *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press, New York 1993.
- McNeil A., *Extreme Value Theory for Risk Managers*, maszynopis, ETHZ, Zürich 1999.

- J.P. Morgan & Co., *RiskMetricsTM Technical Document*, praca niepublikowana, New York 1996.
- Nelsen R., *An Introduction to Copulas*, Springer Verlag, New York 1999.
- Rank J., Siegl T., *Applications of Copulas for the Calculation of Value-at-Risk*, [w:] W. Härdle, T. Kleinow, G. Stahl, *Applied Quantitative Finance*, Springer Verlag, Berlin 2002.
- Ross S.A., *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, „Journal of Economic Theory” 1976, nr 13, s. 341-360.
- Tong H., *Non-Linear Time Series*, Oxford Science Publications, New York 1990.
- Tsay R. S., *Analysis of Financial Time Series*, Wiley, New York 2002.
- Wojtasiak A., *Ryzyko inwestowania w finansowe instrumenty pochodne*, praca doktorska, AE, Wrocław 2002.
- Vasiček O. A., *An Equilibrium Characterization of the Term Structure*, „Journal of Financial Economics” 1977, nr 5, s. 177-188.
- Zagst R., *Interest Rate Management*, Springer Verlag, Berlin 2002.
- Zenios S.A. (red.), *Financial Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge 1996.
- Ziarko-Siwiek U., Kamiński M., *Empiryczna weryfikacja teorii oczekiwań terminowej struktury stóp procentowych w Polsce*, Materiały i Studia NBP, zeszyt nr 159, Warszawa 2003.

MATHEMATICAL METHODS IN MARKET RISK MANAGEMENT PROCESS

Summary

The paper discusses mathematical methods in market risk management process. First of all, the general introduction to market risk management process is given. Then the author divides group of mathematical models in two categories: analytical and simulation (deterministic, stochastic) models. Very briefly analytical and simulation models on each stage of the management process are presented. Some examples of literature for each models group are cited.