Na prawach rękopisu

I N S T Y T U T   M A T E M A T Y K I
P O L I T E C H N I K I   W R O C Ł A W S K I E J

Komunikat nr 179

PEWNE WŁASNOŚCI ROZMAITOŚCI PRAWIE HERMITOWSKIECH I PRAWIE KONTAKTOWYCH METRYCZNYCH

(praca doktorska)

Zbigniew Olszak

Słowa kluczowe: rozmatiość Riemanna, rozmaitość prawie kaehlerowska, rozmaitość Sasakiego, rozmaitość niemal Sasakiego

Zbigniew Olszak
Instytut Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
50-370 Wrocław, pl.Grunwaldzki 7a
tel.25-26

Komunikat wpłynął dnia 5 czerwca 1978

W S T Ę P

W pracy rozważane są rozmaitości Riemanna, na których istnieją struktury prawie zespolone albo prawie kontaktowe. O strukturach tych zakłada się, że są związane z metryką Riemanna za pomocą pewnych warunków zgodności. Żądając od tych struktur realizacji pewnych dodatkowych warunków typu różniczkowego dochodzi się do pojęć rozmaitości prawie kählerowskich, Sasakiego czy też niemal Sasakiego.

Rozdział wstępny niniejszej pracy jest obszernym wprowadzeniem do tej problematyki. Między innymi przedstawione są w nim niektóre ze znanych rezultatów o rozmaitościach prawie kählerowskich, Sasakiego i niemal Sasakiego, a także wiele przykładów takich rozmaitości. W pozostałych rozdziałach (I-III) zawarte są rezultaty uzyskane przeze mnie. I tak w Rozdziale I udowodniłem, że nie istnieją różne od kählerowskich rozmaitości prawie kählerowskie o wymiarze $\geqslant 8$ i stałej krzywiźnie sekcyjnej. W Rozdziale II podany jest pewien warunek równoważny z u-równoległością tensora Ricciego rozmaitości Sasakiego. W Rozdziale III rozważane są rozmaitości niemal Sasakiego. Dowodzi się tu, że przy pewnych założeniach o krzywiźnie rozmaitości niemal Sasakiego są 5-wymiarowe i o stałej krzywiźnie sekcyjnej. Ponadto pokazuje się, że 5-wymiarowe rozmaitości istotnie niemal Sasakiego są rozmaitościami Einsteina.

Zakładamy, że wszystkie rozmaitości rozpatrywane w tej pracy są klasy C^∞ i spójne, a wszystkie obiekty na tych rozmaitościach są klasy C^∞. Rozważane metryki Riemanna są dodatnio określone, poza jedynym przypadkiem rozpatrywanym w Rozdziale II.

Jak się wydaje, w polskim słownictwie matematycznym nie ma odpowiedników angielskich nazw: "almost Kähler manifold", "Sasakian manifold", "nearly Sasakian manifold". Dlatego pozwoliłem sobie użyć w pracy następujących polskich określeń: "rozmaitość prawie kählerowska", "rozmaitość Sasakiego", "rozmaitość niemal Sasakiego".

Zastosowana w pracy konwencja lokalnego zapisu pól tensorowych (w tym także tensora krzywizny) różni się od konwencji użytej w książce Yano i Bochnera [43] jedynie tym, że dla oznaczenia pochodnej kowariantnej używa się znaku ∇ zamiast średnika. W Rozdziale wstępnym dla uzyskania przejrzystości stosuje się znak $\square$ dla oznaczenia końca przykładu lub końca sformułowania twierdzenia.

Gorąco dziękuję Dyrekcji Instytutu Matematyki Politechniki Wrocławskiej za umożliwienie mi realizacji tej pracy w ramach Studium Doktoranckiego.

Dziękuję serdecznie Docentowi Tadeuszowi Huskowskiemu za zainteresowanie mnie geometrią różniczkową, a Docentowi Witoldowi Roterowi, Doktorowi Andrzejowi Derdzińskiemu i pozostałym uczestnikom Seminarium z geometrii różniczkowej za stworzenie klimatu do badań naukowych i zachęty do uprawiania problematyki wchodzącej w skład niniejszej pracy.

ROZDZIAŁ WSTĘPNY

§ 1 . Rozmaitości prawie kählerowskie .

Strukturą prawie zespoloną na rozmaitości różniczkowalnej M nazywa się pole tensorowe J typu $(1,1)$ spełniające warunek ([6], [16], [42])

$$J^2 = - I .$$

Klasa rozmaitości różniczkowalnych dopuszczających struktury prawie zespolone jest bardzo obszerna. Poniżej podaję niektóre przykłady takich rozmaitości.

Przykład 1 . Przestrzenie zespolone $\mathbb{C}^n$. Dla $(z^1,\ldots,z^n) \in \mathbb{C}^n$ przyjmijmy $z^j = x^j + iy^j$, $j = 1,\ldots,n$. Na $\mathbb{C}^n$ określa się strukturę prawie zespoloną J kładąc w układzie współrzędnych $(x^1,\ldots,x^n,y^1,\ldots,y^n)$

$$J\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial}{\partial y^j} , \quad J\left(\frac{\partial}{\partial y^j}\right) = - \frac{\partial}{\partial x^j} \quad \text{dla} \quad j=1,\ldots,n. \square$$

Przykład 2 . Rozmaitości zespolone. Każda rozmaitość zespolona M dopuszcza strukturę prawie zespoloną ([6], [16], [42]) . W lokalnych układach współrzędnych na M strukturę prawie zespoloną określa się tak jak w Przykładzie 1 , następnie sprawdza się, korzystając z holomorficzności funkcji przejścia między mapami, że tak określona struktura nie zależy od wyboru mapy. $\square$

Przykład 3 . Wiązki styczne TM rozmaitości różniczkowalnych M (Dombrowski [7], Sasaki [29], Yano i Ishihara [44]). Jeśli na rozmaitości M istnieje koneksja liniowa ∇, to na wiązce stycznej TM można określić strukturę prawie zespoloną J w sposób opisany poniżej. Niech (x^i), $i = 1,\dots,n$ będzie lokalnym układem współrzędnych na M oraz (x^i,y^i) stowarzyszonym z nim lokalnym układem współrzędnych na TM. Wtedy podniesienie horyzontalne X^H i podniesienie wertykalne X^V pola wektorowego $X\in\mathfrak{X}(M)$ są określone przez

$$X^H = X^i\frac{\partial}{\partial x^i} - \Gamma_{hs}^{\ i} X^h y^s \frac{\partial}{\partial y^i}\ , \quad X^V = X^i\frac{\partial}{\partial y^i}\ ,$$

gdzie X^i są lokalnymi współrzędnymi pola X względem bazy $\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)$ oraz $\Gamma_{hs}^{\ i}$ są składowymi koneksji ∇. Strukturę prawie zespoloną J na TM określamy kładąc

$$J(X^H) = X^V\ ,\ J(X^V) = -X^H$$

dla dowolnego pola wektorowego $X\in\mathfrak{X}(M)$. □

Przykład 4 . Sfery parzystowymiarowe. Wiadomo (np. Kobayashi i Nomizu [16]), że każda orientowalna i dwuwymiarowa rozmaitość Riemanna dopuszcza strukturę zespoloną, a tym samym strukturę prawie zespoloną. Dlatego każda dwuwymiarowa sfera $S^2(r)$ dopuszcza strukturę prawie zespoloną. Strukturę prawie zespoloną na $S^6(r)$ skonstruował Calabi w [5]. Borel i Serre [4] udowodnili, że sfery $S^n(r)$ o wymiarach $n \neq 2,6$, nie dopuszczają struktur prawie zespolonych. □

Nie każda struktura prawie zespolona pochodzi od struktury zespolonej. Nazwijmy strukturę prawie zespoloną generowaną przez strukturę zespoloną, w sposób opisany w Przykładzie 2, strukturą prawie zespoloną całkowalną. Problem, kiedy struktura prawie zespolona jest całkowalna, rozstrzyga twierdzenie Newlandera-Nirenberga [20]:

Twierdzenie A . Struktura prawie zespolona J jest całkowalna wtedy i tylko wtedy, gdy znika jej tensor Nijenhuisa N , określony w sposób

$$N(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[X,JY] - J[JX,Y] . \square$$

Przykładem struktury prawie zespolonej niecałkowalnej jest struktura skonstruowana przez Calabiego [5] na $S^6(r)$.

Każda rozmaitość dopuszczająca strukturę prawie zespoloną jest parzystowymiarowa i orientowalna. Warunki te nie są jednak wystarczające dla istnienia struktury prawie zespolonej, jak pokazuje Przykład 4.

Metrykę Riemanna dodatnio określoną g na rozmaitości M dopuszczającej strukturę prawie zespoloną J , nazywa się metryką hermitowską, jeśli spełnia warunek

$$g(JX,JY) = g(X,Y) .$$

Wiadomo, że metryka hermitowska zawsze istnieje i że nie musi być jedyna. Parę (J,g) gdzie J jest strukturą prawie zespoloną a g metryką hermitowską nazywa się strukturą prawie hermitowską na rozmaitości M , a M nazywa się wtedy rozmaitością prawie hermitowską. W przypadku, gdy J jest całkowalną, parę (J,g) nazywa się strukturą hermitowską na M , a M rozmaitością hermitowską.

Określmy na dowolnej rozmaitości prawie hermitowskiej 2-formę różniczkową (nazywaną formą fundamentalną) kładąc

$$F(X,Y) = g(JX,Y) .$$

Podstawowymi wyróżnianymi klasami rozmaitości prawie hermitowskich są następujące klasy :

I. Rozmaitości kählerowskie. Rozmaitość hermitowską M nazywa się rozmaitością kählerowską, jeśli jej forma fundamentalna F jest zamknięta, tzn. $dF = 0$. Dowodzi się, że rozmaitość prawie hermitowska jest kählerowską wtedy i tylko wtedy, gdy jej struktura prawie zespolona J jest równoległa w koneksji Riemanna określonej względem jej metryki hermitowskiej g (porównaj np. [16], Twierdzenie 4.3, str.148).

II. Rozmaitości prawie kählerowskie. Rozmaitość prawie hermitowską nazywa się rozmaitością prawie kählerowską jeśli jej forma fundamentalna F jest zamknięta.

III. Rozmaitości niemal kählerowskie. Rozmaitość prawie hermitowską nazywa się niemal kählerowską, jeśli jej struktura prawie hermitowska (J,g) ma własność

$$\nabla_X(J)Y + \nabla_Y(J)X = 0 ,$$

gdzie ∇ jest koneksją Riemanna określoną względem g.

Zależności między wymienionymi klasami rozmaitości prawie hermitowskich przedstawia Diagram I (por. Gray [12], Watson [40]):

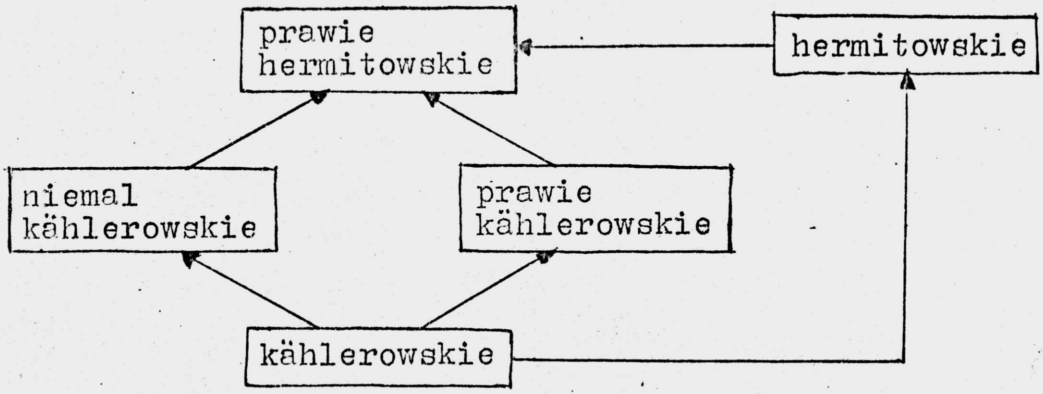

Diagram I

Każda 2-wymiarowa rozmaitość prawie hermitowska jest kählerowska (np. Kobayashi i Nomizu [16]), zatem w przypadku 2-wymiarowym mamy tylko jedną klasę.

Najbogatszą literaturę posiadają rozmaitości kählerowskie. Literatura dotycząca rozmaitości niemal kählerowskich jest mniej obszerna, najbardziej znaczące pozycje to : Gray [10], [11], [13], Kotō [18], Watanabe i Takamatsu [39] . Najsłabiej zbadaną klasą wśród wymienionych jest klasa rozmaitości prawie kählerowskich.

Przykład 5 . Niech M będzie rozmaitością Riemanna z metryką Riemanna $\tilde{g}$ i ∇ koneksją Riemanna względem $\tilde{g}$. Niech J będzie strukturą prawie zespoloną na TM, określoną przy pomocy koneksji ∇, tak jak w Przykładzie 3. Określmy metrykę Riemanna g na TM w sposób następujący

$$g(X^H,Y^H) = g(X^V,Y^V) = (g(X,Y))^V \quad ,$$

$$g(X^H,Y^V) = g(X^V,Y^H) = 0$$

dla dowolnych $X,Y \in \mathfrak{X}(M)$. Para (J,g) jest strukturą prawie hermitowską na TM. Dombrowski [7] (także Tachibana i Okumura [33]) dowiódł, że TM z tak określoną strukturą prawie hermitowską jest prawie kählerowska, przy czym jest ona kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{g}$ jest lokalnie płaska. $\square$

Przykład 5 wskazuje na to, że klasa rozmaitości prawie kählerowskich jest obszerniejsza od klasy rozmaitości kählerowskich.

Interesującym wydaje się być następujący problem :

Jakie własności mają struktury prawie hermitowskie (J,g), dla których metryka Riemanna g jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej ? Poniższe przykłady i Przykład 4 pokazują, że takie struktury istnieją.

Przykład 6 . Niech M będzie rozmaitością z jedną mapą $(x^1,\ldots,x^{2m})$. Niech g będzie metryką Riemanna na M o współrzędnych względem danej mapy $g_{ij} = \varphi\delta_{ij}$, gdzie φ jest pewną funkcją przyjmującą dodatnie wartości w każdym punkcie rozmaitości M. M dopuszcza strukturę prawie zespoloną J o współrzędnych w danej mapie

$$[J_i^{\ j}] = \begin{bmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{bmatrix} ,$$

gdzie 0 jest macierzą zerową a E macierzą jednostkową stopnia m. Para (J,g) jest strukturą prawie hermitowską na M, a jeśli funkcję φ odpowiednio wyspecjalizować, to g będzie o stałej krzywiźnie sekcyjnej. Sprawdzamy, stosując Twierdzenie A, że określona tu struktura prawie hermitowska jest całkowalna, zatem (J,g) jest strukturą hermitowską na M. □

Przykład 7 . Gray [12] dowiódł, że każda sfera $S^6(r)$ dopuszcza strukturę prawie hermitowską, która jest różną od kählerowskiej strukturą niemal kählerowską. □

Znanymi są następujące własności rozmaitości prawie hermitowskich o stałej krzywiźnie sekcyjnej :

Twierdzenie B (Yano [42], str. 69). Każda rozmaitość kählerowska o stałej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze $\geqslant 4$ jest lokalnie płaska. □

Twierdzenie C (własność ta wynika np. z Twierdzenia udowodnionego przez Takamatsu i Watanabe w [36]). Każda różna od kählerowskiej rozmaitość niemal kählerowska o stałej krzywiźnie sekcyjnej jest lokalnie izometryczna z $S^6(r)$. □

Twierdzenie D (Goldberg [8]). Rozmaitość prawie kählerowska o stałej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze $\geqslant 4$ jest kählerowska wtedy i tylko wtedy, gdy jest lokalnie płaska. □

Twierdzenie E (Tachibana [32], Kotō [18]). Nie istnieją rozmaitości prawie kählerowskie o stałej dodatniej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze $\geqslant 4$. □

Udowodnione przeze mnie twierdzenie w pracy [26] rozszerza rezultat zawarty w Twierdzeniu E dla wymiarów $\geqslant 8$:

Twierdzenie F. Nie istnieją różne od kählerowskich rozmaitości prawie kählerowskie o stałej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze $\geqslant 8$. □

Dotychczas nie jest znana odpowiedź na pytanie: czy istnieją różne od kählerowskich rozmaitości prawie kählerowskie o stałej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze 4 lub 6?

§ 2 . Rozmaitości prawie kontaktowe metryczne.

Wiadomo (np. Yano [42], str.115), że 2n-wymiarowa rozmaitość dopuszcza strukturę prawie zespoloną wtedy i tylko wtedy, gdy grupa strukturalna jej wiązki stycznej redukuje się do grupy unitarnej $U(n)$.

Przez analogię, J.W. Gray [14] określił strukturę prawie kontaktową na rozmaitościach nieparzystowymiarowych w sposób następujący : Mówimy, że (2n+1)-wymiarowa rozmaitość posiada strukturę prawie kontaktową, jeśli grupa strukturalna jej wiązki stycznej redukuje sie do grupy $U(n)\times 1$.

Dowodzi się, że nieparzystowymiarowa rozmaitość M posiada strukturę prawie kontaktową wtedy i tylko wtedy, gdy dopuszcza istnienie pól tensorowych F,v,u typów, odpowiednio, (1,1), (1,0), (0,1) takich, że (Blair [1], Sasaki [28]) :

(1) $$F^2 = - I + u\otimes v \quad , \quad u(v) = 1 \quad .$$

Dlatego w dalszym ciągu, trójkę (F,v,u) mającą własność (1) będę nazywał strukturą prawie kontaktową na M, a rozmaitość M dopuszczającą taką strukturę-rozmaitością kontaktową.

Konsekwencją (1) są własności

(2) $$F(v) = 0 \quad i \quad (u\circ F)(X) = 0 \quad \text{dla każdego } X\in\mathfrak{X}(M).$$

Strukturą prawie kontaktową metryczną na rozmaitości M nazywa się czwórkę (F,v,u,g), gdzie (F,v,u) jest strukturą prawie kontaktową a g jest metryką Riemanna na M mającą własność

$$(3) \qquad g(FX,FY) = g(X,Y) - u(X)\,u(Y) \ ,$$

Metrykę g o tej własności nazywa się zgodną ze strukturą prawie kontaktową (F,v,u), a M rozmaitością prawie kontaktową metryczną (Sasaki [28]).

Na rozmaitości prawie kontaktowej zawsze istnieje metryka Riemanna dodatnio określona i zgodna z jej strukturą prawie kontaktową (Blair [1], Sasaki [28]), Takahashi [35] zaproponował, aby rozważać także metryki niekoniecznie dodatnio określone i zgodne ze strukturami prawie kontaktowymi, oraz podał, w wymienionej pracy a także w pracy [34], przykłady rozmaitości prawie kontaktowych metrycznych z nieokreślonymi metrykami Riemanna.

Niech (F,v,u,g) będzie strukturą prawie kontaktową metryczną na rozmaitości M. Na M określa się 2-formę różniczkową $\tilde{F}$ kładąc

$$\tilde{F}(X,Y) = g(FX,Y) \ .$$

Jeśli $\tilde{F} = du$, to (F,v,u,g) nazywa się strukturą kontaktową metryczną a M-rozmaitością kontaktową metryczną.

Wcześniej w literaturze znane były rozmaitości kontaktowe (Boothby i Wang [3], Gray [14]), zdefiniowane jako rozmaitości, na których istnieje 1-forma u taka, że $u \wedge (du)^n \neq 0$ w każdym punkcie na M. Ale, jak wykazał Blair ([1], str. 25-26) każda rozmaitość kontaktowa metryczna jest kontaktowa i na odwrót, jeśli M jest rozmaitością kontaktową z u jako formą kontaktową, to na M istnieje struktura kontaktowa metryczna (F,v,u,g) (to samo u).

Przykład 1 . Niech (x^i,y^i,z) $(i = 1,\dots,n)$ będzie kartezjańskim układem współrzędnych w przestrzeni $\mathbb{R}^{2n+1}$. Określmy

$$F = \sum_{i=1}^{n}\left[dx^i\otimes\frac{\partial}{\partial y^i} - dy^i\otimes\left(\frac{\partial}{\partial x^i} + y^i\frac{\partial}{\partial z}\right)\right],$$

$$v = 2\frac{\partial}{\partial z}, \quad u = \frac{1}{2}\left(dz - \sum_{i=1}^{n} y^i\,dx^i\right),$$

$$g = u\otimes u + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\left(dx^i\otimes dx^i + dy^i\otimes dy^i\right).$$

Łatwo sprawdza się, że (F,v,u,g) jest strukturą kontaktową metryczną na $\mathbb{R}^{2n+1}$. □

Przykład 2 . Niech N będzie $(2n+2)$-wymiarową rozmaitością prawie hermitowską ze strukturą prawie hermitowską (J,G). Niech M będzie orientowalną hiperpowierzchnią w N, tzn. M jest $(2n+1)$-wymiarową i orientowalną rozmaitością oraz istnieje imersja $i : M \longrightarrow N$. Załóżmy, że C jest polem wektorów jednostkowych normalnych do M. Określamy na M pola tensorowe F,v,u,g kładąc

$$(4)\quad \begin{cases} g(X,Y) = G(i_*X,i_*Y), & i_*v = -JC, \\ u(X) = g(v,X), & Ji_*X = i_*FX + u(X)C. \end{cases}$$

Wtedy (F,v,u,g) jest strukturą prawie kontaktową metryczną na M (Tashiro [38]). Konkretnym przykładem realizującym tą konstrukcję jest choćby struktura prawie kontaktowa metryczna jaką można otrzymać na sferze $S^{2n+1}(r)$, jeśli potraktować $S^{2n+1}(r)$ jako orientowalną hiperpowierzchnię w przestrzeni zespolonej $\mathbb{C}^{n+1}$ (patrz również Przykład 4 w tym paragrafie). □

Przykład 3 . Niech M będzie $(2n+1)$-wymiarową rozmaitością paralelizowalną i niech paralelizacja będzie zadana przez pola wektorowe $X_1,\dots,X_{2n+1}$. Połóżmy

$$g(X_A,X_B)=\delta_{AB},\quad A,B=1,\dots,2n+1,\quad v=X_{2n+1},$$

$$u(X)=g(v,X)\quad \text{dla dowolnych } X\in\mathfrak{X}(M).$$

Niech w^i , w^{i+n} będą polami kowektorowymi na M, określonymi w sposób

$$w^i(X)=g(X_i,X)\ ,\quad w^{i+n}(X)=g(X_{i+n},X)\ ,$$

gdzie $i=1,\dots,n$. Jeśli określić

$$F=\sum_{i=1}^{n}\left(w^i\otimes X_{i+n}-w^{i+n}\otimes X_i\right)\ ,$$

to (F,v,u,g) jest strukturą prawie kontaktową metryczną na M. W szczególności, każda nieparzystowymiarowa grupa Liego jest rozmaitością prawie kontaktową metryczną. □

Niech M będzie rozmaitością prawie kontaktową z (F,v,u) jako strukturą prawie kontaktową. Weźmy pod uwagę rozmaitość $M\times\mathbb{R}$. Pole wektorowe na $M\times\mathbb{R}$ oznaczać będziemy przez $(X,f\frac{d}{dt})$, gdzie X jest styczny do M, f funkcją na $M\times\mathbb{R}$ i t współrzędną na $\mathbb{R}$. Określmy na $M\times\mathbb{R}$ strukturę prawie zespoloną J przez

$$J(X,f\tfrac{d}{dt})=(FX-fv,u(X)\tfrac{d}{dt})\,.$$

Jeśli J jest strukturą prawie zespoloną całkowalną, to strukturę prawie kontaktową (F,v,u) nazywamy normalną.

Jak udowodnili Sasaki i Hatakeyama [30], struktura prawie kontaktowa jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy

$$N_F + 2\, du \otimes v = 0 \ ,$$

gdzie N_F jest tensorem Nijenhuisa pola F określonym następująco

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY]$$

dla dowolnych pól wektorowych X,Y.

Strukturę kontaktową metryczną, która jest jednocześnie normalna, nazywa się strukturą Sasakiego, a rozmaitość dopuszczającą taką strukturę nazywa się rozmaitością Sasakiego.

Struktura prawie kontaktowa metryczna (F,v,u,g) jest strukturą Sasakiego wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\nabla_X(F)Y = -\, g(X,Y)v + u(Y)X \ ,$$

gdzie ∇ oznacza koneksję Riemanna względem metryki g (Blair [1]).

Blair, Showers i Yano w pracy [2] ogłoszonej w 1976 r. wprowadzili określenie struktury niemal Sasakiego (angielska nazwa "nearly Sasakian") : Strukturę prawie kontaktową metryczną (F,v,u,g) nazywa się strukturą niemal Sasakiego, jeśli

$$\nabla_X(F)Y + \nabla_Y(F)X = -\,2\, g(X,Y)v + u(X)Y + u(Y)X \ .$$

Rozmaitość dopuszczającą strukturę niemal Sasakiego nazwijmy rozmaitością niemal Sasakiego.

Zanim zajmiemy się omówieniem wprowadzonych struktur zobaczmy, jak przedstawiają się zależności między nimi. Zilustruje to poniższy diagram (porównaj Blair [1]):

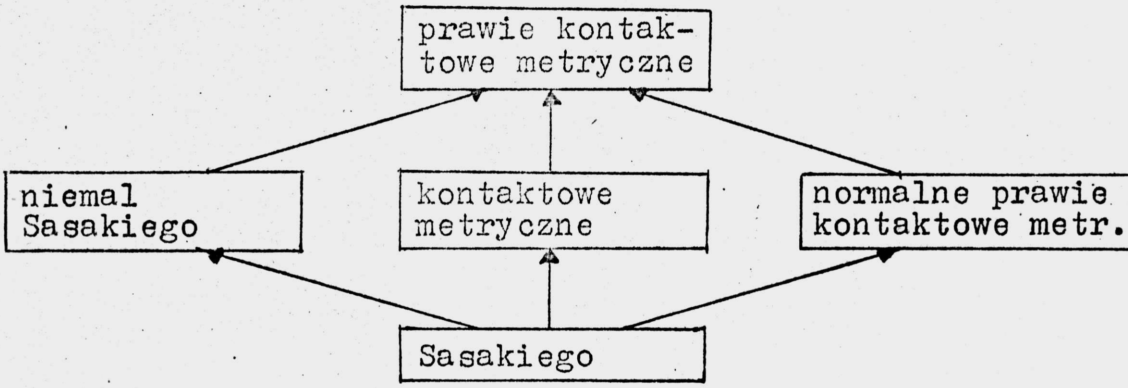

Diagram II

Przykład 4 . Niech $\mathbb{C}^{n+1}$ będzie przestrzenią zespoloną ze strukturą prawie zespoloną J opisaną w Przykładzie 1, § 1, i niech G będzie standardowym iloczynem skalarnym w $\mathbb{C}^{n+1} = \mathbb{R}^{2n+2}$. $\mathbb{C}^{n+1}$ z tak określoną strukturą prawie hermitowską (J,G) jest rozmaitością kählerowską. Niech $S^{2n+1}(1)$ będzie $(2n+1)$-wymiarową sferą standardową o promieniu 1 w $\mathbb{C}^{n+1}$. Posługując się Przykładem 2, określamy na $S^{2n+1}(1)$ strukturę prawie kontaktową metryczną (F,v,u,g). Przy czym, pole wektorów jednostkowych i normalnych do $S^{2n+1}(1)$ wybieramy tak, aby druga forma podstawowa h była postaci $h = g$ (Ryan [27]). Sprawdzamy, przez różniczkowanie kowariantne ostatniej z równości w (4), że (F,v,u,g) jest strukturą Sasakiego na $S^{2n+1}(1)$ (Tashiro [38], Takahashi [35]). □

Przykład 5 . Mówimy , że rozmaitość Sasakiego M jest o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej, jeśli w każdym punkcie rozmaitości M krzywizna sekcyjna $K(X,FX)$ nie zależy od wyboru ortogonalnego do v i niezerowego wektora stycznego X. Sfery $S^{2n+1}(1)$, ze strukturami opisanymi w Przykładzie 4, są przykładami rozmaitości Sasakiego o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej. Rozmaitości Sasakiego o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej zostały poklasyfikowane (Takahashi [35]), ich tensor krzywizny jest postaci (Ogiue [21]):

$$\begin{aligned} 4\,R(X,Y,Z,W) &= (k+3)\left[g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\right] + \\ &+ (k-1)\big[u(X)u(Z)g(Y,W) - u(Y)u(Z)g(X,W) + g(X,Z)u(Y)u(W) - \\ &- g(Y,Z)u(X)u(W) + g(FY,Z)g(FX,W) - g(FX,Z)g(FY,W) - \\ &- 2\,g(FX,Y)g(FZ,W)\big], \end{aligned}$$

tym samym tensor Ricciego $\hat{R}$ jest postaci

$$\hat{R}(X,W) = \frac{(n+1)k+3n-1}{2}\, g(X,W) - \frac{(n+1)(k-1)}{2}\, u(X)u(W),$$

gdzie $k = \text{const.}$ dla $2n+1 \geqslant 5$. □

Okumura [22] udowodnił, że jeśli tensor Ricciego rozmaitości Sasakiego jest równoległy, to jest ona rozmaitością Einsteina. Dlatego, warunek równoległości tensora Ricciego jest warunkiem nieistotnym dla rozmaitości Sasakiego.

Kon [17] nazwał tensor Ricciego $\hat{R}$ rozmaitości Sasakiego u-równoległym, jeśli spełnia warunek

$$\nabla_X(\hat{R})(FY,FZ) = 0 .$$

Kon, w swej pracy, podał interpretację geometryczną tego warunku, a mianowicie: Załóżmy, że M jest regularną rozmaitością Sasakiego wymiaru 2n+1, tzn. każdy punkt $p \in M$

posiada otoczenie współrzędnościowe U takie, że każda krzywa całkowa pola wektorowego v przechodząca przez U przecina to otoczenie tylko raz. Jeśli M/v oznacza zbiór orbit pola v, to M/v jest 2n-wymiarową rozmaitością kählerowską. Wówczas, tensor Ricciego $\hat{R}$ rozmaitości Sasakiego M jest u-równoległy wtedy i tylko wtedy, gdy tensor Ricciego rozmaitości kahlerowskiej M/v jest równoległy.

Przykład 6 . Rozmaitość Sasakiego nazywa się rozmaitością u-Einsteina (np. Tanno i Baik [37] a także Kenmotsu [15]), jeśli jej tensor Ricciego jest postaci

$$\hat{R} = a\,g + b\,u \otimes u \quad ,$$

gdzie a,b są stałymi. Łatwo sprawdza się, korzystając z (2), że rozmaitości Sasakiego i u-Einsteina mają u-równoległy tensor Ricciego. Zwróćmy uwagę, że rozmaitości Sasakiego o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej są u-Einsteina (patrz Przykład 5). □

Przykład 7 . Takahashi [34] wprowadził do literatury pojęcie lokalnie F-symetrycznych rozmaitości Sasakiego, jako rozmaitości, których tensor krzywizny spełnia warunek

$$F^2(\nabla_V(R)(X,Y)Z) = 0 \tag{5}$$

dla dowolnych wektorów V,X,Y,Z ortogonalnych do v. Takahashi podał w swej pracy wiele przykładów takich rozmaitości, oraz podał interpretację geometryczną warunku definiującego tą klasę rozmaitości Sasakiego. Pokażemy że każda lokalnie F-symetryczna rozmaitość Sasakiego posiada u-równoległy tensor Ricciego. Istotnie, warunek (5) implikuje

$$\nabla_V(R)(X,Y,Z,W) = 0$$

dla dowolnych wektorów V,X,Y,W ortogonalnych do v, gdzie przyjęliśmy $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$. Tym samym

$$\nabla_{FV}(R)(FX,FY,FZ,FW) = 0$$

dla dowolnych wektorów V,X,Y,Z,W, co dla tensora Ricciego $\hat{R}$ daje

$$\nabla_{FV}(\hat{R})(FX,FW) = 0 ,$$

a to, jak pokazał Kon [17], jest warunkiem równoważnym z u-równoległością tensora Ricciego. □

W swej pracy [23] znalazłem warunek równoważny z u-równoległością tensora Ricciego na rozmaitościach Sasakiego. Mianowicie, udowodniłem :

Twierdzenie A . Tensor Ricciego $\hat{R}$ rozmaitości Sasakiego jest u-równoległy wtedy i tylko wtedy, gdy

$$(6) \qquad \nabla_X(\hat{R})(Y,Z) + \nabla_Y(\hat{R})(Z,X) + \nabla_Z(\hat{R})(X,Y) = 0 . \ \square$$

Warunek (6) jest słabszy od równoległości tensora Ricciego. Dla pól tensorowych typu (0,2) na rozmaitościach Riemanna, warunek ten pojawił się przy badaniu przemienności operatorów różniczkowych rzędu 2 z laplasjanem (Sumitomo [31]).

Przystępuję teraz do omówienia własności rozmaitości niemal Sasakiego.

Blair, Showers i Yano [2] dowiedli następujących twierdzeń :

Twierdzenie B . Na rozmaitości niemal Sasakiego pole wektorowe v jest polem Killinga. □

Twierdzenie C . Rozmaitość niemal Sasakiego jest normalna wtedy i tylko wtedy, gdy jest kontaktowa metryczna. W szczególności, normalna rozmaitość niemal Sasakiego jest rozmaitością Sasakiego (porównaj Diagram II). □

Twierdzenie D . Niech M będzie orientowalną hiperpowierzchnią w rozmaitości niemal kählerowskiej N. Wówczas, indukowana na M struktura prawie kontaktowa metryczna (patrz Przykład 2) jest niemal Sasakiego wtedy i tylko wtedy, gdy druga forma podstawowa h hiperpowierzchni M jest postaci

$$h(X,Y) = g(X,Y) + [h(v,v) - 1]\, u(X)u(Y) \ . \ \Box$$

Twierdzenie D dostarcza przykładów rozmaitości niemal Sasakiego. Poniższy przykład ilustruje ten fakt.

Przykład 8 . Niech $(x^1,\dots,x^7)$ będzie kartezjańskim układem współrzędnych w $\mathbb{R}^7$. Niech $S^6(r)$ będzie 6-wymiarową sferą o promieniu r w $\mathbb{R}^7$, daną równaniem $\|x\| = r$. Oznaczmy przez G standardową metrykę na $S^6(r)$, względem której $S^6(r)$ jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej $= \frac{1}{r^2}$. Na $S^6(r)$ rozważmy hiperpowierzchnię

$$M = \left\{ x : \|x\| = r,\ x^7 = \frac{r^2}{\sqrt{r^2+1}} \right\} .$$

Druga forma podstawowa tej hiperpowierzchni, po odpowiednim wybraniu pola jednostkowych wektorów normalnych, jest postaci $h(X,Y) = g(X,Y)$, gdzie g jest metryką Riemanna indukowaną na M (Ryan [27]). Ponadto, M jest izometryczna z $S^5(r_o)$, gdzie $r_o = \frac{r}{\sqrt{r^2+1}}$. Dlatego będziemy identyfikować M ze sferą $S^5(r_o)$.

Wiemy (Przykład 7, § 1), że na sferze $S^6(r)$ istnieje struktura niemal kählerowska (J,G). Jeśli rozważymy na $S^5(r_o)$ strukturę prawie kontaktową metryczną (F,v,u,g), określoną jak w Przykładzie 2, to na mocy Twierdzenia D, jest ona strukturą niemal Sasakiego. Struktura ta jest różna od struktury Sasakiego, bo $S^5(r_o)$ jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej $=\frac{1}{r_o^2} > 1$, a rozmaitość Sasakiego o stałej krzywiźnie sekcyjnej ma krzywiznę sekcyjną równą 1 (o czym łatwo przekonać się, korzystając z Przykładu 5). □

Wszystkie dalsze rezultaty zostały uzyskane przeze mnie.

Określmy na rozmaitości niemal Sasakiego antysymetryczne pole tensorowe $\tilde{H}$ typu $(0,2)$ i pole tensorowe H typu $(1,1)$ kładąc

$$\tilde{H}(X,Y) = \nabla_X(u)Y - \tilde{F}(X,Y) \quad \text{i} \quad g(HX,Y) = \tilde{H}(X,Y) .$$

Twierdzenie E . Rozmaitość niemal Sasakiego jest Sasakiego wtedy i tylko wtedy, gdy $\tilde{H} = 0$. □

Twierdzenie F . Każda 3-wymiarowa rozmaitość niemal Sasakiego jest Sasakiego. □

Nazwijmy rozmaitość niemal Sasakiego różną od Sasakiego rozmaitością istotnie niemal Sasakiego.

Twierdzenie G . Niech M będzie rozmaitością istotnie niemal Sasakiego. Wtedy następujące warunki są równoważne:

(a) $\dim M = 5$,

(b) $g(HX,HY) = \lambda\left[g(X,Y) - u(X)u(Y)\right]$, gdzie $\lambda = \frac{1}{\dim M-1}\,\|\tilde{H}\|^2 = \mathrm{const.} > 0$ i $\|\tilde{H}\|^2$ oznacza długość pola $\tilde{H}$,

(c) $\nabla_X(\tilde{F})(Y,Z) = -g(X,Y)g(v,Z) + g(X,Z)g(v,Y) -$
$- g(v,X)\tilde{H}(Y,FZ) - g(v,Y)\tilde{H}(Z,FX) - g(v,Z)\tilde{H}(X,FY)$
oraz $\tilde{H} \neq 0$. □

Twierdzenie H . Każda 5-wymiarowa rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest rozmaitością Einsteina, której krzywizna skalarna jest większa od 20. □

Twierdzenie I . Każda rozmaitość istotnie niemal Sasakiego, której tensor krzywizny R spełnia warunek

$$R(X,Y)\,R = 0\ ,$$

gdzie $R(X,Y) = \nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}$, jest 5-wymiarową rozmaitością o stałej krzywiźnie sekcyjnej. □

Następujące twierdzenie jest wnioskiem z Twierdzenia I:

Twierdzenie J . Lokalnie symetryczna rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej. □

Twierdzenie K . Konforemnie płaska rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej. □

Twierdzenie L . Każda istotnie niemal Sasakiego rozmaitość o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej jest 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej. □

Twierdzenia E - H będą opublikowane w pracy [24], a Twierdzenia I - L w pracy [25].

Rozmaitości Sasakiego, spełniające warunki jak w Twierdzeniach I - L są rozważane w pracach [21], [22], [35].

ROZDZIAŁ I . Rozmaitości prawie kählerowskie o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

Niech M (dim M = 2n) będzie rozmaitością prawie hermitowską z (F,g) jako strukturą prawie hermitowską. Formę fundamentalną rozmaitości M określiliśmy w sposób $\tilde{F}(X,Y) = g(FX,Y)$. Załóżmy, że M jest rozmaitością prawie kählerowską, tzn. $d\tilde{F} = 0$.

Lokalne współrzędne pól $F, g, \tilde{F}$ oznaczmy, odpowiednio, przez $F_j{}^i$, g_{ji}, F_{ji}. Wtedy, zgodnie z definicją, mamy

$$F_a{}^i F_j{}^a = -\delta_j^i \ , \quad g_{ab} F_i{}^a F_j{}^b = g_{ij} \ , \quad F_{ji} = F_j{}^a g_{ai} \ ,$$

(1) $$\nabla_k F_{ji} + \nabla_j F_{ik} + \nabla_i F_{kj} = 0 \ ,$$

gdzie ∇ oznacza koneksję Riemanna względem metryki g.

W tym rozdziale udowodnimy następujące twierdzenie:

Twierdzenie . Nie istnieją różne od kählerowskich rozmaitości prawie kählerowskie o stałej krzywiźnie sekcyjnej i wymiarze $\geqslant 8$.

Dowód. Kotō [18] otrzymał dla rozmaitości prawie kählerowskiej równości :

(2) $$(\nabla_b F_{ai}) F_k{}^b F_j{}^a + \nabla_k F_{ji} = 0 \ ,$$

(3) $$(\nabla_k F_{ba}) F_j{}^b F_i{}^a + \nabla_k F_{ji} = 0 \ .$$

Zauważmy, że z (2) i (3) łatwo wynika

(4) $$(\nabla_a F_{ji}) F_k{}^a = (\nabla_k F_{ai}) F_j{}^a = (\nabla_k F_{ja}) F_i{}^a \ .$$

Nagao i Kotō [19] dowiedli, że tensor krzywizny R_{lkji}

dowolnej rozmaitości prawie kählerowskiej spełnia tożsamość

(5) $$2\,(\nabla_a F_{lk})(\nabla^a F_{ji}) =$$

$$= R_{lkji} - R_{baji}F_l{}^b F_k{}^a - R_{lkba}F_j{}^b F_i{}^a + R_{dcba}F_l{}^d F_k{}^c F_j{}^b F_i{}^a +$$

$$+ R_{bkja}F_l{}^b F_i{}^a + R_{bkai}F_l{}^b F_j{}^a + R_{lbja}F_k{}^b F_i{}^a + R_{lbai}F_k{}^b F_j{}^a ,$$

gdzie $\nabla^a F_{ji} = g^{ab}\nabla_b F_{ji}$. Ta własność rozmaitości prawie kählerowskich została także udowodniona przez Gray'a ([9], równość (4.4)).

Załóżmy, że rozmaitość prawie kählerowska jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej. Wtedy, tensor krzywizny ma postać $R_{lkji} = S\,(g_{li}\,g_{kj} - g_{lj}\,g_{ki})$ i z (5) otrzymujemy

(6) $$(\nabla_a F_{lk})(\nabla^a F_{ji}) = 2S\,(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki} - F_{li}F_{kj} + F_{lj}F_{ki}).$$

Z (6) wynika natychmiast

(7) $$(\nabla_a F_{bc})(\nabla^a F^{bc}) = -\,4n(2n-2)\,S ,$$

gdzie przyjęliśmy $\nabla^a F^{bc} = g^{ak}g^{bj}g^{ci}\nabla_k F_{ji}$.

Korzystając z (1), przepisujemy lewą stronę równości (6) w postaci

$$-\,(\nabla_l F_{ka})(\nabla^a F_{ji}) + (\nabla_k F_{la})(\nabla^a F_{ji}).$$

Następnie, nasuwamy $\nabla^l F_{hm}$ na (6), korzystamy z (6) i wyznaczamy

(8) $$(\nabla_k F_{ba})(\nabla^b F_{hm})(\nabla^a F_{ji}) = 2S\,(g_{kj}\,\nabla_i F_{hm} - g_{ki}\,\nabla_j F_{hm} +$$

$$+ F_{kj}F_i{}^a\nabla_a F_{hm} - F_{ki}F_j{}^a\nabla_a F_{hm} + g_{km}\,\nabla_h F_{ji} - g_{kh}\,\nabla_m F_{ji} +$$

$$+ F_{km}F_h{}^a\nabla_a F_{ji} - F_{kh}F_m{}^a\nabla_a F_{ji}) .$$

Dokonując kontrakcji (8) z g^{km} i wykorzystując (1) i (3) otrzymujemy

(9) $$(\nabla_m F_{ba})(\nabla^b F_h{}^m)(\nabla^a F_{ji}) = 2S(2n-4)\nabla_h F_{ji} .$$

Nasuwamy $\nabla^k F_{ls}$ na (8) i po skorzystaniu z (6) mamy

(10) $$S\Big[(\nabla_j F_{ls})(\nabla_i F_{hm}) - (\nabla_i F_{ls})(\nabla_j F_{hm}) - F_j{}^b(\nabla_b F_{ls})F_i{}^a(\nabla_a F_{hm}) +$$
$$+ F_i{}^b(\nabla_b F_{ls})F_j{}^a(\nabla_a F_{hm}) + (\nabla_m F_{ls})(\nabla_h F_{ji}) - (\nabla_h F_{ls})(\nabla_m F_{ji}) -$$
$$- F_m{}^b(\nabla_b F_{ls})F_h{}^a(\nabla_a F_{ji}) + F_h{}^b(\nabla_b F_{ls})F_m{}^a(\nabla_a F_{ji}) -$$
$$- (\nabla_s F_{hm})(\nabla_l F_{ji}) + (\nabla_l F_{hm})(\nabla_s F_{ji}) + F_s{}^b(\nabla_b F_{hm})F_l{}^a(\nabla_a F_{ji}) -$$
$$- F_l{}^b(\nabla_b F_{hm})F_s{}^a(\nabla_a F_{ji})\Big] = 0 .$$

Nasuńmy $(\nabla^s F^{hm})(\nabla^l F^{ji})$ na (10). Wobec (2)-(4),(6) i (9) otrzymamy

$$S\Big[- 32nS + 48S - (\nabla_a F_{bc})(\nabla^a F^{bc})\Big](\nabla_k F_{ji})(\nabla^k F^{ji}) = 0 ,$$

co, na mocy (7), daje

(11) $$(2n-2)(2n-4)(2n-6)S^3 = 0 .$$

Jeśli przyjmiemy $\dim M = 2n \geqslant 8$, to z (11) otrzymujemy $S = 0$. Wówczas równość (7) implikuje $\nabla_k F_{ji} = 0$, tzn. M jest rozmaitością kählerowską. To kończy dowód.

ROZDZIAŁ II . Rozmaitości Sasakiego z u-równoległym tensorem Ricciego.

§ 1 . Wstęp .

Niech M (dim M = 2n+1) będzie rozmaitością Sasakiego i niech (F,v,u,g) będzie strukturą Sasakiego rozmaitości M. Metryka Riemanna g nie musi być dodatnio określona.

Lokalne współrzędne pól tensorowych F,v,u,g oznaczmy, odpowiednio, przez $F_j{}^i$, v^i, u_j, g_{ji}. Wtedy, na mocy przyjętych założeń, mamy

$$(1)\quad \begin{cases} F_a{}^i F_j{}^a = -\delta_j^i + u_j v^i, \quad u_a v^a = 1, \\ F_a{}^i v^a = 0, \quad F_j{}^a u_a = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad g_{ab} F_i{}^a F_j{}^b = g_{ij} - u_i u_j ,$$

$$(3)\quad \nabla_k F_j{}^i = -g_{kj} v^i + \delta_k^i u_j .$$

Korzystając z (1) i (2) łatwo sprawdzamy, że $u_i = g_{ia} v^a$. Dlatego będziemy pisać w dalszym ciągu v_i zamiast u_i.

Niech $F_{ji} = F_j{}^a g_{ai}$ oraz $F^{ji} = g^{ja} F_a{}^i$.

Rozmaitość Sasakiego M spełnia relacje

$$(4)\quad \nabla_j v_i = F_{ji} ,$$

$$(5)\quad R_{kjia} v^a = v_k g_{ji} - v_j g_{ki} ,$$

$$(6)\quad R_{ka} v^a = 2n v_k ,$$

$$(7)\quad R_{ka} F_j{}^a + R_{bkja} F^{ba} = -(2n-1) F_{kj} ,$$

(8) $$R_{ka}F_j{}^a + R_{ja}F_k{}^a = 0 .$$

Dowody równości (4) i (5) znajdują się na przykład w [1], a dowody (6)-(8) na przykład w [41]. Prostą konsekwencją tożsamości (1), (6) i (8) jest

(9) $$R_{ba}F_k{}^bF_j{}^a = R_{kj} - 2n\, v_kv_j .$$

R_{lkji} oraz R_{ji} są tutaj lokalnymi współrzędnymi tensora krzywizny i tensora Ricciego.

Przypomnijmy, że tensor Ricciego rozmaitości Sasakiego nazwaliśmy u-równoległym, jeśli spełnia warunek

(10) $$(\nabla_k R_{ba})\, F_j{}^bF_i{}^a = 0 .$$

§ 2 . Twierdzenie .

Twierdzenie . Tensor Ricciego rozmaitości Sasakiego M jest u-równoległy wtedy i tylko wtedy, gdy

(11) $$\nabla_k R_{ji} + \nabla_j R_{ik} + \nabla_i R_{kj} = 0 .$$

Dowód. Różniczkując kowariantnie równość (9) i korzystając z (1), (3), (4) i (6), otrzymujemy dla dowolnej rozmaitości Sasakiego

(12) $$(\nabla_k R_{ba})\, F_i{}^bF_j{}^a = \nabla_k R_{ij} - R_{ka}F_i{}^a\, v_j - R_{ka}F_j{}^a\, v_i - 2n\, F_{ki}\, v_j - 2n\, F_{kj}\, v_i .$$

Jeśli tensor Ricciego jest u-równoległy, to z (10) i (12) wyznaczamy

$$\nabla_k R_{ji} = R_{ka}F_j{}^a\, v_i + R_{ka}F_i{}^a\, v_j + 2n\, F_{kj}\, v_i + 2n\, F_{ki}\, v_j .$$

Stąd otrzymujemy (11), po skorzystaniu z (8) i antysymetrii pola tensorowego F_{ji}.

Na odwrót, załóżmy, że rozmaitość Sasakiego spełnia warunek (11).

Dowolna rozmaitość Sasakiego ma własność (Kon [17], Lemat 1.3)

$$(13) \quad (\nabla_b R_{ka}) F_i{}^b F_j{}^a = \nabla_k R_{ji} - \nabla_j R_{ik} - R_{ka} F_i{}^a v_j - 2 R_{ka} F_j{}^a v_i + 2n (F_{ik} v_j + 2 F_{jk} v_i) .$$

Równość (13) razem z (11) dają

$$(14) \quad (\nabla_b R_{ka}) F_i{}^b F_j{}^a + 2 \nabla_j R_{ik} + \nabla_i R_{kj} = - R_{ka} F_i{}^a v_j - 2 R_{ka} F_j{}^a v_i + 2n (F_{ik} v_j + 2 F_{jk} v_i) .$$

Różniczkując kowariantnie (6) i korzystając z (4), dostajemy

$$(15) \quad (\nabla_k R_{ja}) v^a = - R_{ja} F_k{}^a + 2n F_{kj} .$$

Nasuwamy $F_l{}^i F_m{}^j$ na (14), po zastosowaniu (1), (6) i (15), otrzymujemy

$$(16) \quad \nabla_l R_{km} - (\nabla_a R_{km}) v^a v_l + 2 (\nabla_b R_{ka}) F_m{}^b F_l{}^a + (\nabla_a R_{kb}) F_l{}^a F_m{}^b + R_{ka} F_l{}^a v_m - 2n F_{lk} v_m = 0 .$$

Tensor Ricciego dowolnej rozmaitości Sasakiego spełnia warunek

$$(17) \quad v^a \nabla_a R_{km} = 0 .$$

Istotnie, różniczkując kowariantnie (5) i korzystając z (4) wyznaczamy

$$(18)\qquad (\nabla_l R_{kjia})\, v^a + R_{kjia} F_l{}^a = F_{lk}\, g_{ji} - F_{lj}\, g_{ki} \,.$$

Dokonujemy kontrakcji równości (18) z g^{lk} i po wykorzystaniu tożsamości

$$\nabla_l R_{aij}{}^l = \nabla_a R_{ij} - \nabla_i R_{aj}$$

otrzymujemy

$$v^a \nabla_a R_{ij} = v^a \nabla_i R_{ja} - R_{bjia} F^{ba} - F_{ij} \,.$$

Ostatnia równość, na mocy (7) i (15), redukuje się do (17).

Biorąc pod uwagę (13) i (17), przekształcamy (16) do postaci

$$3\, \nabla_k R_{lm} - \nabla_l R_{mk} - \nabla_m R_{kl} - 4\, R_{ka} F_l{}^a\, v_m -$$

$$- 4\, R_{ka} F_m{}^a\, v_l + 8n\, F_{lk}\, v_m + 8n\, F_{mk}\, v_l = 0 \,.$$

Stąd zaś, wobec (11), otrzymujemy

$$\nabla_k R_{lm} - R_{ka} F_l{}^a\, v_m - R_{ka} F_m{}^a\, v_l - 2n\, (F_{kl}\, v_m + F_{km}\, v_l) = 0 \,,$$

co, podstawione do (12), daje (10). Tym samym dowód twierdzenia jest zakończony.

ROZDZIAŁ III . Rozmaitości niemal Sasakiego.

§ 1 . Wstęp .

Niech M ($\dim M = 2n+1$) będzie rozmaitością prawie kontaktową metryczną z (F,v,u,g) jako strukturą prawie kontaktową metryczną. Oznaczmy przez $F_j{}^i$, v^i, u_j, g_{ji} lokalne współrzędne, odpowiednio, pól F,v,u,g. Zgodnie z określeniem, pola te spełniają związki

(1.1) $$F_a{}^iF_j{}^a = -\delta_j{}^i + u_jv^i \ , \quad u_av^a = 1 \ ,$$

(1.2) $$g_{ab}F_i{}^aF_j{}^b = g_{ij} - u_iu_j \ .$$

Konsekwencją tych związków jest

(1.3) $$F_a{}^iv^a = 0 \ .$$

Podobnie jak w Rozdziale II, dla wygody współrzędne lokalne pola u będziemy dalej oznaczać przez v_j, gdyż $v_j = g_{ja}v^a$. Współrzędne lokalne formy fundamentalnej rozmaitości M oznaczamy przez F_{ji}, wtedy $F_{ji} = F_j{}^ag_{ai} (= -F_{ij})$.

Zakładamy, że M jest rozmaitością niemal Sasakiego, tzn.

(1.4) $$\nabla_kF_j{}^i + \nabla_jF_k{}^i = -2g_{kj}v^i + \delta_k{}^iv_j + \delta_j{}^iv_k \ .$$

Jak wiemy, pole wektorowe v jest polem Killinga, tym samym

(1.5) $$\nabla_jv_i + \nabla_iv_j = 0 \ .$$

W Rozdziale wstępnym określiliśmy na M pola tensorowe $\tilde{H}$ i H typów, odpowiednio, $(0,2)$ i $(1,1)$. Współrzędne lokalne pola $\tilde{H}$ oznaczmy przez H_{ji} a pola H przez $H_j{}^i$. Wówczas, zgodnie z określeniem, mamy $H_{ji} = H_j{}^a g_{ai}$ $(= - H_{ij})$ oraz

(1.6) $$\nabla_j v_i = F_{ji} + H_{ji} .$$

Twierdzenie 1.1. Rozmaitość niemal Sasakiego M jest Sasakiego wtedy i tylko wtedy, gdy spełnia warunek $H_{ji} = 0$.

Dowód. Jeśli M jest rozmaitością Sasakiego, to $\nabla_j v_i = F_{ji}$ (np. Blair [1], str. 74), tzn. $H_{ji} = 0$. Jeśli rozmaitość niemal Sasakiego M ma własność $\nabla_j v_i = F_{ji}$, to na podstawie Twierdzenia 3.2 [2] M jest Sasakiego.

Określmy $H^{ji} = g^{ja}H_a{}^i$, $F^{ji} = g^{ja}F_a{}^i$, $H^j{}_i = H^{ja}g_{ai}$ oraz $H_{jk}^{il} = H_j{}^i H_k{}^l$, $F_{jk}^{il} = F_j{}^i F_k{}^l$, $H_{kji}^{cba} = H_k{}^c H_{ji}^{ba}$, itd.

§ 2 . Rezultaty pomocnicze .

Lemat 2.1. Konsekwencjami przyjętych założeń o M są

(2.1) $$(\nabla_j F_{ia}) v^a = - g_{ji} + v_j v_i - H_{ja} F_i{}^a ,$$

(2.2) $$H_{ja} F_i{}^a + H_{ia} F_j{}^a = 0 ,$$

(2.3) $$H_a{}^i v^a = 0 ,$$

(2.4) $$H_{ba} F_{ji}^{ba} = - H_{ji} .$$

Dowód. Różniczkując (1.3) i korzystając z (1.6) i (1.1), otrzymujemy (2.1). Biorąc pod uwagę (2.1) i (1.4) znajdujemy (2.2). Równość (2.3) jest bezpośrednią konsekwencją równości (1.3), (1.1) i (1.6). (2.4) wynika z (2.2), (2.3) i (1.1), co kończy dowód.

Lemat 2.2. Tensor krzywizny rozmaitości M spełnia związki

$$(2.5) \qquad R_{akji}F_l{}^a + R_{laji}F_k{}^a + R_{lkai}F_j{}^a + R_{lkja}F_i{}^a = 0 ,$$

$$(2.6) \qquad R_{dcba}F^{dcba}_{lkji} = R_{lkji} - R_{akji}v^a v_l + R_{alji}v^a v_k ,$$

$$(2.7) \qquad R_{lkba}F^{ba}_{ji} = R_{baji}F^{ba}_{lk} .$$

Dowód. Różniczkując kowariantnie (1.4) i stosując identyczność Ricciego otrzymujemy, po skorzystaniu z (1.5)

$$R_{lkja}F_i{}^a - R_{lkia}F_j{}^a + \nabla_l\nabla_j F_{ki} - \nabla_k\nabla_j F_{li} =$$

$$= -2\, g_{kj}\, \nabla_l v_i + 2\, g_{lj}\, \nabla_k v_i + g_{ki}\, \nabla_l v_j - g_{li}\, \nabla_k v_j + 2\, g_{ji}\, \nabla_l v_k .$$

Stosując ponownie identyczność Ricciego, identyczność Bianchiego oraz wzory (1.4) i (1.5), otrzymamy

$$(2.8) \qquad 2\, R_{ljka}F_i{}^a - R_{lkia}F_j{}^a - R_{kjia}F_l{}^a - R_{ljia}F_k{}^a +$$

$$+ 2\, g_{kj}\, \nabla_l v_i - 2\, g_{kl}\, \nabla_j v_i - 2\, g_{lj}\, \nabla_k v_i - 2\, g_{ki}\, \nabla_l v_j +$$

$$+ 2\, g_{ji}\, \nabla_k v_l = 2\, \nabla_k \nabla_j F_{li} ,$$

co wobec (1.4) daje

$$2\, R_{ljka}F_i{}^a - R_{lkia}F_j{}^a - R_{kjia}F_l{}^a - R_{ljia}F_k{}^a +$$

$$+ 2\, g_{kj}\, \nabla_l v_i - 2\, g_{kl}\, \nabla_j v_i - 2\, g_{ki}\, \nabla_l v_j + 2\, g_{li}\, \nabla_k v_j -$$

$$- 2\, g_{ji}\, \nabla_k v_l - 2\, \nabla_k \nabla_i F_{jl} = 0 .$$

Ostatnia równość, po użyciu tożsamości Ricciego i Bianchiego oraz wzoru (1.5) da nam (2.5).

Nasuwamy $F_h{}^l$ na (2.5) korzystając przy tym z (1.1). Następnie, w tak otrzymanej równości dokonujemy antysymetryzacji względem indeksów h oraz k , i wówczas otrzymujemy

$$2\,R_{baji}F^{ba}_{hk} - 2\,R_{hkji} + R_{akji}v^a\,v_h - R_{ahji}v^a\,v_k +$$

$$+ R_{bkai}F^{ba}_{hj} - R_{bhai}F^{ba}_{kj} + R_{bkja}F^{ba}_{hi} - R_{bhja}F^{ba}_{ki} = 0\,,$$

co na mocy (2.5) i (1.1) przyjmuje postać

$$(2.9)\qquad 2\,R_{baji}F^{ba}_{hk} - 2\,R_{hkba}F^{ba}_{ji} + R_{akji}v^a\,v_h -$$

$$- R_{ahji}v^a\,v_k - R_{aihk}v^a\,v_j + R_{ajhk}v^a\,v_i = 0\,.$$

We wzorze (2.9) zmieniamy parę indeksów h,k na parę d,c. Na tak otrzymaną równość nasuwamy F^{dc}_{hk} i otrzymujemy, po skorzystaniu z (1.1) i (1.3),

$$(2.10)\qquad 2\,R_{hkji} - 2\,R_{dcba}F^{dcba}_{hkji} - 2\,R_{akji}v^a\,v_h +$$

$$+ 2\,R_{ahji}v^a\,v_k - R_{aidc}v^aF^{dc}_{hk}\,v_j + R_{ajdc}v^aF^{dc}_{hk}\,v_i = 0\,.$$

Nasuwając v^i na (2.10) i biorąc pod uwagę (1.3), dostaniemy

$$R_{ajdc}v^aF^{dc}_{hk} - 2\,R_{ajhk}v^a - 2\,R_{akjb}v^av^b\,v_h + 2\,R_{ahjb}v^av^b\,v_k = 0\,.$$

Nasuwając F^{hk}_{lm} na ostatnią równość i korzystając z (1.1) i (1.3) wyznaczamy

$$R_{ajlm}v^a - 2\,R_{ajdc}v^aF^{dc}_{lm} - R_{ajlb}v^av^b\,v_m + R_{ajmb}v^av^b\,v_l = 0\,.$$

Porównując dwie ostatnie równości otrzymamy

$$R_{ajdc}v^aF^{dc}_{hk} = 0 \; . \tag{2.11}$$

W ten sposób, (2.6) wynika z (2.10) i (2.11).

Zauważmy, że (2.6) implikuje równość

$$R_{akji}v^a\, v_l - R_{alji}v^a\, v_k - R_{ailk}v^a\, v_j + R_{ajlk}v^a\, v_i = 0,$$

która użyta w (2.9) da nam (2.7). To kończy dowód.

Lemat 2.3. M spełnia relacje

$$(\nabla_j H_{ia})\, v^a = -\, H_{ia}\left(F_j{}^a + H_j{}^a\right) , \tag{2.12}$$

$$R_{akji}v^a = -\, \nabla_k F_{ji} - \nabla_k H_{ji} = \tag{2.13}$$

$$= \left(g_{kj} + H_{ka}H_j{}^a\right) v_i - \left(g_{ki} + H_{ka}H_i{}^a\right) v_j \; ,$$

$$R_{ai}v^a = \left(2n + H_{ba}H^{ba}\right) v_i \; , \quad H_{ba}H^{ba} = \mathrm{const.}, \tag{2.14}$$

$$R_{ja}F_i{}^a + R_{ia}F_j{}^a = 0 \; , \tag{2.15}$$

$$R_{ba}F^{ba}_{ji} = R_{ji} - \left(2n + H_{ba}H^{ba}\right) v_jv_i \; . \tag{2.16}$$

Dowód. (2.12) otrzymamy przez zróżniczkowanie kowariantne (2.3) i zastosowanie (1.6). Równość $R_{akji}v^a = -\, \nabla_k F_{ji} - \nabla_k H_{ji}$ jest konsekwencją (1.5) i (1.6), po zastosowaniu dobrze już znanej argumentacji (patrz np. Yano i Bochner [43]). Z przytoczonej równości i (2.11) wynika $(\nabla_k F_{rs} + \nabla_k H_{rs})\, F^{rs}_{ba} = 0$. Po nasunięciu na tę równość F^{ba}_{ji} i wzięciu pod uwagę związków (1.1), (1.3), (2.1)-(2.3) i (2.12) otrzymuje się (2.13). Pierwsza część wzoru (2.14) jest prostą konsekwencją (2.13). Mając (2.13), (1.3), (2.3) i $F_{ba}F^{ba} = 2n$, co wynika z (1.2), znajdujemy $(\nabla_k F_{ba} + \nabla_k H_{ba})H^{ba} = 0$ oraz $(\nabla_k H_{ba})F^{ba} = 0$. Ponadto z (2.2) wyznaczamy $(\nabla_k H_{ba})F^{ba} + (\nabla_k F_{ba})H^{ba} = 0$. Wobec tego musi być $(\nabla_k H_{ba})H^{ba} = 0$, tzn. prawdziwa jest druga część wzoru (2.14). (2.15) otrzymuje się z (2.5) przez kontrakcję. Aby otrzymać (2.16), nasuwamy $F_k{}^j$ na (2.15) i wykorzystujemy (2.14). To kończy dowód lematu.

Lemat 2.4. Rozmaitość M spełnia relacje

(2.17) $$(\nabla_k F_{ai})F_j{}^a = (\nabla_k F_{ja})F_i{}^a + (F_{kj} + H_{kj})v_i + (F_{ki} + H_{ki})v_j \,,$$

(2.18) $$(\nabla_a F_{ji})F_k{}^a = (\nabla_k F_{ja})F_i{}^a - (F_{kj} - H_{kj})v_i + 2\, F_{ki}v_j - H_{ji}v_k$$

(2.19) $$(\nabla_b F_{ai})F_{kj}^{ba} = -\nabla_k F_{ji} - 2\, g_{kj}v_i + g_{ki}v_j + v_k v_j v_i - - F_{ka}H_i{}^a v_j + F_{ja}H_i{}^a v_k \,.$$

Dowód. (2.17) otrzymamy różniczkując kowariantnie (1.2) i stosując (1.6). (2.18) wynika z (2.17) na mocy (1.3) i (1.4). Aby otrzymać (2.19), nasuwamy $F_l{}^j$ na (2.18) i korzystamy ze związków (1.3), (2.1), (2.2) i (2.17). To kończy dowód.

Lemat 2.5. Tensor krzywizny rozmaitości M spełnia związek

(2.20) $$R_{baji}F_{lk}^{ba} - R_{lkji} = (\nabla_l F_{ka})(\nabla_j F_i{}^a) + (\nabla_l F_{jk})\, v_i + + (\nabla_j F_{li})\, v_k - g_{li}g_{kj} + g_{lj}g_{ki} - g_{lk}g_{ji} + F_{li}F_{kj} - F_{lj}F_{ki} + + H_{lk}H_{ji} + g_{lj}v_k v_i - g_{lk}H_{ja}F_i{}^a - g_{ji}H_{la}F_k{}^a \,.$$

Dowód. Różniczkując kowariantnie (2.17) i stosując wzory (2.8), (1.6), (2.13), (1.1), (2.2) i (2.7) otrzymamy

$$(2.21)\quad (\nabla_k F_{ia})(\nabla_l F_j{}^a) + (\nabla_k F_{ja})(\nabla_l F_i{}^a) + R_{kilj} + R_{kjli} - R_{liba}F^{ba}_{kj} - R_{kiba}F^{ba}_{lj} + 2\,g_{lk}g_{ji} - 2\,g_{ki}g_{lj} - 2\,g_{li}g_{kj} - F_{ki}F_{lj} - F_{li}F_{kj} + H_{ki}H_{lj} + H_{li}H_{kj} - 2\,g_{lk}v_jv_i + g_{ki}v_lv_j + g_{li}v_kv_j + g_{lj}v_kv_i + g_{kj}v_lv_i - g_{ki}H_{la}F_j{}^a - g_{li}H_{ka}F_j{}^a - g_{kj}H_{la}F_i{}^a - g_{lj}H_{ka}F_i{}^a = 0 .$$

W (2.21) zastępujemy indeksy i,l przez indeksy, odpowiednio, r,s. Na tak otrzymaną równość nasuwamy F^{rs}_{il} . Wtedy, przy pomocy wzorów (1.1) - (1.3), (2.1) - (2.7), (2.17) - (2.19), otrzymujemy

$$(2.21)'\quad (\nabla_k F_{ia})(\nabla_l F_j{}^a) - (\nabla_k F_{ja})(\nabla_l F_i{}^a) + 2\,(\nabla_k F_{li})\,v_j + 2\,(\nabla_l F_{kj})\,v_i - (\nabla_k F_{is})F_a{}^s H_j{}^a\,v_l + (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_i{}^a\,v_l + (\nabla_l F_{js})F_a{}^s H_k{}^a\,v_i - (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_l{}^a\,v_i + R_{kilj} - R_{kiba}F^{ba}_{lj} + R_{liba}F^{ba}_{kj} - R_{likj} + 4\,g_{kl}v_jv_i - g_{ki}v_lv_j - g_{li}v_kv_j - g_{kj}v_lv_i - g_{lj}v_kv_i + F_{ki}F_{lj} - F_{li}F_{kj} - 2\,F_{lk}F_{ji} + H_{ki}H_{lj} - H_{li}H_{kj} - g_{ki}H_{la}F_j{}^a + g_{li}H_{ka}F_j{}^a + g_{kj}H_{la}F_i{}^a - g_{lj}H_{ka}F_i{}^a + H_{ka}H_i{}^a v_lv_j - 2\,H_{ka}H_j{}^a v_lv_i + H_{la}H_j{}^a v_kv_i + 2\,H_{ka}F_l{}^a v_jv_i - H_{ka}F_i{}^a v_lv_j + H_{ka}F_j{}^a v_lv_i = 0 .$$

Równości (2.21) i (2.21)' dają

$$(2.22)\qquad 2(\nabla_k F_{ia})(\nabla_l F_j{}^a) + 2(\nabla_k F_{li})\, v_j + 2(\nabla_l F_{kj})\, v_i -$$
$$- (\nabla_k F_{is})F_a{}^s H_j{}^a\, v_l + (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_i{}^a\, v_l + (\nabla_l F_{js})F_a{}^s H_k{}^a\, v_i -$$
$$- (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_l{}^a\, v_i + 2\, R_{kilj} - 2\, R_{kiba}F_{lj}^{ba} + 2\, g_{lk}g_{ji} -$$
$$- 2\, g_{ki}g_{lj} - 2\, g_{li}g_{kj} - 2\, F_{lk}F_{ji} - 2\, F_{li}F_{kj} + 2\, H_{ki}H_{lj} +$$
$$+ 2\, g_{lk}v_j v_i - 2\, g_{ki}H_{la}F_j{}^a - 2\, g_{lj}H_{ka}F_i{}^a + H_{ka}H_i{}^a v_l v_j -$$
$$- 2\, H_{ka}H_j{}^a v_l v_i + H_{la}H_j{}^a v_k v_i + 2\, H_{ka}F_l{}^a v_j v_i -$$
$$- H_{ka}F_i{}^a v_l v_j + H_{ka}F_j{}^a v_l v_i = 0\,.$$

Zamieniając w (2.22) parami indeksy k,i z indeksami l,j, otrzymujemy po skorzystaniu z (2.2) i (2.7)

$$(\nabla_l F_{is})F_a{}^s H_k{}^a\, v_j - (\nabla_l F_{is})F_a{}^s H_j{}^a\, v_k + (\nabla_l F_{js})F_a{}^s H_k{}^a\, v_i +$$
$$+ (\nabla_l F_{js})F_a{}^s H_i{}^a\, v_k - (\nabla_k F_{is})F_a{}^s H_l{}^a\, v_j - (\nabla_k F_{is})F_a{}^s H_j{}^a\, v_l -$$
$$- (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_l{}^a\, v_i + (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_i{}^a\, v_l + 2\, H_{la}H_i{}^a\, v_k v_j -$$
$$- 2\, H_{ka}H_j{}^a\, v_l v_i - 4\, H_{la}F_k{}^a\, v_j v_i - H_{la}F_i{}^a\, v_k v_j +$$
$$+ H_{la}F_j{}^a\, v_k v_i - H_{ka}F_i{}^a\, v_l v_j + H_{ka}F_j{}^a\, v_l v_i = 0\,.$$

Na ostatnią równość nasuwamy v^l. Po skorzystaniu z (1.1), (1.3), (2.3) oraz $(\nabla_a F_{ji})v^a = - H_{ja}F_i{}^a$, co łatwo wynika z (2.1) i (1.4), otrzymujemy

$$(2.23)\qquad (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_i{}^a - (\nabla_k F_{is})F_a{}^s H_j{}^a =$$
$$= H_{ka}H_j{}^a\, v_i - H_{ka}H_i{}^a\, v_j - H_{ka}F_j{}^a\, v_i + H_{ka}F_i{}^a\, v_j\,.$$

Dokonując symetryzacji relacji (2.23) względem indeksów k,j oraz korzystając z (1.3), (1.4) i (2.2) wyznaczymy

$$(\nabla_i F_{ks})F_a{}^s H_j{}^a + (\nabla_i F_{js})F_a{}^s H_k{}^a = - H_{ia}H_k{}^a v_j -$$

$$- H_{ia}H_j{}^a v_k + 2 H_{ka}H_j{}^a v_i + H_{ia}F_k{}^a v_j + H_{ia}F_j{}^a v_k ,$$

co razem z (2.23) daje

$$(2.24) \quad (\nabla_k F_{js})F_a{}^s H_i{}^a = - H_{ka}H_i{}^a v_j + H_{ja}H_i{}^a v_k + H_{ka}H_i{}^a v_j .$$

Jeśli skorzystać z (2.24) i (2.2), to (2.20) okaże się konsekwencją wzoru (2.22). To kończy dowód Lematu 2.5.

Lemat 2.6. M spełnia relacje

$$(2.25) \quad (\nabla_k F_{ja})H_i{}^a = H_{ka}^{as} F_{is} v_j - H_{ja}^{as} F_{is} v_k - H_{ki} v_j ,$$

$$(2.26) \quad (\nabla_k H_{ja})H_i{}^a = - H_{ka}^{as}(F_{is}+ H_{is})v_j + H_{ja}^{as} F_{is} v_k ,$$

$$(2.27) \quad \nabla_k(H_{ja}H_i{}^a) = - H_{ka}^{as}(F_{is}+ H_{is})v_j - H_{ka}^{as}(F_{js}+ H_{js})v_i .$$

Dowód. (2.25) wynika z (2.24), po nasunięciu $F_l{}^i$ i wykorzystaniu (1.1), (2.3) i (2.4). Równość (2.25) razem z (2.13) i (2.3) daje (2.26). Natomiast (2.27) łatwo wyniknie z (2.26), jeśli skorzystamy przy tym z (2.2). W ten sposób dowód jest zakończony.

Lemat 2.7. Tensor krzywizny rozmaitości M spełnia związki

$$(2.28) \quad v^a \nabla_a R_{lkji} = 0 ,$$

$$(2.29) \quad R_{akji}H_l{}^a + R_{laji}H_k{}^a + R_{lkai}H_j{}^a + R_{lkja}H_i{}^a = 0 .$$

Dowód. Różniczkując kowariantnie równość (2.13), po skorzystaniu z (2.27) i (1.6), otrzymamy

$$\nabla_l \nabla_k (F_{ji} + H_{ji}) = H^{as}_{la}(F_{js} + H_{js}) v_k v_i - H^{as}_{la}(F_{is} + H_{is}) v_k v_j +$$
$$+ (g_{ki} + H_{ka} H_i{}^a)(F_{lj} + H_{lj}) - (g_{kj} + H_{ka} H_j{}^a)(F_{li} + H_{li}) .$$

Z ostatniej równości i identyczności Ricciego wynika .

$$R_{lkja}(F_i{}^a + H_i{}^a) + R_{lkai}(F_j{}^a + H_j{}^a) = H^{as}_{la}(F_{js} + H_{js}) v_k v_i -$$
$$- H^{as}_{la}(F_{is} + H_{is}) v_k v_j - H^{as}_{ka}(F_{js} + H_{js}) v_l v_i + H^{as}_{ka}(F_{is} + H_{is}) v_l v_j +$$
$$+ (g_{ki} + H_{ka} H_i{}^a)(F_{lj} + H_{lj}) - (g_{kj} + H_{ka} H_j{}^a)(F_{li} + H_{li}) -$$
$$- (g_{li} + H_{la} H_i{}^a)(F_{kj} + H_{kj}) + (g_{lj} + H_{la} H_j{}^a)(F_{ki} + H_{ki}) .$$

Z powyższego związku, (2.5) i (2.2) otrzymuje się (2.29).

Z drugiej strony, po zróżniczkowaniu relacji (2.13) i skorzystaniu z (1.6) otrzymujemy

$$(2.30) \qquad (\nabla_l R_{akji}) v^a = - R_{akji}(F_l{}^a + H_l{}^a) - \nabla_l \nabla_k (F_{ji} + H_{ji}) .$$

Mając drugą identyczność Bianchiego znajdujemy

$$v^a \nabla_a R_{lkji} = (\nabla_l R_{akji}) v^a - (\nabla_k R_{alji}) v^a ,$$

co, po użyciu (2.30), identyczności Ricciego, (2.29) i (2.5), daje (2.28). To kończy dowód.

§ 3 . Rozmaitości niemal Sasakiego trój- i pięciowymiarowe.

Twierdzenie 3.1. Każda 3-wymiarowa rozmaitość niemal Sasakiego jest rozmaitością Sasakiego.

Dowód. Niech p będzie dowolnym punktem rozmaitości niemal Sasakiego M, dim M = 3. W przestrzeni stycznej M_p wybierzmy bazę ortonormalną $\{e_0 = v,\ e_1,\ e_2 = Fe_1\}$ (Blair [1], str. 22). Wówczas, korzystając ze wzorów (2.2), (2.3) i antysymetrii pola tensorowego $\tilde{H}$, sprawdzamy, że $\tilde{H}(e_i, e_j) = 0$ dla $0 \leqslant i,j \leqslant 2$. W ten sposób, wobec Twierdzenia 1.1, dowód jest zakończony.

Twierdzenie 3.2. Niech M będzie rozmaitością istotnie niemal Sasakiego. Następujące trzy warunki są sobie równoważne:

(3.1) $\dim M = 5$,

(3.2) $H_{ja}H_i{}^a = \lambda(g_{ji} - v_j v_i)$, gdzie $\lambda = \frac{1}{\dim M - 1} H_{ba}H^{ba} = \text{const.} > 0$

(3.3) $\nabla_k F_{ji} = - g_{kj}v_i + g_{ki}v_j - v_k H_{ja}F_i{}^a - v_j H_{ia}F_k{}^a - v_i H_{ka}F_j{}^a$

oraz $H_{ji} \neq 0$.

Dowód. Implikacja (3.1)$\Longrightarrow$(3.3). Niech $p \in M$ będzie dowolnym punktem. W przestrzeni M_p wybierzmy bazę ortonormalną $\{e_0, e_1, e_2, e_3, e_4\}$ taką, że $e_0 = v$, $e_3 = Fe_1$ oraz $e_4 = Fe_2$ (Blair [1], str. 22). Wówczas $Fe_3 = -e_1$, $Fe_4 = -e_2$ oraz $Fe_0 = 0$, o czym łatwo przekonać się mając (1.1)-(1.3).

Ze związków (1.4), (2.1) i (2.2) wynika

$$(3.4)\quad \begin{cases} \nabla_{e_i}(F)\, e_i = -\, e_0 \,, & \nabla_{e_0}(F)\, e_0 = 0 \,, \\ \nabla_{e_i}(F)\, e_0 = e_i + (H\circ F)\, e_i \,, & \nabla_{e_0}(F)\, e_i = -\,(H\circ F)\, e_i \,, \end{cases}$$

dla $i = 1,2,3,4$.

Wykażemy, że

$$(3.5)\quad \begin{cases} (a) & g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, e_k) = 0 \,, \\ (b) & g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, e_0) = -\, \tilde{H}(Fe_i, e_j) \,, \end{cases}$$

dla $i,j,k = 1,2,3,4$ oraz $i \neq j$. Istotnie, rozważmy takie i,j. Jeśli $e_j \neq Fe_i$ oraz $e_i \neq Fe_j$, lub równoważnie $e_j \neq \pm Fe_i$, to $\{e_j, e_i, Fe_j, Fe_i\}$ jest bazą ortonormalną dopełnienia ortogonalnego wektora e_0 w przestrzeni M_p. Wówczas, z antysymetrii pola tensorowego $\tilde{F}$ oraz wzorów (1.4) i (2.17) otrzymujemy

$$g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, e_j) = g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, e_i) = g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, Fe_j) =$$

$$= g(\nabla_{e_i}(F)\, e_j, Fe_j) = 0 \,.$$

To dowodzi (3.5)(a) w przypadku $e_j \neq \pm Fe_i$. Zauważmy, że relacje (2.17) i (3.4) dają

$$g(\nabla_{e_i}(F)\, Fe_i, e_k) = g(\nabla_{e_i}(F)\, e_i, Fe_k) = 0$$

dla $k = 1,2,3,4$. Dlatego wzór (3.5)(a) w przypadku $e_j = \pm Fe_i$ także jest prawdziwy. (3.5)(b) wynika z (2.1) i (2.2).

Mając (3.4), (3.5), (2.2) i (2.3) sprawdzamy, że prawdziwa jest tożsamość

$$g(\nabla_x(F)y,z) = -g(x,y)g(z,e_0) + g(x,z)g(y,e_0) -$$

$$-g(x,e_0)\widetilde{H}(y,Fz) - g(y,e_0)\widetilde{H}(z,Fx) - g(z,e_0)\widetilde{H}(x,Fy) ,$$

dla dowolnych $x,y,z \in M_p$, tzn. prawdziwy jest wzór (3.3). Ponieważ M jest istotnie niemal Sasakiego, to $\widetilde{H} \neq 0$ (Twierdzenie 1.1).

Implikacja (3.3)$\Rightarrow$(3.2). Założenie (3.3) użyte w (2.13) daje

$$(3.6) \quad \nabla_k H_{ji} = -H_{ka}H_j{}^a v_i + H_{ka}H_i{}^a v_j +$$

$$+ v_k H_{ja}F_i{}^a + v_j H_{ia}F_k{}^a + v_i H_{ka}F_j{}^a .$$

Korzystając z (3.6), (3.3) i (2.2)-(2.4) znajdujemy

$$(3.7) \quad \nabla_k(H_{ja}F_i{}^a) = -v_k(H_{ji} - H_{ja}^{as}F_{is}) - v_j(H_{ik} - H_{ia}^{as}F_{ks}) -$$

$$- v_i(H_{kj} - H_{ka}^{as}F_{js}) .$$

Różniczkując kowariantnie (3.6) i wykorzystując relacje (1.6), (2.2), (2.27) i (3.7) otrzymujemy

$$\nabla_l\nabla_k H_{ji} = -H_{ka}H_j{}^a(F_{li} + H_{li}) + H_{ka}H_i{}^a(F_{lj} + H_{lj}) +$$

$$+ (F_{lk} + H_{lk})H_{ja}F_i{}^a - (F_{lj} + H_{lj})H_{ka}F_i{}^a + (F_{li} + H_{li})H_{ka}F_j{}^a -$$

$$- v_l\left[v_k(H_{ji} - H_{ja}^{as}F_{is}) + v_j(H_{ik} - H_{ia}^{as}F_{ks}) + v_i(H_{kj} - H_{ka}^{as}F_{js})\right] -$$

$$- v_k\left[v_j\, H_{la}^{as}(F_{is} + H_{is}) - v_i\, H_{la}^{as}(F_{js} + H_{js})\right],$$

co, na mocy identyczności Ricciego, da nam

$$(3.8)\qquad R_{lkai}H_j{}^a + R_{lkja}H_i{}^a =$$

$$= - H_{ka}H_j{}^a(F_{li}+ H_{li}) + H_{ka}H_i{}^a(F_{lj}+ H_{lj}) + H_{la}H_j{}^a(F_{ki}+ H_{ki}) -$$

$$- H_{la}H_i{}^a(F_{kj}+ H_{kj}) + 2(F_{lk}+ H_{lk})H_{ja}F_i{}^a - (F_{lj}+ H_{lj})H_{ka}F_i{}^a +$$

$$+ (F_{kj}+ H_{kj})H_{la}F_i{}^a + (F_{li}+ H_{li}) H_{ka}F_j{}^a - (F_{ki}+ H_{ki})H_{la}F_j{}^a +$$

$$+ v_l \left[v_j(H_{ki}+ H_{ka}^{as}H_{is}) - v_i(H_{kj}+ H_{ka}^{as}H_{js})\right]+$$

$$- v_k \left[v_j(H_{li}+ H_{la}^{as}H_{is}) - v_i(H_{lj}+ H_{la}^{as}H_{js})\right].$$

Równość (2.29), po zastosowaniu (3.8) i (2.2), pozwala nam wyznaczyć

$$(3.9)\qquad (F_{ji}+ H_{ji}) H_{la}F_k{}^a + (F_{lk}+ H_{lk})H_{ja}F_i{}^a - (F_{lj}+ H_{lj}) H_{ka}F_i{}^a +$$

$$+ (F_{kj}+ H_{kj}) H_{la}F_i{}^a + (F_{li}+ H_{li})H_{ka}F_j{}^a - (F_{ki}+ H_{ki}) H_{la}F_j{}^a = 0 .$$

Nasuwamy $F^{ji}F_s{}^k$ na (3.9), wykorzystujemy (2.2) i (2.3) i znajdujemy $(2n-4)H_{ls}= 0$. Stąd, wobec Twierdzenia 1.1, otrzymujemy $\dim M = 2n+1 = 5$. Z drugiej strony, nasuwając $H^{ji}H^l{}_bF^{kb}$ na (3.9) mamy

$$(H_{ba}H^{ba})^2 = 4\, H_{bs}H_a{}^sH^b{}_rH^{ar} ,$$

po skorzystaniu z (2.2) i (2.3). Tym samym spełniony jest warunek (3.2). $\lambda=\text{const.}>0$ wynika z (2.14) i $H_{ji}\neq 0$.

Implikacja (3.2)$\Rightarrow$(3.1). Mając (3.2) z równości (2.25) otrzymamy

$$(\nabla_k F_{ja}) H_b{}^a = \lambda(F_{kb}\, v_j - F_{jb}\, v_k) - H_{kb}\, v_j .$$

Nasuwamy $H_i{}^b$ na ostatnią równość, wykorzystujemy (3.2), (2.1), (2.2) i otrzymujemy tożsamość (3.3). Tożsamość ta, jak wiemy z dowodu poprzedniej implikacji, pociąga za sobą $\dim M = 5$. W ten sposób, dowód Twierdzenia 3.2 jest zakończony.

Twierdzenie 3.3. Każda 5-wymiarowa rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest rozmaitością Einsteina o krzywiźnie skalarnej $R > 20$.

Dowód. Dokonując kontrakcji (3.8) z g^{li} znajdujemy

$$(3.10) \qquad R_{ka}H_j{}^a + R_{bkja}H^{ba} = -3(\lambda+1)H_{kj} ,$$

po skorzystaniu z (3.2), (2.2) i (2.3). Z drugiej strony, nasuwając H^{lk} na (2.20) i biorąc pod uwagę (3.2), (3.3), (2.2) - (2.4) otrzymujemy

$$R_{baji}H^{ba} = -2(\lambda+1)H_{ji} ,$$

lub

$$R_{bjia}H^{ba} = (\lambda+1)H_{ji} ,$$

na mocy tożsamości Bianchiego. Podstawiając ostatnią równość do (3.10) znajdujemy

$$R_{ka}H_j{}^a = -4(\lambda+1)H_{kj} .$$

Stąd, po nasunięciu $H_l{}^j$ oraz wykorzystaniu (3.2) i (2.14), otrzymuje się $R_{kl} = 4(\lambda+1)g_{kl}$, tzn. M jest rozmaitością Einsteina. Ponieważ $R = 20(\lambda+1)$, to $R > 20$ wynika z $\lambda > 0$.

§ 4 . Rozmaitości niemal Sasakiego spełniające warunek $\nabla_m\nabla_l R_{kjih} - \nabla_l\nabla_m R_{kjih} = 0$.

<u>Twierdzenie 4.1</u>. Jeśli rozmaitość istotnie niemal Sasakiego M spełnia warunek

(4.1) $\nabla_m\nabla_l R_{kjih} - \nabla_l\nabla_m R_{kjih} = 0$,

to dim M = 5 i M jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

<u>Dowód</u>. Zastosowanie identyczności Ricciego do (4.1) daje

$$R_{mlk}{}^{s} R_{sjih} + R_{mlj}{}^{s} R_{ksih} + R_{mli}{}^{s} R_{kjsh} + R_{mlh}{}^{s} R_{kjis} = 0 ,$$

skąd, po nasunięciu $v^m v^k$ i zastosowaniu wzorów (2.13) i (2.3), otrzymujemy

(4.2) $R_{ljih} - H^{as}_{la} R_{sjih} = (g_{lh} + H_{la}H_h{}^a)(g_{ji} + H_{jb}H_i{}^b) -$
$- (g_{li} + H_{la}H_i{}^a)(g_{jh} + H_{jb}H_h{}^b) - (H_{la}H_i{}^a - H^{abs}_{lab}H_{is}) v_j v_h +$
$+ (H_{la}H_h{}^a - H^{abs}_{lab}H_{hs}) v_j v_i$.

Z drugiej strony, mając relacje (2.27), (2.13) oraz (1.1), (1.3), (1.6), (2.2) i (2.3), znajdujemy

$$\nabla_l\nabla_k(H_{ja}H_i{}^a) = 2(H_{la}H_k{}^a - H^{abs}_{lab}H_{ks}) v_j v_i -$$
$$- (H_{la}H_i{}^a - H^{abs}_{lab}H_{is}) v_k v_j - (H_{la}H_j{}^a - H^{abs}_{lab}H_{js}) v_k v_i -$$
$$- H^{as}_{ka}(F_{is} + H_{is})(F_{lj} + H_{lj}) - H^{as}_{ka}(F_{js} + H_{js})(F_{li} + H_{li}) .$$

Ostatnia równość, poprzez identyczność Ricciego, prowadzi do

(4.3) $H^{as}_{ja} R_{sikl} + H^{as}_{ia} R_{sjkl} = - (H_{la}H_i{}^a - H^{abs}_{lab}H_{is}) v_k v_j +$

$$+ (H_{ka}H_i{}^a - H^{abs}_{kab}H_{is})v_lv_j - (H_{la}H_j{}^a - H^{abs}_{lab}H_{js})v_kv_i +$$

$$+ (H_{ka}H_j{}^a - H^{abs}_{kab}H_{js})v_lv_i - H^{as}_{ka}(F_{is}+H_{is})(F_{lj}+H_{lj}) +$$

$$+ H^{as}_{la}(F_{is}+H_{is})(F_{kj}+H_{kj}) - H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js})(F_{li}+H_{li}) +$$

$$+ H^{as}_{la}(F_{js}+H_{js})(F_{ki}+H_{ki}) .$$

Konsekwencją relacji (4.2) i (4.3) jest

$$H^{as}_{la}(F_{is}+H_{is})(F_{kj}+H_{kj}) + H^{as}_{la}(F_{js}+H_{js})(F_{ki}+H_{ki}) -$$

$$- H^{as}_{ka}(F_{is}+H_{is})(F_{lj}+H_{lj}) - H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js})(F_{li}+H_{li}) = 0 ,$$

skąd, po nasunięciu $F^{kj}H^{li}$ i zastosowaniu (2.2), (2.3) i (1.1), otrzymuje się

$$H^{bcda}_{abcd} = \frac{1}{2n}(H_{ba}H^{ba})^2 . \tag{4.4}$$

Korzystając z (2.3) znajdujemy

$$\left[H_{ja}H_i{}^a - \lambda(g_{ji} - v_jv_i)\right]\left[H^j{}_bH^{ib} - \lambda(g^{ji} - v^jv^i)\right] =$$

$$= H^{bcda}_{abcd} - 2\lambda H_{ba}H^{ba} + 2n\lambda^2 ,$$

dla dowolnej λ. Prawa strona tej równości znika dla $\lambda = \frac{1}{2n}H_{ba}H^{ba}$, na podstawie (4.4). W ten sposób rozmaitość M spełnia relację (3.2), zatem na podstawie Twierdzenia 3.2 dim M = 5. Pozostała część tezy naszego twierdzenia wynika z (4.2), jeśli skorzystać z (3.2) i (2.13). To kończy dowód.

Każda rozmaitość lokalnie symetryczna spełnia warunek (4.1), zatem konsekwencją Twierdzenia 4.1 jest następujące twierdzenie:

Twierdzenie 4.2. Jeśli rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest lokalnie symetryczna, to jest 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

§ 5 . Rozmaitości niemal Sasakiego konforemnie płaskie.

Twierdzenie 5.1. Jeśli rozmaitość istotnie niemal Sasakiego M jest konforemnie płaska, to jest 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

Dowód. Założenie konforemnej płaskości implikuje

$$(5.1) \qquad \nabla_k R_{ji} - \nabla_j R_{ki} = \frac{1}{4n}\left(\nabla_k R\, g_{ji} - \nabla_j R\, g_{ki}\right) .$$

Zauważmy, że z (2.14) wynika $(\nabla_k R_{ab})v^a v^b = 0$, a z (2.28) $v^a \nabla_a R_{ji} = 0$ oraz $v^a \nabla_a R = 0$. Dlatego po nasunięciu $v^j v^i$ na (5.1) otrzymamy $\nabla_k R = 0$. Stąd (5.1) przyjmuje postać

$$(5.2) \qquad \nabla_k R_{ji} - \nabla_j R_{ki} = 0 .$$

Z założenia konforemnej płaskości mamy także

$$R_{ajib} = \frac{1}{2n-1}\left(R_{ab}\, g_{ji} - R_{ai}\, g_{jb} + R_{ji}\, g_{ab} - R_{jb}\, g_{ai}\right) - \frac{R}{2n(2n-1)}\left(g_{ab}\, g_{ji} - g_{ai}\, g_{jb}\right) ,$$

skąd, po nasunięciu $v^a v^b$ i skorzystaniu z (2.13) i (2.14), otrzymujemy

$$(5.3) \qquad R_{ji} = \left(\frac{R}{2n} - 1 - H_{ba}H^{ba}\right) g_{ji} + (2n-1)\, H_{ja}H_i{}^a + \left(2n+1 + 2\, H_{ba}H^{ba} - \frac{R}{2n}\right) v_j v_i .$$

Różniczkujemy (5.3) kowariantnie, korzystając z (1.6) i (2.27) wyznaczymy

$$\nabla_k R_{ji} = -(2n-1)\left[H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js})v_i + H^{as}_{ka}(F_{is}+H_{is})v_j\right] +$$

$$+ \left(2n+1 + 2H_{ba}H^{ba} - \frac{R}{2n}\right)\left[(F_{kj}+H_{kj})v_i + (F_{ki}+H_{ki})v_j\right].$$

Podstawiając ostatnią równość do (5.2) i korzystając z (2.2) otrzymamy

$$\left(2n+1 + 2H_{ba}H^{ba} - \frac{R}{2n}\right)\left[2(F_{kj}+H_{kj})v_i + (F_{ki}+H_{ki})v_j -\right.$$

$$\left.- (F_{ji}+H_{ji})v_k\right] - (2n-1)\left[2H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js})v_i +\right.$$

$$\left.+ H^{as}_{ka}(F_{is}+H_{is})v_j - H^{as}_{ja}(F_{is}+H_{is})v_k\right] = 0.$$

Na tę równość nasuwamy v^i i mając (1.3), (2.3) znajdujemy

$$(5.4)\quad \left(2n+1+2H_{ba}H^{ba} - \frac{R}{2n}\right)(F_{kj}+H_{kj}) = (2n-1)H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js}).$$

Nasuwając F^{kj} na (5.4) znajdujemy, wobec (1.1), (2.2), (2.3),

$$(5.5)\qquad R = (2n+1)(2n + H_{ba}H^{ba}).$$

Stąd relacja (5.4) przyjmuje postać

$$H^{as}_{ka}(F_{js}+H_{js}) = \frac{1}{2n}(F_{kj}+H_{kj})H_{ba}H^{ba}.$$

Nasuwając H^{kj} na ostatnią równość i korzystając z (2.2) wyznaczamy (4.4), a to jak wiemy implikuje (3.2). Na podstawie Twierdzenia 3.2 dim M = 5. Ponadto, jeśli podstawić (3.2) i (5.5) do (5.3), to okaże się, że M jest rozmaitością Einsteina, co zakończy dowód, gdyż każda konforemnie płaska rozmaitość Einsteina jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

§ 6 . Rozmaitości niemal Sasakiego o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej .

W tym paragrafie założymy, że w każdym punkcie p rozmaitości M krzywizna F-sekcyjna

$$K(X,FX) = - \frac{R_{skri} F_l{}^s X^l X^k F_j{}^r X^j X^i}{g_{db} F_l{}^d X^l F_j{}^b X^j g_{ki} X^k X^i}$$

nie zależy od wyboru niezerowego i ortogonalnego do v wektora $X \in M_p$. Przez $\bar{H}$ oznaczmy funkcję $M \ni p \longrightarrow K(X,FX)$, gdzie $0 \neq X \in M_p$ jest ortogonalny do v.

Jako konsekwencję założenia i (2.2) otrzymujemy

$$(6.1) \quad (R_{scra} F^{sr}_{db} + H g_{db} g_{ca}) F^{dcba}_{lkji} X^l X^k X^j X^i = 0$$

dla każdego wektora stycznego X, który nie jest liniowo zależny z v.

Przyjmijmy oznaczenie

$$A_{lkji} = (R_{scra} F^{sr}_{db} + \bar{H} g_{db} g_{ca}) F^{dcba}_{lkji} .$$

Korzystając z (1.2) otrzymujemy

$$(6.2) \quad A_{lkji} = R_{dcba} F^{dcba}_{skri} F^{sr}_{lj} + \bar{H} (g_{lj} - v_l v_j)(g_{ki} - v_k v_i) .$$

Mając (2.6) i (1.3) sprawdzamy, że

$$R_{dcba} F^{dcba}_{pqrs} F^{pqrs}_{lkji} = R_{dcba} F^{dcba}_{lkji} ,$$

skąd, po nasunięciu F^{ki}_{hm} i zastosowaniu (1.1) i (1.2), otrzymujemy

$$R_{dcba} F^{dcba}_{shrm} F^{sr}_{lj} = R_{dcba} F^{dcba}_{lsjr} F^{sr}_{hm} .$$

Dlatego $A_{lkji} = A_{klij}$. Ponadto, jak wskazuje na to (6.2), mamy $A_{lkji} = A_{jilk}$.

Korzystając z dwóch ostatnich relacji widzimy, że (6.1) jest równoważne z

$$A_{pkqi} + A_{pqik} + A_{pikq} + A_{pkiq} + A_{piqk} + A_{pqki} = 0.$$

Na tę równość nasuwamy F^{pq}_{lj} i uwzględniając (6.2), (1.1) - (1.3), (2.2), (2.3), (2.6), (2.7), (2.11), (2.13) znajdujemy

$$R_{lkji} + R_{lijk} - R_{labk} F^{ab}_{ji} - R_{labi} F^{ab}_{jk} - R_{liab} F^{ab}_{kj} -$$

$$- R_{lkab} F^{ab}_{ij} - (g_{lk} + H_{la}H_k{}^a) v_j v_i - (g_{li} + H_{la}H_i{}^a) v_k v_j +$$

$$+ 2(g_{ki} + H_{ka}H_i{}^a) v_l v_j + 2(g_{lj} + H_{la}H_j{}^a) v_k v_i - 2 v_l v_k v_j v_i +$$

$$+ 2\bar{H}(g_{lj} - v_l v_j)(g_{ki} - v_k v_i) + 2H(F_{lk}F_{ji} - F_{li}F_{kj}) = 0.$$

Dokonując antysymetryzacji ostatniej równości względem indeksów l,k, a następnie wykorzystując identyczność Bianchiego i wzory (2.5), (1.1), (2.13), wyznaczamy

$$R_{lkji} + 2 R_{lkba} F^{ba}_{ji} - R_{liba} F^{ba}_{kj} + R_{kiba} F^{ba}_{lj} -$$

$$- \bar{H} (g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki} + F_{li}F_{kj} - F_{lj}F_{ki} - 2 F_{lk}F_{ji}) +$$

$$+ (\bar{H}-1)(g_{li} v_k v_j - g_{lj} v_k v_i - g_{ki} v_l v_j + g_{kj} v_l v_i) -$$

$$- H_{la}H_i{}^a v_k v_j + H_{la}H_j{}^a v_k v_i + H_{ka}H_i{}^a v_l v_j - H_{ka}H_j{}^a v_l v_i = 0.$$

Po wyznaczeniu $R_{lkba} F^{ba}_{ji}$ z (2.20), podstawieniu do ostatniej równości i skorzystaniu z (1.4), otrzymamy

$$(6.3)\qquad 4\,R_{lkji} = (\nabla_l F_{ia})(\nabla_k F_j{}^a) - (\nabla_l F_{ja})(\nabla_k F_i{}^a) -$$
$$- 2\,(\nabla_l F_{ka})(\nabla_j F_i{}^a) + 2\,(\nabla_j F_{il})v_k - 2\,(\nabla_k F_{li})v_j + 2\,g_{lk}g_{ji} +$$
$$+ (\bar{H}+2)(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}) + (\bar{H}-1)(F_{li}F_{kj} - F_{lj}F_{ki} - 2\,F_{lk}F_{ji}) +$$
$$+ H_{li}H_{kj} - H_{lj}H_{ki} - 2\,H_{lk}H_{ji} - 4\,g_{lk}\,v_jv_i + 2\,g_{ki}\,v_lv_j -$$
$$- (\bar{H}-2)(g_{li}\,v_kv_j - g_{lj}\,v_kv_i - g_{ki}\,v_lv_j + g_{kj}\,v_lv_i) +$$
$$+ H_{la}H_i{}^a\,v_kv_j - H_{la}H_j{}^a\,v_kv_i - H_{ka}H_i{}^a\,v_lv_j + H_{ka}H_j{}^a\,v_lv_i +$$
$$+ 2\,g_{lk}\,H_{ja}F_i{}^a + 2\,g_{ji}\,H_{la}F_k{}^a - g_{li}\,H_{ka}F_j{}^a + g_{lj}\,H_{ka}F_i{}^a +$$
$$+ g_{ki}\,H_{la}F_j{}^a - g_{kj}\,H_{la}F_i{}^a.$$

Nasuwamy H^{si}_{hs} na (6.3) i uwzględniając relacje (2.25), (2.1) - (2.3), (1.1) otrzymujemy

$$4\,H^{as}_{ha}\,R_{sjkl} = - H_{la}H_h{}^a\left[(\bar{H}+3)\,g_{kj} - (\bar{H}-1)\,v_kv_j\right] +$$
$$+ H_{ka}H_h{}^a\left[(\bar{H}+3)\,g_{lj} - (\bar{H}-1)\,v_lv_j\right] + H^{abs}_{lab}F_{hs}\,H_{kr}F_j{}^r -$$
$$- H^{abs}_{kab}F_{hs}\,H_{lr}F_j{}^r - 2\,H^{abs}_{jab}F_{hs}\,H_{lr}F_k{}^r + 4\,H^{abs}_{lab}\,H_{hs}\,v_kv_j -$$
$$- 4\,H^{abs}_{kab}H_{hs}\,v_lv_j + (\bar{H}-1)(H^{as}_{ha}F_{ls}\,F_{kj} - H^{as}_{ha}F_{ks}\,F_{lj} -$$
$$- 2\,H^{as}_{ha}F_{js}\,F_{lk}) + H^{as}_{ha}H_{ls}\,H_{kj} - H^{as}_{ha}H_{ks}\,H_{lj} - 2\,H^{as}_{ha}H_{js}\,H_{lk},$$

co użyte w (4.3) daje, po skorzystaniu z (2.2),

$$(\bar{H}+3)\left[- H_{la}H_i{}^a(g_{kj} - v_kv_j) - H_{la}H_j{}^a(g_{ki} - v_kv_i) +\right.$$
$$\left.+ H_{ka}H_i{}^a(g_{lj} - v_lv_j) + H_{ka}H_j{}^a(g_{li} - v_lv_i)\right] +$$

$$+ H^{abs}_{lab}F_{is}\, H_{kr}F_j{}^r + H^{abs}_{lab}F_{js}\, H_{kr}F_i{}^r - H^{abs}_{kab}F_{is}\, H_{lr}F_j{}^r -$$

$$- H^{abs}_{kab}F_{js}\, H_{lr}F_i{}^r + (\bar{H}-1)(H^{as}_{ia}F_{ls}\, F_{kj} + H^{as}_{ja}F_{ls}\, F_{ki} -$$

$$- H^{as}_{ia}F_{ks}\, F_{lj} - H^{as}_{ja}F_{ks}\, F_{li}) + H^{as}_{ia}H_{ls}\, H_{kj} + H^{as}_{ja}\, H_{ls}\, H_{ki} -$$

$$- H^{as}_{ia}H_{ks}\, H_{lj} - H^{as}_{ja}H_{ks}\, H_{li} + H^{as}_{ka}(F_{is}+ H_{is})(F_{lj}+ H_{lj}) +$$

$$+ H^{as}_{ka}(F_{js}+ H_{js})(F_{li}+ H_{li}) - H^{as}_{la}(F_{is}+ H_{is})(F_{kj}+ H_{kj}) -$$

$$- H^{as}_{la}(F_{js}+ H_{js})(F_{ki}+ H_{ki}) = 0.$$

Jeśli na tę równość nasunąć $F^{kj}H^{li}$ i uwzględnić przy tym relacje (1.3), (2.2) i (2.3), to otrzymuje się warunek (4.4), który implikuje (3.2) w przypadku, gdy M jest rozmaitością istotnie niemal Sasakiego.

Dalej zakładamy, że M jest rozmaitością istotnie niemal Sasakiego. Wtedy, na podstawie Twierdzenia 3.2, dim M = 5. Ponadto relacje (3.2) i (3.4) razem z relacjami (1.1), (1.3), (2.3), (2.4), (3.1) i (3.2) redukują (6.3) do

$$(6.4) \qquad 4\, R_{lkji} = (\bar{H}+3)(g_{li}g_{kj} - g_{lj}g_{ki}) + (\bar{H}-1)(F_{li}F_{kj} -$$

$$- F_{lj}F_{ki} - 2\, F_{lk}F_{ji}) + H_{li}H_{kj} - H_{lj}H_{ki} - 2\, H_{lk}H_{ji} +$$

$$+ (4\lambda - \bar{H} + 1)(g_{li}\, v_k v_j - g_{lj}\, v_k v_i - g_{ki}\, v_l v_j + g_{kj}\, v_l v_i) +$$

$$+ H_{la}F_i{}^a\, H_{kb}F_j{}^b - H_{la}F_j{}^a\, H_{kb}F_i{}^b - 2\, H_{la}F_k{}^a\, H_{jb}F_i{}^b .$$

Podstawiając (6.4) do (2.29) i uwzględniając (3.1) i (2.2)-(2.4) otrzymujemy

$$(\lambda - \bar{H} + 1)(F_{li}\, H_{ka}F_j{}^a - F_{lj}\, H_{ka}F_i{}^a - F_{ki}\, H_{la}F_j{}^a +$$

$$+ F_{kj} H_{la}F_i{}^a - 2 H_{la}F_k{}^a F_{ji} - 2 F_{lk} H_{ja}F_i{}^a) = 0,$$

skąd po nasunięciu $F^{ji} H^l{}_b F^{kb}$ i skorzystaniu z relacji wymienionych wyżej i (1.2) dostajemy $\lambda(\lambda - \bar{H} + 1) = 0$. Tym samym

$$(6.5) \qquad \bar{H} = \lambda + 1 .$$

Kontrakcja (6.4) z $g^{li}g^{kj}$ oraz wykorzystanie związków (1.1), (2.4) i (3.2) da nam

$$(6.6) \qquad R = 6\bar{H} + 14\lambda + 14 .$$

Bierzemy pod uwagę związki (1.1), (1.2), (2.2)-(2.4), (2.14), (3.1), (3.2), (6.5), (6.6) i z (6.4) wyznaczamy $R_{lkji}R^{lkji} = \frac{R^2}{10}$, co oznacza, że rozmaitość M jest o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

W ten sposób mamy udowodnione następujące twierdzenie:

Twierdzenie 6.1. Jeśli rozmaitość istotnie niemal Sasakiego jest o stałej krzywiźnie F-sekcyjnej w każdym punkcie, to jest ona 5-wymiarowa i o stałej krzywiźnie sekcyjnej.

B I B L I O G R A F I A

[1] D.E. Blair, Contact manifolds in Riemannian geometry, Springer-Verlag (1976).

[2] D.E. Blair, D.K. Showers and K. Yano, Nearly Sasakian structures, Kōdai Math. Sem. Rep. 27 (1976), 175-180.

[3] W.M. Boothby and H.C. Wang, On contact manifolds, Ann. of Math. 68 (1958), 721-734.

[4] A. Borel and J.P. Serre, Detérmination des p-puissances réduites de Steenrod dans la cohomologie des groupes classiques, Applications, C. R. Acad. Sci. Paris 233 (1951), 680-682.

[5] E. Calabi, Construction and properties of some 6-dimensional almost complex manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 87 (1958), 407-438.

[6] S.S. Chern, Complex manifolds without potential theory, Van Nostrand (1967).

[7] P. Dombrowski, On the geometry of tangent bundles, J. Reine Angew. Math. 210 (1962), 73-88.

[8] S. Goldberg, Integrability of almost Kähler manifolds, Proc. Amer. Math. Soc. 21 (1969), 96-100.

[9] A. Gray, Curvature identities for Hermitian and almost Hermitian manifolds, Tôhoku Math. Journ. 28 (1976), 601-612.

[10] A. Gray, Nearly Kähler manifolds, J. of Diff. Geometry 4 (1970), 283-309.

[11] A. Gray, Riemannian manifolds with geodesic symmetries of order 3, J. of Diff. Geometry 7 (1972), 343-369.

[12] A. Gray, Some examples of almost Hermitian manifolds, Illinois J. of Math. 10 (1966), 353-366.

[13] A. Gray, The structure of nearly Kähler manifolds, Math. Ann. 223 (1976), 233-248.

[14] J.W. Gray, Some global properties of contact structures, Ann. of Math. 69 (1959), 421-450.

[15] K. Kenmotsu, Invariant submanifolds in a Sasakian manifold, Tôhoku Math. Journ. 21 (1969), 495-500.

[16] S. Kobayashi and K. Nomizu, Foundations of differential geometry II, Interscience Publ., J. Wiley, New York (1969).

[17] M. Kon, Invariant submanifolds in Sasakian manifolds, Math. Ann. 219 (1976), 277-290.

[18] S. Kotō, Some theorems on almost Kählerian spaces, J. of Math. Soc. of Japan 12 (1960), 422-433.

[19] M. Nagao and S. Kotō, Curvatures in almost Hermitian manifolds, Memoirs of the Faculty of Education Niigata University 15 (1973), 1-6.

[20] A. Newlander and L. Nirenberg, Complex analytic coordinates in almost complex manifolds, Ann. of Math. 65 (1957), 391-404.

[21] K. Ogiue, On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility, Kōdai Math. Sem. Rep. 16 (1964), 223-232.

[22] M. Okumura, Some remarks on spaces with a certain contact structure, Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), 135-145.

[23] Z. Olszak, Certain property of the Ricci tensor on Sasakian manifolds, Colloquium Mathematicum, w druku.

[24] Z. Olszak, Five-dimensional nearly Sasakian manifolds, Tensor N.S., w druku.

[25] Z. Olszak, Nearly Sasakian manifolds, Tensor N.S., w druku.

[26] Z. Olszak, Note on almost Kähler manifolds, Bulletin de l`Academie Polonaise des Sciences, w druku.

[27] P.J. Ryan, Homogeneity and some curvature conditions for hypersurfaces, Tôhoku Math. Journ. 21 (1969), 363-388.

[28] S. Sasaki, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structures I, Tôhoku Math. Journ. 12 (1960), 459-476.

[29] S. Sasaki, On the differential geometry of tangent bundles of Riemannian manifolds I, II, Tôhoku Math. Journ. 10 (1958), 338-354, 14 (1962), 146-155.

[30] S. Sasaki and Y. Hatakeyama, On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure II, Tôhoku Math.Journ. 13 (1961), 281-294.

[31] T. Sumitomo, On the commutator of differential operators, Hokkaido Math. Journ. 1 (1972), 30-42.

[32] S. Tachibana, Note on conformally flat almost Kählerian spaces, Natural Science Report of the Ochanomizu University 10 (1959), 41-43.

[33] S. Tachibana and M. Okumura, On the almost complex structure of tangent bundles of Riemannian spaces, Tôhoku Math. Journ. 14 (1962), 156-161.

[34] T. Takahashi, Sasakian ϕ-symmetric spaces, Tôhoku Math. Journ. 29 (1977), 91-113.

[35] T. Takahashi, Sasakian manifold with pseudo-Riemannian metric, Tôhoku Math. Journ. 21 (1969), 271-290.

[36] K. Takamatsu and Y. Watanabe, Classification of a conformally flat K-space, Tôhoku Math. Journ. 24 (1972), 435-440.

[37] S. Tanno and Y.-B. Baik, ϕ-holomorphic special bisectional curvature, Tôhoku Math. Journ. 22 (1970), 184-190.

[38] Y. Tashiro, On contact structures of hypersurfaces in almost complex manifolds I, II, Tôhoku Math. Journ. 15 (1963), 62-78, 167-175.

[39] Y. Watanabe and K. Takamatsu, On a K-space of constant holomorphic sectional curvature, Kōdai Math. Sem. Rep. 25 (1973), 297-306.

[40] B. Watson, Minimal submanifolds of almost semi-Kähler manifolds, Kōdai Math. Sem. Rep. 27 (1976), 449-457.

[41] K. Yano, Anti-invariant submanifolds of a Sasakian manifold with vanishing contact Bochner curvature tensor, w druku.

[42] K. Yano, Differential geometry on complex and almost complex spaces, Pergamon Press, Oxford (1965).

[43] K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti numbers, Princeton (1953).

[44] K. Yano and S. Ishihara, Tangent and cotangent bundles, Marcel Dekker, New York (1973).

SPIS TREŚCI

Lista odbiorców:

1. Biblioteka Gł.		1 egz.
2. Zleceniodawca		2 egz.
3. Autor		5 egz.
4. Biblioteka I-18		1 egz.
5. Redakcja I-18		1 egz.
	Razem	10 egz.

	* N *	N N P R T T A K	1 1 1 0
	0 9 7 6	0 6 7 8	I 1 8 0 1 0 1 3 0 1
Nr zlecenia 3/78	Nr archiwalny I18/K-179/78		

Symbol UKD

513.7

Geometria różniczkowa

78:Inst.Matem. PWr MNSzWT

pol.

Opis bibliograficzny

Olszak Zbigniew

Pewne własności rozmaitości prawie hermitowskich i prawie kontaktowych metrycznych.

Some properties almost hermitian and almost contact metric manifolds

Komunikaty Inst.Matem.PWr 1978 nr 179
63 s.bibliogr.44 poz./maszyn.powiel./
/praca doktorska/

Politechnika Wrocławska
Instytut Matematyki
Wrocław

Promotor doc.dr hab.Witold Roter

Zlec.FPB PWr nr 3/78 z dn.9.01.78

Charakter pracy: podstawowa

Materiały odpłatne A

Rozpowszechnienie na praw. ręk.

ZGPWr. Zam. 6555/77 — 10.000.

Analiza dokumentacyjna

(I)

W pracy udowodnione jest twierdzenie o nieistnieniu rozmaitości prawie kaehlerowskich, których krzywizna spełnia pewien warunek. Znaleziony jest warunek równoważny z eta-równoległością tensora Ricciego w rozmaitościach Sasakiego. Ponadto uzyskano wiele rezultatów charakteryzujących lokalną geometrię rozmaitości istotnie niemal Sasakiego.

In the present paper we show that there are no almost Kaehler manifolds with curvature satisfying some condition. We find a condition equivalent to eta-parallelity of the Ricci curvature tensor on Sasakian manifolds. Moreover we obtain many results characterizing the local geometry of nearly Sasakian manifolds.

Imię i nazwisko autora analizy

Zbigniew Olszak

Słowa kluczowe

(S

rozmaitość Riemanna, rozmaitość prawie kaehlerowska, rozmaitość Sasakiego, rozmaitość niemal Sasakiego

Riemannian manifold, almost Kaehler manifold, Sasakian manifold, nearly Sasakian manifold

**0480 * 00*

(A *B *C *D

(E *F *G *H

Wybór	UDR	ARG	Podpis red.	Podpis opiek.	Potwierdzenie przyjęcia poprawki.	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Dokumentacji.
NIE	TAK	TAK	[signature]	[signature]		
TAK lub NIE						