PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1105 2006
Zastosowanie statystyki w ekonomii

Piotr Peternek

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

METODY KONSTRUKCJI PLANÓW EKSPERYMENTÓW Z WYKORZYSTANIEM STANDARDOWYCH I ZMODYFIKOWANYCH TABLIC ORTOGONALNYCH TAGUCHIEGO

1. Wstęp

Wykorzystanie metod statystycznych do wspomagania procesów zarządzania jakością stało się – przynajmniej od czasu niewątpliwego sukcesu gospodarki japońskiej w latach siedemdziesiątych XX w. – naturalne i niezbędne. Wśród narzędzi statystycznych dużą rolę odgrywają metody planowania eksperymentów, a wśród nich, zaproponowane przez japońskiego inżyniera Genichi Taguchiego, metody planowania odpornego (*robust designing*).

W zastosowaniach praktycznych dobór odpowiedniego planu eksperymentu pozwala nie tylko na najlepszą – w sensie określonego kryterium – estymację efektów czynników (zob. np. [Wawrzynek 1977; 1993; Mańczak 1976]), lecz także na istotną redukcję liczby doświadczeń, a w kosekwencji na znaczną obniżkę kosztów realizacji eksperymentu. Teoria eksperymentowania wskazuje także na trzy pożądane właściwości planu eksperymentu, jakimi są (zob. [Logothesis, Wynn 1989]):

- zrównoważenie polegające na tym, że dany poziom każdego czynnika spotyka się taką samą liczbę razy z poszczególnymi poziomami pozostałych czynników;
- ortogonalność ułatwiająca obliczenia związane z estymacją, polegająca na zerowaniu się iloczynów skalarnych poszczególnych kontrastów;
- estymowalność pozwalająca na estymację wszystkich parametrów modelu.

Na skutek gwałtownego rozwoju metod eksperymentowania oraz numerycznych metod obliczeniowych przedstawione postulaty przestały już odgrywać zasadniczą rolę, aczkolwiek w dalszym ciągu są wysoce pożądanymi cechami planów. Zaproponowane przez Taguchiego tablice ortogonalne spełniają wszystkie trzy postulowane własności planów eksperymentu, jednak ich modyfikacja na potrzeby konkretnego niestandardowego eksperymentu może, oczywiście, spowodować utratę bądź ortogonalności, bądź też równowagi eksperymentu.

Pojęcie ortogonalności i tablic ortogonalnych zdefiniować można, wiążąc te pojęcia z tzw. kontrastem. Niech $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ będą zmiennymi obserwowalnymi i niech $L_i = c_{i1}Y_1 + c_{i2}Y_2 + ... + c_{in}Y_n$. Kontrast to dowolna liniowa kombinacja L_i zmiennych obserwowalnych spełniających warunek $\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = 0$.

Dwa kontrasty – L_1 oraz L_2 – są wzajemnie ortogonalne, jeżeli ich iloczyn skalarny jest równy 0, tzn. jeśli

$$c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} + ... + c_{1n}c_{2n} = 0.$$

Tablicą ortogonalną nazywamy macierz, dla której iloczyny skalarne dowolnych dwu kolumn są wzajemnie ortogonalne.

W praktyce zastosowanie metod Taguchiego polega na realizacji eksperymentu, którego plan odpowiada wybranej tablicy ortogonalnej. Tablice te są często zgodne ze znanymi planami Placketa-Burmana lub też z ułamkowymi planami czynnikowymi wysokiego rzędu. Taguchi zaproponował szereg takich tablic oraz skonstruował metody wspomagające wybór odpowiedniego planu eksperymentu. Ponieważ liczba wszystkich możliwych kombinacji poziomów rozważanych czynników jest ogromna, a przy tym nie sposób przewidzieć potrzeb eksperymentatora, standardowe tablice ortogonalne poddaje się odpowiednim modyfikacjom.

Celem tej pracy jest przedstawienie sposobu wyboru odpowiedniego planu eksperymentu z uwzględnieniem standardowych tablic ortogonalnych i ich modyfikacji.

2. Standardowe tablice ortogonalne

Tworzenie tablic ortogonalnych jest zagadnieniem złożonym ze względu na to, iż powszechnie nie jest znany nieskomplikowany algorytm generujący takie tablice, niezależnie od liczby czynników i ich poziomów. Podstawową metodą tworzenia tablic ortogonalnych jest wykorzystanie macierzy Hadamarda (zob. np. [Logothesis, Wynn 1989]). Inne metody konstrukcji szeroko omówiono w pracy [Hedayat, Sloane, Stufken 1999], a na korespondującej z książką stronie internetowej http://www.research.att.com/~njas/oadir/ odnaleźć można uaktualniany na bieżąco zbiór uzyskanych przez autorów tablic ortogonalnych (ponad 200) z liczbą doświadczeń z przedziału od 4 do 100. Oczywiście, przeprowadzenie tak dużej liczby doświadczeń może okazać się zbyt kosztowne, dlatego w zagadnieniach praktycznych szczególnym zainteresowaniem cieszą się tablice dla maksymalnie 60 doświadczeń.

Tablice ortogonalne zapisywane są za pomocą specjalnego kodu. Kod tablicy determinuje liczbę doświadczeń w eksperymencie oraz liczbę czynników z daną liczbą poziomów. Na przykład $L_9(3^4)$ oznacza tablicę składającą się z 9 wierszy (doświadczeń) oraz 4 kolumn (czynników) z czynnikami na 3 poziomach; tablica $L_{36}(2^{11}3^{12})$ określa natomiast plan eksperymentu o liczbie doświadczeń równej 36, w którym 11 estymowanych czynników to czynniki na 2 poziomach, a 12 czynników to czynniki na 3 poziomach. Kody wybranych standardowych tablic ortogonalnych zaproponowanych przez Taguchiego zebrano w tab. 1.

Tabela 1. Kody standardowych tablic ortogonalnych

Tablica ortogonalna	Liczba wierszy (stopni swobody)	Liczba kolumn (czynników)	Maksymalna liczba czynników dla danej liczby poziomów			
			2	3	4	5
$L_4(2^3)$	4	3	3			
$L_8(2^7)$	8	7	7			
$L_9(3^4)$	9	4		4		
$L_{12}(2^{11})$	12	11	11			
$L_{16}(2^{15})$	16	15	15			
$L_{16}(4^5)$	16	5			5	
$L_{18}(2^1 3^7)$	18	8	1	7		
$L_{25}(5^6)$	25	6				6
$L_{27}(3^{13})$	27	13		13		
$L_{32}(2^{31})$	32	31	31			
$L_{32}(2^1 4^9)$	32	10	1		9	
$L_{36}(2^{11}3^{12})$	36	23	11	12		
$L_{36}(2^3 3^{13})$	36	16	3	13		
$L_{50}(2^1 5^{11})$	50	12	1			11
$L_{54}(2^1 3^{25})$	54	26	1	25		
$L_{64}(2^{63})$	64	63	63			
$L_{64}(4^{21})$	64	21			21	
$L_{81}(3^{40})$	81	40		40		

Źródło: [Phadke 1989].

Należy zaznaczyć, że wybór odpowiedniej tablicy powinien być kompromisem pomiędzy liczbą doświadczeń, wynikającą z obliczonej liczby stopni swobody, oraz liczbą czynników na danym poziomie. Oczywiście, nic nie stoi na przeszkodzie, by liczba doświadczeń czy też szacowanych czynników była większa od wyznaczonych lub zadanych wcześniej wartości minimalnych. Wybór tablicy o zbyt dużej liczbie doświadczeń powoduje wprawdzie wzrost kosztów eksperymentu, lecz jednocześnie zwiększa dokładność analizy; natomiast zwiększenie liczby kolumn oznacza bądź to dołączenie dodatkowych czynników do eksperymentu (czynników, które w pierwszym etapie analizy zostały uznane za nieistotne), bądź też spowoduje niewykorzystanie co najmniej jednej z kolumn (nie wpływa to na własności tablicy).

3. Wybór minimalnej tablicy ortogonalnej

Problem ten dotyczy zagadnienia estymowalności planu eksperymentu, polegającego na wyznaczeniu minimalnej liczby doświadczeń w eksperymencie, która zapewni estymację wszystkich parametrów rozważanego modelu eksperymentalnego. Pierwszy etap wyboru odpowiedniej tablicy ortogonalnej polega na określeniu niezbędnej liczby stopni swobody potrzebnej do oszacowania efektów zadanej liczby czynników. Określona liczba stopni swobody determinuje, oczywiście, niezbędną liczbę doświadczeń w przeprowadzanym eksperymencie. Jak wiadomo, w celu obliczenia niezbędnej liczby doświadczeń potrzebnych do oszacowania efektów głównych i interakcji poszczególnych czynników należy zsumować stopnie swobody związane z odpowiednimi czynnikami oraz ich interakcjami. W związku z tym jeden stopień swobody związany jest ze średnią ogólną, dla każdego czynnika liczba stopni swobody jest o jeden mniejsza od liczby poziomów danego czynnika, natomiast liczba stopni swobody związana z interakcją jest iloczynem liczby stopni swobody czynników uwzględnionych w danej interakcji.

Przykład 1

Rozważa się eksperyment, w którym należy wyestymować jedynie efekty główne czterech wybranych czynników, przy czym każdy z nich jest na trzech poziomach. Obliczona liczba stopni swobody wynosi 9 (po 2 na 4 czynniki i 1 na średnią). W takim razie odpowiedni plan eksperymentu w celu oszacowania efektów głównych czterech czynników 3-poziomowych mógłby być identyczny z tablicą ortogonalną $L_9\left(3^4\right)$. Z tabeli 1 wynika, że tablica $L_9(3^4)$ istnieje.

Przykład 2

Celem eksperymentu ma być estymacja efektu głównego tylko jednego czynnika na 2 poziomach oraz efektów głównych pięciu czynników na 3 poziomach. Wówczas liczba stopni swobody wynosi 12. Zatem plan eksperymentu mógłby tu być skonstruowany zgodnie z tablicą ortogonalną $L_{12}(2^1 3^5)$. Niestety, tablica taka nie jest wymieniona w tab. 1. W takim razie należy zwiększyć liczbę doświadczeń w eksperymencie, czyli poszukiwać odpowiedniego planu w kolejnych wierszach tab. 1. Dopiero tablica $L_{18}(2^1 3^7)$ pozwala wyestymować założoną w modelu eksperymentalnym liczbę czynników głównych. Warto zauważyć, iż liczba kolumn w tej tablicy przewyższa liczbę szacowanych efektów, wobec czego dwie z siedmiu kolumn pozostaną puste bądź też pewne dodatkowe czynniki, pominięte we wstępnej fazie, zostaną dołączone do eksperymentu.

Przykład 3

Należy obliczyć minimalną liczbę doświadczeń w eksperymencie, w którym należy zbadać trzy czynniki – A, B, C – na 2 poziomach oraz jeden czynnik D na 3 poziomach, a ponadto wyznaczyć interakcję między czynnikiem A i D. Liczba stopni swobody w tym eksperymencie, a więc minimalna liczba doświadczeń niezbędna do analizy podanych czynników, wyznaczona jest w tab. 2. Z przedstawionych w niej obliczeń wynika, że niezbędna liczba doświadczeń jest co najmniej równa 8, tzn. tablica ortogonalna wybrana jako plan eksperymentu musi zawierać przynajmniej 8 wierszy odpowiadających kolejnym doświadczeniom.

Tabela 2. Minimalna liczba doświadczeń niezbędnych do oszacowania wybranego modelu

Czynnik	Stopnie swobody
A, B, C	3x1 = 3
D	2
AxD	1x2 = 2
Średnia ogólna	1
Razem	8

Źródło: opracowanie własne.

Nietrudno zauważyć (por. tab. 1), że wybór odpowiedniej tablicy ograniczony jest do tablic $L_{36}\left(2^{11}3^{12}\right)$ lub $L_{36}\left(2^{3}3^{13}\right)$. Możliwe jest wprawdzie wykonanie aż 36 doświadczeń, jednak wybór takiego planu jest nieefektywny i może diametralnie zwiększyć koszty przeprowadzanego eksperymentu. Dlatego Taguchi przedstawił sposoby modyfikacji tablic ortogonalnych za pomocą wielu technik prowadzących do zmniejszenia liczby doświadczeń. Techniki te zostaną przedstawione w punkcie 4 niniejszej pracy.

4. Zastosowanie grafów liniowych

Zaproponowane przez Taguchiego standardowe tablice ortogonalne są wykorzystywane jako plany eksperymentów ułamkowych i jako takie powodują uwikłanie wielu efektów interakcyjnych. Metody Taguchiego zorientowane są zatem na addytywne modele efektów głównych z pominięciem interakcji, mimo że w niektórych sytuacjach estymacja efektu współwystępowania jest bardzo ważna. Z tego praktycznie ważnego względu do tablic ortogonalnych dołączone zostają tzw. macierze interakcji oraz grafy liniowe. W tabeli 3 przedstawiono tablicę $L_8\left(2^7\right)$ z odpowiadającą jej macierzą interakcji. Łatwo zauważyć, iż np. kolumna 3 tablicy

$L_8(2^7)$ przyporządkowana czynnikowi x_3 jest iloczynem kolumny pierwszej i drugiej, a więc reprezentuje interakcję czynników x_1 i x_2, podobnie kolumna piąta jest iloczynem kolumny 1 i 4. W celu nieuwikłanej estymacji interakcji czynników x_1 i x_2 nie należy zatem kolumnie trzeciej przyporządkowywać czynnika x_3 ani żadnego z pozostałych czynników. Z kolei macierz interakcji pozwala zidentyfikować czynnik, którego efekt jest uwikłany z interakcją dwu innych czynników. Ponieważ dla m czynników można utworzyć $\binom{m}{2}$ interakcji dwuczynnikowych, stąd też macierz interakcji zawiera nad główną przekątną $\binom{m}{2}$ elementów.

Tabela 3. Tablica ortogonalna $L_8(2^7)$ wraz z odpowiadającą jej tablicą interakcji

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	-1	-1	-1	-1
3	1	-1	-1	1	1	-1	-1
4	1	-1	-1	-1	-1	1	1
5	-1	1	-1	1	-1	1	-1
6	-1	1	-1	-1	1	-1	1
7	-1	-1	1	1	-1	-1	1
8	-1	-1	1	-1	1	1	-1

Kolumny	1	2	3	4	5	6	7
1		3	2	5	4	7	6
2			1	6	7	4	5
3				7	6	5	4
4					1	2	3
5						3	2
6							1
7							

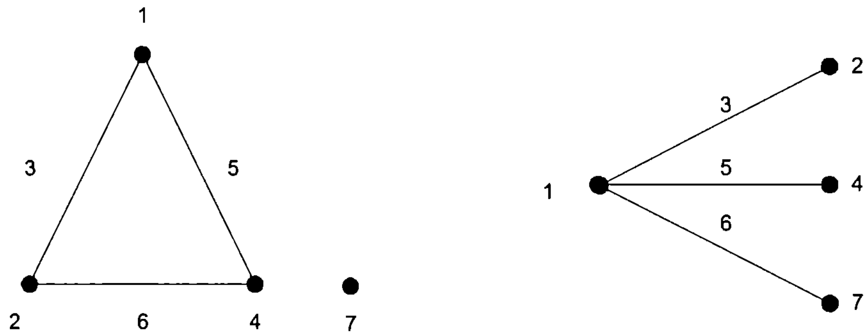
Źródło: [Phadke 1998].

Alternatywną metodą jest metoda wykorzystująca grafy liniowe. W grafach tych tablica reprezentowana jest przez kropki i linie. W przypadku, gdy dwie kropki są połączone przez linię oznacza to, że interakcja czynników reprezentowanych przez kropki zawarta jest w kolumnie prezentowanej przez linie. Każda kropka i każda linia są opatrzone numerem odpowiadającej im kolumny w standardowej tablicy ortogonalnej. Dla przedstawionej wyżej tablicy $L_8(2^7)$ Taguchi podał dwa alternatywne grafy, które zamieszczono na rys. 1. Jeśli tablica $L_8(2^7)$ ma być zastosowana jako plan eksperymentu dla estymacji parametrów modelu:

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_4 x_4 + \beta_7 x_7 + \beta_{21} x_1 x_2 + \beta_{14} x_1 x_4 + \beta_{24} x_2 x_4 ,$$

to z pierwszego grafu przedstawionego na rys. 1 wynika, że w tablicy $L_8(2^7)$ miejsce czynnika x_3, w trzeciej kolumnie tej macierzy zajmuje interakcja $x_1 x_2$, miejsce czynnika x_5 zajmuje interakcja $x_1 x_4$, natomiast w kolumnie 6 zamiast czynnika x_6 należy wstawić interakcje $x_2 x_4$. Drugi z grafów przedstawionych na rys. 1 ma analogiczne zastosowanie w przypadku, gdy model eksperymentalny przyjmuje postać:

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_4 x_4 + \beta_7 x_7 + \beta_{21} x_1 x_2 + \beta_{14} x_1 x_4 + \beta_{17} x_1 x_7.$$



Rys. 1. Dwa grafy liniowe dla tablicy ortogonalnej $L_8(2^3)$

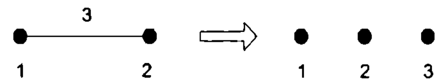
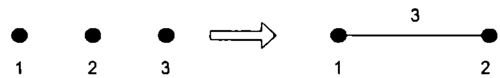
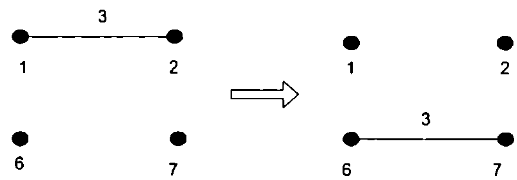
Źródło: [Phadke 1998].

O ile tablice interakcji pozwalają na przedstawienie uwikłań wszystkich interakcji pierwszego rzędu z efektami głównymi czynników przyporządkowanych poszczególnym kolumnom tablicy ortogonalnej, to grafy liniowe mają ułatwić eksperymentatorowi wybór optymalnego planu eksperymentu. Dodatkową zaletą grafów liniowych jest możliwość wykorzystania ich do modyfikacji i utworzenia niestandardowych tablic niezbędnych do dopasowania planu w celu przeprowadzenia specyficznego rodzaju eksperymentu. Wyróżnia się trzy sposoby modyfikacji grafów liniowych:

1. Usunięcie linii (*breaking a line*) – polegające na usunięciu linii łączącej dwa punkty i rezygnacji z estymacji interakcji odpowiadającej usuniętej linii.
2. Utworzenie linii (*forming a line*) – polegające na usunięciu jednej z kropek i wykorzystaniu jej do połączenia dwóch innych punktów w celu oszacowania odpowiadającej im interakcji. Oczywiście procedura ta musi uwzględnić konsekwencje wynikające z macierzy interakcji.
3. Przesunięcie linii (*moving a line*) – polegające na połączeniu dwóch poprzednich metod, tzn. w pierwszej fazie odbywa się usunięcie linii, w drugiej zaś połączenie dwóch odrębnych kropek z wykorzystaniem jednej z kropek uzyskanych w wyniku usunięcia linii

Procedura modyfikacji grafów jest stosowana zarówno dla czynników na dwóch, jak i na trzech poziomach, przy czym dla czynników na trzech poziomach łączenie odbywa się za pomocą przypisania do jednej linii dwóch kolumn (co jest związane z uzyskaniem odpowiedniej liczby stopni swobody). Schematycznie sposoby modyfikacji grafów liniowych dla czynników na dwóch poziomach przedstawiono w tab. 4.

Tabela 4. Techniki modyfikacji grafów liniowych

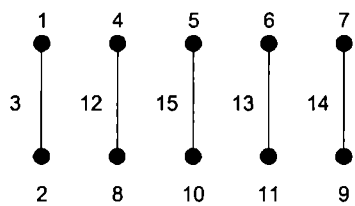
Sposób modyfikacji	Tablica ortogonalna z czynnikami na dwóch poziomach Czynniki na 2 poziomach znajdują się w kolumnach 1, 2, 3, 4, 7; w kolumnie 3 znajduje się interakcja kolumn 1 i 2 oraz 4 i 7
Usunięcie linii	
Utworzenie linii	
Przesunięcie linii	

Źródło: [Phadke 1989].

Przykład 4

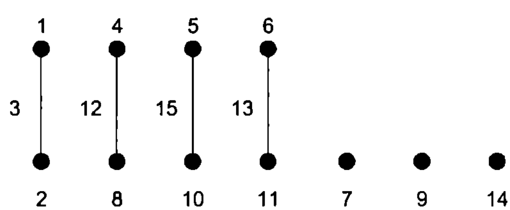
Modyfikacja grafu liniowego dla tablicy ortogonalnej $L_{16}\left(2^{15}\right)$

– standardowy graf liniowy $L_{16}\left(2^{15}\right)$ przedstawia się następująco:



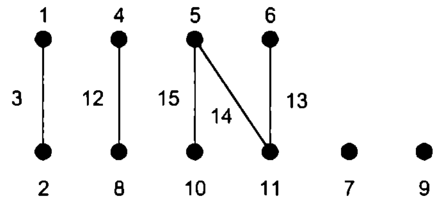
Z grafu wynika, że model eksperymentalny obejmuje dziesięć efektów głównych czynników przypisanych odpowiednio do kolumn 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 oraz pięć interakcji czynników z kolumn 1 i 2; 4 i 8; 5 i 10; 6 i 11 oraz 7 i 9;

– usunięcie linii między kropkami 7 i 9 prowadzi do grafu:



W stosunku do poprzedniego grafu zrezygnowano tu z estymacji interakcji między czynnikami umieszczonymi w kolumnie 7 i 9. W zamian można wprowadzić do modelu dodatkowy – jedenasty efekt główny czynnika przypisanego do kolumny 14;

– połączenie dwóch kropek 5 i 11 prowadzi do grafu:



Graf odpowiada modelowi eksperymentalny, w którym estymować można ponownie 10 efektów głównych i 5 interakcji. W stosunku do standardowego grafu liniowego rezygnuje się tu z oszacowania interakcji czynników przypisanych kolumnom 7 i 9 w zamian za estymację interakcji pomiędzy czynnikami umieszczonymi w kolumnie 5 i 11.

Można zauważyć, że zmiany dokonywane w grafie liniowym nie mają wpływu na wygląd tablicy ortogonalnej (nie zmieniają wartości jej elementów). Modyfikacja grafu to jedynie formalna zmiana grafu standardowego do potencjalnego modelu badawczego w celu opisania możliwości estymacji odpowiednich efektów głównych i wybranych interakcji.

5. Metody modyfikacji tablic ortogonalnych

W celu zredukowania liczby niezbędnych doświadczeń w eksperymencie należy czasem dokonać zmian w wartościach elementów tablicy ortogonalnej. Wśród technik modyfikujących wygląd tablicy ortogonalnej wyróżnić można:

- technikę sztucznego poziomu (*dummy-level technique*),
- metodę czynnika podwójnego (dualnego) (*compound factor method, combining technique*),
- metodę łączenia kolumn (*colum merging method, multi level formation*),
- metodę biernej kolumny (*idle-column technique*).

Zastosowanie wymienionych metod może prowadzić do uzyskania bądź tablicy ortogonalnej, bądź też tablicy nieortogonalnej.

Metoda sztucznego poziomu

Metoda ta pozwala na modyfikacje standardowej tablicy ortogonalnej w ten sposób, iż pozwala na zmianę czynnika n-poziomowego w czynnik m-poziomowy, przy czym $m < n$. Dokonuje się tego w ten sposób, że jeden poziom lub więcej poziomów wybranego czynnika zostaje zamienionych na pewien z pozostałych poziomów tegoż czynnika. Na przykład jeżeli dany jest 3-poziomowy czynnik A, którego poszczególne poziomy oznaczone są przez $A(-1)$, $A(0)$, $A(1)$, i należy rozważyć czynnik 2-poziomowy, miejsce jednego z poziomów $A(i)$ pierwotnego czynnika np. $A(1)$ zajmie jeden z pozostałych dwu poziomów $A(-1)$ lub $A(0)$. Oznacza to, że oszacowanie wartości zmiennej zależnej dla jednego z poziomów będzie miało dwukrotnie większą precyzję od oszacowania dla pozostałego poziomu. Dlatego jako poziom preferowany zwykło się wybierać ten, dla którego potrzebne jest dokładniejsze oszacowanie. Alternatywnym sposobem doboru preferowanego poziomu czynnika jest wybór poziomu bardziej ekonomicznego, tzn. takiego, przy którym koszty przeprowadzenia eksperymentu będą mniejsze. Oczywiście, takie modyfikacje tablicy ortogonalnej powodują utratę zrównoważenia planu eksperymentu oraz częściową utratę ortogonalności dotyczącej kolumny ze zmniejszoną liczba poziomów.

Przykład 5

Należy zaproponować plan eksperymentu w celu oszacowania trzech czynników 3-poziomowych (*B*, *C*, *D*) i jednego 2-poziomowego (*A*). W tym celu należy dokonać odpowiedniej modyfikacji tablicy ortogonalnej $L_9(3^4)$ znanej z tab. 1, a przedstawionej szczegółowo w tab. 5. W tablicy tej każdy z 4 czynników występujący na trzech poziomach oznaczono odpowiednio liczbami –1, 0 i 1. Liczbę poziomów czynnika *A* należy zmniejszyć do dwu, np. poprzez zastąpienie poziomu 0 przez poziom –1. Wówczas właściwy plan eksperymentu wynikający z modyfikacji tablicy $L_9(3^4)$ przedstawiono w tab. 6.

Tabela 5. Tablica ortogonalna $L_9(3^4)$

Numer dośw.	Czynniki			
	B	*C*	*D*	*A*
1	–1	–1	–1	–1 *A*(–1)
2	–1	0	0	0 *A*(0)
3	–1	1	1	1 *A*(1)
4	0	–1	0	1 *A*(1)
5	0	0	1	–1 *A*(–1)
6	0	1	–1	0 *A*(0)
7	1	–1	1	0 *A*(0)
8	1	0	–1	1 *A*(1)
9	1	1	0	–1 *A*(–1)

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 6. Tablica $L_9(3^4)$ po modyfikacji

Numer dośw.	Czynniki			
	B	*C*	*D*	*A*
1	–1	–1	–1	–1 *A*(–1)
2	–1	0	0	–1 *A*'(–1)
3	–1	1	1	1 *A*(1)
4	0	–1	0	1 *A*(1)
5	0	0	1	–1 *A*(–1)
6	0	1	–1	–1 *A*'(–1)
7	1	–1	1	–1 *A*'(–1)
8	1	0	–1	1 *A*(1)
9	1	1	0	–1 *A*(–1)

Źródło: opracowanie własne.

Metoda podwójnego czynnika

Metoda ta pozwala na analizę większej liczby czynników niż umożliwia to liczba kolumn tablicy ortogonalnej. W tym celu kolumnę nominalnie przyporządkowaną czynnikowi 3-poziomowemu wykorzystuje się do określenia poziomów dwóch czynników 2-poziomowych w poszczególnych doświadczeniach eksperymentu. Liczba kombinacji wszystkich poziomów tych dwóch czynników wynosi 4. Wybiera się trzy z tych kombinacji, traktując je jako poszczególne poziomy pierwotnego czynnika 3-poziomowego. W celu wyodrębnienia odpowiedniego efektu, w analizie statystycznej wyników przeprowadzonego eksperymentu należy odejmować od siebie odpowiednie poziomy czynnika 3-poziomowego.

Przykład 6

Należy zaproponować plan eksperymentu w celu oszacowania efektów trzech czynników 3-poziomowych (*C*, *D*, *E*) i dwóch 2-poziomowych (*A*, *B*). W odniesieniu do wybranej standardowej tablicy ortogonalnej $L_9(3^4)$ zastosowano w tym celu metodę podwójnego czynnika do kolumny czwartej, reprezentującej czynnik *F*, zastępując ten czynnik przez dwa czynniki: *A* i *B*. Spośród czterech kombinacji dwóch czynników 2-poziomowych $A(1)B(1)$; $A(1)B(-1)$; $A(-1)B(1)$; $A(-1)B(-1)$, wybrano 3 następujące: $A(1)B(-1)$; $A(-1)B(1)$; $A(-1)B(-1)$, przy czym jeśli w standardowej tablicy czynnik *F* występował na poziomie 0, to po modyfikacji oba czynniki *A* i *B* występują na poziomie –1, jeżeli czynnik *F* występował na poziomie –1, to czynnik *A* występuje na poziomie 1, natomiast czynnik *B* – na poziomie –1; występowanie czynnika *A* na poziomie –1 oraz czynnika *B* na poziomie 1 związane jest z wystąpieniem czynnika *F* na poziomie 1. Różnica $A(-1)B(-1)$ $-A(1)B(-1)$ daje oszacowanie efektu zmiany czynnika *A* natomiast $A(-1)B(-1)$ $-A(-1)B(1)$ pozwala na estymację efektu czynnika *B* (zob. tab. 7).

Tabela 7. Modyfikacja tablicy ortogonalnej z użyciem metody podwójnego czynnika

Numer dośw.	Czynniki			
	C	*D*	*E*	*F*
1	–1	–1	–1	–1
2	–1	0	0	0
3	–1	1	1	1
4	0	–1	0	1
5	0	0	1	–1
6	0	1	–1	0
7	1	–1	1	0
8	1	0	–1	1
9	1	1	0	–1

Numer dośw.	Czynniki			
	C	*D*	*E*	*F*
1	–1	–1	–1	–1 $A(1)B(-1)$
2	–1	0	0	0 $A(-1)B(-1)$
3	–1	1	1	1 $A(-1)B(1)$
4	0	–1	0	1 $A(-1)B(1)$
5	0	0	1	–1 $A(1)B(-1)$
6	0	1	–1	0 $A(-1)B(-1)$
7	1	–1	1	0 $A(-1)B(-1)$
8	1	0	–1	1 $A(-1)B(1)$
9	1	1	0	–1 $A(1)B(-1)$

Źródło: opracowanie własne.

Negatywnym skutkiem takiego postępowania jest utrata wzajemnej ortogonalności pary połączonych czynników. W stosunku do pozostałych czynników (kolumn) oba złączone czynniki są ortogonalne. Taka sytuacja powoduje komplikacje w obliczeniach dotyczących analizy wariancji (zob. [Logothesis, Wynn 1989]).

Metoda łączenia kolumn

W metodzie tej możliwe jest włączenie do tablicy ortogonalnej czynnika na dużej liczbie poziomów za pomocą kilku czynników o mniejszej liczbie poziomów. Jeżeli należy do tablicy włączyć czynnik 4-poziomowy, to można wykorzystać 3 inne kolumny tablicy ortogonalnej, a dokładniej mówiąc, 2 kolumny dotyczące czynników dwupoziomowych oraz kolumnę związaną z interakcją między wybranymi czynnikami. W celu uwzględnienia czynnika 9-poziomowego należy wykorzystać 4 kolumny tablicy ortogonalnej, przy czym dwie z nich związane są z dwoma czynnikami 3-poziomowymi, oraz 2 inne kolumny identyfikujące interakcje między wybranymi czynnikami.

Liczba poziomów tworzonego czynnika jest równa liczbie możliwych kombinacji poziomów pierwotnych czynników, a dodatkowe wykorzystanie kolumn związanych z interakcjami jest niezbędne w celu uzyskania odpowiedniej liczby stopni swobody dla tworzonego czynnika.

Przykład 7

W tabeli 8 przedstawiony jest sposób tworzenia czynnika 4-poziomowego z wykorzystaniem dwóch czynników 2-poziomowych (A, B) oraz kolumny ich interakcji (AB). Czynnikowi 4-poziomowemu przyporządkowany jest poziom 1 w tych doświadczeniach, w których oba czynniki A i B są na poziomie –1, poziom 2 przyporządkowany jest czynnikowi 4-poziomowemu, w przypadku gdy czynnik A jest na poziomie 1, natomiast czynnik B – na poziomie –1; w sytuacji odwrotnej, tzn. gdy czynnik A jest na poziomie –1, zaś czynnik B na poziomie 1 – kreowanemu czynnikowi przyporządkowuje się poziom 3; a gdy oba czynniki A i B są na poziomie 1, czynnik 4-poziomowy jest na poziomie 4 (zob. tab. 7).

Tabela 8. Modyfikacja tablicy ortogonalnej z użyciem metody łączenia kolumn

Numer dośw.	Czynniki		
	A	B	AB
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	-1	-1
4	1	-1	-1
5	-1	1	-1
6	-1	1	-1
7	-1	-1	1
8	-1	-1	1

⟹

Numer dośw.	Czynnik 4-poziomowy	
1	1	(1,1)
2	1	(1,1)
3	2	(1,–1)
4	2	(1,–1)
5	3	(–1,1)
6	3	(–1,1)
7	4	(–1,–1)
8	4	(–1,–1)

Źródło: opracowanie własne.

Metoda łączenia kolumn pozwala zachować ortogonalność i całkowite zrównoważenie planu eksperymentu. Dodatkowo metodę tę można stosować wraz z metodą sztucznego poziomu. Łączy się kolumny, uzyskując czynnik o dużej liczbie poziomów, a następnie redukując jeden lub więcej poziomów, doprowadza się czynnik do wymaganej mniejszej liczby poziomów.

Metoda biernej kolumny

Wadą tej metody jest nieortogonalność otrzymanej tablicy oraz wykorzystanie jedynie tablic ortogonalnych dla czynników 2-poziomowych. Metoda ta jest do pewnego stopnia metodą identyczną z metodą łączenia kolumn. Modyfikacja polega na tym, że wybrana kolumna zwana tu kolumną bierną lub bezczynną nie „znika”, tzn. nie ulega połączeniu z pozostałymi kolumnami. Pozwala to na ponowne wykorzystanie tej samej kolumny do uzyskania dodatkowego czynnika. W tabeli 9 przedstawiono tablicę $L_8(2^3)$, w której jako kolumnę bierną wybrano kolumnę A. Wraz z kolumną B tworzą one czynnik 3-poziomowy C, według schematu przedstawionego w tab. 8, gdzie poziom –1 oznacza, iż oba czynniki A i B są na poziomie 1, poziom 0 oznacza, że czynniki A i B znajdują się na różnych poziomach, zaś 1 oznacza, że oba czynniki A i B są na poziomie –1.

Tabela 9. Modyfikacja tablicy ortogonalnej $L_8\left(2^3\right)$ z użyciem metody biernej kolumny

Numer dośw.	Czynniki		
	A	*B*	*AB*
1	1	1	1
2	1	1	1
3	1	–1	–1
4	1	–1	–1
5	–1	1	–1
6	–1	1	–1
7	–1	–1	1
8	–1	–1	1

Numer dośw.	Czynniki	
	A	*C*
1	1	1 = (1,1)
2	1	1 = (1,1)
3	1	2 = (1,–1)
4	1	2 = (1,–1)
5	–1	2 = (–1,1)
6	–1	2 = (–1,1)
7	–1	3 = (–1,–1)
8	–1	3 = (–1,–1)

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 8

Rozważa się problem wyboru planu eksperymentu w sytuacji, w której badaniu poddano zostało 6 czynników, z których trzy: *A*, *B*, *C*, są czynnikami 2-poziomowymi; dwa: *D*, *E*, są czynnikami 3-poziomowymi, natomiast czynnik *F* jest czynnikiem 4-poziomowym. Dodatkowo przypuszcza się, że wzajemne interakcje czynników 2-poziomowych mogą okazać się istotne. Szacowany wobec tego będzie model o postaci:

$$EY = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + \beta_4 x_4 + \beta_5 x_5 + \beta_6 x_6 + \beta_{12} x_1 x_2 + \beta_{13} x_1 x_3 + \beta_{23} x_2 x_3.$$

Wybór odpowiedniego planu eksperymentu rozpoczyna obliczenie niezbędnej liczby doświadczeń. Dla takiego planu minimalna liczba doświadczeń wynosi 14.

Tabela 10. Minimalna liczba doświadczeń niezbędnych do oszacowania modelu

Czynniki	Stopnie swobody
A, *B*, *C*	3x1 = 3
D, *E*	2x2 = 4
F	3
AxB; *AxC*; *BxC*	3x1 = 3
Średnia ogólna	1
Razem	14

Źródło: opracowanie własne.

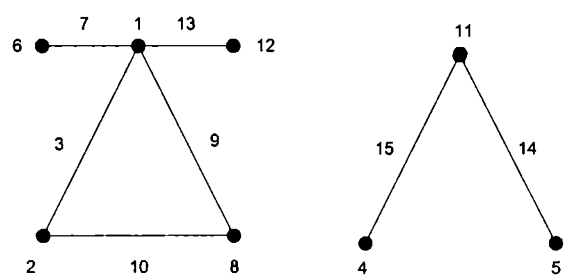
Z tabeli 1 wynika, że wśród standardowych tablic ortogonalnych nie ma takich, które umożliwiałyby jednoczesną estymację czynników 3- i 4-poziomowych. Niezbędne stanie się wobec tego wykorzystanie metod modyfikacji tablic ortogonalnych.

Tabela 11. Standardowa tablica ortogonalna $L_{16}\left(2^{15}\right)$

Numer dośw.	Numer kolumny														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1
2	–1	–1	–1	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	–1	–1	–1	1	1	1	1	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1
4	–1	–1	–1	1	1	1	1	1	1	1	1	–1	–1	–1	–1
5	–1	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	1
6	–1	1	1	–1	–1	1	1	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1
7	–1	1	1	1	1	–1	–1	–1	–1	1	1	1	1	–1	–1
8	–1	1	1	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	–1	–1	1	1
9	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	1
10	1	–1	1	–1	1	–1	1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1
11	1	–1	1	1	–1	1	–1	–1	1	–1	1	1	–1	1	–1
12	1	–1	1	1	–1	1	–1	1	–1	1	–1	–1	1	–1	1
13	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	1	–1
14	1	1	–1	–1	1	1	–1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1
15	1	1	–1	1	–1	–1	1	–1	1	1	–1	1	–1	–1	1
16	1	1	–1	1	–1	–1	1	1	–1	–1	1	–1	1	1	–1

Źródło: opracowanie własne.

Z tabeli 1 wynika, że tablicą ortogonalną, która umożliwia wykonanie 14 doświadczeń jest między innymi plan o kodzie $L_{16}\left(2^{15}\right)$. Umożliwia ona estymację, aż 15 czynników 2-poziomowych. Tablica ta (zob. tab. 11) poddana zostanie modyfikacjom, by umożliwić estymację określonych wcześniej efektów oraz interakcji. Do modyfikacji wykorzystane będą metoda łączenia kolumn oraz biernej kolumny, natomiast graf liniowy posłuży do przypisania czynników i interakcji do odpowiednich kolumn.



Rys. 2. Graf liniowy dla tablicy ortogonalnej $L_{16}\left(2^{15}\right)$

Źródło: [Phadke 1989].

Tabela 12. Zmodyfikowana tablica ortogonalna $L_{16}\left(2^{15}\right)$ umożliwiająca estymację modelu z 6 efektami głównymi i 3 interakcjami

Numer dośw.	Oryginalny numer kolumny								
	1	2	8	(12, 13)	(4, 15)	(5, 11, 14)	3	9	10
	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*AB*	*AC*	*BC*
1	–1	–1	–1	1	1	1	–1	–1	–1
2	–1	–1	1	2	2	2	–1	1	1
3	–1	–1	–1	2	2	3	–1	–1	–1
4	–1	–1	1	1	3	4	–1	1	1
5	–1	1	–1	1	2	2	1	–1	1
6	–1	1	1	2	1	1	1	1	–1
7	–1	1	–1	2	3	4	1	–1	1
8	–1	1	1	1	2	3	1	1	–1
9	1	–1	–1	2	2	4	1	1	–1
10	1	–1	1	3	1	3	1	–1	1
11	1	–1	–1	3	3	2	1	1	–1
12	1	–1	1	2	2	1	1	–1	1
13	1	1	–1	2	1	3	–1	1	1
14	1	1	1	3	2	4	–1	–1	–1
15	1	1	–1	3	2	1	–1	1	1
16	1	1	1	2	3	2	–1	–1	–1

Źródło: opracowanie własne.

Czynniki *A*, *B* oraz *C* przypisane zostaną odpowiednio do kolumn 1, 2 oraz 8. Czynnik 4-poziomowy stworzony będzie za pomocą metody łączenia kolumn z kolumn 11, 5 oraz 14. Czynniki 3-poziomowe stworzone zostaną za pomocą metody biernej kolumny: czynnik *D* poprzez usunięcie kolumn 13 oraz 12, natomiast czynnik *E* poprzez usunięcie kolumn 4 i 15.

6. Zakończenie

Zaproponowane przez Taguchiego idee planowania eksperymentów nie budzą zastrzeżeń większości badaczy. Szeroko dyskutowane są natomiast poszczególne szczegółowe rozwiązania wprowadzone przez Taguchiego. Warto tu wspomnieć, że cała filozofia projektowania odpornego powstała w odpowiedzi na potrzeby praktyki, wszelkie zaś rozwiązania proponowane przez Taguchiego mają na względzie ułatwienie procesu podejmowania decyzji zarządzających. Podyktowany względami praktyki wybór narzędzi i technik eksperymentowania znajduje się często na peryferiach klasycznej teorii planowania eksperymentów. Zaproponowane przez Taguchiego standardowe tablice ortogonalne i metody ich modyfikacji pozwalają w łatwy sposób uzyskać dobry plan eksperymentu. Przedstawione w pracy tablice ortogonalne i ich modyfikacje nie są jednak przedmiotem sporu między entuzjastami metod Taguchiego i zwolennikami klasycznych metod planowania eksperymentów.

Literatura

Aczel A.D., *Statystyka w zarządzaniu: pełny wykład*, PWN, Warszawa 2000.

Aggarwal M.L., Gupta B.C., R. Chaudhury, Walker S.H.F., *Interaction Graphs for a Two-Level Combined Array Experiment Design*, „Journal of Industrial Technology" 2002, v. 18, s. 1-11.

Hedayat A.S., Sloane N.J.A, Stufken J., *Orthogonal Array: Theory and Applications*, Springer--Verlag, New York 1999.

Koronacki J., Thompson J.R, *Statystyczne sterowanie procesem. Metoda Deminga etapowej optymalizacji jakości*, PLJ, Warszawa 1994.

Logothesis N., Wynn H.P., *Quality Through Design*, Clarendon Press, Oxford 1989.

Mańczak K., *Technika planowania eksperymentu*, Warszawa, WNT 1976.

Montgomery D.C., *Design and Analysis of Experiments*, J. Wiley, New York 1997a.

Montgomery D.C., *Introduction to Statistical Quality Control*, J. Wiley, New York 1997b.

Phadke M.S., *Quality Engineering Using Robust Design*, Prentice Hall, Englewood Cliff, New York 1989.

Wawrzynek J., *Uwagi o efektywności planowania eksperymentów*, „Przegląd Statystyczny" 1977, r. XXIV/1, s. 83-89.

Wawrzynek J., *Statystyczne planowanie eksperymentów w zagadnieniach regresji w warunkach małej próby*, AE, Wrocław 1993.

Wu C.F.J., Chen Y., *A Graph-Aided Method for Planning 2-Level Experiments when Certain Interactions Are Important*, „Technometrics" 1992, 34, s. 162-175.

Zarządzanie przez jakość. Koncepcje, metody, studia przypadków, red. E. Konarzewska-Gubała, AE, Wrocław 2003.

METHOD OF CONSTRUCTION OF EXPERIMENTAL PLANS WITH STANDARD AND MODIFIED TAGUCHI'S ORTHOGONAL ARRAYS

Summary

The article discusses the problem of construction of experimental plans. The author presents the method proposed by Taguchi in which problem of choosing a plan is connected with the indication of proper orthogonal array. Detailed algorithm of construction of plans with the methods of modifycations of orthogonal arrays essential in some cases is presented in article. The results of such modifications in orthogonal array are discussed.