

**Kinga Migdał**

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

## **ROZKŁAD ZAGREGOWANYCH WYPŁAT W UBEZPIECZENIACH KOMUNIKACYJNYCH AC**

### **1. Wstęp**

Firma ubezpieczeniowa (nazywana dalej zamiennie firmą lub ubezpieczycielem), prowadząca działalność ubezpieczeniową, zobowiązuje się wypłacić określone w umowie świadczenie w razie zajścia zdarzenia ubezpieczeniowego, w zamian za co pobiera od ubezpieczającego składkę. Kwota wpłaconych składek musi być wystarczająca na pokrycie wartości przyszłych odszkodowań oraz kosztów prowadzenia działalności ubezpieczeniowej. Przy ustalaniu wielkości składek ubezpieczyciel musi zatem najpierw wyznaczyć minimalną wielkość składek potrzebną na pokrycie wypłat odszkodowań, a następnie ustalić wielkość nadwyżki składek (por. [Rolski i in. 1999; Stroiński 1996]) zapewniającej stabilność finansową portfela polis. Pozwala to na zabezpieczenie płynności finansowej firmy, dającej możliwość wywiązania się z przyszłych zobowiązań wobec ubezpieczonych.

Aby można było poprawnie wyznaczyć wielkość składek, konieczne jest dokonywanie analizy realizacji zdarzeń losowych objętych ubezpieczeniem w celu określenia regularności ich występowania oraz rozmiaru ryzyka związanego z tymi zdarzeniami. Portfel ubezpieczeniowy rozpatrywany jest jako zbiór polis generujący wypłaty w losowych momentach czasu. Aby można było posłużyć się statystycznymi metodami wyznaczania składek, konieczne jest przyjęcie modelu opisującego proces wypłat generowanych z portfela. Należy zatem dopasować model opisujący łączną wielkość wypłacanych przez firmę odszkodowań, czyli model uwzględniający zarówno liczbę dokonywanych z portfela wypłat, jak i wielkość wypłacanych odszkodowań.

W pracy rozważany jest portfel ubezpieczeń komunikacyjnych autocasco (AC) osób fizycznych. Jest to ubezpieczenie należące do grupy dobrowolnych ubezpie-

czeń komunikacyjnych. Zakres ochrony ubezpieczenia AC obejmuje straty własne ubezpieczonego, poniesione jako następstwa nieszczęśliwych wypadków spowodowanych przez kierowcę ubezpieczonego pojazdu mechanicznego. Wypłaty z polis ubezpieczenia AC stanowią zatem rekompensatę szkód własnych ubezpieczonego, poniesionych z tytułu kolizji, awarii bądź uszkodzenia, zniszczenia czy też kradzieży pojazdu.

Celem pracy jest znalezienie rozkładu łącznych wypłat ubezpieczyciela dla jednostkowego odcinka czasu (jednego roku) na podstawie rzeczywistych danych obejmujących 11 462 polis ubezpieczeń AC z Inspektoratu II PZU we Wrocławiu<sup>1</sup>.

## 2. Proces zagregowanych wypłat ubezpieczyciela

Aby można było dopasować model opisujący proces wypłat firmy ubezpieczeniowej, należy przyjąć pewne założenia co do matematycznych własności łącznych wypłat  $S$  (rozkład  $S$  nazywany jest rozkładem zagregowanych wypłat ubezpieczyciela). Na rozkład  $S$  składa się liczba dokonywanych z portfela wypłat oraz wielkość wypłacanych odszkodowań. Zazwyczaj zakłada się, że wypłacane kolejno odszkodowania  $X_1, X_2, \dots$  są niezależnymi zmiennymi losowymi o jednakowym rozkładzie. Przyjmuje się również, że wielkości wypłacanych odszkodowań są dodatnie. Liczbę odszkodowań wypłacanych w jednostkowym przedziale czasowym oznaczmy jako  $N$ . W celu uproszczenia modelu przyjmuje się, że na wielkość wypłacanych odszkodowań nie ma wpływu ich liczba, czyli że zmienne  $X_1, X_2, \dots$  oraz  $N$  są wzajemnie niezależne. W praktyce założenie to jest nie zawsze spełnione. Może się bowiem zdarzyć sytuacja taka, że np. z powodu złych warunków pogodowych na drogach do firmy ubezpieczeniowej zarządzającej portfelem polis komunikacyjnych wpłynie większa liczba roszczeń o niewielkie kwotowo odszkodowania – będzie to skutek zwiększonej liczby drobnych kolizji. Sytuacje takie wydają się jednak incydentalne i nie mają dużego wpływu na ogół wypłacanych odszkodowań. Przyjmując przedstawione założenia, wielkość zagregowanych odszkodowań  $S$  wypłacanych przez ubezpieczyciela w jednostkowym przedziale czasowym można modelować za pomocą rozkładu złożonego (por. [Rolski i in. 1999]):

$$S = \begin{cases} \sum_{i=1}^N X_i & \text{dla } N \geq 1 \\ 0 & \text{dla } N = 0 \end{cases}$$

Dla tak zdefiniowanego modelu zagregowanych wypłat ubezpieczyciela (przy założeniu, że pierwsze dwa momenty rozkładów  $N, X$  istnieją) wartość oczekiwaną i wariancję rozkładu  $S$  oblicza się z następujących wzorów (por. [Rolski i in. 1999]):

<sup>1</sup> Analiza obejmowała wszystkie polisy, których okres odpowiedzialności ubezpieczeniowej rozpoczynał się w 1997 r. W skład inspektoratu wchodziły dzielnice: Stare Miasto, Psie Pole, Śródmieście oraz gminy: Kobierzyce, Sobótka, Kąty Wrocławskie, Św. Katarzyna, Mietków, Żórawina.

$$E(S) = E(N) \cdot E(X),$$

$$V(S) = V(N) \cdot (E(X))^2 + E(N) \cdot V(X).$$

Oznaczmy jako  $N(t)$  liczbę odszkodowań wypłaconych do chwili  $t$ . Załóżmy, że dla każdego  $t > 0$  jest to zmienna losowa, dla której prawdziwe są następujące warunki (por. [Modele... 2000; Rolski i in. 1999; Stroiński 1996]):

- a) w chwili początkowej liczba odszkodowań jest równa 0;  $P\{N(0) = 0\} = 1$ ,
- b) przyszłe liczby szkód nie zależą od przeszłości,
- c) wypłaty występują z intensywnością  $\lambda$ ;  $P\{N(t + \Delta) - N(t) = 1\} = \lambda\Delta + o(\Delta)$ ,
- d) nie ma dwóch wypłat jednocześnie, tzn.  $P\{N(t + \Delta) - N(t) \geq 2\} = o(\Delta)$ ,

gdzie  $\Delta$  oznacza długość przedziału czasowego, natomiast  $o(\Delta)$  oznacza pomijalnie małą wielkość prawdopodobieństwa.

Założenia wydają się intuicyjne i odpowiadające rzeczywistości. Implikują one to, że dla dowolnego odcinka czasu długości  $\Delta$  liczba szkód ma rozkład Poissona z parametrem, którego wielkość  $\lambda\Delta$  jest proporcjonalna do długości okresu i nie zależy od wyboru początku tego okresu. Co więcej, rozkłady liczby wypłat dokonanych w dwóch rozłącznych przedziałach czasu są od siebie niezależne. Natomiast prawdopodobieństwo wypłaty większej niż 1 liczby odszkodowań w bardzo krótkim okresie jest pomijalnie małe. Proces tak zdefiniowany jest procesem Poissona z intensywnością  $\lambda$ .

W przypadku gdy portfel polis jest jednorodny, za rozkład  $N$ , opisujący liczbę odszkodowań wypłaconych w jednostkowym odcinku czasu, przyjmuje się rozkład Poissona ze stałą intensywnością  $\lambda$  (parametr  $\lambda$  oznacza przeciętną liczbę wypłat w jednostce czasu). Wówczas prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$  wypłat wynosi:

$$p_k = P(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Taki model opisuje portfel polis, dla których ryzyko występowania szkód jest jednakowe. Jeżeli przyjmuje się za rozkład liczby wypłat  $N$  rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ , o zagregowanej wielkości wypłat  $S$  można powiedzieć, że ma złożony rozkład Poissona z intensywnością  $\lambda$ .

W ubezpieczeniach komunikacyjnych portfel polis nie jest na ogół jednorodny. Wiele czynników, takich jak np. wiek kierowcy, doświadczenie kierowcy w prowadzeniu pojazdu, stan techniczny pojazdu itp., wpływa na to, że intensywność występowania szkód w odniesieniu do ubezpieczonych pojazdów jest różna. Dla niejednorodnego portfela zakłada się, że liczba szkód wynikających z polis należących do niego ma uogólniony rozkład Poissona, czyli rozkład Poissona ze zmiennym parametrem  $\lambda$ . Intensywność  $\lambda$  występowania szkód z danej polisy jest zatem realizacją zmiennej losowej  $\Lambda$ , o której mówi się, że jest zmienną strukturalną (zamiennie można ją określać mianem zmiennej mieszającej). O rozkładzie zmiennej  $N$  mówi się w takim przypadku, że jest mieszanką rozkładów Poissona

o parametrze strukturalnym  $\Lambda$  (por. [Grandell 1997; Kaas i in 2001; Rolski i in. 1999]). Prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$  wypłat dla mieszanki rozkładów Poissona wynosi:

$$p_k = P(N = k) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} dF_{\Lambda}(\lambda), \quad k \in \mathbb{N},$$

gdzie  $F_{\Lambda}$  jest dystrybuantą rozkładu strukturalnego  $\Lambda$ .

Wartość oczekiwaną i wariancję mieszanki rozkładów Poissona o parametrze strukturalnym  $\Lambda$  można obliczyć, korzystając z następujących zależności (por. [Grandell 1997; Rolski i in. 1999]):

$$E(N) = E(\Lambda),$$

$$V(N) = E(\Lambda) + V(\Lambda).$$

Przyjmując jako rozkład liczby wypłat  $N$  mieszany rozkład Poissona z parametrem strukturalnym  $\Lambda$ , o zagregowanej wielkości wypłat  $S$  mówimy, że ma złożony mieszany rozkład Poissona z parametrem strukturalnym  $\Lambda$ .

Za rozkład zmiennej strukturalnej  $\Lambda$  można przyjąć rozkład dwupunktowy. Taki model odzwierciedla podział portfela na dwie grupy. W grupie kierowców „mniej ryzykownych” intensywność występowania szkód oznaczona jest jako  $\lambda_1$ ; jest ona przyjmowana z prawdopodobieństwem  $p$ . Natomiast w grupie kierowców „bardziej ryzykownych”, stanowiących  $(1-p) \cdot 100\%$  populacji, intensywność występowania szkód wynosi  $\lambda_2$  ( $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ ) (por. [Kaas i in. 2001]). Liczba odszkodowań ma wówczas mieszany rozkład Poissona z dwupunktowym rozkładem strukturalnym. Prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$  wypłat w jednostkowym odcinku czasu wynosi w tym przypadku:

$$p_k = P(N = k) = p e^{-\lambda_1} \frac{\lambda_1^k}{k!} + (1-p) e^{-\lambda_2} \frac{\lambda_2^k}{k!}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zamiast skończonej liczby grup w portfelu (czyli skokowego rozkładu strukturalnego) można rozważać model portfela niejednorodnego, w którym intensywność występowania wypłat dla kierowców jest generowana przez ciągły rozkład strukturalny. Taki model odzwierciedla to, że w portfelu zebrane są polisy o bardzo zróżnicowanej wielkości ryzyka wypłaty odszkodowania. Zmieniająca się w sposób ciągły intensywność występowania wypłat  $\lambda$  może być interpretowana jako efekt wpływu wielu czynników różnicujących ryzyko, takich jak np. miejsce zamieszkania, wiek i płeć kierowcy, pojemność silnika pojazdu, wiek pojazdu, czas posiadania prawa jazdy, sposób użytkowania pojazdu, stan cywilny i zawód kierowcy, liczba użytkowników pojazdu, moc pojazdu, waga pojazdu, roczny przebieg oraz kolor pojazdu itp. W tym modelu portfela występuje zjawisko podwójnej losowości. Liczba wypłat dla ustalonej polisy ma rozkład Poissona z parametrem  $\lambda$ , będącym z kolei realizacją ciągłej zmiennej strukturalnej  $\Lambda$ .

Do klasycznych postaci rozkładu zmiennej strukturalnej  $\Lambda$ , mających zastosowanie w praktycznym rachunku aktuarialnym ubezpieczeń komunikacyjnych, należy rozkład gamma  $\Gamma(a, c)$  o gęstości (por. [Grandell 1997; Hogg, Klugman 1984; Kaas i in. 2001; Rolski i in. 1999]):

$$f(\lambda) = c^a \lambda^{a-1} \frac{e^{-c\lambda}}{\Gamma(a)}, \quad \lambda \geq 0, \quad a > 0, \quad c > 0.$$

Przy założeniu rozkładu gamma  $\Gamma(a, c)$  zmiennej strukturalnej  $\Lambda$ , zmienna  $N$  ma rozkład ujemnie dwumianowy  $NB\left(a, p = \frac{1}{1+c}\right)$ . Prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$  wypłat dla tak zdefiniowanego rozkładu liczby odszkodowań wynosi:

$$p_k = P(N = k) = \binom{a+k-1}{k} \left(\frac{c}{1+c}\right)^a \left(\frac{1}{1+c}\right)^k = \binom{a+k-1}{k} (1-p)^a (p)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Szczególnym przypadkiem rozkładu gamma (dla parametru  $a = 1$ ) jest rozkład wykładniczy. Jeżeli za rozkład zmiennej strukturalnej  $\Lambda$  przyjmiemy rozkład wykładniczy z parametrem  $c$ , zmienna  $N$  licząca odszkodowania ma rozkład geometryczny z parametrem  $p = \frac{1}{1+c}$ .

Za rozkład zmiennej strukturalnej  $\Lambda$  w rachunku aktuarialnym ubezpieczeń komunikacyjnych przyjmuje się również rozkład odwrócony gaussowski  $IG(\mu, \sigma)$  o gęstości (por. [Panjer, Willmott 1992; Rolski i in. 1999]):

$$f(\lambda) = \frac{\mu}{\lambda^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2\sigma\lambda}\right), \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0, \quad \sigma > 0.$$

Przy założeniu rozkładu odwróconego gaussowskiego  $IG(\mu, \sigma)$  zmiennej strukturalnej  $\Lambda$  prawdopodobieństwo wystąpienia  $k$  wypłat wyznacza się numerycznie z następującego wzoru:

$$p_k = P(N = k) = \int_0^\infty e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \cdot \frac{\mu}{\lambda^{3/2} \sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(\lambda-\mu)^2}{2\sigma\lambda}\right) d\lambda, \quad k \in \mathbb{N}.$$

### 3. Rozkład wielkości wypłat

W celu znalezienia modelu zagregowanych wypłat należy najpierw ustalić rozkład wielkości indywidualnych odszkodowań. Z obserwacji rozkładu empirycznego wynika, że rozkład modelujący wielkość indywidualnych wypłat musi przyjmować wartości dodatnie i mieć bardzo silną asymetrię prawostronną. Do klasy

rozkładów, które są stosowane do modelowania wielkości odszkodowań w ubezpieczeniach komunikacyjnych, należą m.in. rozkład gamma, logarytmiczno-normalny i Pareto. Funkcje gęstości tych rozkładów przedstawiono w tab. 1.

Tabela 1. Funkcje gęstości rozkładów modelujących wielkość indywidualnych wypłat

Rozkład	Funkcja gęstości	Założenia
Gamma	$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right)$	$x > 0$ $\alpha, \beta > 0$
Logarytmiczno-normalny	$f(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$x > 0$ $\mu \in (-\infty, \infty), \sigma > 0$
Pareto	$f(x) = \frac{\alpha\beta^\alpha}{(\beta+x)^{\alpha+1}}$	$x > 0$ $\alpha, \beta > 0$

Źródło: opracowanie własne na podstawie pracy [Kaas i in. 2001].

Rozkłady logarytmiczno-normalny i Pareto należą do klasy rozkładów o ciężkim ogonie.

**Definicja 1.** Rozkład  $F$  o ciężkim ogonie to rozkład, dla którego funkcja tworząca momenty  $\hat{m}_F(s)$ , dla każdego  $s > 0$ , spełnia warunek  $\hat{m}_F(s) = \infty$ .

Dla rozkładów o ciężkim ogonie prawdopodobieństwo przyjmowania dużych wartości jest większe niż dla pozostałych rozkładów o takiej samej średniej. Taki rozkład ma większy rozrzut i z tego powodu, jako mniej przewidywalny, uznawany jest za rozkład obciążony większym ryzykiem.

Do modelowania wielkości indywidualnych odszkodowań sugerowane jest (por. [Kaas i in. 2001]) użycie rozkładów gamma, logarytmiczno-normalnego i Pareto w następujących przypadkach:

- rozkład gamma – dla odszkodowań, których rozkład nie ma ciężkiego ogona;
- rozkład logarytmiczno-normalny – dla odszkodowań, których rozkład ma ciężki ogon;
- rozkład Pareto – dla odszkodowań o istotnym prawdopodobieństwie występowania „dużych wypłat” (rozkład o cięższym ogonie niż w przypadku rozkładu logarytmiczno-normalnego).

Każdy z wymienionych rozkładów był analizowany w pracy jako potencjalny model rozkładu wielkości indywidualnych odszkodowań. Parametry rozkładów estymowano metodą największej wiarygodności w odniesieniu do rozkładów gamma i logarytmiczno-normalnego. Parametry rozkładu Pareto estymowano metodą momentów. Założono w tym przypadku istnienie dwóch pierwszych momentów tego rozkładu, a zatem ograniczono poszukiwania modelu wielkości odszkodowań do klasy rozkładów Pareto o parametrze  $\alpha > 2$  (por. [Otto 2004]). Wyniki estymacji parametrów rozkładów oraz testowania hipotez, że rozkład wielkości indywidualnych odszkodowań jest zgodny odpowiednio z rozkładem gamma

z parametrami  $\alpha = 0,848$ ;  $\beta = 5296,093$ , rozkładem logarytmiczno-normalnym z parametrami  $\mu = 7,716$ ;  $\sigma^2 = 1,529$ , rozkładem Pareto z parametrami  $\alpha = 3,249$ ;  $\beta = 10103,269$  przedstawiono w tab. 2-3.

Tabela 2. Wyniki testowania zgodności dla rozkładu wielkości odszkodowań

Rozkład	Parametry		$\chi^2$	df	p-value
Gamma	$\alpha = 0,848$	$\beta = 5296,093$	8955,852	13	0,0000
Logarytmiczno-normalny	$\mu = 7,732$	$\sigma^2 = 1,529$	33,013	13	0,0017
Pareto	$\alpha = 3,249$	$\beta = 10\ 103,269$	16,747	13	0,2111

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Rozkłady empiryczny i teoretyczne wielkości odszkodowań

Klasa	Górna granica wysokości wypłat	Rozkład empiryczny	Rozkład teoretyczny		
			gamma	logarytm.-normalny	Pareto
1	3 200	2313	2040,65	2353,95	2269,32
2	6 400	801	874,35	724,53	790,95
3	9 600	312	440,23	301,14	341,33
4	12 800	168	228,25	154,94	169,54
5	16 000	79	119,98	90,11	93,07
6	19 200	52	63,57	56,82	55,06
7	22 400	31	33,86	37,96	34,51
8	25 600	15	18,10	26,49	22,67
9	28 800	16	9,71	19,13	15,46
10	32 000	11	5,21	14,21	10,89
11	35 200	8	2,80	10,80	7,88
12	38 400	7	1,51	8,37	5,83
13	41 600	6	0,82	6,59	4,40
14	44 800	6	0,44	5,27	3,38
15	64 000	5	0,51	16,77	9,77
16	> 64 000	10	0,01	12,92	5,93

Źródło: opracowanie własne.

W pierwszej klasie (klasa wypłat o wartości nie przekraczającej 3200 zł) znalazło się aż 2313 spośród 3840 wypłat. Kwotowo jednak wypłacone w tej klasie odszkodowania stanowiły 18,79% łącznej sumy wypłat. Zbiór danych był wystarczająco duży, aby można było zaobserwować, że rozkład wielkości wypłat jest rozkładem o ciężkim ogonie. Na podstawie testów zgodności ustalono, że rozkładem, który jest najlepiej dopasowany do empirycznego rozkładu wielkości odszkodowań wypłaconych z polis ubezpieczeń auto casco jest rozkład Pareto (3,249; 10 103,269). Spośród trzech rozważanych w pracy rozkładów – gamma, logaryt-

miczno-normalnego i Pareto – jest to rozkład o największej zmienności, czyli rozkład uznawany za najbardziej „ryzykowny”. Przeciętna wielkość indywidualnych wypłat wynosi  $E(X) = 4492$  zł, natomiast odchylenie standardowe wielkości wypłacanych odszkodowań –  $\sqrt{V(X)} = 7246$  zł.

#### 4. Rozkład liczący odszkodowania

W pracy rozważono cztery potencjalne rozkłady liczby wypłacanych odszkodowań: rozkład Poissona, mieszanę rozkładów Poissona z dwupunktowym, gamma oraz odwróconym gaussowskim rozkładem strukturalnym. Parametry rozkładów estymowano metodą momentów. Parametr  $\lambda$  rozkładu Poissona wyznaczony na podstawie danych, obejmujących liczbę wypłat z polis ubezpieczenia Auto Casco, wyniósł 0,127; parametry  $\lambda_1, \lambda_2; p$  wyznaczone dla mieszanki dwóch rozkładów Poissona wyniosły odpowiednio 0,063; 1,159; 0,941; parametry  $\alpha; p = \frac{1}{1+c}$  wyznaczone dla rozkładu ujemnie dwumianowego (czyli mieszanki rozkładów Poissona z rozkładem strukturalnym  $\Gamma(\alpha, c)$ ) wyniosły odpowiednio 0,243; 0,343; parametry zaś  $\mu, \sigma$  wyznaczone dla odwróconego gaussowskiego rozkładu struktury wyniosły 0,127; 0,523. Wyniki testowania hipotez, że rozkład liczby wypłaconych odszkodowań jest zgodny odpowiednio z rozkładem Poissona z parametrem  $\lambda = 0,127$ ; mieszaną rozkładów Poissona o rozkładzie strukturalnym: dwupunktowym parametrami  $\lambda_1 = 0,063; \lambda_2 = 1,159; p = 0,941$ , gamma z parametrami  $\alpha = 0,243; c = 1,913$ , odwróconym gaussowskim z parametrami  $\mu = 0,127, \sigma = 0,523$  przedstawiono w tab. 4 i na rys. 1.

Tabela 4. Wyniki testowania zgodności dla rozkładu liczby wypłat

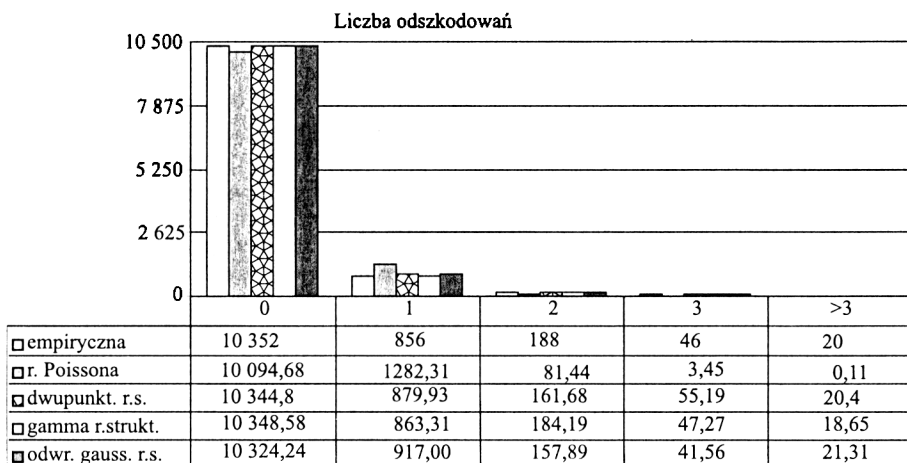
Rozkład		Parametry			$\chi^2$	df	p-value
Poissona		$\lambda = 0,127$			349,429	3	0,000
Mieszanka rozkładów Poissona, rozkład struktury:	dwupunktowy	$\lambda_1 = 0,063$	$\lambda_2 = 1,159$	$p = 0,941$	6,479	1	0,011
	gamma	$\alpha = 0,243$		$c = 1,913$	0,274	2	0,872
	odwrócony gaussowski	$\mu = 0,127$		$\sigma = 0,523$	10,429	2	0,005

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie przeprowadzonej analizy zgodności odrzucono hipotezę o jednorodności portfela polis ubezpieczenia autocasco. Nie można zatem przyjąć rozkładu Poissona ze stałą intensywnością występowania szkód  $\lambda$  za rozkład liczący wypłaty. Intensywność występowania szkód w polisie portfela ubezpieczeń AC jest



zmienna. Rozkładem, który dobrze modeluje zmienność parametru strukturalnego  $\Lambda$ , jest rozkład gamma z parametrami  $\alpha = 0,243$ ;  $c = 1,913$ . Za teoretyczny model łącznej liczby wypłat  $N$  dokonanych w ciągu roku z portfela AC można zatem przyjąć rozkład ujemnie dwumianowy z parametrami  $\alpha = 0,243$ ;  $p = 0,343$ .



Rys. 1. Rozkład empiryczny oraz rozkłady hipotetyczne liczby wypłat

Źródło: opracowanie własne.

Podsumowując, na podstawie przeprowadzonej analizy można powiedzieć, że jako model zagregowanej wielkości wypłat ubezpieczyciela  $S$  dla jednostkowego przedziału czasowego (1 rok) wybrano złożony rozkład ujemnie dwumianowy z parametrami  $\alpha = 0,243$ ;  $p = 0,343$ . Za model wielkości wypłacanych odszkodowań przyjęto natomiast rozkład Pareto z parametrami  $\alpha = 3,249$ ;  $\beta = 10\ 103,269$ .

## Literatura

- Grandell J., *Mixed Poisson Processes*, Chapman & Hall, London 1997.
- Hogg R.V., Klugman S.A., *Loss Distributions*, John Wiley & Sons, New York 1984.
- Kaas R., Goovaerts M., Dhaene J., Denuit M., *Modern Actuarial Risk Theory*, Kluwer Academic Publishers, Boston 2001.
- Modele aktuarialne*, W. Ostasiewicz, red., AE, Wrocław 2000.
- Otto W., *Ubezpieczenia majątkowe. Część I. Teoria ryzyka*, Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.
- Panjer H.H., Willmot G.E., *Insurance Risk Models*, Society of Actuaries, Schaumburg 1992.
- Rolski T., Schmidli H.P., Schmidt V., Teugels J., *Stochastic Processes for Insurance and Finance*, John Wiley & Sons, Chichester 1999.
- Stroiński E., *Ubezpieczenia na życie*, Wyższa Szkoła Ubezpieczeń i Bankowości, Warszawa 1996.

## **THE DISTRIBUTION OF AGGREGATED CLAIMS IN AUTOMOBILE AC INSURANCE PORTFOLIO**

### **Summary**

The main idea of insurance is that an insurance company assumes responsibility to compensate for financial losses resulting from any damage insured against in insurance contract, in return for a premium paid by the customer. That's why the basic element of insurance activity is proper premium calculation.

The model of insurance portfolio in this article is the set of policies generating claims in random moments of time. The basis of appropriate insurer's premium calculation is statistical methods application. This helps to analyse events in order to determine the frequency at which these events occur as well as the amount of financial losses involved.

In this paper the real data from the portfolio of automobile autocasco (AC) insurance policies are taken into consideration. The purpose of this paper is to settle the statistical model of aggregated claims amount generated from the portfolio in the one year time period.