PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1105 2006
Zastosowanie statystyki w ekonomii

Stanisław Heilpern

Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu

FUNKCJE ŁĄCZĄCE – PODSTAWOWE POJĘCIA I WŁASNOŚCI

1. Wstęp

Celem pracy jest przedstawienie podstawowych wiadomości dotyczących funkcji łączących (ang. *copula*). Funkcje łączące umożliwiają nieparametryczne badanie i modelowanie zależności zachodzących między zmiennymi losowymi. Są łącznikiem między rozkładami brzegowymi a rozkładem łącznym badanych zmiennych. Analiza zależności oparta jest wtedy na podstawowym równaniu:

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n)),$$

gdzie F jest dystrybuantą rozkładu łącznego, F_i są dystrybuantami brzegowymi, a C jest funkcją łączącą. W najprostszym przypadku – niezależności – funkcja łącząca jest zwykłym iloczynem.

Funkcje łączące są niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Z tego też powodu są ściśle związane z rangowymi miarami zależności: współczynnikami τ Kendalla i ρ_S Spearmana. W teorii funkcji łączących mniejszą rolę odgrywa klasyczna miara zależności: współczynnik korelacji Pearsona. Wprowadzając parametryzowane rodziny funkcji łączących, możemy przejść do analizy parametrycznej. W pracy przedstawimy najważniejsze tego typu rodziny: archimedesowe i eliptyczne.

Z historycznego punktu widzenia pojęcie *copula* wprowadził po raz pierwszy Sklar w pracy [Sklar 1959] w 1959 r., w której przedstawił podstawy teorii funkcji łączących. Jednakże pewne zalążki tej teorii można już było zauważyć wcześniej. Chcąc uzyskać więcej informacji dotyczących tej teorii, czytelnik może skorzystać z dwóch podstawowych monografii [Nelsen 1999; Schweitzer, Sklar 1981] oraz artykułów [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001; Frees, Valdez 1998; Wang 1999].

Prezentowana praca ma charakter przeglądowy. W punkcie 2 przedstawiono definicję i podstawowe pojęcia dotyczące funkcji łączących dwu- i wielowymiarowych. Podano w nim też twierdzenie Sklara, główne twierdzenie teorii funkcji łączących, na którym opiera się cała teoria. Punkt 3 dotyczy rodzajów funkcji łączących. Omówiono funkcje archimedesowe, sprowadzające analizę zależności do badania funkcji jednej zmiennej, funkcje złożone, związane z tzw. modelem słabości, oraz funkcje eliptyczne: gaussowskie i *t*-Studenta. Przedstawiono i omówiono też główne, parametryzowane rodziny funkcji łączących. Punkt 4 poświęcono związkowi funkcji łączących z podstawowymi miarami zależności. Jak już wcześniej wspomniano, ukazano ścisły związek funkcji łączących z rangowymi współczynnikami: Kendalla i Spearmana oraz słaby ze klasycznym współczynnikiem korelacji Pearsona. Przedstawiono też współczynniki dolnej i górnej zależności, ułatwiających badanie zależności wartości ekstremalnych. Ostatni punkt 5 dotyczy technik symulacyjnych, umożliwiających symulacje wartości brzegowych na podstawie wielowymiarowych rozkładów łącznych opisanych znaną funkcją łączącą. Przedstawiono algorytmy zarówno ogólne, jak i dotyczące konkretnych funkcji łączących. Podano przykłady wygenerowanych wartości brzegowych, których zależności opisane są funkcjami łączącymi, należącymi do rodzin: Franka, Claytona, Gaussa i *t*-Studenta. Ponadto przeprowadzono symulację rozkładu sumy zmiennych losowych o rozkładach logarytmiczno-normalnych ze strukturą zależności zadaną funkcją łączącą Claytona.

2. Funkcje łączące

Na początku zajmiemy się modelowaniem zależności dwóch zmiennych losowych X i Y. W przypadku ich niezależności dystrybuanta $F(x, y)$ rozkładu łącznego jest równa

$$F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y) = F_1(x)F_2(y),$$

gdzie $F_1(x) = P(X \leq x)$ jest dystrybuantą zmiennej losowej X, a $F_2(y)$ – zmiennej losowej Y. Widzimy, że jest ona równa iloczynowi dystrybuant brzegowych. Celem będzie opisanie zależności między dystrybuantą łączną a brzegowymi w sytuacji ogólnej, nie tylko w odniesieniu do niezależności. W następnym kroku rozważania będą rozszerzone na przypadek zależności większej liczby zmiennych losowych.

Zacznijmy od badania zależności dwóch zmiennych losowych U, V o rozkładzie jednostajnym na odcinku [0, 1] i wprowadzenia pojęcia funkcji łączącej (ang. *copula*), stanowiącej główny przedmiot zainteresowań.

Definicja 1 [Schweitzer, Sklar 1981]. Dwuwymiarową funkcję łącząca nazywamy dwuwymiarową dystrybuantę C skupioną na $[0, 1]^2$, której dystrybuanty brzegowe mają rozkład jednostajny na [0, 1].

Innymi słowy, funkcja łącząca (dwuwymiarowa) jest dowolną funkcją C: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ spełniającą dla każdego $0 \leq u, v \leq 1$ oraz $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$, takich że $u_1 \leq u_2, v_1 \leq v_2$, warunki:

C1) $C(u, 1) = C(1, u) = u, \qquad C(u, 0) = C(0, u) = 0,$

C2) $C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1) \geq 0.$

Warunek pierwszy gwarantuje, że rozkłady brzegowe są jednostajne, a drugi – że funkcja jest dystrybuantą – zachodzi zależność $P(u_1 \leq U \leq u_2, v_1 \leq V \leq v_2) \geq 0$.

Ponadto funkcja łącząca C jest jednostajnie ciągła na $[0, 1]^2$, co wynika z nierówności

$$|C(u_2, v_2) - C(u_1, v_1)| \leq |u_2 - u_1| + |v_2 - v_1|,$$

która zachodzi dla dowolnych $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in [0, 1]^2$.

Twierdzenie 1, nazywane twierdzeniem Sklara, umożliwia wykorzystanie funkcji łączących do modelowania zależności zachodzących między zmiennymi losowymi.

Twierdzenie 1 [Schweitzer, Sklar 1981].

i) Niech F będzie dwuwymiarową dystrybuantą z dystrybuantami brzegowymi F_1, F_2, wtedy istnieje funkcja łącząca C taka, że dla każdego x, y

$$F(x, y) = C(F_1(x), F_2(y)). \tag{1}$$

Jeśli dystrybuanty F_1, F_2 są ciągłe, funkcja C jest jedyna. W przeciwnym razie jest ona jednoznacznie określona na iloczynie kartezjańskim zbiorów wartości dystrybuant brzegowych.

ii) Jeśli C jest dwuwymiarową funkcją łączącą i F_1, F_2 są dystrybuantami, funkcja F, określona wzorem (1), jest dwuwymiarową dystrybuantą, a F_1, F_2 są jej dystrybuantami brzegowymi.

Twierdzenie to, podstawowe w całej omawianej teorii, umożliwia wyznaczenie dystrybuanty łącznej F dla znanych dystrybuant brzegowych F_1, F_2 oraz funkcji łączącej C. Funkcja C oddaje wtedy zależność zachodzącą między brzegowymi zmiennymi losowymi. Mówi się wtedy, że funkcja łącząca tworzy strukturę zależności.

Dystrybuanta łączna F i jej ciągłe dystrybuanty brzegowe F_1, F_2 wyznaczają funkcję łączącą określoną dla każdego $u, v \in [0, 1]$ wzorem:

$$C(u, v) = F\left(F_1^{-1}(u), F_2^{-1}(v)\right), \tag{2}$$

gdzie $F_i^{-1}(u) = \inf\{x \in R : F_i(x) \geq u\}$, $i = 1,2$ jest uogólnioną funkcją odwrotną dystrybuanty F_i. Wzór ten będzie później wykorzystany w punkcie 5 podczas omawiania symulacji.

Przykład 1.

a) Niech $F(x, y)$ będzie dystrybuantą łącznego rozkładu dyskretnych zmiennych losowych (X, Y) określonego w poniższej tabelce:

X/Y	0	1	X
0	0,3	0,4	0,7
1	0,1	0,2	0,3
Y	0,4	0,6	

a $F_1(x)$ i $F_2(y)$ będą jego dystrybuantami brzegowymi. Aby wyznaczyć funkcję łączącą spełniającą (1), wystarczy wyznaczyć jej wartości dla iloczynu kartezjańskiego $\{0; 0{,}7; 1\}\times\{0; 0{,}4; 1\}$ zbiorów wartości dystrybuant F_1 i F_2. Sprowadza się to jedynie do obliczenia wartości $C(0{,}7; 0{,}4) = F(0{,}5; 0{,}5) = 0{,}3$, ponieważ pozostałe wartości wynikają automatycznie z własności C1. Przykładowo, obydwie funkcje łączące $C_1(u, v) = uv(1 + 0{,}4(1 - u)(1 - v))$ oraz $C_2(u, v) = \max(1 - ((1 - u)^{1,72} + (1 - v)^{1,72})^{1/1,72}, 0)$ spełniają (1). Oczywiście, nie są one jedyne.

b) Niech $F(x, y) = (1 + e^{-x} + e^{-y})^{-1}$ będzie łączną dystrybuantą rozkładu (X, Y). Jego dystrybuanty brzegowe i ich funkcje odwrotne są odpowiednio równe $F_1(x) = (1 + e^{-x})^{-1}$, $F_2(y) = (1 + e^{-y})^{-1}$, $F_1^{-1}(u) = \ln\left(\frac{u}{1-u}\right)$ oraz $F_2^{-1}(v) = \ln\left(\frac{v}{1-v}\right)$. Wtedy odpowiadająca tak określonej strukturze zależności funkcja łącząca jest równa $C(u, v) = \left(1 + \frac{1-u}{u} + \frac{1-v}{v}\right)^{-1} = \frac{uv}{u+v-uv}$. Dystrybuanty są ciągłe, więc funkcja ta jest jednoznacznie wyznaczona.

Wyróżnia się trzy podstawowe funkcje łączące:

- $\Pi(u, v) = uv$,
- $M(u, v) = \min(u, v)$,
- $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$.

Pierwsza z nich – Π – odpowiada niezależności. Funkcja łącząca niezależne zmienne losowe ma taką postać. Ponadto w odniesieniu do ciągłych zmiennych losowych funkcja łącząca Π wskazuje na ich niezależność.

Dwie następne funkcje łączące – M i W – związane są ze ścisłą zależnością. Pierwsza z nich – W – odpowiada współmonotoniczności (ang. *comonotonicity*), a druga – M – z przeciwmonotoniczności (ang. *countermonotonicity*) [Nelsen 1999].

Definicja 2. Zmienne losowe X, Y nazywa się współmonotonicznymi, jeśli istnieje zmienna losowa Z oraz rosnące funkcje f oraz g, takie, że $X = f(Z)$ i $Y = g(Z)$. Zmienne te są przeciwmonotoniczne, jeśli funkcja f jest rosnąca, g zaś – malejąca.

Pojęcie współmonotoniczności odgrywa dużą rolę we współczesnej teorii podejmowania decyzji oraz w ubezpieczeniach [Dennenberg 1994; Grabisch, Nguyen, Walker 1995; Heilpern 2003; 2002; Wang 1999; Yaari 1987].

Funkcje łączące M i W nazywamy też ograniczeniami Frecheta-Hoeffdinga. Zachodzą bowiem dla każdej funkcji łączącej C oraz $u, v \in [0, 1]$, nierówności [Schweitzer, Sklar 1981].

$$W(u, v) \leq C(u, v) \leq M(u, v).$$

Wartości tych funkcji ograniczają więc z dołu i z góry wartości dowolnej funkcji łączącej.

W przypadku ciągłych zmiennych losowych X, Y struktura zależności zmiennych losowych $g_1(X)$, $g_2(Y)$, gdzie g_1 i g_2 są rosnącymi funkcjami, opisana jest taką samą funkcją łączącą jak dla pary zmiennych X, Y, tzn. jest ona niezmiennicza ze względu na rosnące transformacje zmiennych losowych.

Przekątną funkcji łączącej C nazywa się funkcję jednej zmiennej $\delta_C(u) = C(u, u)$. Jest ona niemalejącą, jednostajnie ciągłą funkcją, określoną na odcinku $[0, 1]$. Natomiast warstwica Ω_t funkcji łączącej jest podzbiorem $[0, 1]^2$, na którym funkcja C przyjmuje stałą wartość, tzn. $\Omega_t = \{(u, v) \in [0, 1]^2 \colon C(u, v) = t\}$. Warstwice w dużym stopniu ułatwiają prezentację graficzną funkcji łączących.

Funkcje łączące możemy też zastosować podczas badania zależności zachodzących między funkcjami przeżycia $\overline{F}_1(x) = P(X > x)$, $\overline{F}_2(y) = P(Y > y)$ oraz $\overline{F}(x, y) = P(X_1 > x, Y > y)$, określając tę zależność wzorem:

$$\overline{F}(x, y) = \overline{C}(\overline{F}_1(x), \overline{F}_2(y)).$$

Funkcję $\overline{C}$ będziemy nazywać funkcją łączącą przetrwania. Spełnia ona zależność [Nelsen 1999]:

$$\overline{C}(u, v) = u + y - 1 + C(1 - u, 1 - v),$$

gdzie $C(u, v)$ jest funkcją łączącą dystrybuanty F, F_1 i F_2. Można sprawdzić, że jest ona również funkcją łączącą, tzn. spełnia warunki C1 oraz C2.

Powyższe rozważania będą teraz rozszerzone na przypadek wielowymiarowy, opisana zostanie struktura zależności ciągu zmiennych losowych $X_1, \ldots, X_n$ dla $n > 2$.

Definicja 3. n-wymiarową funkcją łączącą C nazywa się dystrybuantę łącznego rozkładu w przestrzeni R^n o jednostajnych na $[0, 1]$ rozkładach brzegowych $U_1, \ldots, U_n$.

Jest to funkcja n-zmiennych $C\colon [0, 1]^n \to [0, 1]$, ciągła dla każdej zmiennej, przyjmująca wartość 0, gdy choć jeden argument jest równy 0, oraz $C(1, \ldots, 1, u_k, 1, \ldots, 1) = u_k$. Ponadto zachodzi odpowiednik własności C2, gwarantujący że $P(u_1 \le \le U_1 \le v_1, \ldots, u_n \le U_n \le v_n) \ge 0$ dla dowolnych $0 \le u_i \le v_i \le 1$, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Przyjmuje on w przypadku wielowymiarowym postać [Embrechts, McNeil, Straumann 2001]:

dla każdych $(a_1, \ldots, a_n)$, $(b_1, \ldots, b_n) \in [0, 1]^n$, takich że $a_i \le b_i$ zachodzi

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{2} (-1)^{i_1+\cdots+i_n} C(x_{1x_1}, \ldots, x_{ni_n}) \ge 0,$$

gdzie $x_{j1} = a_j$ oraz $x_{j2} = b_j$.

Dla n-wymiarowych funkcji łączących zachodzi też wersja twierdzenia Sklara oraz spełniona jest zależność

$$F(x_1, ..., x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

między dystrybuantą n-wymiarową F a jej dystrybuantami brzegowymi F_i. Z drugiej strony otrzymujemy

$$C(u_1, ..., u_n) = F\left(F_1^{-1}(u_1), \ldots, F_n^{-1}(u_n)\right).$$

Istnieją n-wymiarowe odpowiedniki dwóch podstawowych funkcji łączących:

- $\Pi^n(u_1, ..., u_n) = u_1 ... u_n$,
- $M^n(u_1, ..., u_n) = \min(u_1, ..., u_n)$,

które są również n-wymiarowymi funkcjami łączącymi. Jednakże funkcja

$$W^n(u_1, ..., u_n) = \max(u_1, ..., u_n - n + 1, 0)$$

nie jest n-wymiarową funkcją łączącą dla każdego $n > 2$, ponieważ można pokazać [Nelsen 1999], że dla rozkładu łącznego określonego na $[0, 1]^n$ funkcją W^n zachodziłaby równość

$$P(0{,}5 \le U_1 \le 1, ..., 0{,}5 \le U_n \le 1) = 1 - 0{,}5n.$$

Dla $n > 2$ otrzymanoby wtedy ujemne prawdopodobieństwo.

Dla n-wymiarowych funkcji łączących zachodzą nierówności

$$W^n(u_1, ..., u_n) \le C(u_1, ..., u_n) \le M^n(u_1, ..., u_n).$$

Należy jednak pamiętać, że lewa strona nierówności nie jest funkcją łączącą, ale dla każdych $u_1, \ldots , u_n \in [0, 1]$ istnieje n-wymiarowa funkcja łącząca C, taka że [Nelsen 1999]:

$$C(u_1, ..., u_n) = W^n(u_1, ..., u_n).$$

3. Rodzaje funkcji łączących

Przegląd najczęściej stosowanych funkcji łączących zaczniemy od rodziny funkcji archimedesowych. Są one jednoznacznie wyznaczone przez generatory $\varphi(u)$, które są funkcjami jednej zmiennej. Generator jest ciągłą, malejącą funkcją określoną na odcinku $[0, 1]$, przyjmującą wartości w $[0, \infty]$, spełniającą warunek $\varphi(1) = 0$. Gdy $\lim\limits_{u \to 0+} \varphi(u) = \infty$, wówczas będziemy stosować oznaczenie $\varphi(0) = \infty$. Natomiast gdy $\varphi(0) = a < \infty$, to funkcję pseudoodwrotną do generatora $\varphi^{[-1]}$: $[0, \infty] \to$ $\to [0, 1]$ określa się formułą:

$$\varphi^{[-1]}(u) = \begin{cases} \varphi^{-1}(u) & 0 \le u \le \varphi(0) \\ 0 & \varphi(0) \le u \le \infty \end{cases}.$$

Twierdzenie 2 [Nelsen 1999]. Funkcja C: $[0, 1]^2 \to [0, 1]$ zadana wzorem:

$$C(u, v) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u) + \varphi(v)) \tag{3}$$

jest funkcją łączącą wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja φ jest wypukła.

Funkcję łączącą, określoną wzorem (3), nazywamy archimedesową, a funkcję φ – jej generatorem. Jeśli $\varphi(0) = \infty$, to archimedesową funkcję łączącą nazywa się silną, a w przeciwnym razie – słabą. Dla silnej zachodzi warunek $\varphi^{[-1]}(u) = \varphi^{-1}(u)$. W przypadku ogólnym otrzymuje się zależność:

$$F(x, y) = \varphi^{[-1]}(\varphi(F_1(x)) + \varphi(F_2(y))).$$

Archimedesowa funkcja łącząca umożliwia addytywną separację zmiennych i znacznie ułatwia modelowanie zależności. Ma też pożądane własności. Jest ona bowiem symetryczna, tzn. $C(u, v) = C(v, u)$, oraz łączna, tzn. $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ dla każdych $u, v, w \in [0, 1]$ [Nelsen 1999]. Ponadto, jeśli φ jest generatorem funkcji łączącej C, to $a\varphi$, gdzie $a > 0$, jest również generatorem C.

Podstawowe funkcje łączące Π oraz W są w pewnym sensie bazą pozostałych funkcji archimedesowych. Można mianowicie pokazać [Mesiar 1992], że dla każdej silnej archimedesowej funkcji łączącej C istnieje rosnąca funkcja f: $[0, 1] \to [0, 1]$, spełniająca warunki $f(0) = 0$ i $f(1) = 1$, taka że

$$C(u, v) = f^{-1}(\Pi(f(u), f(v))).$$

Natomiast dla słabej archimedesowej funkcji C zachodzi

$$C(u, v) = f^{-1}(W(f(u), f(v))).$$

Archimedesowe funkcje łączące możemy też zdefiniować w inny, równoważny sposób, wykorzystując pojęcie przekątnej. Mianowicie: funkcja łącząca C jest archimedesowa wtedy i tylko wtedy, gdy $\delta_C(u) < u$ dla każdego $0 < u < 1$. W przypadku silnej funkcji łączącej C jej przekątna spełnia warunek: $\delta_C(u) > 0$ dla $u > 0$. Dla słabych funkcji łączących mamy $\delta_C(u) = 0$ na pewnym odcinku $[0, a]$, gdzie $0 < a < 1$ [10].

Ponadto archimedesowe funkcje łączące można opisać za pomocą generatora multiplikatywnego $g(u) = e^{-\varphi(u)}$ [Schweitzer, Sklar 1981]. Generator g jest wklęsłą funkcją rosnącą, spełniającą warunki $g(0) = e^{-\varphi(0)}$ i $g(1) = 1$. Otrzymuje się wtedy zależność:

$$C(u, v) = g^{(-1)}(g(u)g(v)),$$

gdzie pseudoodwrotna funkcja $g^{(-1)}$: $[0, 1] \to [0, 1]$ określona jest wzorem

$$g^{(-1)}(u) = \begin{cases} 0 & 0 \le u \le g(0) \\ g^{-1}(u) & g(0) \le u \le 1 \end{cases}.$$

Dla silnej archimedesowej funkcji łączącej otrzymujemy $g(0) = 0$ oraz $g^{(-1)}(u) = g^{-1}(u)$. Generator multiplikatywny przekształca dystrybuantę $F(x)$ na inną dystrybuantę $g(F(x))$, podobnie zmienia dystrybuanty dwuwymiarowe. Generator $g(u)$

można więc traktować jako funkcję przekształcającą zmienne losowe. Transformuje on bowiem zmienną losową o dystrybuancie $F(x)$ na zmienną losową Y, której rozkład zadany jest dystrybuantą $g(F(x))$ [Sklar 1959].

Stosując multiplikatywny generator g, otrzymuje się zależność:

$$g(F(x, y)) = g(F_1(x))g(F_2(y)).$$

Zależność ta ma ciekawą interpretację. Wynika z niej, że dwuwymiarowa zmienna losowa, będąca wynikiem transformacji dystrybuanty F przez generator g, ma nieskorelowane brzegowe zmienne losowe.

W zastosowaniach wykorzystuje się rodziny archimedesowych funkcji łączących zależnych od parametru. W tym paragrafie przedstawiona będzie jedna z najczęściej stosowanych takich rodzin – rodzina Franka oraz Yagera i Morgensterna. Inne rodziny funkcji łączących zaprezentowane będą w dalszej części pracy. Więcej informacji na ten temat czytelnik może znaleźć w [Frees, Valdez 1998; Nelsen 1999; Wang 1999].

Funkcja łącząca, należąca do rodziny Franka, określona jest wzorem:

$$C_\alpha^F(u,v) = \frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{(e^{\alpha u}-1)(e^{\alpha v}-1)}{e^\alpha - 1}\right),$$

gdzie $\alpha \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$. Jej generator jest równy $\varphi_\alpha(u) = -\ln\left(\frac{e^{\alpha u}-1}{e^\alpha-1}\right)$, generator multiplikatywny – $g(u) = \frac{e^{\alpha u}-1}{e^\alpha-1}$, a graniczne funkcje łączące są podstawowymi funkcjami, tzn.

$$C_{-\infty}^F(u,v) = M, \qquad C_0^F(u,v) = \Pi, \qquad C_\infty^F(u,v) = W.$$

Rodzina Franka jest malejąca ze względu na parametr α, zachodzi bowiem zależność [Mesiar 1992]:

$$\alpha \le \beta \Rightarrow C_\alpha^F(u,v) \ge C_\beta^F(u,v)$$

dla każdego $u, v \in [0, 1]$.

Rodzinę funkcji łączących Franka można przedstawić w inny równoważny sposób, zmieniając jej parametryzację i wprowadzając parametr $\beta = e^\alpha$. Wtedy funkcja łącząca przybiera postać:

$$C_\beta^F(u,v) = \frac{1}{\ln\beta}\ln\left(1 + \frac{(\beta^u-1)(\beta^v-1)}{\beta-1}\right),$$

gdzie $\beta \in (0, 1) \cup (1, \infty)$, a graniczne funkcje łączące są równe

$$C_0^F(u,v) = M, \qquad C_1^F(u,v) = \Pi, \qquad C_\infty^F(u,v) = W.$$

Jej generatory są wtedy odpowiednio równe $\varphi(u) = -\ln\left(\frac{\beta^u - 1}{\beta - 1}\right)$ oraz $g(u) = \frac{\beta^u - 1}{\beta - 1}$.

Funkcje łączące należące do rodziny Franka są silnymi funkcjami łączącymi. Przykładem rodziny słabych jest rodzina Yagera [Mesiar 1992]. Jej elementy opisane są formułą

$$C_\alpha^Y(u,v) = \max\left(1 - ((1-u)^\alpha + (1-v)^\alpha)^{1/\alpha},\ 0\right),$$

gdzie $1 \le \alpha < \infty$. Granicznymi funkcjami łączącymi są $C_1^Y(u,v) = W$ oraz $C_\infty^Y(u,v) = M$, a generatorami są funkcje $\varphi(u) = (1-u)^\alpha$ oraz $g(u) = e^{-(1-u)^\alpha}$. Wtedy

$$\varphi^{[-1]}(x) = \begin{cases} 1 - x^{1/\alpha} & 0 \le x \le 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases} \quad \text{oraz} \quad g^{[-1]}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \le x \le e^{-1} \\ 1 - (-\ln x)^{1/\alpha} & e^{-1} < x \le 1 \end{cases}.$$

Elementy rodziny funkcji łączących Morgensterna są definiowane za pomocą wzoru

$$Mo_\alpha(u, v) = uv(1 + \alpha(1-u)(1-v)),$$

gdzie $-1 \le \alpha \le 1$. Dla $\alpha = 0$ otrzymujemy niezależność, tzn. $Mo_0 = \Pi$. W pozostałych przypadkach nie są to archimedesowe funkcje łączące. Nie spełniają one bowiem warunku łączności [Nelsen 1999].

Przedstawiona teraz zostanie konstrukcja złożonej funkcji łączącej opartej na tzw. modelu słabości (ang. *frailty*) [Frees, Valdez 1998; Oakes 1989; Wang 1999]. Zakłada się, że czas życia T każdej jednostki populacji, charakteryzowany funkcją przetrwania, zależy od jej słabości r, a słabość traktowana jest jako zmienna losowa R o dystrybuancie F_R. Ponadto postuluje się [Frees, Valdez 1998; Wang 1999], że warunkowa funkcja przeżycia przy ustalonej wartości słabości r wynosi

$$P(T > t \mid R = r) = B(t)^r,$$

gdzie $B(t)$ jest podstawową funkcją przeżycia odpowiadającą standardowej jednostce o słabości $r = 1$. Bezwarunkowa funkcja przeżycia jest wtedy równa

$$P(T > t) = \int_0^\infty B(t)^r dF_R(r) = M_R(\ln(B(t))),$$

gdzie $M_R(s) = \int_0^\infty e^{rs} dF_R(r)$ jest funkcją tworzącą momenty (f.t.m) zmiennej R.

Przyjmuje się teraz, że zmienne losowe X, Y spełniają założenia modelu słabości. Wtedy ich funkcje przeżycia są równe

$$\overline{F}_i(x) = \int_0^{\infty} B_i(x)^r dF_R(r) = M_R(\ln(B_i(x))$$

dla i = 1, 2. Zakładając warunkową niezależność zmiennych X, Y dla ustalonej słabości $R = r$, otrzymuje się następującą łączną funkcję przetrwania:

$$\overline{F}(x, y) = P(X > x, Y > y) = M_R(\ln(B_1(x)B_2(y)).$$

Gdy rozpatruje się funkcję $g(u) = \exp(M_R^{-1}(u))$, wtedy $g(\overline{F}_i(x)) = B_i(x)$ oraz

$$g(\overline{F}(x, y)) = B_1(x)B_2(y) = g(\overline{F}_1(x))g(\overline{F}_2(y)).$$

Z równania tego wynika, że zależność tę można opisać silną archimedesową funkcją łączącą przetrwania z generatorem multiplikatywnym $g(u)$ lub generatorem addytywnym $\varphi(u) = -\ln(g(u)) = -M_R^{-1}(u)$. Wynika z tego, że zależności w modelu słabości można przedstawić za pomocą silnych archimedesowych funkcji łączących, których generatory są wyznaczone w sposób jednoznaczny na podstawie f.t.m. zmiennej losowej słabości R. Tak określone funkcje łączące nazywa się złożonymi (ang. *compound*).

Przykład 2 [Wang 1999].

a) Jeśli słabość R ma rozkład gamma z f.t.m. $M_R(s) = (1 - s)^{-1/\alpha}$ dla $0 < \alpha < \infty$, to funkcja odwrotna do f.t.m. wyrażona jest wzorem $M_R^{-1}(u) = 1 - u^{-\alpha}$. Generatory indukowanej funkcji łączącej są odpowiednio równe $g(u) = \exp(1 - u^{-\alpha})$ oraz $\varphi(u) = u^{-\alpha} - 1$ i otrzymuje się funkcję łączącą o postaci:

$$C(u, v) = (u^{-\alpha} + v^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}.$$

Jest to element tzw. rodziny Claytona.

b) Jeśli słabość R ma rozkład stabilny z f.t.m. $M_R(s) = \exp(-(-s)^{1/\alpha})$ dla $\alpha \geq 1$, to $M_R^{-1}(u) = -(-\ln u)^{\alpha}$. Otrzymuje się wtedy generatory $g(u) = \exp(-(-\ln u)^{\alpha})$, $\varphi(u) = (-\ln u)^{\alpha}$ oraz funkcję łączącą

$$C(u, v) = \exp(-((-\ln u)^{\alpha} + (-\ln v)^{\alpha})^{1/\alpha}),$$

będącą elementem rodziny Gumbela.

c) Jeśli słabość R ma rozkład logarytmiczny z f.t.m. $M_R(s) = \dfrac{\ln(1 + e^s(\beta - 1))}{\ln \beta}$ dla $\beta > 0$, to $M_R^{-1}(u) = \ln \dfrac{\beta^u - 1}{\beta - 1}$. Wtedy $g(u) = \dfrac{\beta^u - 1}{\beta - 1}$, $\varphi(x) = -\ln \dfrac{\beta^u - 1}{\beta - 1}$ i otrzymuje się element rodziny Franka.

Charakterystyki wybranych rodzin funkcji łączących: Franka, Yagera, Morgensterna, Claytona i Gumbera, oraz podstawowych funkcji łączących: Π, M, i W podane są w tab. 1.

Tabela 1. Charakterystyki wybranych funkcji łączących

Rodzina	Wzór	Rodzaj*	$\varphi(u)$	$g(u)$	$M_g(s)$	Funkcje łączące graniczne
Franka	$\frac{1}{\alpha}\ln\left(1+\frac{(\exp(\alpha u)-1)(\exp(\alpha v)-1)}{\exp(\alpha)-1}\right)$ $\alpha \neq 0$	silna	$\ln\left(\frac{e^{\alpha u}-1}{e^{\alpha}-1}\right)$	$\frac{1-e^{\alpha u}}{1-e^{\alpha}}$	$\frac{\ln(1+e^{-s}(e^{\alpha}-1))}{\alpha}$	$C_{-\infty}=M$ $C_0=\Pi$ $C_{\infty}=W$
Yagera	$\max\left(1-((1-u)^{\alpha}+(1-v)^{\alpha})^{1/\alpha},\ 0\right)$ $1 \leq \alpha$	słaba	$(1-u)^{\alpha}$	$e^{-(1-u)^{\alpha}}$	$1-(-s)^{1/\alpha}$	$C_1=W$ $C_{\infty}=M$
Morgensterna	$uv(1+\alpha(1-u)(1-v))$ $-1 \leq \alpha \leq 1$	nie	–	–	–	$C_0=\Pi$
Claytona	$(u^{-\alpha}+v^{-\alpha}-1)^{-1/\alpha}$ $0 < \alpha$	silna	$u^{-\alpha}-1$	$e^{1-u^{-\alpha}}$	$(1-s)^{-1/\alpha}$	$C_0=\Pi$ $C_{\infty}=M$
Gumbela	$\exp(-((-\ln u)^{\alpha}+(-\ln v)^{\alpha})^{1/\alpha})$ $1 \leq \alpha$	silna	$(-\ln u)^{\alpha}$	$e^{-(-\ln u)^{\alpha}}$	$e^{-(-s)^{1/\alpha}}$	$C_1=\Pi$ $C_{\infty}=M$
Π	uv	silna	$-\ln u$	u	e^{s}	
M	$\min(u, v)$	nie	–	–	–	
W	$\max(u+v-1, 0)$	słaba	$1-u$	e^{u-1}	$s+1$	

* Kolumna ta dotyczy funkcji łączących archimedesowych, nie oznacza, że funkcja nie jest archimedesowa.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Frees, Valdez 1998; Nelsen 1999; Wang 1999].

Wielowymiarowe, archimedesowe funkcje łączące definiuje się w następujący naturalny sposób [Nelsen 1999]:

$$C^n(u_1, \ldots, u_u) = \varphi^{[-1]}(\varphi(u_1) + \ldots + \varphi(u_n)).$$

Korzystając z symetrii i łączności archimedesowych funkcji łączących, można przedstawić konstrukcję wielowymiarowych funkcji w sposób iteracyjny:

$$C^n(u_1, \ldots, u_n) = C(C^{n-1}(u_1, \ldots, u_{n-1}), u_n), \tag{4}$$

gdzie $C = C^2$. Jednakże nie zawsze tak otrzymane C^n będzie n-wymiarową funkcją łączącą. Funkcja $\varphi(u) = 1 - u$ generuje W^n, ale, jak wiemy, nie jest to n-wymiarowa funkcja łącząca. Trzeba jeszcze nałożyć dodatkowe warunki na funkcję φ, aby można było poprawnie korzystać ze wzoru (4). Warunkiem tym jest zupełna monotoniczność.

Definicja 4. Funkcja $f(u)$ jest zupełnie monotoniczna na przedziale J, jeśli jest na nim ciągła i spełnia warunek

$$(-1)^k \frac{d^k}{du^k} f(u) \geq 0 \tag{5}$$

dla każdego $u \in J$ i $k = 0, 1, 2, \ldots$, przy założeniu, że wszystkie pochodne istnieją.

Zachodzi wtedy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3 [Nelsen 1999]. Niech φ będzie ciągłą, malejącą funkcją na odcinku [0, 1], taką że $\varphi(0) = \infty$ oraz $\varphi(1) = 0$. Funkcja C^n: $[0, 1]^n \to [0, 1]$ dana wzorem (4) jest n-wymiarową funkcją łączącą dla wszystkich $n \geq 2$ wtedy i tylko wtedy, gdy funkcja odwrotna φ^{-1} jest zupełnie monotoniczną funkcją na $[0, \infty)$.

Przykładem n-wymiarowej archimedesowej funkcji łączącej jest uogólniona funkcja Claytona:

$$C^n(u_1, \ldots, u_n) = (u_1^{-\alpha} + \ldots + u_n^{-\alpha} - n + 1)^{-1/\alpha}.$$

W podobny sposób określa się n-wymiarowe słabe archimedesowe funkcje łączące. Zakłada się wtedy m-monotoniczność funkcji $\varphi^{[-1]}$, tzn. wzór (5) zachodzi dla $k = 0,1, \ldots, m$, gdzie $2 \leq n \leq m$. Przykładem jest n-wymiarowa funkcja łącząca Yagera:

$$C_\alpha^{Y,n}(u_1, \ldots, u_n) = \max\left(n - 1 - ((1-u_1)^\alpha + \ldots + (1-u_n)^\alpha)^{1/\alpha}, 0\right).$$

Normalne funkcje łączące są szczególnym rodzajem wielowymiarowych funkcji łączących. Definiuje się je jako dystrybuanty łączne wielowymiarowych rozkładów normalnych $X_1, \ldots, X_n$. Jednak stosuje się je również w odniesieniu do dowolnych rozkładów brzegowych.

Załóżmy, że istnieje ciąg standaryzowanych zmiennych losowych $T_1, \ldots, T_n$ o rozkładzie normalnym, tzn. $T_i \sim N(0, 1)$ o macierzy korelacji [Wang 1999].

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & & \rho_{1n} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \rho_{n1} & \rho_{n2} & & 1 \end{pmatrix},$$

gdzie $\rho_{ij} = \rho_{ji} = \rho(T_i, T_j)$ jest współczynnikiem korelacji między T_i i T_j. Łączny rozkład $(T_1, ..., T_n)$ ma wtedy gęstość

$$f(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \, |\mathbf{R}|}} \exp(-0{,}5\mathbf{t}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{t}),$$

gdzie $\mathbf{t} = (t_1, ..., t_n)$.

Macierz korelacji $\mathbf{R}$ możemy przedstawić w postaci iloczynu $\mathbf{AA}^T$, gdzie $\mathbf{A}$ jest macierzą trójkątną

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & & 0 \\ a_{21} & a_{22} & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Współczynniki macierzy $\mathbf{A}$ można wyznaczyć iteracyjnie, z góry na dół i z lewej do prawej strony, korzystając z tzw. algorytmu Cholesky'ego:

$$a_{ij} = \frac{\rho_{ij} - \sum_{s=1}^{j-1} a_{is} a_{js}}{\sqrt{1 - \sum_{s=1}^{j-1} a_{js}^2}},$$

gdzie $1 \le j \le i \le n$, $\sum_{s=1}^{0}(\cdot) = 0$, a dla $i > j$ mianownik w przedstawionym równaniu jest równy a_{jj}. Dla $n = 2$ macierz $\mathbf{A}$ przybiera prostą postać:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{1-\rho^2} \end{pmatrix}.$$

Niech H będzie dystrybuantą łącznego rozkładu określonych powyżej zmiennych $T_1, ..., T_n$. Normalną funkcję łączącą definiuje się w następujący sposób:

$$C_{\mathbf{R}}^{G}(u_1, \ldots, u_n) = H\left(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_n)\right),$$

gdzie Φ jest dystrybuantą standaryzowanego rozkładu normalnego.

Załóżmy, że $F_1, \ldots, F_n$ są dowolnymi dystrybuantami. Wtedy zmienne losowe

$$X_i = F_i^{-1}(\Phi(T_i))$$

mają łączną dystrybuantę określoną wzorem

$$F(x_1, \ldots, x_n) = H(\Phi^{-1}(F_1(x_1)), \ldots, \Phi^{-1}(F_n(x_n))).$$

W podobny sposób definiuje się wielowymiarową funkcję łączącą t-Studenta. Wektor losowy $\mathbf{X}$ ma n-wymiarowy rozkład t-Studenta z k stopniami swobody, jeśli można przedstawić go w postaci

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{S}}\mathbf{Z},$$

gdzie $\boldsymbol{\mu} \in R^n$, $S \sim \chi_k^2$ (rozkład chi-kwadrat z k stopniami swobody) oraz wektor losowy $\mathbf{Z}$ ma n-wymiarowy rozkład normalny $N_n(\mathbf{0}, \Sigma)$, gdzie Σ jest macierzą kowariancji. Ponadto $\boldsymbol{\mu}$, S i $\mathbf{Z}$ są niezależne. Funkcję łączącą indukowaną rozkładem łącznym wektora $\mathbf{X}$ nazywamy funkcją łączącą t-Studenta z k stopniami swobody. Można ją też określić wzorem:

$$C_{k,\mathbf{R}}^t(u_1, \ldots, u_n) = t_{k,\mathbf{R}}^n(t_k^{-1}(u_1), \ldots, t_k^{-1}(u_n)),$$

gdzie $\mathbf{R}$ jest macierzą o elementach $R_{ij} = \dfrac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}}$, $t_{k,\mathbf{R}}^n$ – dystrybuantą losowego wektora $\dfrac{\sqrt{k}\mathbf{Y}}{\sqrt{S}}$, $\mathbf{Y} \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$, a t_k – rozkładem brzegowym $t_{k,\mathbf{R}}^n$. Wszystkie rozkłady brzegowe $t_{k,\mathbf{R}}^n$ mają ten sam rozkład.

Wielowymiarowe funkcje łączące – normalna i t-Studenta – należą do tzw. eliptycznych funkcji rosnących. W przypadku $n = 2$ można podać analityczną postać tych funkcji, jednakże są to dość skomplikowane całki podwójne, rozwiązywane numerycznie [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001]:

$$C_\rho^G(x, y) = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left(\frac{-(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)} \right) dsdt,$$

$$C_{k,\rho}^t(x, y) = \int_{-\infty}^{t_k^{-1}(x)} \int_{-\infty}^{t_k^{-1}(y)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \left(1 + \frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{k(1-\rho^2)} \right)^{-(k+2)/2} dsdt,$$

gdzie $t_k^{-1}(x)$ jest funkcją odwrotną dystrybuanty jednowymiarowego rozkładu t-Studenta z k stopniami swobody.

4. Współczynniki zależności

Funkcje łączące modelują zależności zachodzące miedzy zmiennymi losowymi. Robią to w zakresie globalnym, jako wielowymiarowe dystrybuanty. Mogą też jednak mieć związek z miarami zależności, oceniającymi zależność w sposób punktowy, za pomocą pojedynczych wartości liczbowych.

Na początku paragrafu przedstawione będą w dużym skrócie najczęściej stosowane w praktyce miary zależności. Zaczniemy od najbardziej popularnej miary – współczynnika korelacji Pearsona ρ. Jest ona określona wzorem:

$$\rho(X, Y) = \frac{Cov(X, Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}},$$

gdzie kowariancja $Cov(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$.

Współczynnik ten spełnia warunek normujący $-1 \leq \rho \leq 1$. Równość $|\rho(X, Y)| = 1$ zachodzi jedynie wtedy, gdy istnieją $a, b \in R$ i $a \neq 0$, takie że $Y = aX + b$ prawie wszędzie. Współczynnik korelacji ρ jest więc miarą zależności liniowej. Małą wartość bezwzględna tego współczynnika nie wyklucza nieliniowej zależności. Przykładowo zmienne losowe $X \sim N(0, 1)$ oraz $Y = X^2$ są silnie zależne, ale $|\rho(X, Y)| = 0$. Niezależność i nieskorelowanie pokrywają się jedynie dla rozkładów brzegowych wielowymiarowego rozkładu normalnego. Należy też zdawać sobie sprawę, że rozkład łączny dwóch rozkładów normalnych nie musi być dwuwymiarowym rozkładem normalnym [Embrechts, McNeil, Straumann 2001] i wtedy nieskorelowane zmienne losowe nie muszą być niezależne.

Współczynnik korelacji Pearsona ma też inne wady [Embrechts, McNeil, Straumann 2001]. Przede wszystkim nie jest on niezmienniczy ze względu na nieliniowe rosnące przekształcenia $T: R \to R$, tzn. na ogół otrzymujemy

$$\rho(T(X), T(Y)) \neq \rho(X, Y).$$

Przykładowo, gdy $T(x) = \Phi(x)$, to

$$\rho(T(X), T(Y)) = \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{\rho(X, Y)}{2}\right).$$

Jak już wcześniej wspomniano, funkcje łączące są niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Pary zmiennych losowych związanych tą samą funkcją łączącą mogą więc mieć różne współczynniki korelacji Pearsona.

Ponadto nie można wyznaczyć współczynnika korelacji, gdy zmienne losowe mają nieskończoną wariancję. Odpadają wtedy przypadki badania zależności tą metodą, gdy zmienne losowe mają tzw. „ciężkie ogony", występujące jednak często w zagadnieniach finansowych czy ubezpieczeniowych. Nie jest więc z tego powodu określony współczynnik korelacji dla składowych wielowymiarowego rozkładu t-Studenta, gdy liczba stopni swobody $k \leq 2$.

Wymienionych wad nie mają dwa inne współczynniki zależności: Kendalla i Spearmana. Są to współczynniki oparte na porządkach, rangach, mocno związane z funkcjami łączącymi. Dodatkowo są one ściśle związane z pojęciem zgodności (ang. *concordance*). Pary: (x_1, y_1), (x_2, y_2) są zgodne, jeśli jednocześnie $x_1 < y_1$ i $x_2 < y_2$ lub $x_1 > y_1$ i $x_2 > y_2$, co jest równoważne $(x_1 < y_1)(x_2 < y_2) > 0$. Gdy zachodzi $(x_1 < y_1)(x_2 < y_2) < 0$, otrzymujemy niezgodność.

Definicja 5. Współczynnik zależności zmiennych losowych X i Y Kendalla τ określamy wzorem

$$\tau(X, Y) = P((X - X')(Y - Y') > 0) - P((X - X')(Y - Y') < 0),$$

gdzie (X', Y'') jest niezależną kopią (X'', Y'').

Współczynnik Kendalla jest więc różnicą prawdopodobieństw zgodności i niezgodności. Dla ciągłych zmiennych losowych zachodzi następujący wzór [Embrechts, McNeil, Straumann 2001]:

$$\tau(X, Y) = 4\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dC(u,v) - 1, \tag{6}$$

przedstawiający relację zachodzącą między tym współczynnikiem a funkcją łączącą C opisującą ich zależność. Dla archimedesowych funkcji łączących otrzymujemy [Embrechts, Londskog, McNeil 2001; Nelsen 1999]:

$$\tau(X,Y) = 1 + 4\int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)}du = 1 - 4\int_0^\infty x\left(\frac{d}{dx}\varphi^{[-1]}(x)\right)^2 dx = 1 + 4\int_0^1 \frac{g(u)\ln g(u)}{g'(u)}du.$$

Definicja 6. Współczynnik zależności Spearmana ρ_S zmiennych losowych X i Y o dystrybuantach F_1 oraz F_2 określany jest wzorem

$$\rho_S(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)). \tag{7}$$

Współczynnik ten, korzystając z pojęcia zgodności, możemy też określić formułą:

$$\tau(X, Y) = P((X - X')(Y - Y'') > 0) - P((X - X')(Y - Y'') < 0),$$

gdzie (X', Y'), (X'', Y'') są niezależnymi kopiami (X, Y) lub w przypadku ciągłych zmiennych losowych wzorem

$$\rho_S(X,Y) = 12\int_0^1\int_0^1 C(u,v)dudv - 3.$$

Korzystając z pojęcia zgodności, można zdefiniować współczynnik zgodności dwóch funkcji łączących C_1 i C_2 [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001]. Jest on wtedy określony całką

$$Q(C_1,C_2) = 4\int_0^1\int_0^1 C_2(u,v)dC_1(u,v) - 1.$$

W przypadku ciągłych zmiennych losowych, których zależność opisuje funkcja łącząca C, dla współczynnika Kendalla otrzymujemy dość intuicyjną zależność $\tau(X, Y) = Q(C, C)$. Natomiast współczynnik Spearmana mierzy zgodność ich funkcji łączącej z niezależnością, tzn. $\rho_S(X, Y) = 3Q(C, \Pi)$.

Znając postać funkcji łączącej C, można, posługując się wzorami (6) i (7), wyznaczyć współczynniki Kendalla i Spearmana. Korzysta się wtedy z tego, że obydwa współczynniki zależności są, tak jak funkcje łączące, niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Tabela 2 przedstawia wyróżnione funkcje łączące i odpowiadające im współczynniki zależności.

Tabela 2. Miary zależności wybranych funkcji łączących

Rodzina	τ	ρ_S	λ_U	λ_L
Franka	$1-\frac{4}{\alpha}(D_1(-\alpha)-1)$ $-1 \le \tau \le 1^*$	$1-\frac{12}{\alpha}(D_2(-\alpha)-$ $D_2(-\alpha))$ $-1 \le \rho_S \le 1^*$	0	0
Yagera	$1-\frac{2}{\alpha}$ $-1 \le \tau \le 1$	skomplikowana $-1 \le \rho_S \le 1$	$2-2^{1/\alpha}$	0
Morgensterna	$\frac{2}{9}\alpha$ $-\frac{2}{9} \le \tau \le \frac{2}{9}$	$-\frac{\alpha}{3}$ $-\frac{1}{3} \le \rho_S \le \frac{1}{3}$	0	0
Claytona	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$ $0 \le \tau \le 1$	skomplikowana $0 \le \rho_S \le 1$	0	$2^{-1/\alpha}$
Gumbela	$1-\frac{1}{\alpha}$ $0 \le \tau \le 1$	brak jawnej postaci $0 \le \rho_S \le 1$	$2-2^{1/\alpha}$	0
Π	0	0	0	0
M	1	1	1	1
W	-1	-1	0	0
Gaussa	$\frac{2}{\pi}\arcsin\rho$ $-1 \le \tau \le 1$	$\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$ $-1 \le \rho_S \le 1$	$\begin{cases} 0 & \rho < 1 \\ 1 & \rho = 1 \end{cases}$	$\begin{cases} 0 & \rho < 1 \\ 1 & \rho = 1 \end{cases}$
t_k-Studenta	$\frac{2}{\pi}\arcsin\rho$ $-1 \le \tau \le 1$	$\frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{\rho}{2}\right)$ $-1 \le \rho_S \le 1$	$2\bar{t}_{k+1}\left(\sqrt{\frac{(k+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right)^{**}$	λ_U

* Funkcje „Debye": $D_k(x) = \frac{k}{x^k}\int_0^x \frac{t^k}{e^t-1}dt$, ponadto zachodzi $D_k(-x) = D_k(x) + \frac{kx}{k+1}$.

** $\bar{t}_k$ jest funkcją przetrwania jednowymiarowego rozkładu t-Studenta z k stopniami swobody.

Źródło: opracowanie własne na podstawie: [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001; Frees, Valdez 1998; Wang 1999].

Przeglądając tab. 2, można łatwo zauważyć, że wykorzystując określone funkcje łączące do modelowania zależności między parami zmiennych losowych, natrafia się na pewne ograniczenia. Przykładowo rodzina funkcji Morgensterna zawęża zakres wartości współczynnika Kendalla do wartości między –2/9 a 2/9, a zakres wartości współczynnika Spearmanna ogranicza jeszcze bardziej. Natomiast rodziny Claytona i Gumbela rozpatrują jedynie nieujemne zależności. W wielu sytuacjach może to istotnie zawężać pole potencjalnych, praktycznych zastosowań funkcji łączących. Rodziny funkcji łączących Franka, Yagera, Gaussa i *t*-Studenta uwzględniają wszystkiej możliwe wartości współczynnika Kendalla i Spearmanna.

Inną niedogodnością archimedesowych funkcji łączących jest znaczne uproszczenie i dalsze zawężenie ewentualnych ich zastosowań do modelowania zależności, występujące w przypadku wielowymiarowym. Z postaci wielowymiarowej funkcji archimedesowej wynika, że dla każdej pary X_i, X_j zmiennych losowych współczynniki zarówno Kendalla, jak i Spearmana przyjmują te same wartości, tzn. otrzymujemy:

$$\tau = \tau(X_i, X_j) = \tau(X_k, X_l), \rho_S = \rho_S(X_i, X_j) = \rho_S(X_k, X_l).$$

Tych wad nie mają funkcje łączące gaussowskie i *t*-Studenta. Współczynniki zależności Kendalla i Spearmana są różne w odniesieniu do poszczególnych par; wynoszą one odpowiednio:

$$\tau(X_i, X_j) = \frac{2}{\pi}\arcsin(\rho(X_i, X_j)), \qquad \rho_S(X_i, X_j) = \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\frac{\rho(X_i, X_j)}{2}\right),$$

a ich zbiór możliwych wartości obejmuje cały przedział [–1, 1].

Oprócz badania zależności między zmiennymi losowymi na całej dziedzinie ich określoności, można się skupić jedynie na wartościach ekstremalnych zarówno dużych, jak i małych. W tym celu wprowadzone będzie pojęcie ekstremalnej zależności górnej oraz dolnej. Pojęcia te oparte będą na funkcjach łączących i, oczywiście, będą niezmiennicze ze względu na rosnące przekształcenia. Zadanie będzie uproszczone. Rozpatrzone zostaną jedynie ciągłe zmienne losowe.

Definicja 7 [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001]. Niech (X, Y) będzie łącznym rozkładem z brzegowymi zmiennymi losowymi o ciągłych dystrybuantach F_1 i F_2. Współczynnik górnej ekstremalnej zależności (X, Y) (ang. *upper tail dependence*) jest określony wzorem

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1} P(Y > F_2^{-1}(u) \mid X > F_1^{-1}(u)),$$

gdy powyższa granica istnieje. Współczynnik dolnej ekstremalnej zależności jest definiowany w analogiczny sposób:

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} P(Y > F_2^{-1}(u) \mid X > F_1^{-1}(u)).$$

Gdy $\lambda_U = 0$ ($\lambda_L = 0$), mówimy, że zmienne X oraz Y są asymptotycznie niezależne dla górnych (dolnych) wartości ekstremalnych. W pozostałych przypadkach mamy asymptotyczną zależność.

Wprowadzone współczynniki ekstremalnych zależności można również określić za pomocą funkcji łączących, korzystając z ich przekątnej. Dla ciągłych zmiennych losowych zachodzi bowiem zależność [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001]:

$$\lambda_U = \lim_{u \to 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u},$$

przy założeniu, że powyższa granica istnieje. Dla dolnej zależności wzór jest prostszy:

$$\lambda_L = \lim_{u \to 0} \frac{C(u, u)}{u}.$$

Wartości współczynników ekstremalnych zależności dla wybranych funkcji zależności podane są w tab. 2. Widzimy, że w odniesieniu do gaussowskich funkcji łączących ekstremalna asymptotyczna zależność istnieje jedynie dla ścisłej zależności, tzn. gdy $|\rho| = 1$. W przypadku funkcji łączących t-Studenta górna ekstremalna asymptotyczna zależność istnieje też dla innych wartości współczynnika korelacji. Tego typu funkcje łączące bardziej nadają się do modelowania zależności dla ekstremalnych wartości zmiennych losowych, zwłaszcza gdy występują tzw. grube ogony. Wartość λ_U rośnie wraz z ρ i maleje ze wzrostem liczby stopni swobody k. W przypadku granicznym, gdy $k \to \infty$, otrzymuje się asymptotyczną niezależność, tak jak dla gaussowskiej funkcji łączącej. Ponadto współczynnik górnej zależności w odniesieniu do funkcji łączącej t-Studenta jest równy współczynnikowi dolnej zależności.

5. Symulacje

W punkcie tym przedstawione będą metody umożliwiające symulację wartości brzegowych zmiennych losowych $X_1, ..., X_n$ na podstawie wielowymiarowych rozkładów ze strukturą zależności zadaną funkcją łączącą C. Na wstępie omówiony zostanie przypadek ogólny. W celu uproszczenia należy przyjąć, że zmienne losowe X_i mają ciągłe, rosnące dystrybuanty F_i. Ogólny algorytm generowania wartości z rozkładu n-wymiarowego jest następujący [Romano 2002]:

1. Wygenerować niezależnie n liczb losowych: $v_1, ..., v_n$, z rozkładu jednostajnego na odcinku [0, 1].

2. Podstawić $u_1 = v_1$.

3. Przyjąć $G(u_k; u_1, ..., u_{k-1}) = \dfrac{\dfrac{\partial^{k-1}}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} C(u_1, ..., u_k, 1, \ldots, 1)}{\dfrac{\partial^{k-1}}{\partial u_1 \ldots \partial u_{k-1}} C(u_1, ..., u_{k-1}, 1, \ldots, 1)}$.

4. Wyznaczyć $u_k = G^{-1}(v_k; u_1, ..., u_{k-1})$.
Punkty 3 i 4 należy powtórzyć dla $k = 2, ..., n$.

Otrzymane liczby losowe $u_1, ..., u_n$ są wygenerowane z n-wymiarowego rozkładu $(U_1, ..., U_n)$, gdzie U_i jest brzegowym rozkładem jednostajnym na [0, 1] ze strukturą zależności zadaną funkcją łączącą C. Natomiast liczby losowe $x_1, ..., x_n$, gdzie $x_i = F_i^{-1}(u_i)$, pochodzą z rozkładu $(X_1, ..., X_n)$. Ponadto funkcja $G(u_k; u_1, ..., u_{k-1})$, będąca prawostronną pochodną cząstkową, występująca w punkcie 3, jest równa dystrybuancie warunkowej

$$P(U_k \le u_k \mid U_1 = u_1, ..., U_{k-1} = u_{k-1}).$$

Symulacja oparta na złożonej funkcji łączącej wykorzystywać może poniższy algorytm [Wang 1999]:

1^Z. Wygenerować liczbę losową r z rozkładu R.

2^Z. Wygenerować niezależnie (wzajemnie i od R) n liczb losowych: $v_1, ..., v_n$, z rozkładu jednostajnego na odcinku [0, 1].

3^Z. Wyznaczyć $u_k = \left(-\frac{\ln v_k}{r}\right)$ dla $k = 1, ..., n$.

W przypadku gaussowskiej funkcji łączącej $C_{\mathbf{R}}^G$ można skorzystać z następującego algorytmu [Romano 2002]:

1^G. Wykonać dekompozycję Cholesky'ego $\mathbf{AA}^T = \mathbf{R}$ macierzy korelacji $\mathbf{R}$.

2^G. Wygenerować niezależnie n liczb losowych: $z_1, ..., z_n$, ze standaryzowanego rozkładu normalnego.

3^G. Wyznaczyć wektor $\mathbf{x} = \mathbf{Az}$, gdzie $\mathbf{z} = (z_1, ..., z_n)$, $\mathbf{x} = (x_1, ..., x_n)$.

4^G. Wyznaczyć $u_k = \phi(x_k)$, dla $k = 1, ..., n$.

Liczby losowe $u_1, ..., u_n$ pochodzą z n-wymiarowego rozkładu $(U_1, ..., U_n)$, natomiast $x_1, ..., x_n$ są wygenerowane z n-wymiarowego rozkładu normalnego $(X_1, ..., X_n)$ o macierzy korelacji $\mathbf{R}$.

Dla struktury zależności zadanej funkcją łączącą t_k-Studenta można skorzystać z następującego algorytmu [Romano 2002]:

1^S, 2^S. Jak dla gaussowskiego.

3^S. Wygenerować liczbę losową s z rozkładu χ_k^2 (chi-kwadrat z k stopniami swobody), niezależnie od $\mathbf{z}$.

4^S. Wyznaczyć wektor $\mathbf{x} = \sqrt{\frac{k}{s}}\,\mathbf{Az}$.

5^S. Wyznaczyć $u_k = t_v(x_k)$, dla $k = 1, ..., n$.

Algorytm dla funkcji łączącej Claytona podany przez Marshalla i Olkina w [Marshall, Olkin 1998] przybiera postać:

1^C. Wygenerować niezależnie n liczb losowych: $y_1, ..., y_n$, z rozkładu wykładniczego $F(x) = 1 - e^{-x}$.

2^C. Wygenerować liczbę losową z z rozkładu gamma $\left(\frac{1}{\alpha},\ 1\right)$, niezależnie od **y**.

3^C. Wyznaczyć $u_i = \left(1 + \frac{y_i}{z}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}$ dla $i = 1, ..., n$.

Przedstawione algorytmy ulegają pewnemu uproszczeniu dla 2-wymiarowych funkcji łączących. W przypadku ogólnym otrzymujemy:

3′. Przyjąć $G(u_2; u_1) = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}$ (pochodna prawostronna).

W szczególnym przypadku dla rodziny Franka (punkt 4) przybiera postać [Romano 2002]:

$$u_2 = -\frac{1}{\alpha}\ln\left(1 + \frac{v_2(e^{-\alpha} - 1)}{v_2 + (1 - v_1)e^{-\alpha v_1}}\right),$$

a dla rodziny Claytona zachodzi równość:

$$u_2 = \left(1 + v_1^{-1/\alpha}(u_2^{-\alpha/(\alpha+1)} - 1)\right)^{-1/\alpha},$$

Natomiast dla funkcji łączącej Morgensterna można zastosować algorytm [Romano 2002]:

1^M. Wygenerować niezależnie dwie liczby losowe: v_1, v_2, z rozkładu jednostajnego na odcinku [0, 1].

2^M. Podstawić $u_1 = v_1$.

3^M. Obliczyć $a = \alpha(2u_1 - 1) - 1$, $b = (1 - \alpha(2u_1 - 1))^2 + 4\alpha v_2(2u_1 - 1)$.

4^M. Wyznaczyć $u_2 = \frac{2v_2}{\sqrt{b} - a}$.

Również w przypadku gaussowskiej funkcji łączącej następuje pewne ułatwienie:

3^G. Podstawić $x_1 = z_1$; $x_2 = rz_1 + \sqrt{1 - r^2}\, z_2$, gdzie r jest współczynnikiem korelacji między zmiennymi X i Y.

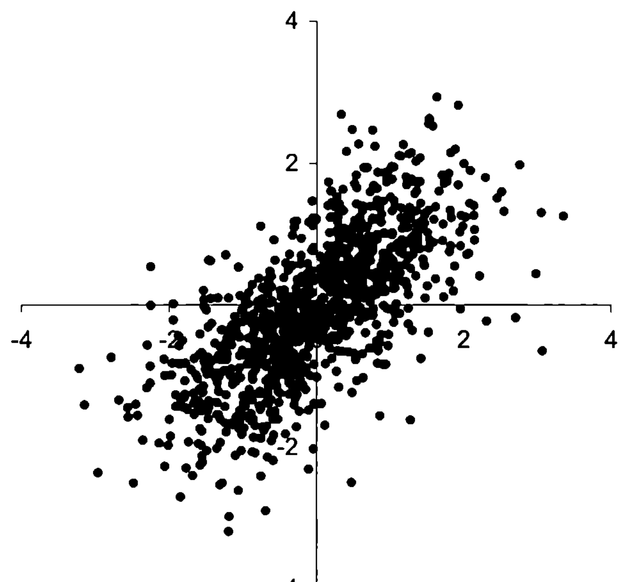
Ułatwienie to można też wykorzystać w algorytmie dotyczącym funkcji łączącej t_k-Studenta.

Przeglądając przedstawione algorytmy generowania wartości rozkładów brzegowych, można zauważyć, że proponuje się różne rozwiązania dla tych samych funkcji łączących. Przykładowo dla funkcji Claytona występują trzy różne algorytmy. Można generować liczby losowe, korzystając ze wzoru ogólnego, albo też wykorzystać w tym celu algorytm oparty na funkcji złożonej. W przypadku funkcji Claytona funkcja generująca momenty $M_R(s)$ odpowiada rozkładowi gamma, można więc z łatwością algorytm ten zastosować. Podobnie jest w sytuacji algorytmu podanego w [Marschall, Olkin 1988] opartego na rozkładach gamma i wykładniczym.

Przykład 3. Wygenerowano losowo 1072 wartości zależnych zmiennych losowych X i Y o jednakowym rozkładzie normalnym $N(0, 1)$ i współczynniku korelacji $\rho = 0{,}7$, powiązanych różnymi funkcjami łączącymi. Wartości te przedstawione będą na wykresach koleracyjnych. Będą to funkcje łączące: Franka $\alpha = 6{,}2$ (rys. 1a); Claytona $\alpha = 2$ (rys. 1b); Gaussa (rys. 1c) oraz t-Studenta dla $k = 4$ (rys. 1d). Powyższe funkcje łączące generują różne rozkłady łączne, przy tych samych normalnych rozkładach brzegowych i współczynniku korelacji. Jedynie w przypadku gaussowskiej funkcji łączącej otrzymujemy łączny rozkład normalny.

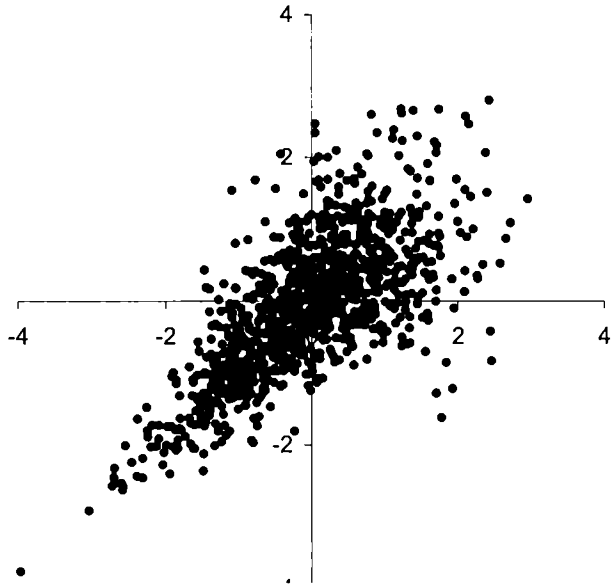
Dla funkcji Franka i Gaussa występuje ekstremalna niezależność zarówno dolna, jak i górna: $\lambda_L = \lambda_U = 0$. Wykresy korelacyjne nie wykazują skupiania się punktów wzdłuż prostej $y = x$, są „zaokrąglone", nie ma „ostrzy". Trochę inaczej wygląda wykres dla funkcji t-Studenta o 4 stopniach swobody. Występuje tu średnia ekstremalna zależność: $\lambda_L = \lambda_U = 0{,}39$ zarówno dolna, jak i górna. Wykres jest bardziej rozciągnięty wzdłuż tej prostej, ale nie ma „ostrzy". Współrzędne punktów przyjmują też znacznie większe wartości niż na innych wykresach.

Na uwagę zasługuje przypadek funkcji łączącej Claytona. Tutaj wyraźnie widać różnicę między zależnością a niezależnością ekstremalną. Występuje tu górna niezależność ekstremalna: $\lambda_U = 0$. Wykres jest w pierwszej ćwiartce „zaokrąglony". Natomiast jest duża dolna zależność: $\lambda_L = 0{,}71$. Punkty na wykresie korelacyjnym są dla małych wartości skupione wokół prostej $y = x$, widać wyraźne „ostrze".

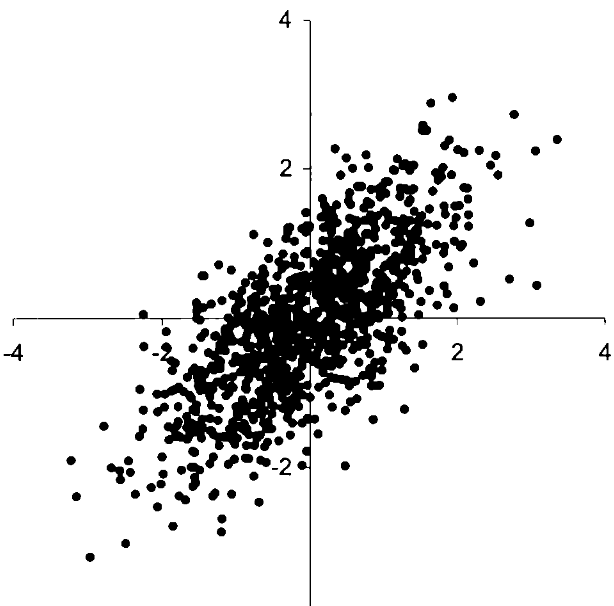


Rys. 1a. Symulacja na podstawie funkcji łączącej Franka $\alpha = 6{,}2$

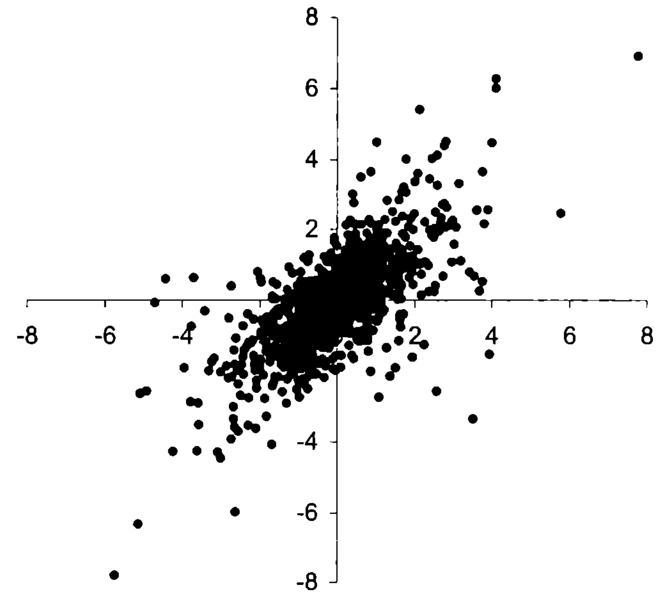
Źródło: opracowanie własne.



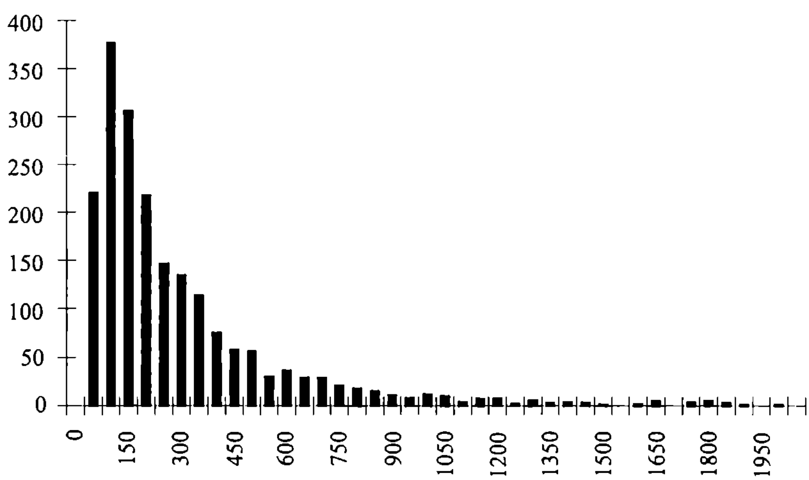
Rys. 1b. Symulacja na podstawie funkcji łączącej Claytona $\alpha = 2$
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1c. Symulacja na podstawie funkcji łączącej Gaussa
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 1d. Symulacja na podstawie funkcji łączącej t-Studenta, $k = 4$
Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Histogram rozkładu $Z = X + Y$
Źródło: opracowanie własne.

Przestawione symulacje mogą pomóc w wyznaczeniu rozkładu sumy zależnych zmiennych losowych $Z = X_1 + ... + X_m$. Znając funkcję łączącą, opisującą strukturę ich zależności, oraz poszczególne rozkłady brzegowe X_i, można n razy wygenerować wartości zmiennych X_i, wybierając algorytm odpowiadający funkcji łączącej a następnie je dodać, otrzymując n realizacji sumy Z.

Przykład 4. Zbadano rozkład sumy $Z = X + Y$, gdzie rozkłady brzegowe mają rozkład logarytmiczno-normalny: $X \sim LN(5;\ 1,1)$ i $Y \sim LN(3;\ 0,7)$, a zależność opisana jest funkcją łączącą Claytona z parametrem $\alpha = 4$. Wybierając algorytm Marshalla-Olkina, wygenerowano $n = 2000$ losowych wartości zmiennych X i Y oraz obliczono wartości sumy Z. Obliczono podstawowe charakterystyki zmiennej Z: wartość oczekiwaną $E(Z) = 299,83$, odchylenie standardowe $\sigma_Z = 424,66$, medianę $Me = 169,89$, modalną $Mo = 134,51$ oraz kwantyle $Q_{0,05} = 33,11$ i $Q_{0,95} = 964,5$. Histogram wygenerowanych wartości sumy przedstawiono na rys. 2. Widać, że rozkład sumy Z charakteryzuje się wyraźną prawostronną asymetrią.

Gdy zmienne losowe przedstawiają ryzyko ubezpieczeniowe, np. wielkości badanej szkody, kwantyl $Q_{0,95}$ może być interpretowany jako prosta miara ryzyka: $\mathrm{VaR}_{0,95}(Z)$ (ang. *value at risk*). W omawianym przykładzie wynosi on 964,5 i może być interpretowany jako wartość zagregowanej szkody Z, powyżej której znajduje się 5% największych, najbardziej ryzykownych wartości.

6. Zakończenie

Przedstawiony w pracy zarys teorii funkcji łączących nie jest oczywiście pełny. Brakuje wielu istotnych problemów związanych funkcjami łączącymi. Przede wszystkim trzeba omówić niezmiernie ważne zagadnienie dotyczące wyboru odpowiedniej funkcji łączącej, dopasowania jej do istniejących danych empirycznych. Jest to w zasadzie zagadnienie estymacji nieparametrycznej, które jednak można podczas rozpatrywania rodzin funkcji sprowadzić do przypadku parametrycznego. Więcej informacji na ten temat czytelnik może znaleźć m.in. w [Frees, Valdez 1998; Romano 2002]. Ponadto należałoby znacznie szerzej omówić równie ważne zagadnienie badania zależności ekstremalnych [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001], czy powiązania funkcji łączących z innymi sposobami badania zależności [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001, Nelson 1999]. W pracy problemy te jedynie zasygnalizowano.

Osobnym zagadnieniem są zastosowania funkcji łączących do rozwiązywania praktycznych problemów, np. do zagadnień dotyczących finansów i ubezpieczeń. Zastosowania te czytelnik może znaleźć w pracach [Embrechts, Lindskog, McNeil 2001; Embrechts, McNeil, Straumann 2001; Frees, Valdez 1998; Jajuga, Kuziak 2001; Oakes 1989; Romano 2002; Wang 1999].

Literatura

Denneberg D., *Lectures on Non-Additive Measure and Integral*, Kluwer Academic, Boston 1994.
Embrechts P., Lindskog F., McNeil A., *Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management*, ETH Zurich, preprint, 2001.

Embrechts P., McNeil A., Straumann D., *Correlation and Dependence in Risk Management: Properties and Pitfalls*, [w:] M. Dempster, H.K. Moffatt, *Risk Management: Value at Risk and Beyond*, Cambridge University Press, Cambridge 2001.

Frees E.W., Valdez E.A., *Understanding Relationships Using Copulas*, North Amer. Actuarial J. 1998, 2, 1-25.

Grabisch M., Nguyen H.T., Walker E.A., *Fundamentals of Uncertainty Calculi with Application to Fuzzy Inference*, Kluwer Academic, Dortrecht 1995.

Heilpern S., *A Rank-Dependent Generalization of Zero Utility Principle*, Insurance: Mathematics and Economics 2003, 33, 67-73.

Heilpern S., *Using Choquet Integral in Economics*, Statistical Papers 2002, 43, 53-74.

Jajuga K., Kuziak K., *Modeling Relationships in Multivariate Data*, „Taksonomia 10", Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 988, AE, Wrocław 2003, s. 461-471.

Marshall R., Olkin I., *Families of Multivariate Distributions*, J. American Statistical Association 1988, 83, 834-841.

Mesiar R., *Fuzzy Sets and Probability Theory*, Tatra Mountains Math. Publ. 1, 1992, 105-123.

Nelsen R.B., *An Introduction to Copulas*, Springer, New York 1999.

Oakes D., *Bivariate Survival Model Induced by Frailties*, J. American Statistical Association 1989, 84, 487-493.

Romano C., *Calibrating and Simulating Copula Functions: An Application to the Italian Stock Market*, University of Rome, working paper, 2002.

Schweitzer B., Sklar A., *Probabilistic Metric Spaces*, North-Holland, New York 1981.

Sklar A., *Fonctions de Repartition an Dimensions et Leurs Marges*, Publ. Inst. Statist. Univ. Paris 1959, 8, 229-231.

Wang S.S., *Aggregation of Correlated Risk Portfolios: Models & Algorithms*, CAS Committee on Theory of Risk, working paper, 1999.

Yaari M.E., *The Dual Theory of Choice under Risk*, „Econometrica" 1987, 55, 95-116.

COPULAS – BASIC NOTIONS AND PROPERTIES

Summary

The paper is devoted to the copulas, which are the important tools for studing the dependence between random variables. The basic definitions, notions, theorems and properties connected with copulas are presented. The main families of copulas: Archimedean and elliptical are investigated. The frailty model strictly connected with Archimedean copulas and relations between the copulas and the coefficients of correlations: Kendall's, Spearman's, Pearson's and tail dependence are studied. The last section is devoted to the methods of simulation from copulas. The simulation of the distribution of sums of random variables is presented.