PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1097 — 2005
Statystyka ekonomiczna

Jerzy Wawrzynek

INDEKSY AGREGATOWE – BŁĘDY OCENY

1. Wstęp

Upłynęło ponad 130 lat od ukazania się w roku 1871 rozprawy *Die Berechnung einer mittleren Warenpreissteigerung* 37-letniego E. Laspeyres'a oraz wydania tuż po niej – w roku 1874 – pracy młodziutkiego, 23-letniego H. Paaschego pt. *Ueber die Preisentwicklung der letzten Jahre nach der Hamburger Boersennotierung*. Zawarte w wymienionych pracach propozycje sposobów syntetycznego pomiaru zmian cen lub zmian ilości (masy fizycznej) ustalonego koszyka dóbr (produktów lub usług), które nastąpiły w określonym przedziale od momentu lub okresu c do momentu lub okresu t, wytrzymały próbę czasu i znajdują – w różnych zagadnieniach zarówno makroekonomii, jak i mikroekonomii – powszechne zastosowanie w analizie dynamiki cen lub dynamiki rozmiarów fizycznych, a w konsekwencji także w analizie dynamiki wartości danego zbioru dóbr. Przypomnijmy tylko, że agregatowy indeks cen Laspeyres'a IP_L oraz agregatowy indeks cen Paaschego IP_P wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$IP_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{ic}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{ic}} (100\%) \tag{1}$$

oraz

$$IP_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{it}} (100\%), \tag{2}$$

podczas gdy agregatowy indeks ilości Laspeyres'a IQ_L oraz agregatowy indeks ilości Paaschego IQ_P wyrażają się odpowiednio wzorami:

$$IQ_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{ic}} (100\%) \tag{3}$$

oraz

$$IQ_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{ic}} (100\%), \tag{4}$$

gdzie: P_{ic} – cena jednostkowa produktu lub usługi i ($i = 1, ..., n$) w okresie (chwili) c, zwanym okresem podstawowym,

Q_{ic} – ilość (masa fizyczna) produktu lub usługi i ($i = 1, ..., n$) w okresie (chwili) c,

P_{it} – cena jednostkowa produktu lub usługi i ($i = 1, ..., n$) w okresie (chwili) t, zwanym okresem badanym (bieżącym),

Q_{it} – ilość (masa fizyczna) produktu lub usługi i ($i = 1, ..., n$) w okresie (chwili) t.

W kontekście wzorów (1)-(4) oczywisty jest też sposób pomiaru dynamiki zmian wartości badanego koszyka dóbr zgodnie z indeksem

$$IV = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{ic}} (100\%), \tag{5}$$

związanym z agregatowymi indeksami cen i masy fizycznej w ten sposób, że

$$IV = IP_L \cdot IQ_P = IP_Q \cdot IQ_L. \tag{6}$$

W sposób równoważny wzory (1)–(5) można przedstawić w postaci

$$IP_L = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_c}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_c} (100\%), \tag{7}$$

$$IP_P = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_t} (100\%), \tag{8}$$

$$IQ_L = \frac{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_c} (100\%), \tag{9}$$

$$IQ_P = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_c} (100\%), \tag{10}$$

$$IV = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_c} (100\%), \tag{11}$$

gdzie $\mathbf{p}_c = \begin{bmatrix} P_{1c} \\ P_{2c} \\ \vdots \\ P_{nc} \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_t = \begin{bmatrix} P_{1t} \\ P_{2t} \\ \vdots \\ P_{nt} \end{bmatrix}$, $\mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} Q_{1c} \\ Q_{2c} \\ \vdots \\ Q_{nc} \end{bmatrix}$, zaś $\mathbf{q}_c = \begin{bmatrix} Q_{1t} \\ Q_{2t} \\ \vdots \\ Q_{nt} \end{bmatrix}$.

W praktyce wykorzystuje się także inne indeksy agregatowe, najczęściej będące modyfikacjami indeksów Laspeyres'a i Paaschego. Pewną popularność zyskały np. agregatowe indeksy cen $IP_F = \sqrt{IP_L \cdot IP_P}$ i agregatowe indeksy masy fizycznej $IQ_F = \sqrt{IQ_L \cdot IQ_P}$, zdefiniowane przez I. Fishera[1] jako średnie geometryczne odpowiednich indeksów Laspeyres'a i Paaschego.

Zagadnienia konstrukcji indeksów agregatowych dynamiki cen, wielkości i wartości określonego zbioru dóbr są omawiane w literaturze obfitującej w monografie i niezliczoną liczbę artykułów, nierzadko o polemicznej treści. W języku polskim wyróżnić należy książkę R. Kulczyckiego [1] oraz monografię W. Welfego [4] o historycznej już wartości. We wrocławskim środowisku statystyczno-ekonomicznym wybitną popularyzatorką, a zarazem umiejętnym interpretatorem i uznanym krytykiem stosowania indeksów agregatowych dynamiki cen oraz rozmiarów fizycznych jako narzędzia analizy różnych procesów i zjawisk społeczno-gospodarczych była Profesor Urszula Siedlecka. W jednej z Jej ostatnich prac (zob. [3]) na szczególną uwagę zasługują m.in. komentarze na temat obliczania dynamiki produktu krajowego brutto oraz indeksów giełdowych.

[1] Zob. I. Fisher, *The Making of Index Number*, Boston 1927 (cyt. za [5]).

2. Indeksy agregatowe jako parametry statystyczne

Dowolny z rozpatrywanych tu indeksów agregatowych IP_L, IP_Q, IP_F, IQ_L, IQ_P, IQ_F lub IV może być w odniesieniu do ustalonego koszyka dóbr (produktów lub usług) oraz zadanego przedziału czasu od c do t traktowany jako parametr statystyczny charakteryzujący bądź to dynamikę cen lub dynamikę rozmiarów fizycznych, bądź to dynamikę wartości danego zbioru dóbr. Wielkość dowolnego z tych parametrów będzie znana lub można ją dokładnie obliczyć, jeśli składowe wektorów $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_c$ i $\mathbf{q}_t$ konstytuujących odpowiednie indeksy agregatowe mają dokładnie znane wartości. Przyjęcie założenia, że wartości składowych wektorów $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_c$ i $\mathbf{q}_t$ są znane w sposób dokładny, jest uzasadnione w wielu zastosowaniach mikroekonomicznych, np. przy wyznaczaniu indeksów dynamiki wielkości produkcji, wartości sprzedaży lub dynamiki cen fabrycznych w badanym przedsiębiorstwie. To samo odnosi się do niektórych stosowanych w praktyce indeksów giełdowych.

W wielu jednak ważnych zagadnieniach makroekonomicznych, takich jak wyznaczanie indeksu dynamiki produktu krajowego brutto (PKB) lub obliczanie indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych (*consumer price index* – CPI), dokładne wartości składowych wektorów $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_c$ i $\mathbf{q}_t$ pozostają nieznane, a poważny wysiłek statystyków i ekonomistów koncentruje się na ich efektywnej estymacji. W celu oszacowania wskaźnika dynamiki PKB – podstawowego w skali międzynarodowej indeksu oceny stanu zarządzania gospodarką państwa – wektory $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_c$ i $\mathbf{q}_t$ szacuje się zgodnie z systemem zbiorczych zestawień rachunków gospodarki narodowej (*system of national accounts* – SNA), wprowadzonym według zaleceń ONZ w wielu krajach, w tym od roku 1993 w Polsce. W większości krajów zaś informacje w celu estymacji wskaźnika CPI zbiera się metodą badań reprezentacyjnych z wykorzystaniem techniki ankietowania. W Polsce informacje potrzebne do oszacowania wektorów $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$ i $\mathbf{q}_c$ są zbierane w przeszło 300 rejonach, na które podzielono obszar kraju, a notowania cen towarów i usług konsumpcyjnych obejmujące około 1800 pozycji prowadzone są przez ankieterów mniej więcej w 28 tysiącach punktów handlowo-usługowych.

Podane przykłady wskazują, że w wielu zastosowaniach makroekonomicznych nie jest możliwe wyznaczenie dokładnych wartości parametrów IP_L, IP_Q, IP_F, IQ_L, IQ_P, IQ_F lub też IV, gdyż możliwe jest jedynie oszacowanie $\tilde{IP}_L$, $\tilde{IP}_P$, $\tilde{IQ}_L$, $\tilde{IQ}_P$, $\tilde{IV}$, $\tilde{IP}_F$ oraz $\tilde{IQ}_F$ tych parametrów poprzez estymatory $\tilde{\mathbf{p}}_c, \tilde{\mathbf{p}}_t, \tilde{\mathbf{q}}_c, \tilde{\mathbf{q}}_t$ wyznaczających je wektorów $\mathbf{p}_c$, $\mathbf{p}_t$, $\mathbf{q}_c$ i $\mathbf{q}_t$. Zatem zastosowanie agregatowego indeksu cen IP_L w roli indeksu CPI polega na oszacowaniu indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych CPI za pomocą estymatora $\tilde{IP}_L$, zastosowanie zaś agregatowego indeksu

wartości IV w roli indeksu PKB polega na oszacowaniu indeksu dynamiki PKB za pomocą estymatora $\tilde{IV}$.

Szczególne zainteresowanie polityków i elit rządzących wielu krajów budzi poprawność oszacowania indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych obliczanego według formuły Laspeyres'a (1) lub (7). Precyzyjnie rzecz ujmując, indeks CPI mierzy kształtowanie się kosztów zakupu określonego koszyka dóbr (tzn. nie tylko zadana jest liczba n dóbr, ale i każde z nich jest dokładnie wyspecyfikowane) w okresie t w relacji do przeszłego okresu c w ilościach wyznaczonych przez wektor $\mathbf{p}_c$, dokonywanych w ustalonej próbie punktów sprzedaży. Stąd też indeks dynamiki cen i usług konsumpcyjnych jest w świadomości społecznej traktowany często jako aproksymacja wskaźnika kosztów utrzymania lub wskaźnika inflacji. Na przykład w niektórych krajach – z USA na czele – publikowane corocznie wartości CPI są podstawą indeksacji wysokości świadczeń opieki społecznej, stanowią często argument w trakcie negocjacji nowych umów zbiorowych, a identyfikowanie CPI ze wskaźnikiem inflacji jest uwzględniane przy formułowaniu celów polityki monetarnej państw lub ugrupowań gospodarczych emitujących wspólną walutę. Publikowane wartości oszacowań wskaźnika CPI wzbudzają – ze względu na ich bezpośrednie implikacje społeczno-polityczne – pewne emocje i wątpliwości, będące wynikiem świadomości różnego rodzaju błędów popełnianych w trakcie estymacji indeksu CPI, a także rodzą zainteresowanie wielkościami spowodowanych przez nie odchyleń.

W literaturze (por. np. White [5] , von der Lippe [2], Siedlecka [3]) wyróżnia się m.in. następujące rodzaje błędów estymacji:

- błąd spowodowany pojawieniem się produktów i usług substytucyjnych,
- błąd niestabilności próby,
- błąd spowodowany pojawieniem się nowych produktów i usług,
- błąd wynikający ze zmiany jakości produktów i usług.

Wymienione tu typy odchyleń zostaną scharakteryzowane poniżej, a równocześnie przedstawione zostaną propozycje ocen wielkości tych błędów.

3. Produkty i usługi substytucyjne jako źródło błędu estymacji

Obciążenie estymatora IP_L spowodowane pojawieniem się dóbr substytucyjnych jest inherentnym błędem każdego indeksu agregatowego wykorzystującego zasadę ustalonego koszyka dóbr, który obliczany jest w celu przybliżenia rzeczywistej dynamiki kosztów utrzymania. Indeks dynamiki cen i usług konsumpcyj-

nych CPI wyznaczany jako agregatowy indeks cen $IP_L = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_c}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_c}$ uwzględnia dwukrotnie ten sam wektor $\mathbf{q}_c$ rozmiarów konsumpcji ustalonego zbioru dóbr w okresie bazowym c i tym samym nie pozostawia miejsca na jakiekolwiek realnie dokonujące się w okresie t substytucje wynikające np. ze zmiany relacji cen między parą substytucyjnych dóbr. Wielkość tego obciążenia zależy od:

- liczby dóbr substytucyjnych w relacji do liczby dóbr w wektorze $\mathbf{q}_c$,
- natężenia zmian relacji cenowych między parami dóbr substytucyjnych,
- stopnia dezagregacji dóbr (szczegółowości ich identyfikacji).

Analogiczne uwagi odnosiłyby się do bardziej hipotetycznego zastosowania indeksu cen $IP_P = \frac{\mathbf{p}_t^T \mathbf{q}_t}{\mathbf{p}_c^T \mathbf{q}_t}$ w roli indeksu CPI.

Warto w tym kontekście odnieść się do specyficznego wskaźnika kosztów utrzymania (dynamiki cen) IP_K, którego autorem jest Konues (zob. np. White [5]). Niech zatem $\mathrm{E}(\mathbf{p}, \overline{u}) = \min_{\mathbf{q}} [\mathbf{p}^T \mathbf{q} | U(\mathbf{q}) \geq \overline{u}]$ oznacza minimalną wartość funkcji kosztów utrzymania konsumenta gwarantującą mu – przy poziomie cen wyznaczonym przez wektor $\mathbf{p}$ – referencyjny poziom użyteczności (standard życia) $\overline{u}$. Indeks kosztów utrzymania (dynamiki cen) IP_K w okresie t w relacji do okresu c wyraża się wzorem

$$IP_K = \frac{\mathrm{E}(\mathbf{p}_t, \overline{u})}{\mathrm{E}(\mathbf{p}_c, \overline{u})}. \tag{12}$$

Oznacza to, że indeks kosztów utrzymania IP_K jest ilorazem minimalnej wartości wydatków konsumpcyjnych zapewniających poziom użyteczności $\overline{u}$ przy cenach $\mathbf{p}_t$ w okresie bieżącym t w stosunku do minimalnej wartości wydatków konsumpcyjnych zapewniających taki sam poziom użyteczności $\overline{u}$ przy cenach $\mathbf{p}_c$ w okresie podstawowym. Okazuje się przy tym, że dla szerokiej klasy funkcji użyteczności zachodzi nierówność[2]

$$IP_P \leq IP_K \leq IP_L, \tag{13}$$

[2] Zob. W.E. Diewert, *The Theory of Cost-of-living Index and the Measurement of Welfare Change*, [w:] *Price Level Measurement: Proceedings of a Conference Sponsored by Statistics Canada*, Ottawa 1983, s. 163-223 (cyt. za [5]).

sugerująca zastosowanie w roli estymatora indeksu CPI odpowiednio określonej średniej obu indeksów IP_L i IP_P, np. ich średniej geometrycznej $IP_F = \sqrt{IP_L \cdot IP_P}$. Wówczas miarą błędu estymacji spowodowanego pojawieniem się dóbr substytucyjnych może być wielkość

$$\Delta_{sub} = IP_L - IP_F .$$

Z wyników około 10 różnych badań przeprowadzonych w ostatnim ćwierćwieczu XX w. w Kanadzie, USA i W. Brytanii (zob. [5], s. 307-308) wynika, że wielkość obciążenia Δ_{sub} nie przekracza 0,3% w skali roku (tzn. $t = c + 1$).

4. Niestabilność próby jako źródło błędu estymacji

Jak już podano w punkcie 2, informacje potrzebne do oszacowania wektorów $\mathbf{p}_c$ i $\mathbf{p}_t$ w celu estymacji indeksu cen IP_L zbierane są w Polsce mniej więcej w 28 tysiącach punktów handlowo-usługowych. Podobnie gęsta sieć jednostek statystycznych jest badana w celu oceny indeksu kosztów utrzymania CPI w innych krajach. Zastosowanie indeksu cen Laspeyres'a w roli wskaźnika CPI oznacza przyjęcie założenia o niezmienności próby badawczej w obu okresach: c i t. Oznacza to, że obserwowane mają być w obu badanych okresach ceny tych samych dóbr w tych samych punktach handlowo-usługowych. Wobec intensywnych zmian zachodzących w środowisku ekonomiczno-społecznym, obejmującym m.in. dynamikę infrastruktury handlowo-usługowej oraz procesy demograficzno-urbanizacyjne, założenie o stabilności próby okazuje się nierealistyczne. Stabilność próby jest stale naruszana z powodu likwidacji niektórych włączonych do niej jednostek handlowo-usługowych (i powstawania innych), a w jednostkach nadal działających – z powodu wycofywania niektórych asortymentów dóbr lub usług badanych w okresie c (i wprowadzania innych).

W ostatnim ćwierćwieczu problem niestabilności próby badawczej stał się bardziej wyrazisty w wyniku niesłychanej ekspansji sieci hipermarketów oraz sklepów dyskontowych. Oferują one – tak jak sklepy fabryczne oraz sieci sprzedaży wysyłkowej lub internetowej – niższe ceny produktów i niektórych usług w porównaniu z cenami w tradycyjnych sklepach sprzedaży detalicznej, sklepach branżowych i klasycznych domach towarowych. Wzrost preferencji konsumenta na rzecz tanich sieci wpływa oczywiście na wartość indeksu kosztów utrzymania CPI. Troska o stałość próby badawczej – bez uwzględnienia trendu przechodzenia konsumentów do sieci tanich punktów handlowych w badanym okresie od c do t – przejawi się w

zawyżonym oszacowaniu składowych wektora $\mathbf{p}_t$, a w rezultacie doprowadzi do przeszacowania wartości CPI.

W celu określenia tego składnika błędu niestabilności próby, związanego z procesem obserwowanego przepływu konsumentów z tradycyjnych jednostek handlowo-usługowych do hipermarketów oraz sklepów dyskontowych, podzielmy zbiór punktów sprzedaży na takie, w których ceny są normalne (N), oraz te, które stosują ceny zaniżone, dyskontowe (D). Załóżmy też, że na pewnym rynku początkowo nieobecne były jednostki typu D stosujące zaniżone ceny sprzedaży, wobec czego próba badawcza obejmowała wyłącznie jednostki typu N stosujące ceny normalne. Obliczony wówczas estymator indeksu cen IP_L oznaczmy symbolem $\tilde{I}\tilde{P}_{L,N}$. Jeśli w okresie od c do t na badanym rynku pojawiły się jednostki typu D, zdobywając na nim udział u ($0 < u < 1$), to oczywiście estymator $\tilde{I}\tilde{P}_{L,N}$ zawyża indeks CPI. Obciążenie estymatora $\tilde{I}\tilde{P}_{L,N}$ można zmniejszyć, stosując poprawiony estymator (por. [5, s. 310])

$$\tilde{I}\tilde{P} = (1-u)\tilde{I}\tilde{P}_{L,N} + u\tilde{I}\tilde{P}_{L,N} \cdot d, \tag{14}$$

gdzie d ($0 < d < 1$) oznacza współczynnik reprezentujący przeciętny poziom cen w jednostkach typu D w stosunku do cen w jednostkach typu N. W takim razie obciążenie Δ_{n-d} estymatora $\tilde{I}\tilde{P}_L$ indeksu kosztów utrzymania CPI, wynikające z niestabilności próby spowodowanej procesem przepływu konsumentów z tradycyjnych jednostek handlowo-usługowych do supermarketów oraz sklepów dyskontowych można mierzyć wielkością różnicy pomiędzy $\tilde{I}\tilde{P}_{L,N}$ i $\tilde{I}\tilde{P}$. Zatem

$$\Delta_{n-d} = \tilde{I}\tilde{P}_{L,N} - \tilde{I}\tilde{P} = u(1-d)\tilde{I}\tilde{P}_{L,N}. \tag{15}$$

Jeśli zatem indeks $\tilde{I}\tilde{P}_L$ obliczony dla dwu sąsiednich lat miałby wartość 1,02, co oznacza dwuprocentową skalę inflacji w ciągu roku, a jednostki typu D opanowałyby w tym czasie 15% rynku ($u = 0{,}15$), stosując ceny na poziomie 95% ($d = 0{,}95$) przeciętnych cen w jednostkach typu N, to poprawiony wskaźnik inflacji $\tilde{I}\tilde{P}$ miałby wartość $\tilde{I}\tilde{P} = (1 - 0{,}15)1{,}02 + 0{,}15 \cdot 1{,}02 \cdot 0{,}95 = 0{,}867 + 0{,}14535 = 1{,}01235 \approx 101{,}2\%$, a obciążenie $\Delta_{n-d} = 0{,}15(1 - 0{,}95)1{,}02 = 0{,}00765 < 0{,}8\ \%$.

5. Nowe produkty i usługi jako źródło błędu estymacji

Na wszelkiego rodzaju rynki zbytu – szczególnie na rynki dóbr innowacyjnych i produktów wysokiej technologii – dostarczane są ciągle coraz to nowe produkty i

usługi. W kontekście badanych tu indeksów agregatowych można za nowe dobro uznać takie, które zostało umieszczone w okresie bieżącym (t) na liście dóbr uwzględnianych przy określeniu wartości pewnego indeksu, natomiast nie znajdowało się na zadanej liście dóbr w okresach przeszłych. Nowe dobra mogą być źródłem błędów estymacji indeksu CPI co najmniej z trzech powodów:

1) nieumieszczenia nowego dobra na liście dóbr uwzględnianych przy określeniu wartości indeksu,

2) umieszczenia nowego dobra na liście dóbr uwzględnianych przy określeniu wartości indeksu,

3) zbyt późnego umieszczenia nowego dobra na liście dóbr uwzględnianych przy określeniu wartości indeksu.

Pierwszy z wymienionych tu powodów jest oczywisty i nie wymaga komentarza. Powód drugi może się wydawać paradoksalny, gdyż umieszczenie nowego dobra na liście dóbr wynika z zamiaru dokładniejszej estymacji wskaźnika CPI. W tym przypadku do ustalonej na okres c listy n dóbr dołącza się nowe dobro, tworząc listę $n + 1$ dóbr dla okresu t. Gdyby zatem do estymacji wskaźnika CPI zastosowano indeks $IP_L = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ic}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{ic}}$ lub indeks $IP_P = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{it}}$, ewentualnie indeks $IP_F = \sqrt{IP_L \cdot IP_P}$, to po dołączeniu dobra $n + 1$ należy obliczyć ich zmodyfikowane wartości $IP_L^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ic} + P_{n+1,t}Q_{n+1,c}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{ic} + P_{n+1,c}Q_{n+1,c}}$ albo $IP_P^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it} + P_{n+1,t}Q_{n+1,t}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{it} + P_{n+1,c}Q_{n+1,t}}$,

lub też $IP_F^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ic} + P_{n+1,t}Q_{n+1,c}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{ic} + P_{n+1,c}Q_{n+1,c}}} \cdot \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it} + P_{n+1,t}Q_{n+1,t}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{it} + P_{n+1,c}Q_{n+1,t}}}$.

We wzorach na IP_L^*, IP_P^* oraz IP_F^* – obok oszacowanych już wartości $\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{ic}$, $\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{ic}$, $\sum_{i=1}^{n} P_{it}Q_{it}$ oraz $\sum_{i=1}^{n} P_{ic}Q_{it}$ – można oszacować z badania próby w okresie t wielkości $P_{n+1,t}$ oraz $Q_{n+1,t}$, natomiast w dalszym ciągu nieznane pozostają wielko-

ści $P_{n+1,c}$ oraz $Q_{n+1,c}$, gdyż dobro $n+1$ było w okresie c nieobecne na rynku. Można by – zgodnie z rzeczywistością – przyjąć, że $Q_{n+1,c} = 0$, ale takie rozwiązanie stoi w sprzeczności z zasadą *ustalonego* koszyka dóbr obowiązującą dla każdego indeksu agregatowego. Jest to w istocie problem brakujących informacji, który w tym szczególnym przypadku kilku autorów[3] proponuje rozwiązać przez wyznaczenie za pomocą metod ekonometrycznych tzw. ceny rezerwacji (lub ceny w przedpłacie) $\hat{P}_{n+1,c}$ na nie istniejące jeszcze w okresie c dobro $n+1$ oraz obliczenie estymatora $\hat{Q}_{n+1,c}$ antycypowanego popytu na nowe dobro. Przydatność tego rozwiązania jest kwestionowana przez praktyków, ponieważ proponowana metoda zakłada *implicite* znajomość funkcji użyteczności każdego nowego dobra przed jego pojawieniem się na rynku. Oznaczałoby to, że każdy z konsumentów otrzymuje kompletną informację o każdym produkcie, który zamierza się wprowadzić na rynek. W warunkach rzeczywistych jednak proces dyfuzji wiedzy o nowym dobru rynkowym znajduje się w chwili jego pojawienia się na rynku zaledwie w stadium początkowym, a poznawanie nowego wyrobu trwa jeszcze przez długi czas.

Trzecim wymienionym źródłem błędów estymacji indeksu CPI może być zbyt późne umieszczenie nowego dobra na liście dóbr uwzględnianych przy określeniu wartości indeksu. Ceny nowych dóbr – niekiedy znaczne – maleją gwałtownie niedługo po ich wprowadzeniu na rynek. Można się o tym przekonać, obserwując np. rynek sprzętu komputerowego lub urządzeń HiFi. Opóźnione włączenie tego typu dóbr charakteryzujących się ceną, która jest malejącą funkcją czasu, do koszyka dóbr uwzględnianych przy określeniu danego indeksu agregatowego obciąża estymator indeksu cen przez błąd pominięcia w nim ruchu ceny nowego dobra wykazującej największą dynamikę w pierwszym okresie istnienia rynkowego.

6. Zmiana jakości dóbr jako źródło błędu estymacji

Jakość produktów i usług zmienia się w czasie pod wpływem różnorodnych czynników. Obserwowana ewolucja jakości produktów konsumpcyjnych, zwłaszcza dóbr trwałego użytku, wynikająca ze zmian innowacyjnych oraz zadziwiającego niekiedy postępu technologicznego w niektórych branżach przemysłu, zmierza

[3] Zob. W.E. Diewert, *Aggregation Problems in the Measurement of Capital*, [w:] *The Measurement of Capital* (Ed.: D. Usher), Chicago 1980, s. 433-528; J.A. Hausman, *Valuation of New Goods under Perfect and Imperfect Competition*, [w:] *The Economics of New Goods, NBER Studies in Income and Wealth*, vol. 58, Chicago 1997, s. 209-237; J.R. Hicks, *The Valuation of Social Income*, Economica 7 (1940), s. 105-140 (źródła cyt. za [5]).

w kierunku ciągłego doskonalenia jakości tej kategorii dóbr. Niekiedy zmiana jakości ma charakter skokowy i połączona jest np. z dołączeniem dodatkowych funkcji realizowanych przez dany produkt. Powstaje niekiedy pytanie o to, czy po dokonanych modyfikacjach i innowacjach w okresie t dane dobro jest tożsame z tymże dobrem z okresu podstawowego. Udoskonalona jakość danego dobra oznacza zwykle wyższą cenę danego dobra, jednak nowa cena P_{it} danego dobra i w okresie t w relacji do ceny P_{ic} tegoż dobra w okresie c wynika nie tylko z wyższej jakości dobra i, ale i z tego, że drugim składnikiem kształtowania ceny P_{it} jest zmiana ceny bazowej P_{ic}, niezależna od jakiejkolwiek zmiany jakości badanego dobra i. Można zatem przyjąć, że

$$P_{it} = P_{ic} + \Delta_{itc} + \Delta_{iq}, \tag{16}$$

gdzie Δ_{itc} oznacza zwykłą (czystą) różnicę w cenie dobra i w porównywanych okresach, a Δ_{iq} oznacza różnicę w cenie dobra i spowodowaną zmianą jego jakości.

Składniki Δ_{itc} i Δ_{iq} występujące w równaniu (16) mogą mieć dowolne wartości. Dodatnia wartość Δ_{iq} jest interpretowana jako poprawienie jakości dobra i, a wartość ujemna tej składowej – jako obniżenie poziomu jakości tegoż dobra, natomiast $\Delta_{iq} = 0$ może oznaczać niezmienioną jakość i-tego ($i = 1, ..., n$). Wartość dodatnia, ujemna lub wartość 0 składnika Δ_{itc} zależy oczywiście od wielu czynników ekonomiczno-społecznych, takich jak np. zmiana popytu na dane dobro czy tempo inflacji ogólnej.

Standardowy sposób szacowania indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych CPI np. za pomocą indeksu IP_F lub IP_L albo IP_P stanowi źródło błędu estymacji indeksu CPI wynikającego ze zmiany jakości dóbr z ustalonego koszyka, gdyż każdy składnik dowolnego z indeksów IP_F, IP_L albo IP_P zawierający czynniki P_{it} ($i = 1, ..., n$), wprowadza do oceny indeksu CPI obciążenie (por. wzór (16)) równe Δ_{iq}. W konsekwencji obciążenia ocen indeksu CPI wynikające ze zmiany jakości badanego koszyka dóbr w razie zastosowania indeksów IP_L lub IP_P wynoszą (por. wzory (1) i (2)) odpowiednio

$$\Delta_{L,q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_{iq} Q_{ic}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{ic}} \quad \text{oraz} \quad \Delta_{P,q} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \Delta_{iq} Q_{it}}{\sum_{i=1}^{n} P_{ic} Q_{it}}. \tag{17}$$

Analogiczne, choć bardziej skomplikowane wyrażenie określa obciążenie indeksu CPI przy zastosowaniu indeksu IP_F.

Ponieważ w krajach wysoko i średnio rozwiniętych znaczna część, a nawet większość dóbr w badanych tam koszykach konsumpcji ma – dzięki nieustannym innowacjom – coraz doskonalszą jakość, więc dla tych dóbr $\Delta_{iq} > 0$, co w konsekwencji powoduje istotne przeszacowanie indeksu inflacji. Płynąca stąd konkluzja, że szacowanie indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych CPI w razie zmian jakości dóbr z ustalonego koszyka powinno uwzględniać korektę cen P_{it} ($i = 1, ..., n$) o składową Δ_{iq} jest oczywista teoretycznie, ale praktyczne wyodrębnienie wielkości $\Delta_{iq} = P_{it} - (P_{ic} + \Delta_{itc})$ przysparza znacznych trudności.

Instytucje statystyczne wielu krajów (por. [5, s. 315]) stosują w celu wyodrębnienia składnika Δ_{iq} w równaniu (16) metodę wykorzystującą dokładne informacje o cenach poszczególnych komponentów (surowców, materiałów) i części (detali) wchodzących w skład danego produktu. Przyjmuje się zwykle, że cena jednostkowa P_{ic} danego produktu w okresie podstawowym wyrażona jest równaniem

$$P_{ic} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k z_{k,ic} . \tag{18}$$

gdzie K oznacza liczbę różnych komponentów i części wyrobu, $z_{k,ic}$ oznacza ilość danego komponentu lub liczbę części zastosowaną w wyrobie i w okresie c, natomiast α_k oznacza cenę jednostkową części lub komponentu k ($k = 1, ..., K$), a α_0 może oznaczać sumę kosztów pozostałych wraz z marżą handlową. Zakłada się przy tym, że $z_{k,ic}$ (a także $z_{k,it}$) może być zmienną ciągłą lub zero-jedynkową. Ponadto przyjmuje się, że innowacje i zmiana jakości produktu w okresie od c do t polegają na zmianie wartości charakterystyk $z_{k,ic}$ do wartości $z_{k,it}$ ($k = 1, ..., K$). Wówczas cena jednostkowa $P_{it,q}$ danego produktu skalkulowana jedynie ze względu na zmianę jakości wyrobu i pomiędzy okresem podstawowym a okresem t wyraża się wzorem

$$P_{it,q} = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{K} \alpha_k z_{k,it}, \tag{19}$$

Ze wzorów (18) i (19) wynika, że różnica w cenie dobra i ($i = 1, ..., n$) spowodowana zmianą jego jakości wyraża się wzorem

$$\Delta_{iq} = P_{it,q} - P_{ic} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k (z_{k,it} - z_{k,ic}). \tag{20}$$

Znajomość wartości obciążeń indywidualnych Δ_{iq} wynikających ze zmiany jakości poszczególnych dóbr pozwala – na podstawie wielkości odpowiedniego z błędów $\Delta_{L,q}$ lub $\Delta_{P,q}$ (por. (17)) lub wielkości pokrewnej indeksowi IP_F – obliczyć

wielkość ogólnego obciążenia estymatora indeksu CPI, spowodowanego zmianą jakości dóbr w koszyku. W celu otrzymania estymatora indeksu CPI mniej obciążonego (prawie nieobciążonego) ze względu na zmiany w poziomie jakości dóbr należy w zastosowanym przybliżeniu indeksu CPI przez dowolny z indeksów IP_F, IP_L lub IP_P w miejsce cen P_{it} wstawić (por. wzór (16)) skorygowane ich wielkości $P_{it} - \Delta_{iq}$.

7. Podsumowanie

Omówione wyżej rodzaje źródeł błędów estymacji indeksu dynamiki cen i usług konsumpcyjnych CPI nie wyczerpują listy możliwych źródeł powstawania tychże błędów. Nie należy zignorować np. tzw. błędów elementarnych, wynikających z określonych procedur numerycznego wyznaczania wskaźników statystycznych. Taki błąd może powstać np. wtedy, gdy wyniki w badanych warstwach (regionach statystycznych lub poszczególnych krajach) są agregowane dla całej próby/populacji (kraju lub ugrupowania państw). Typowym źródłem błędu numerycznego (por. [3]) jest też obliczanie wartości indeksu w okresie t w relacji do okresu c za pośrednictwem indeksów łańcuchowych. Np. wartości indeksu dynamiki płac w Polsce w roku 1989 w relacji do roku 1981 obliczane z dokładnością 0,01% – na podstawie danych z roczników statystycznych GUS – odpowiednio jako indeks o podstawie stałej i jako iloczyn ośmiu rocznych indeksów łańcuchowych z lat 1982--1989, różnią się o 0,39%, czyli w przybliżeniu o 0,4%.

Warto zauważyć, że 3 spośród uprzednio scharakteryzowanych rodzajów błędów oceny dynamiki cen i usług konsumpcyjnych, a mianowicie: błąd spowodowany pojawieniem się produktów i usług substytucyjnych, błąd niestabilności próby oraz błąd spowodowany pojawieniem się nowych produktów i usług, generują obciążenia dodatnie, co powoduje przeszacowanie wartości indeksu CPI. W opinii tzw. komisji Boskina[4], powołanej w roku 1995 przez Komitet Finansów Senatu Stanów Zjednoczonych do zbadania rozmiarów błędów pomiaru cen mierzonych w celu obliczenia indeksu CPI, błędy dodatnich obciążeń przeważają w sumie błędów estymacji indeksu cen i usług konsumpcyjnych, a tym samym indeksu inflacji, powodując systematyczne zawyżenie tych ocen. Oznacza to, że w USA (a z dużym prawdopodobieństwem w wielu innych krajach świata) dochody realne obywateli

[4] Por. M.J. Boskin, E.R. Dulberger, R.J. Gordon, Z. Griliches, D.W. Jorgenson, *Toward a More Accurate Measure of Cost of Living*, Final Report to the US Senate Finance Committee from the Advisory Commission to Study the Consumer Price Index, Washington 1996 (cyt. za [5]).

były przez wiele lat wyższe od oficjalnie notowanych w publikacjach statystycznych i pracach historyków ekonomii.

Literatura

[1] Kulczycki R., *Rachunek indeksowy*, PWE, Warszawa 1983.
[2] Lippe P. von der, *Der Unsinn von Kettenindices*, Allgemeines Statistisches Archiv, 84~1 (2000), s. 67-82.
[3] Siedlecka U., *Indeksy dynamiki i ich znaczenie w analizach ekonomicznych*, [w:] *Pomiar statystyczny*, red. W. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2003, s. 46-70.
[4] Welfe W., *Indeksy produkcji*, PWE, Warszawa 1966.
[5] White A.G., *Measurement Biases in Consumer Price Indexes*, International Statistical Revue, 67~3 (1999), s. 301-325.

AGGREGATE INDEXES – ESTIMATE ERRORS

Summary

From the well known aggregate indices of price and quantity the special interest is given in this paper to the price indexes of Laspeyres (IP_L), Paasche (IP_P) and Fisher (IP_F) as well as to their modifications. The indices IP_L, IP_P and IP_F or their modifications are applied in several countries as the measures of the Consumer Price Index (CPI). The question under consideration is if such measures of CPI can be thought of as a practical approximation to a „true" cost-of-living index, or as a measure of the inflation for the national economy. Some considerations suggest, that the applied measures of CPI often overestimate the true cost-of-living index and the real rate of inflation in the given country. This paper characterizes the principal sources of biases occurring in the estimation of CPI, such as: commodity substitution bias, outlet substitution bias, new goods and services bias and quality adjustment bias.