PRACE NAUKOWE AKADEMII EKONOMICZNEJ WE WROCŁAWIU
Nr 1097 2005
Statystyka ekonomiczna

Stanisława Ostasiewicz

# ISTOTA RÓWNOWAGI NA RYNKACH UBEZPIECZENIOWYCH

## 1. Wstęp

Głównym celem tego artykułu, o charakterze bardziej dydaktycznym niż naukowym, jest szczegółowa analiza warunków istnienia równowagi na rynkach ubezpieczeniowych. Rozpatrzmy rynek, na którym znajduje się jedno dobro konsumpcyjne i w chwili wejścia na rynek każdy z klientów ma taki sam majątek, wynoszący $w$ jednostek, i w takim samym stopniu jest narażony na zajście zdarzenia losowego powodującego utratę tego majątku w całości lub części (por. [1; 5]). Załóżmy, że wielkość straty jest równa $d$ i prawdopodobieństwo zajścia tego zdarzenia jest równe $p$. Tak więc wielkość majątku klienta jest zmienną losową przybierającą dwie wartości: $w_1$, gdy zdarzenie nie zajdzie (stan 1), i $w_2$, gdy zdarzenie zajdzie (stan 2). Z każdą wielkością majątku związana jest satysfakcja z jego posiadania, określana jako użyteczność. W pracy przyjmuje się, że użyteczność takiej samej wielkości majątku dla wszystkich osób jest taka sama. W rozpatrywanym przypadku majątek jest losowy, więc satysfakcja będzie „mierzona" za pomocą wartości oczekiwanej funkcji użyteczności tego majątku. Przyjmuje się, że klient ma awersję do ryzyka (por. [3]), stąd funkcja użyteczności jego majatku spełnia warunek $U'' < 0$.

W pracy zakłada się, że wielkość majątku ($w_1$, $w_2$) może być zmieniona poprzez zakup polisy ubezpieczeniowej. Każda polisa ubezpieczeniowa jest charakteryzowana za pomocą sumy ubezpieczenia $\alpha_2$ i wielkości składki ubezpieczeniowej $\alpha_1$, którą przy tej sumie należy zapłacić. W pracy rozpatrywana będzie suma ubezpieczenia netto, czyli wielkość ubezpieczenia pomniejszona o wielkość składki ubezpieczeniowej. Tak wiec polisa ubezpieczeniowa jest dwuwymiarowym wektorem $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$. Jeżeli klient wykupi polisę, to jego majątek będzie następujący:

$(w_1 - \alpha_1, w_2 - d + \alpha_2)$. W zależności od wielkości $\alpha_1$ i $\alpha_2$ zmienia się majątek klienta, a więc również użyteczność tego majątku. W odniesieniu do każdej wielkości majątku $(w_1 - \alpha_1, w_2 - d - \alpha_1 + \alpha_2)$ można określić wartość oczekiwaną funkcji użyteczności. Polisy, dla których oczekiwane użyteczności są takie same, są dla klienta tak samo korzystne.

## 2. Rynek ubezpieczeniowy

Polisę ubezpieczeniową można kupić na rynku ubezpieczeniowym, którego uczestnikami są zakłady ubezpieczeniowe i klienci. Rynek ubezpieczeniowy jest tworzony za pomocą funkcji popytu i funkcji podaży. Można przyjąć, że funkcja oczekiwanej użyteczności majątku określa preferencje klienta co do zakupu polisy ubezpieczeniowej, czyli określa popyt na ubezpieczenia. W pracy przyjmuje się, że jest ona postaci:

$$V^*(p, w_1, w_2) = (1-p)U(w_1) + pU(w_2), \tag{1}$$

gdzie $w_1$ oznacza majątek klienta w stanie 1, $w_2$ oznacza majątek w stanie 2, $U$ – funkcję użyteczności, $p$ – prawdopodobieństwo stanu 2. Po wykupieniu polisy $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ majątek klienta się zmieni i oczekiwana użyteczność wyniesie

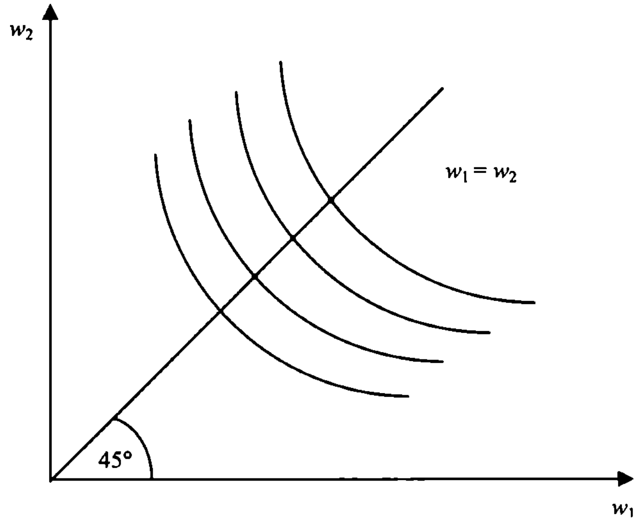
$$V(p, \boldsymbol{\alpha}) = V^*(p, w - \alpha_1, w - d + \alpha_2) = (1-p)U(w - \alpha_1) + pU(w - d + \alpha_2). \tag{2}$$

Wykupienie polisy ubezpieczeniowej ma sens tylko wtedy, gdy nie zmniejsza ono oczekiwanej użyteczności klienta, tzn. gdy spełniony jest warunek

$$V(p, \boldsymbol{\alpha}) \geq V(p, 0).$$

Przyjmuje się, że polisę ubezpieczeniową wykupują tylko ci klienci, którzy mają awersję do ryzyka. W takim przypadku druga pochodna funkcji użyteczności jest ujemna to znaczy $U'' < 0$, a funkcje oczekiwanej użyteczności majątku klienta są wypukłe. Warstwice tej funkcji są nazywane krzywymi obojętności. Przykładowe funkcje oczekiwanej użyteczności przedstawiono na rys. 1.

Oczywiście spośród wszystkich możliwych kontraktów klient wybierze ten, dla którego wartość oczekiwana funkcji użyteczności losowego majątku jest największa. Jeśli interpretuje się to graficznie, oznacza to, że wybiera polisę, która leży na „najwyżej położonej” krzywej obojętności.

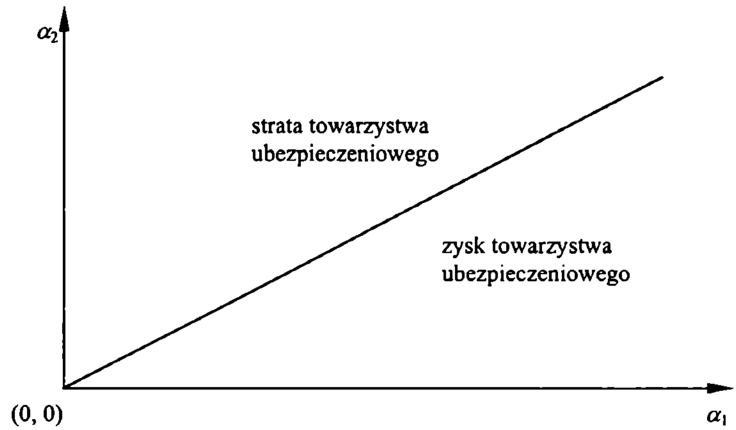



Rys. 1. Przykładowe funkcje użyteczności
Źródło: opracowanie własne.

Towarzystwa ubezpieczeniowe kształtują na rynku ubezpieczeniowym podaż. Są one neutralne wobec ryzyka (funkcja użyteczności majątku jest liniowa), a celem ich jest sprzedawanie takich polis, które zapewniają możliwie największy zysk. Wielkość zysku jest zmienną losową, a zależy od prawdopodobieństwa zajścia stanu 2 oraz od sprzedanej polisy. Oczekiwany zysk towarzystwa ubezpieczeniowego ze sprzedaży polisy $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2)$ wyraża się następująco:

$$\pi(p, \boldsymbol{\alpha}) = (1 - p)\alpha_1 - p\alpha_2. \tag{3}$$

Na rynku konkurencyjnym zakłady ubezpieczeniowe mogą oczekiwać jedynie, że sprzedadzą taką polisę, dla której $\pi(p, \boldsymbol{\alpha}) = 0$. Gdyby towarzystwo ubezpieczeniowe wprowadziło na rynek polisę $\boldsymbol{\beta}$, dla której $\pi(p, \boldsymbol{\beta}) > 0$ (tzn. zysk jest dodatni), wówczas „konkurencja" odpowiedziałaby wprowadzeniem na rynek polisy $\boldsymbol{\eta}$, która przynosi zysk mniejszy niż $\boldsymbol{\beta}$, ale zapewnia klientowi większą konsumpcję i jest chętniej przez niego kupowana. Gdyby zysk był w dalszym ciągu dodatni, można by wprowadzić na rynek inną polisę – $\boldsymbol{\mu}$, dającą jeszcze mniejszy zysk. Wprowadzanie nowych polis trwałoby do czasu ustalenia się zysku na poziomie zera. Polisy, które przynoszą stratę, tzn. dla których $\pi(p, \boldsymbol{\alpha}) < 0$, nie mogą być przez zakład ubezpieczeń sprzedawane. Na rys. 2 przedstawiono przykładową funkcję podaży na konkurencyjnym rynku ubezpieczeniowym.




Rys. 2. Funkcja podaży na rynku ubezpieczeniowym
Źródło: opracowanie własne.

Zbiór punktów pierwszej ćwiartki układu współrzędnych przedstawia zbiór wszystkich możliwych polis oferowanych przez zakłady ubezpieczeń, a narysowana linia prosta obrazuje prostą „zerowego zysku", czyli polisy, które nie przynoszą zysku ani straty. Powyżej prostej podaży znajdują się polisy przynoszące stratę, poniżej polisy, dla których zysk jest dodatni. Współczynnik kierunkowy prostej zerowego zysku jest równy $\frac{1-p}{p}$.

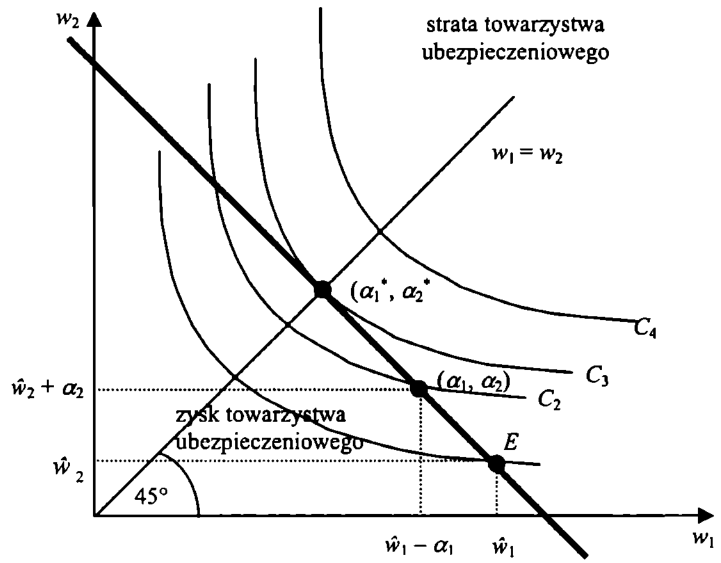
## 3. Równowaga na jednorodnym rynku ubezpieczeniowym

Rozpatrzmy rynek ubezpieczeniowy, na którym znajdują się identyczni klienci, tzn. tacy, dla których prawdopodobieństwa zajścia stanu 2 są takie same, a również takie same są funkcje użyteczności ich majątku. W omówionej sytuacji można rozpatrywać tylko jednego przedstawiciela tej grupy. Zastanówmy się, czy na takim rynku istnieje równowaga. Intuicyjnie równowaga oznacza taki stan na rynku, którego ani klienci ani sprzedawcy nie chcą zmienić. Jest wiele definicji równowagi rynkowej. W pracy tej przyjmiemy definicję równowagi typu Cournota-Nasha (por. [1; 3]), zgodnie z którą rynek jest w równowadze, jeżeli istnieje zbiór polis (lub polisa), dla których maksymalizowana jest oczekiwana użyteczność klienta i ponadto spełnione są dwa warunki:

a) W zbiorze równowagi nie ma polis, które zakładowi ubezpieczeń przynoszą stratę.

b) Poza zbiorem równowagi nie ma polis, które generują nieujemny zysk.

Na rys. 3 przedstawiono krzywe oczekiwanej użyteczności klienta i funkcję zerowego zysku zakładu ubezpieczeń.




Rys. 3. Funkcja popytu i podaży na rynku ubezpieczeniowym
Źródło: opracowanie własne.

Prosta $w_1 = w_2$ tworzy zbiór polis, dla których użyteczność majątku klienta w stanie 1 i stanie 2 jest taka sama. Oznacza to, że polisa taka gwarantuje klientowi pełne pokrycie strat w razie zajścia stanu 2. Takie ubezpieczenie nazywa się ubezpieczeniem pełnym. Ponieważ klient ma awersję do ryzyka, wykupi właśnie taką polisę. Pogrubiona linia prosta na rys. 3 przedstawia prostą zerowego zysku w układzie współrzędnych $(w_1, w_2)$. Współczynnik kierunkowy prostej w tym układzie współrzędnych jest ujemny, gdyż przy ustalonym zerowym zysku wielkość majątku w stanie 2 rośnie w miarę wzrostu składki $\alpha_1$, czyli w miarę zmniejszania się wielkości majątku w stanie 1. Współczynnik kierunkowy $k$-tej prostej wynosi:

$$k = \frac{\hat{w}_2 + \alpha_2 - \hat{w}_2}{\hat{w}_1 - \alpha_1 - \hat{w}_1} = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\frac{1-p}{p}\alpha_1}{\alpha_1} = -\frac{1-p}{p}.$$

Na rys. 3 punkt E odpowiada sytuacji $\boldsymbol{\alpha} = (0,0)$, co oznacza, że klient nie wykupił ubezpieczenia. Jak widać, polisa ta leży na krzywej obojętności zapewniającej najmniejszą konsumpcję, czyli jest to sytuacja dla klienta najmniej korzystna. Wykupienie polisy $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ przesuwa klienta na wyższą, a więc bardziej korzystną krzywą obojętności $C_2$.

Polisy zapewniające klientowi największą konsumpcję leżą na krzywej $C_3$. Wprawdzie polisy na krzywej $C_4$ są jeszcze bardziej korzystne dla klienta, ale nie spełniają ograniczenia określonego wzorem (3), a więc nie są sprzedawane przez zakład ubezpieczeń. Wiadomo, że polisa maksymalizująca oczekiwaną użyteczność i spełniająca warunek zerowego zysku (por. [4; 2]) leży w punkcie styczności krzywej obojętności z prostą zerowego zysku.

Sprawdźmy, czy polisa $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ spełnia ten warunek. W tym celu policzymy współczynnik kierunkowy stycznej do krzywej $C_3$ w punkcie $\boldsymbol{\alpha}^*$. Współczynnik kierunkowy stycznej do funkcji w pewnym punkcie $\alpha$ jest równy wartości pierwszej pochodnej tej funkcji w tym punkcie. Pochodna funkcji oczekiwanej użyteczności określonej wzorem (1) określona jest następująco:

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{U'(w_1)(1-p)}{U'(w_1)p} = -\frac{1-p}{p} \cdot \frac{U'(w_1)}{U'(w_2)}.$$

Polisa $\boldsymbol{\alpha}^* = (\alpha_1^*, \alpha_2^*)$ leży na prostej $w_1 = w_2$, tak więc $U'(w_1) = U'(w_2)$, stąd:

$$\left.\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1}\right|_{\boldsymbol{\alpha}^*} = -\frac{1-p}{p}.$$

Z równości tej wynika, że współczynniki kierunkowe prostej (3) i stycznej do krzywej $C_3$ są takie same, a ponadto obie proste przechodzą przez punkt $\boldsymbol{\alpha}^*$, co oznacza, że się pokrywają. Tak więc polisa $\boldsymbol{\alpha}^*$ maksymalizuje oczekiwaną użyteczność klienta. Ponadto polisa ta generuje nieujemny zysk, ponieważ leży na prostej zerowego zysku. Oznacza to, że spełniony jest warunek (a) definicji równowagi typu Cournota-Nasha. Warunek (b) jest również spełniony, ponieważ każda polisa zapewniająca klientowi większą konsumpcję przynosi zakładowi ubezpieczeń stratę.

## 4. Problem równowagi w przypadku niejednorodnego rynku ubezpieczeniowego

Przyjmujmy teraz, że wiadomo, iż na rynku ubezpieczeniowym znajdują się klienci dwóch typów: klienci o niskim prawdopodobieństwie zajścia stanu 2 (prawdopodobieństwo to oznaczymy $p_N$) i klienci, dla których prawdopodobieństwo to jest duże (oznaczmy je $p_D$). Zakład ubezpieczeń nie może jednak rozdzielić klientów na grupy według prawdopodobieństwa stanu 2, nie wiadomo bowiem, który z klientów należy do której grupy. Wiadomo tylko, że frakcja klientów o prawdopodobieństwie $p_D$ jest równa $\lambda$. Średnie prawdopodobieństwo stanu 2 dla wszystkich klientów wynosi: $\overline{p} = \lambda\, p_D + (1-\lambda)p_N$. Rozpatrzmy, czy w przypadku takiego rynku ubezpieczeniowego istnieją polisy lub polisa, które tworzą zbiór równowagi. W tym przypadku mogą istnieć tylko dwa rodzaje zbiorów równowagi; są one następujące (por. [3]):

- jednoelementowy zbiór równowagi, utworzony przez polisę, którą kupować będą klienci zarówno o dużym jak i o małym prawdopodobieństwie stanu 2;
- dwuelementowy zbiór punktów równowagi, utworzony przez dwie polisy $\alpha^D$ i $\alpha^N$, sprzedawane odpowiednio klientom o prawdopodobieństwach $p_D$ i $p_N$.

Można pokazać, że w rozważanej sytuacji na rynku konkurencyjnym żaden z wymienionych zbiorów nie jest zbiorem punktów równowagi.

## 5. Wnioski

Z prezentowanej pracy wynika, że na konkurencyjnym rynku ubezpieczeniowym nie zawsze istnieje równowaga. Jeżeli rynek jest jednorodny, to – jak pokazano w punkcie 2 – równowaga istnieje i zbiór równowagi jest jednoelementowy. Na rynku niejednorodnym równowaga może nie istnieć. W sytuacji takiej dla istnienia równowagi niezbędny jest podział klientów rynku na grupy jednorodne pod względem ryzyka.

## Literatura


[1] Grossman H.I., *Adverse Selection, Dissembling, and Competitive Equilibrium*, „The Bell Journal of Economics" 1979, vol. 10, nr 1, s. 336-343.

[2] *Metody oceny i porządkowania ryzyka w ubezpieczeniach życiowych*, red. S. Ostasiewicz, AE, Wrocław 2000.

[3] Rothschild M., Stiglitz J., *Equilibrium in Competitive Insurance Markets: an Essay on the Economics of Imperfect Information*, „Quarterly Journal of Economics" 1976, vol. 90, s. 651-666.
[4] Stiglitz J.E., *Ekonomia sektora publicznego*, Wyd. Nauk. PWN, Warszawa 2004.
[5] Wilson C., *A Model of Insurance Markets with Incomplete Information*, „Journal of Economic Theory" 1977, 16, s. 167-207.

## THE ESSENCE OF EQUILIBRIUM ON INSURANCE MARKETS

### Summary

The main goal of this paper is to analyze the conditions for the existence of equilibrium on the competitive insurance markets. These conditions are analyzed for two elementary markets. One of them consist of agents facing the same risk and having the same utility functions. The second kind of analyzed markets consists of two groups of individuals called low-risks and high-risks.