

Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej  
Politechniki Wrocławskiej  
Seria: Monografie

32

DzP 10

Jan Biliszcuk

**Beton—tworzywo do budowy mostów**

Wrocław 1986

A 3428 I



PRACE NAUKOWE POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Scientific Papers of the Institute of Civil Engineering

No 32

of the Technical University of Wrocław

No 32

Monographs

No 10

1986

Jan BILISZCZUK

Concrete — a material for bridge building

Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej  
Politechniki Wrocławskiej

---

**32**

Seria:  
Monografie

**10**

**Jan Biliszczyk**

## **Beton – tworzywo do budowy mostów**

---



Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1986

## Recenzenci

Augustyn BORCZ

Tadeusz GODYCKI-ĆWIRKO

## Redaktor naczelny

Jerzy CIEKOT

## Redaktor naukowy

Marian KLASZTORNY

## Opracowanie redakcyjne

Zygmunt NOWACZYŃSKI

## Korekta

Maria IZBICKA

© Copyright by Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1986

WYDAWNICTWO POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324 – 9727

Nakład 220 + 75 egz. Ark. wyd. 17. Ark. druk. 147/s. Papier offset. kl. III, 70 g. B1.

Oddano do druku w marcu 1986 r. Druk ukończono w maju 1986 r.

Zakład Graficzny Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 2399/86 – I-11 – Cena zł 170,-

beton, struktura, obciążenia doraźne, obciążenia długotrwałe, obciążenia zmienne, środowisko zewnętrzne, naprężenia, odkształcenia, wytrzymałość, model teoretyczny, reologia, mosty betonowe

Jan BILISZCZUK\*

## BETON – TWORZYWO DO BUDOWY MOSTÓW



Rozpatrzone podstawowe zagadnienia mechaniki betonu, a w szczególności model teoretyczny tego tworzywa. Wychodząc z syntetycznej oceny stanu aktualnego i perspektyw rozwojowych budownictwa mostów betonowych w świecie sprecyzowano główne problemy, jakie powinien ujmować proponowany model betonu tworzony w celu zastosowania go do analizy stanów naprężenia i deformacji występujących w tych konstrukcjach. Model betonu pozwalający na przewidywanie zachowania się tego tworzywa w warunkach różnorodnych obciążeń i oddziaływań środowiska zewnętrznego (charakterystycznych dla mostów betonowych) tworzą:

- związek konstytutywny wiążący tensor odkształceń z tensorem naprężeń i higrotermicznymi czynnikami charakteryzującymi środowisko zewnętrzne. Związek ten jest skorelowany z powierzchnią wyężenia granicznego zdefiniowaną w przestrzeni naprężeń. Założono, że odkształcenia betonu są sumą odkształceń sprężystych, plastycznych, lepkich, skurczowych i termicznych,
- prawo pęknięcia materiału zdefiniowane w przestrzeni odkształceń. Przyjęto, że utrata ciągłości betonu (zarysowanie) nastąpi wówczas, gdy maksymalne wydłużenie plastyczne przekroczy wielkość graniczną zależną od narzuconej drogi wzdłuż, której składowe stanu naprężenia dążą ku powierzchni wyężenia granicznego. Pęknięcia występują w płaszczyźnie normalnej do kierunku maksymalnych wydłużeń plastycznych.

Teoretyczny model betonu zbudowano uwzględniając zjawiska:

- starzenia betonu (zmiany jego właściwości w czasie),
- regeneracji uszkodzeń struktury,
- kierunkowości uszkodzenia (zarysowania).

Założenia, na których oparto przedstawione w pracy zależności zostały zweryfikowane w oparciu o badania eksperymentalne. Podano wartości liczbowe stałych materiałowych i parametrów występujących w funkcjach opisujących właściwości materiału. Przedstawiono też przykłady zastosowań.

\* Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Wybrzeże  
spiańskiego 27, 50-370 Wrocław

## 1. WSTĘP

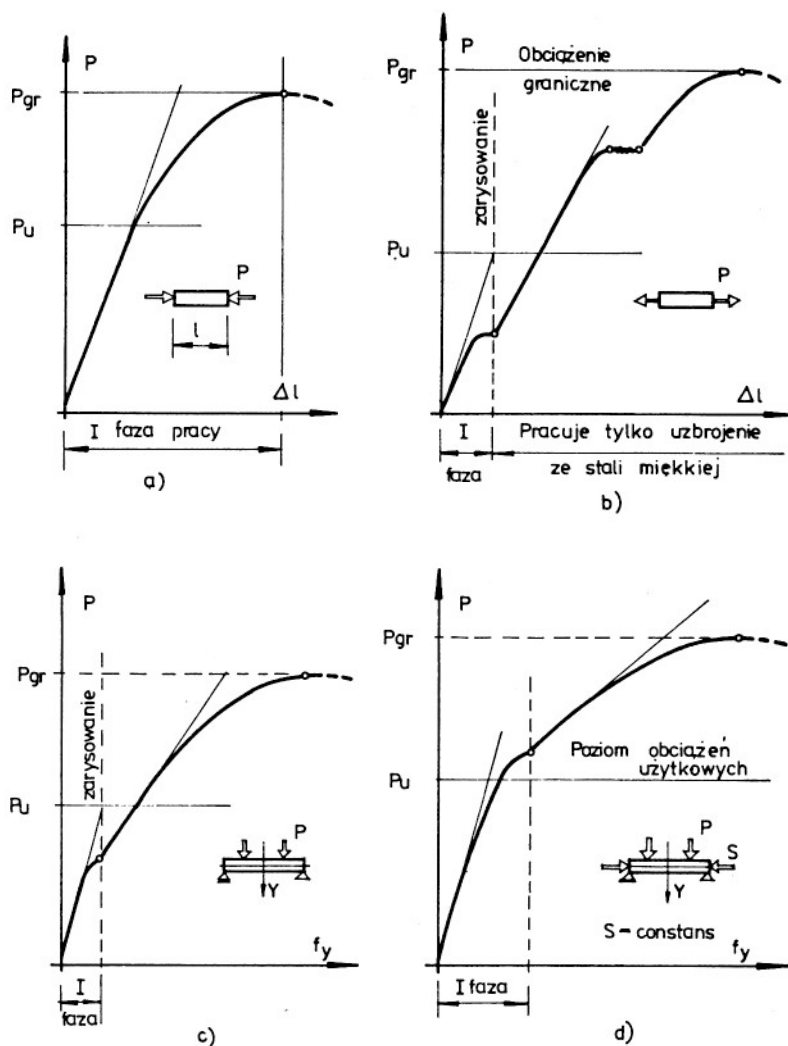
### 1.1. Przedmiot pracy

Beton uzbrojony jest podstawowym materiałem konstrukcyjnym współczesnego budownictwa. Zakres jego zastosowań jest bardzo szeroki i różnorodny. Z betonu wykonuje się domy mieszkalne, budynki użyteczności publicznej, obiekty przemysłowe (kominy, chłodnie kominowe, przekrycia powłokowe, hale), budowle komunikacyjne (mosty, tunele, nawierzchnie drogowe, mury oporowe), budowle hydrotechniczne (zapory wodne, jazy, nabrzeża), a także obiekty o przeznaczeniu specjalnym (jak np. platformy do poszukiwań ropy naftowej, osłony reaktorów atomowych czy wyrzutnie rakiet zdalnie sterowanych).

Zastosowanie betonu do budowy obiektów, od których wymagany jest wysoki poziom niezawodności (bezawaryjnej pracy) w założonym okresie eksploatacji, spowodowało szybki rozwój nowej dziedziny mechaniki - mechaniki konstrukcji betonowych. Dziedzina ta zaczęła się dynamicznie rozwijać z chwilą, gdy okazało się, że obliczanie konstrukcji betonowych w oparciu o klasyczne metody liniowej mechaniki jest w wielu przypadkach niewystarczające. Spowodowane to jest tym, iż zachowanie się konstrukcji betonowych pod działaniem obciążeń zewnętrznych ma charakter nieliniowy, co w sposób ideowy pokazano na rys. 1.1. Nieliniowość ta (brak proporcjonalności pomiędzy odkształceniami konstrukcji i naprężeniami wymuszającymi te odkształcenia) jest dwojakiego rodzaju:

- zachowanie się materiałów tworzących element konstrukcyjny (betonu i stali zbrojeniowej) w warunkach zaawansowanych obciążeń znacznie odbiega od zależności liniowej,
- w pewnych obszarach konstrukcji (w strefach poddanych rozciąganiu) powstają nieciągłości w formie rys, których morfologia jest również funkcją intensywności obciążenia.

Te właśnie czynniki, jak i to, że w analizie wielu konstrukcji trzeba uwzględnić wpływ czasu na ukształtowanie się stanu naprężenia i odkształcenia wpłynęły na rozwój metod obliczeniowych uwzględniających specyficzne cechy konstrukcji betonowych. Mechanika konstrukcji betonowych rozwija się na bazie podstawowych osiągnięć teorii sprężystości, teorii plastyczności, reologii i mechaniki pękania. Rozwój ten polega na wykorzystaniu i syntezie szeregu istniejących rozwiązań do analizy różnych zagadnień z dziedziny konstrukcji betonowych. Duże znaczenie dla szybkiego upowszechniania osiągnięć mechaniki konstrukcji betonowych ma równoległy rozwój numerycznych metod obliczeniowych, który po-



Rys. 1.1. Synteza wyników badań eksperymentalnych prostych konstrukcji z betonu uzbrojonego: a) element osiowo ściskany, b) element osiowo rozciągany, c) element zginany, d) element ściskano-zginany.

Fig. 1.1. The synthesis of results obtained from experimental studies of simple reinforced concrete structures: a) axially-compressed element, b) element subject to axial tension, c) element subject to bending, d) element subject to compression and bending.

zwala na stosunkowo łatwe uzyskiwanie efektywnych rozwiązań problemów nieliniowych [28,40,43,50,75,83,146,170,186,208,212,285,292,302,308] przestrzennie czasowych [18,88,100,225] czy losowych [32,257-259].

O zainteresowaniu tą dziedziną mechaniki wielu ośrodków naukowych i uzyskaniu przez szereg badaczy interesujących rozwiązań wielu ważnych problemów świadczą materiały dwóch międzynarodowych sympozjów poświęconych metodom obliczeń konstrukcji betonowych. Pierwsze z nich odbyło się w Darmstadt w 1978 r. (Nonlinear behaviour of reinforced concrete spatial structures), a drugie w Leicester w 1980 r. (Creep in structures). Również w naszym kraju obserwuje się znaczny wzrost zainteresowania tymi zagadnieniami, czego dowodem jest zorganizowana w Karpaczu w 1984 r. konferencja na temat: Mechanika konstrukcji betonowych.

Podstawowym czynnikiem decydującym o zbieżności uzyskiwanych rozwiązań z wynikami badań eksperymentalnych jest dokładność, z jaką wymodelujemy właściwości materiałów (betonu i stali) tworzących rozpatrywaną konstrukcję. Analizując obecny stan opracowania tego problemu możemy stwierdzić, że aktualnie wykorzystywane modele teoretyczne stali zbrojeniowych [1,2,50,255,280] opisują z dostateczną dokładnością właściwości mechaniczne tych materiałów. Jeżeli chodzi o beton, to - mimo szeregu interesujących prób, jak np. [10,17,19,31,50,65,82,95,96,132,226,272,291,326,328,329] - nie zdołano zbudować do chwili obecnej ogólnej spójnej matematycznie teorii betonu. Jest to zadanie trudne z uwagi na heterogeniczną budowę betonu oraz to, że odkształcenia betonu są nie tylko funkcją wymuszających je naprężeń, ale również oddziaływań środowiska zewnętrznego (wilgotności środowiska i jego temperatury). Dotychczasowy etap rozwoju mechaniki betonu (rozumianej jako mechanika materiału) można określić jako analityczny. Na przestrzeni ponad 100 lat (a szczególnie w ostatnim ćwierćwieczu) wyjaśniono wiele problemów szczegółowych z tego zakresu, zbudowano szereg teorii o ograniczonym zakresie ważności (opisujących dostatecznie dokładnie zachowanie się betonu w pewnych określonych warunkach). W chwili obecnej wydaje się, że można w oparciu o syntezę aktualnego stanu badań (liczba prac dotyczących tego zagadnienia sięga kilkunastu tysięcy) pokusić się o opracowanie ogólnej teorii betonu.

W niniejszej pracy podjęto więc podstawowe zagadnienia mechaniki betonu dotyczące modelu teoretycznego tego tworzywa.

## 1.2. Cel i zakres pracy

Celem pracy było opracowanie modelu teoretycznego betonu, pozwalającego na przewidywanie zachowania się tego tworzywa w warunkach różnorodnych obciążeń i oddziaływań środowiska. W szczególności rozważania autora skupiły się na:

- budowie związku konstytutywnego dla betonu w formie możliwie najogólniejszej,



- określeniu prawa pęknięcia (zniszczenia) dla różnych przypadków obciążeń doraźnych i długotrwałych.

Wyznaczenie tych dwóch praw wystarczy (pomijamy tu zagadnienia związane np. ze współpracą betonu i zbrojenia, korozji itp.) do opisania fizyko-mechanicznych właściwości betonu, w związku z czym stanowią one matematyczny model tego tworzywa.

Model przedstawiony w niniejszej pracy został opracowany pod kątem analizy stanu naprężenia i odkształcenia występującego podczas wznoszenia i eksploatacji mostów betonowych. Nie uwzględnia więc pewnych zagadnień występujących podczas eksploatacji konstrukcji specjalnych takich jak: zbiorniki na płynne gazy (temperatury kriogeniczne), osłony reaktorów jądrowych (wysokie temperatury, promieniowanie neutronowe) lub obiekty budowane w środowiskach o ekstremalnych warunkach (np. pustynia lub tereny o bardzo niskich temperaturach). Może być natomiast wykorzystany do analizy wszystkich tych konstrukcji betonowych, które pracują w warunkach zbliżonych do tych w jakich eksploatowane są obiekty mostowe.

### 1.3. Podstawowe oznaczenia

#### Struktura betonu

$k, V_k$	- masa i objętość kruszywa w $1 \text{ m}^3$ betonu
$c, V_c$	- masa i objętość cementu w $1 \text{ m}^3$ betonu
$w, V_w$	- masa i objętość wody w $1 \text{ m}^3$ betonu
$V_p$	- objętość powietrza w $1 \text{ m}^3$ betonu
$\omega_{wc}$	- stosunek masy wody zarobowej do masy cementu
$p$	- porowatość betonu

#### Czas

$\tau$	- wiek betonu
$\tau_0$	- wiek betonu w chwili rozpoczęcia procesu obciążenia
$\tau_1$	- wiek betonu w momencie, od którego rozpoczyna się wymiana wody z otoczeniem
$t$	- czas określający moment obserwacji zachodzących zjawisk

#### Środowisko zewnętrzne

$W$	- wilgotność względna powietrza
$\theta$	- temperatura

#### Hydratacja i starzenie

$h(\tau, \theta, W, \omega_{wc})$	- funkcja hydratacji cementu zawartego w betonie
$U(\tau)$	- uniwersalna funkcja starzenia

## Wytrzymałości betonu

$R_c$	- wytrzymałość betonu na proste ściskanie
$R_T$	- wytrzymałość betonu na proste rozciąganie
$R_{cc}$	- wytrzymałość betonu na płaskie ściskanie równomierne
$R_{rr}$	- wytrzymałość betonu przy płaskim rozciąganiu równomiernym
$R_{ccc}$	- wytrzymałość betonu na ściskanie hydrostatyczne
$R_{rrr}$	- wytrzymałość betonu na rozciąganie hydrostatyczne

## Stan naprężenia i odkształcenia

$\sigma, \epsilon$	- oznaczają ogólnie naprężenie i odkształcenie
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	- naprężenia główne
$\sigma_{ij}$	- tensor naprężenia
$\epsilon_{ij}$	- tensor odkształcenia
$\epsilon_{ij}^s, \epsilon_{ij}^p, \epsilon_{ij}^l$	
$\epsilon_{ij}^{sk}, \epsilon_{ij}^{\theta}$	- tensory odkształceń sprężystych (s), plastycznych (p), lepkich (l), skurczowych (sk) i termicznych ( $\theta$ )
$\sigma_0$	- naprężenie średnie
$\tau_{okt}$	- styczne naprężenie oktaedryczne
$\sigma_i$	- intensywność naprężeń

## Wytężenie betonu

$F(\sigma_{ij}) = 0$	- powierzchnia wytężenia granicznego zdefiniowana w przestrzeni naprężeń
$\eta$	- stopień wytężenia
$\eta_{max}(t)$	- maksymalny stopień wytężenia, jaki wystąpił w okresie $\tau_0 - t$

## Cechy sprężyste

$E_b$	- moduł sprężystości betonu jako funkcja jego wieku
$\nu_s$	- współczynnik Poissona dla odkształceń sprężystych

## Cechy lepkie

$C_l[\tau, (\dot{\epsilon} - \tau)]$	- miara odkształceń lepkich (pełzania)
$\nu_l$	- współczynnik Poissona dla odkształceń lepkich

## Cechy plastyczne

$\bar{\epsilon}_{o,kr}, \bar{\epsilon}_{p,kr}$	- stałe materiałowe charakteryzujące zdolność betonu do plastycznych odkształceń objętościowych i postaciowych
--	--

## Pękanie

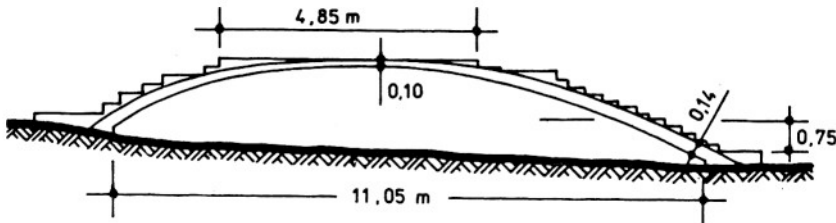
$F(e_{ij}^p) < e_{gr,min}$  - prawo pękania betonu zdefiniowane w przestrzeni plastycznych odkształceń postaciowych  $e_{ij}^p$

$e_{gr,min}$  - graniczna wartość minimalnego plastycznego odkształcenia postaciowego (wydłużenia)

## 2. ZARYS PROBLEMATYKI MOSTÓW BETONOWYCH

## 2.1. Historia, stan aktualny i perspektywy rozwoju mostów betonowych

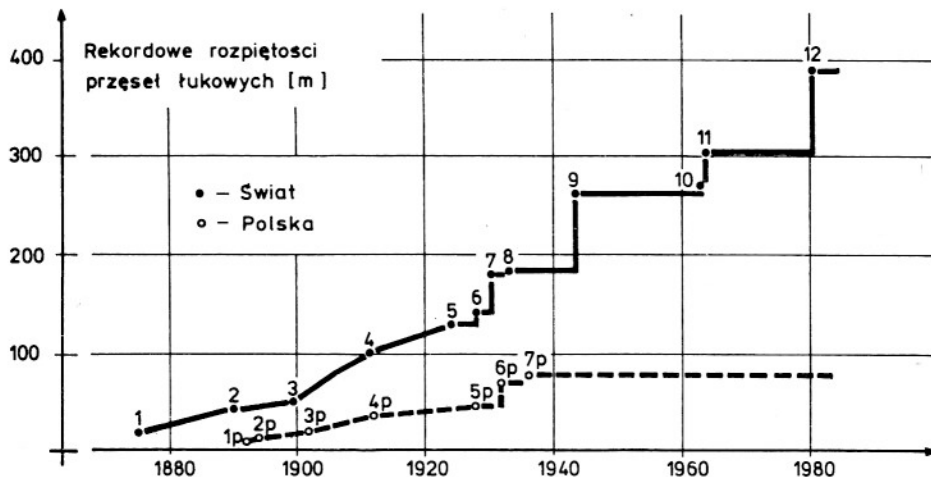
Beton w budownictwie inżynierskim zaczął być szerzej stosowany dopiero po wynalezieniu żelbetu i praktycznym jego zastosowaniu przez I. Moniera (1867-1873). Pierwszy żelbetowy most sklepiony (rozpiętość 16,5 m) wykonano w Chazelet (Francja, 1875). Bezpośrednim bodźcem inspirującym szersze wykorzystanie betonu zbrojonego w mostownictwie była wystawa w Bremie (1890), na terenie której zbudowano pokazową kładkę dla pieszych z żelbetu o rozpiętości sklepienia wynoszącej aż 40 m. W Polsce pierwsze doświadczalne mosty żelbetowe wybudowano już w kilka lat później, to jest w roku 1892 (w Warszawie) i w roku 1894 (we Lwowie). Kładka zbudowana we-



Rys. 2.1. Kładka dla pieszych z betonu zbrojonego, zbudowana w 1894 roku we Lwowie na terenie Politechniki [162].

Fig. 2.1. Footbridge made of reinforced concrete built at the premises of the Lvov Technical University in 1894 [162].

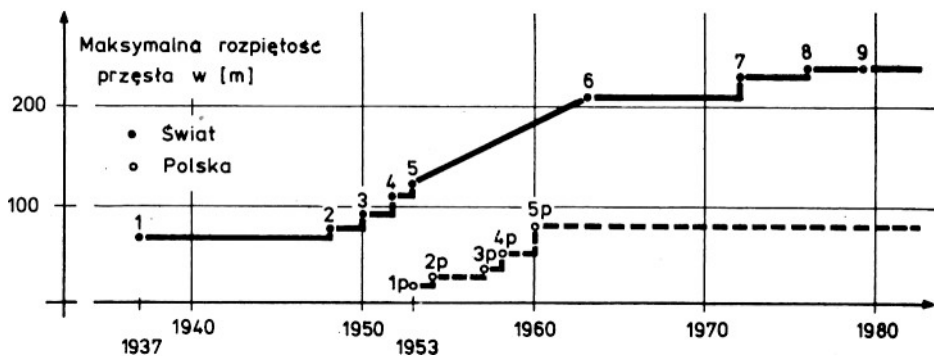
dług projektu M. Thullie na terenie Politechniki Lwowskiej zachowała się do dziś (rys. 2.1) i świadczy o tym, jak szybko wówczas polscy inżynierowie przeszczepiali na nasz grunt osiągnięcia techniki światowej. Początkowo mosty z betonu zbrojonego projektowano wzorując się na klasycznych rozwiązaniach mostów kamiennych. W miarę postępu prac badawczych i teoretycznych (Hennebique'a, Melana, Koenena, Mürscha, Neimana, Thullie, Empergera i innych) pojawiły się stopniowo nowe, bardziej ekonomiczne [316] i właściwe dla betonu zbrojonego rozwiązania i sposoby zbrojenia. Dźwigary płytowo-żebrowe zaczęto stosować już od 1894 roku, a rozpiętość przeszła równą 50 m osiągnięto już w 1899 roku w moście drogowym przez rzekę Vienne (Chatellaerault, Francja).



1. Chazelet, Francja,  $l_t = 16,5$ m, 1875, 2. Brema, Niemcy,  $l_t = 40,0$ m, 1890, 3. Chateilaerault, Francja,  $l_t = 50,0$ m, 1899, [316], 4. Risorgimento - Rzym,  $l_t = 100,0$ m, 1911, [316], 5. St. Pierre de Vauvray, Francja,  $l_t = 131,8$ m, 1924, [316], 6. Caile - Cruseiles, Francja,  $l_t = 139,8$ m, 1928, [316], 7. Plougastel, Francja,  $l_t = 180,0$ m, 1930, [316], 8. Traneberg-Sund, Szwecja,  $l_t = 181$ m, 1933, [315], 9. Sandö, Szwecja,  $l_t = 264$ m, 1943, [307], 10. Arrabida, Portugalia,  $l_t = 270$ m, 1963, [307], 11. Gladesvilles, Australia,  $l_t = 305$ m, 1964, [307], 12. Krk, Jugostawia,  $l_t = 390$ m, 1980, [307].
- 1p. Warszawa,  $l_t = 8,0$ m, 1892, [162], 2p. Lwów,  $l_t = 11,05$ m, 1894, [162], 3p. Tyrwa; Przemysl - Sanok, ok. 1902, [162], 4p. Przeczycza nad Wisłoką,  $l_t = 38,0$ m, ok. 1912, 5p. Poznań,  $l_t = 45,90$ m, 1928, [335], 6p. Kobiernice,  $l_t = 68,0$ m, 1932, [335], 7p. Tresna - Czernichów,  $l_t = 76,054$ m, 1936, [335].

Rys. 2.2. Rekordowe rozpiętości betonowych przęseł łukowych - ewolucja rozwoju.  
Fig. 2.2. The longest spans of concrete arch bridges - the history of development.

Na początku naszego stulecia nastąpiło szybkie i wszechstronne upowszechnienie budownictwa mostów z betonu zbrojonego. Znalazły zastosowanie różnorodne ustroje statyczne takie jak: belki, ramy i łuki, których realizacja stała się możliwa dzięki zbrojeniu betonu. W tym też czasie opracowano poprawne, choć jeszcze przybliżone, metody ich obliczania i wymiarowania (Mürsch, Freyssinet). Dalszy postęp był już ściśle związany ze wzrostem jakości i wytrzymałości materiałów, rozwojem metod obliczeniowych i doskonaleniem technologii. Tylko 12 lat było potrzeba, by podwoić rekordową rozpiętość przęsła betonowego i osiągnąć 100 m - łukowy most przez Tybr w Rzymie (1911, [316]). Kolejne rekordowe rozpiętości osiągnano stosując także przęsła łukowe w moście w Plougastel (maksymalna rozpiętość przęsła 180 m, Francja, 1930) i w Sandö (264 m, Szwecja, 1943 [316]). Kolejnym ważnym okresem w rozwoju budownictwa mostów



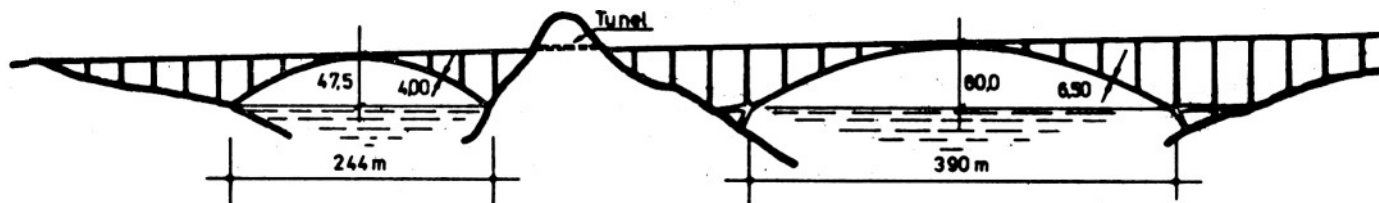
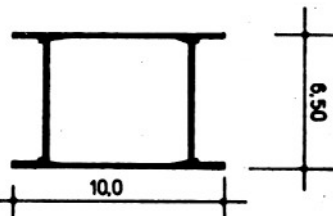
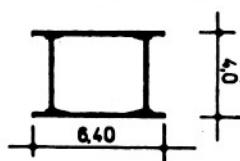
1. Aue (Saksonia),  $l_t = 69,0\text{m}$ , 1937, 2. Esbly (Francja),  $l_t = 78,0\text{m}$ , 1948, 3. Heilbronn,  $l_t = 96,0\text{m}$ , 1950, 4. Wormacja (RFN),  $l_t = 114,20\text{m}$ , 1952, 5. Koblencja,  $l_t = 122,85\text{m}$ , 1953, 6. Bendorf (RFN),  $l_t = 208,0\text{m}$ , 1963, 7. Kochi (Japonia),  $l_t = 230,0\text{m}$ , 1972, 8. Shizouka (Japonia),  $l_t = 240,0\text{m}$  1976, 9. Wyspy Mikronezji (Filipiny),  $l_t = 240,8\text{m}$ , 1979, 1p. Most płytowy o  $l_t = 18,90\text{m}$ , 1953, 2p. Bydgoszcz,  $l_t = 28,0\text{m}$ , 1954, 3p. Elbląg,  $l_t = 50,0\text{m}$ , 1957, 4p. Wrocław,  $l_t = 52,5\text{m}$ , 1958, 5p. Szczecin,  $l_t = 78,6\text{m}$ , 1960. Opracowano na podstawie [180, 307, 316, 335, 342, 343].

Rys. 2.3. Rekordowe rozpiętości przęseł z betonu sprężonego - ewolucja rozwoju.  
Fig. 2.3. The longest spans of prestressed concrete bridges - the history of development.

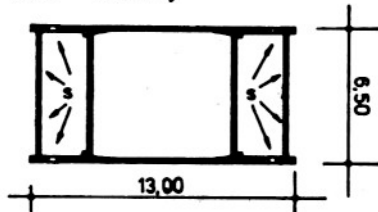
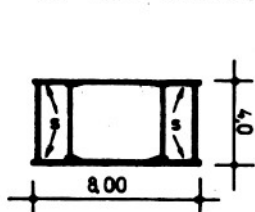
betonowych były lata 1937 i 1938, kiedy to Dischinger (w Aue), Finsterwalder (koło Wiedenbrück) i Freyssinet (koło Oelde) podjęli próby praktycznego wykorzystania idei sprężania konstrukcji betonowych [150, 207, 255, 316]. Idea ta została szeroko rozpowszechniona po drugiej wojnie światowej i wsparta nowoczesną technologią otworzyła ogromne perspektywy zastosowań betonu w mostownictwie.

Na dwóch kolejnych rysunkach 2.2 i 2.3 pokazano jak na przestrzeni ostatnich 100 lat wzrastały maksymalne rozpiętości przęseł w poszczególnych klasach konstrukcji. Widać z nich wyraźnie, że konstrukcje betonowe są stosowane także w tych przypadkach, gdy przekraczane przeszkody zmuszają do budowy przęseł o dużych rozpiętościach. Konkurencyjność rozwiązań betonowych w stosunku do stalowych w zakresie dużych rozpiętości (dla małych i średnich już od początku naszego stulecia nie była kwestionowana) znacznie wzrosła, gdy stwierdzono, że koszt zabezpieczenia antykorozyjnego stalowego mostu o długości rzędu 400 m wymaga wydatkowania co 5 lat kwoty 1,5-2,0 milionów dolarów [307]. Zaczęto też zwracać uwagę na to, że zużyta powłokę antykorozyjną mostów stalowych usuwa się z

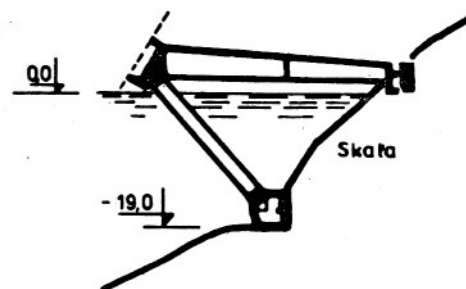
Ogólny widok przeprawy mostowej na wyspę Krk

Przekrój poprzeczny dźwigarów łukowych :  
I etap realizacji

II etap realizacji - stan końcowy



Szczegół konstrukcyjny podpory

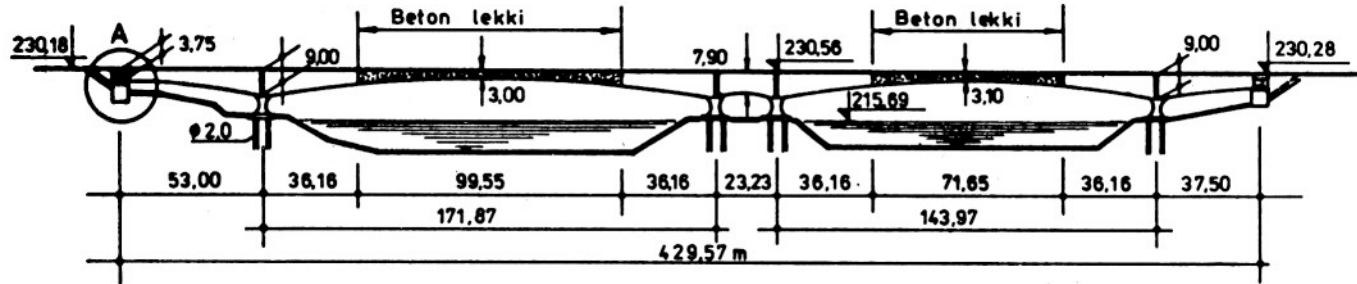


s - połączenia elementów prefabrykowanych.

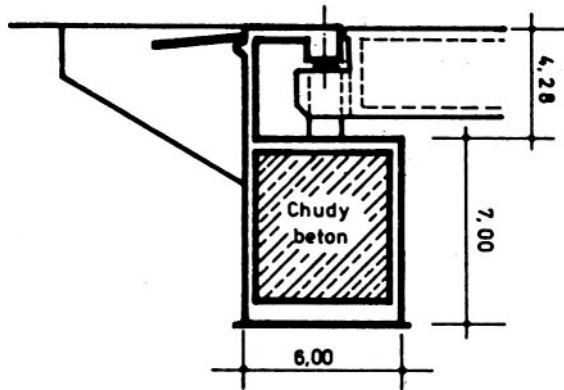
Rys. 2.4. Łukowe mosty betonowe na przeprawie mostowej na wyspę Krk w Jugosławii [307].

Fig. 2.4. Concrete arch bridges at the crossing to the Krk Island in Yugoslavia [307].

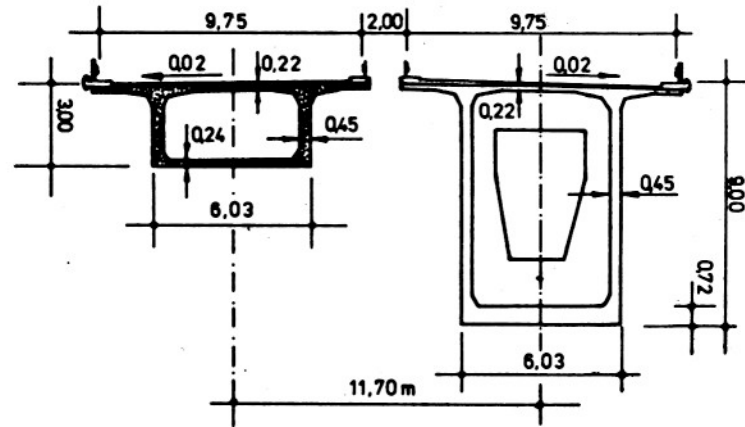
PRZEKRÓJ PODŁUŻNY



PRZYCZÓŁEK A - szczegół

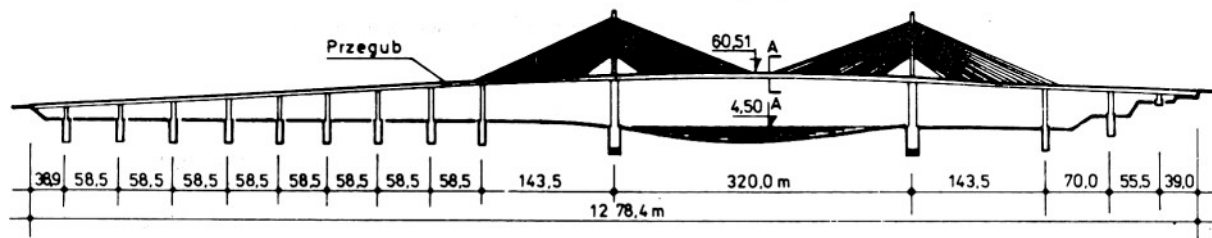


PRZEKRÓJE POPRZECZNE  
w przęśle na podporze

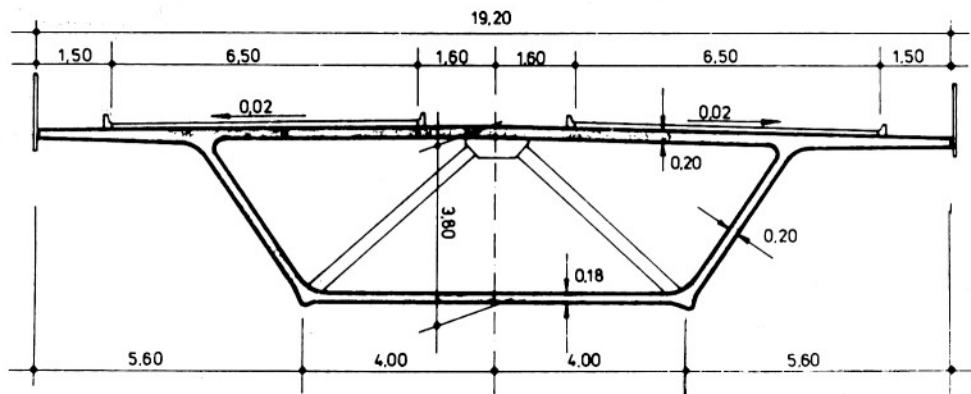


Rys. 2.5. Most z betonu sprężonego przez Ren w Ottmarshelm [116].

Fig. 2.5. Prestressed concrete bridge over the Rhine River in Ottmarshelm [116].



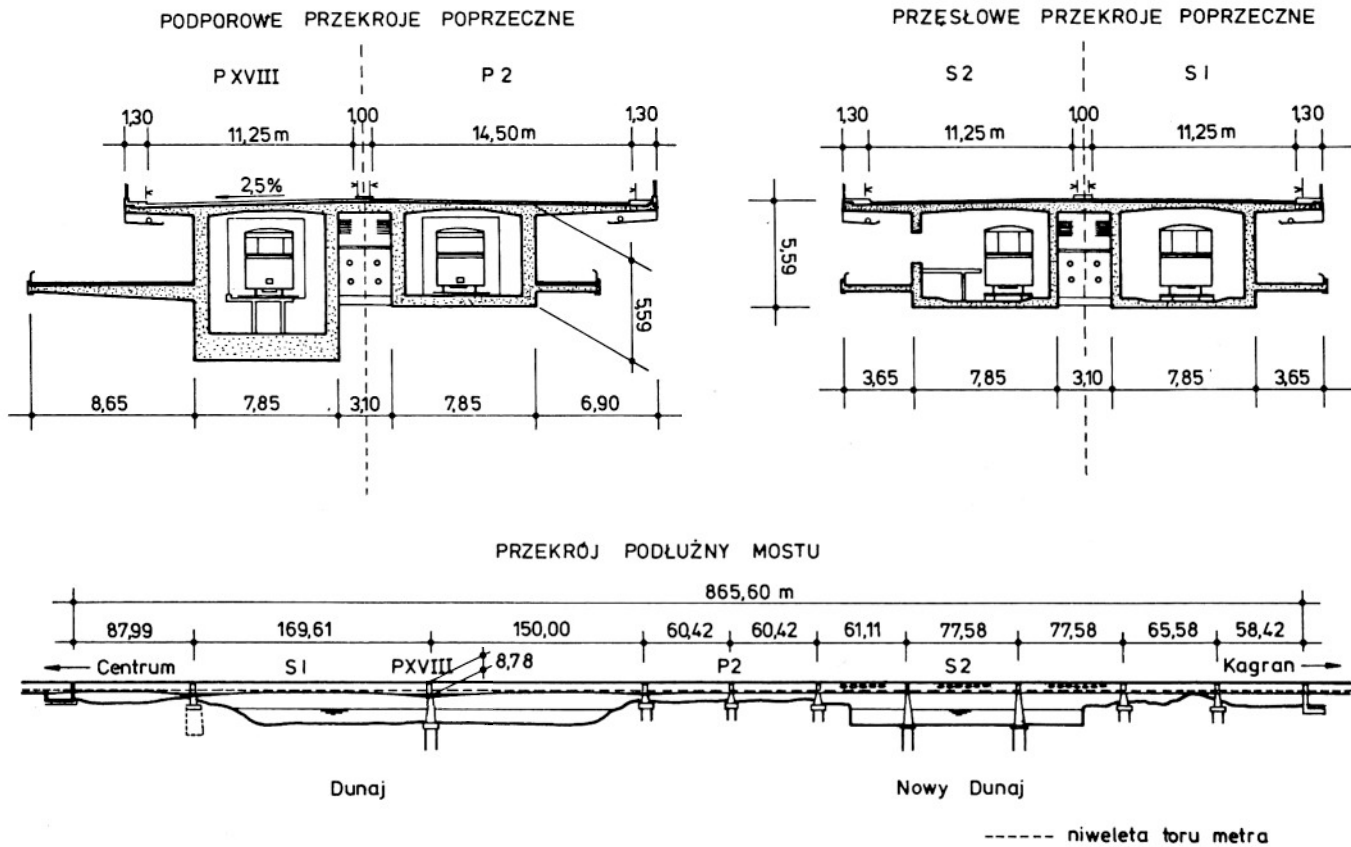
PRZEKRÓJ POPRZECZNY MOSTU A-A



Rys. 2.6. Podwieszony most betonowy przez Sekwanę w Brotonne [223].

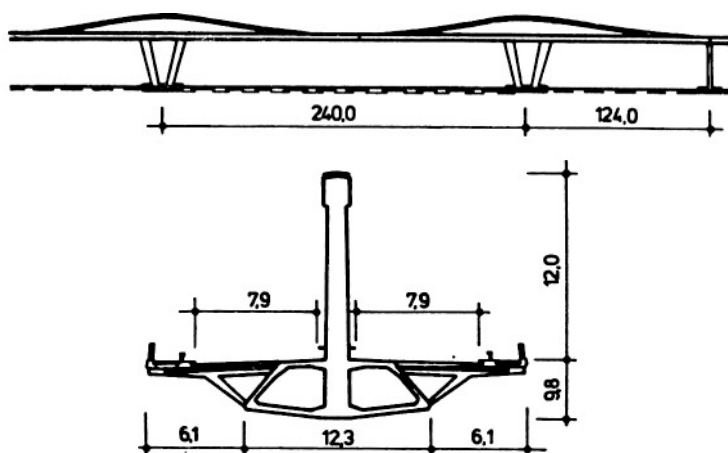
Fig.2.6. Concrete cable-stayed bridge over the Seine River in Brotonne [223].



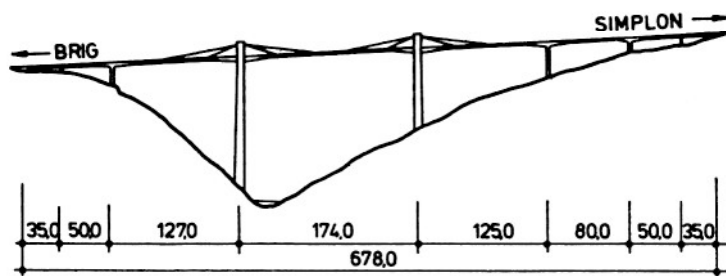


Rys. 2.7. Nowy most miejski (Neue Reichsbrücke) w Wiedniu [149].

Fig. 2.7. The new city bridge (Neue Reichsbrücke) in Vienna [149].



Projekt mostu w Kessock [39]



Ganter bridge [348]

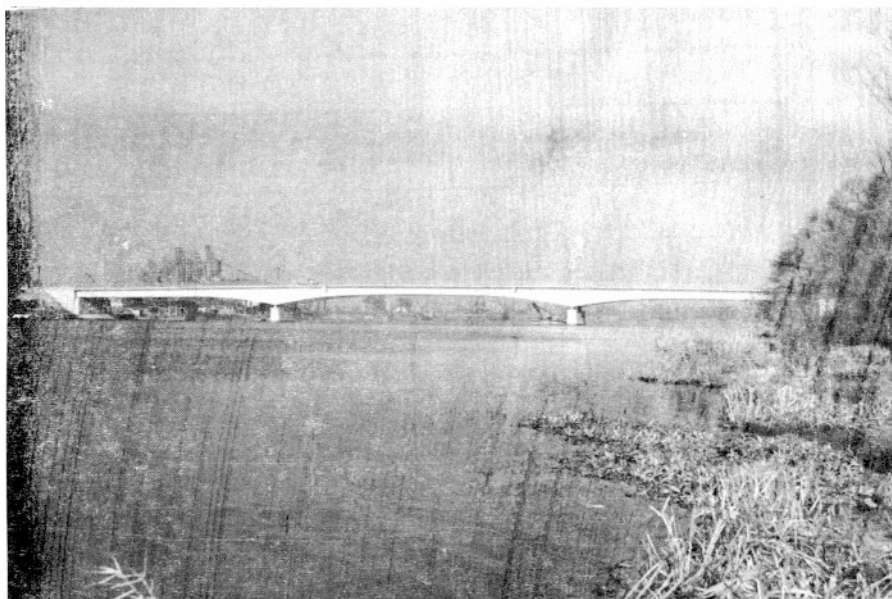
Rys. 2.8. Przykład nowych kierunków kształtowania mostów betonowych [39, 230, 348].  
 Fig. 2.8. An example of new trends in the construction of concrete bridges [39, 230, 348].

konstrukcji zwykle metodą piaskowania, co przyczynia się do znacznego zanieczyszczenia środowiska. Obszerne omówienie stanu aktualnego i perspektyw rozwoju mostów betonowych w świecie można znaleźć w podręcznikach monograficznych Leonhardta [207], Mathivata [223], Kmity [184, 185], Szczygła [316], czy Głomba [137, 138], a także w materiałach prezentowanych na ostatnich kongresach FIP (Londyn - 1978 [280] i Sztokholm - 1982 [186, 230, 282, 348]) i IABSE (Wiedeń - 1980 [243]) i innych [39, 55, 79, 80, 99, 116, 268, 274, 286, 307, 336]. Na rysunkach 2.4, 2.5 i 2.6 pokazano niektóre zrealizowane w ostatnich latach obiekty, stanowiące czołowe osiągnięcia światowego mostownictwa, a na rysunkach 2.7 i 2.8 wybrane, poja-

Tabela 2.1

Rekordowe rozpiętości przeseł mostów betonowych  
uzyskane do końca 1983 roku

M O S T Y    Ł U K O W E						
Lp	Nazwa mostu i kraju		Rozpiętość L [m]	f [m]	f:L	Rok oddania
1	Krk	Jugostawia	390	60	1:6,5	1980
2	Gladesvilles	Australia	305	41	1:7,4	1964
3	Foz do Iguassu	Brazylia	290	53	1:5,5	1965
4	Arrabida	Portugalia	270	52	1:5,2	1963
5	Sandö	Szwecja	264	40	1:6,6	1943
M O S T Y    B E L K O W E    I    R A M O W E						
Lp	Nazwa mostu i kraju		Rozpiętość L [m]	Wysokość konstrukcyjna [m]		Rok oddania
1	Mikronezja	Filipiny	240,8	—		1979
2	Shizouka	Japonia	240,0	— — 13,76		1976
3	Kochi	Japonia	230,0	— — 12,55		1972
4	Bendorf	RFN	208,0	4,40 — 10,45		1963
5	Pelotas	Brazylia	189,0	3,20 — 11,00		1978
M O S T Y    W A N T O W E						
Lp	Nazwa mostu i kraju		Rozpiętość [m]	H [m]	L:H	Rok oddania
1	Barrios de Luna	Hiszpania	440,0	2,50	176	w budowie
2	Posadas Encarnacion	Argentyna	330,0	2,94	112	1983
3	Brottonne	Francja	320,0	3,80	84	1977
4	Pasco - Kennewick	USA	299,0	2,13	140	1978
5	East Huntington	USA	274,3	1,52	180	w budowie
Opracowano na podstawie [ 39, 55, 79, 80, 99, 116, 149, 240, 268, 307, 316 ]						



Rys. 2.9. Most Cłowy w Szczecinie posiadający najdłuższe przęsło w kraju (78,6 m). Projektantem mostu jest M. Wolff [343].

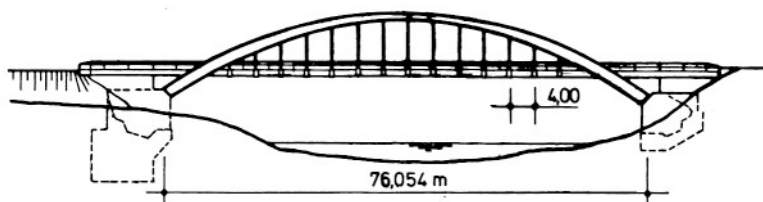
Fig. 2.9. "Castom" Bridge in Szczecin the span of which is the longest in Poland (78,6 m). The bridge was designed by M. Wolff [343].

wiające się ostatnio tendencje w ukształtowaniu mostów betonowych. Rysunki 2.9 i 2.10 obrazują stan rozwoju budownictwa mostów betonowych w Polsce. W tabeli 2.1 zestawiono rekordowe rozpiętości uzyskane do końca 1983 roku w poszczególnych typach konstrukcji. Z pewnym żalem trzeba stwierdzić, że dystans dzielący polskie mostownictwo od czołówki światowej stale rośnie (rys. 2.2, 2.3 i tab. 2.1). W niektórych klasach konstrukcji nie zanotowaliśmy postępu od prawie 50 lat, natomiast mostownictwo światowe przekracza coraz to nowe granice. Obecne prognozy rozwoju budownictwa mostów betonowych i potencjalnych możliwości realizacyjnych są przedstawione w [39,55,137,207,230,307,336,348] i innych opracowaniach.

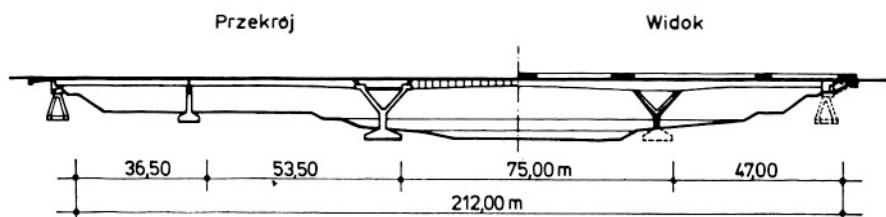
W świetle powyższych rozważań należy stwierdzić, że mostownictwo polskie ma przed sobą wielkie zadania, bo kraj nasz leży na skrzyżowaniu głównych szlaków komunikacyjnych Europy.



Most przez Sotę w Kobiernicach,  $L = 26 + 68 + 26$  Zbudowany w 1960 r wg projektu J. Grycza [84]



Most przez Sotę na drodze Tresna - Czernichów. Zbudowany wg projektu W. Burzynskiego w 1936 r, zniszczony w 1944 r.



Most przez Wartę w Poznaniu zbudowany metodą montażu wspornikowego w 1970 r wg projektu M. Wolffa [342,343]

Rys. 2.10. Duże mosty betonowe zbudowane w Polsce [84, 335, 342].

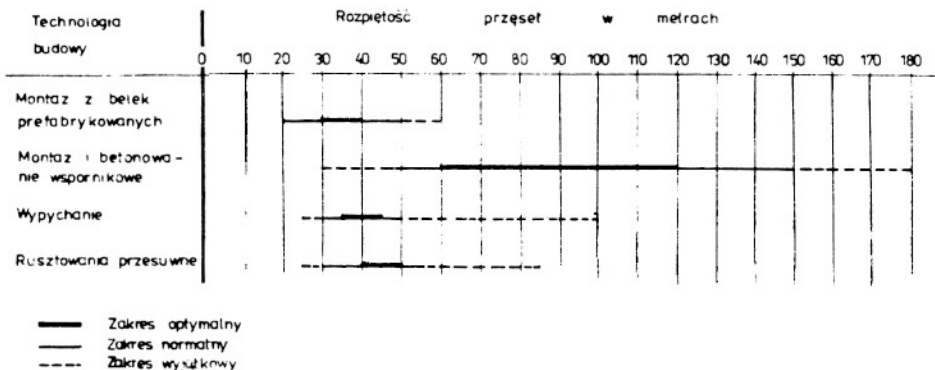
Fig. 2.10. Large concrete bridges built in Poland [84, 335, 342].

## 2.2. Cechy współczesnych mostów betonowych

Istotne cechy charakterystyczne współcześnie budowanych mostów [137, 138, 184, 185, 207, 223, 316] to:

a) dostosowanie schematów statycznych do rozpiętości przęseł i rodzaju zastosowanej technologii. I tak przy przęsłach krótkich (do około 30–40 m) będą to zwykle ustroje płytowe (wykonywane za pomocą rusztowań stacjonarnych lub przesuwnych), lub wielodźwigarowe (wykonywane z belek prefabrykowanych). Dla średnich i dużych rozpiętości stosuje się ustroje belkowe, ramownicowe lub łukowe. Powyżej 200 m przeważają ustroje łukowe i podwieszane (wantowe). Do budowy przęseł dużych rozpiętości mogą być przydatne różne technologie [223]; racjonalny zakres ich zastosowań ilustruje rys. 2.11;

b) proste przekroje poprzeczne. Ewolucja mostów betonowych zmierza do rozwiązań ściśle podporządkowanych reżimowi technologicznemu. Dla mostów dużej rozpiętości stosuje się przeważnie dźwigary skrzynkowe



Rys. 2.11. Przydatność różnych technologii do budowy mostów betonowych dużej rozpiętości [223].

Fig. 2.11. Applicability of different technologies in the construction of large-span concrete bridges [223].

[51, 138, 223], natomiast dla estakad - płytowe. Zakres zastosowań przęseł wielodźwigarowych wyraźnie się zawęża i ma rację bytu tylko przy wykorzystaniu prefabrykatów;

c) złożone stany montażowe konstrukcji, co zostanie rozwinięte w następnym podrozdziale;

d) stosowanie ustrojów wieloprzęsłowych o dużym (nawet do 500 m) rozstawie dylatacji z uwagi na korzyści eksploatacyjne i łatwiejsze utrzymanie;

e) wzrost średniej rozpiętości przęseł [137];

- f) zastosowania betonu lekkiego [139,336] i różnych kompozytów [47];
- g) wprowadzanie nowych koncepcji konstrukcyjnych, takich jak np. konstrukcje częściowo sprężone [80] czy sprężano-rozprężane [99].

Wymienione wyżej cechy współczesnych mostów i wzmiankowane już tendencje rozwoju wymagają rozwiązywania coraz to nowych problemów z dziedziny mechaniki, a w szczególności mechaniki konstrukcji betonowych. Niektóre z tych zagadnień zostaną omówione w następnym podrozdziale.

### 2.3. Problemy mechaniki mostów betonowych

#### 2.3.1. Wprowadzenie

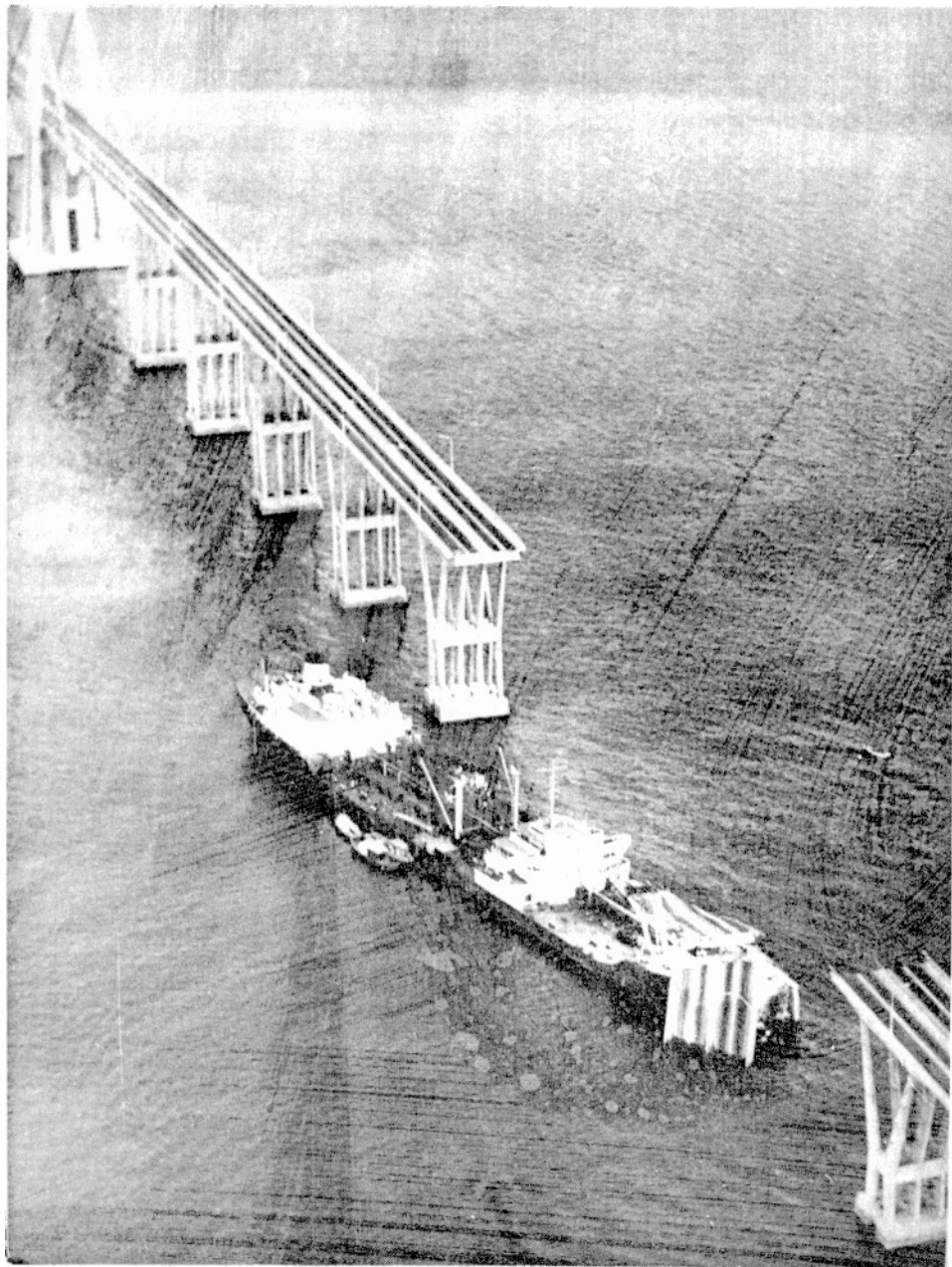
Istotne dla określenia cech, jakimi powinien charakteryzować się proponowany model betonu są następujące problemy:

- oddziaływanie obciążeń i innych niemechanicznych czynników zewnętrznych na konstrukcję mostową,
- wpływ czynników technologicznych, takich jak np. sposób wznoszenia obiektu, na ukształtowanie się sił wewnętrznych w konstrukcji,
- konieczność analizy konstrukcji złożonych geometrycznie i niejednorodnych materiałowo,
- potrzeba uwzględniania wpływu lokalnych nieciągłości konstrukcji (zarysowań) na ich wytrzymałość.

#### 2.3.2. Obciążenia i oddziaływania w mostach betonowych

W statycznej i dynamicznej analizie mostów należy brać pod uwagę następujące rodzaje obciążeń [137,185,207,223,316]:

- obciążenia stałe (w zasadzie niezmiennające się w długich okresach czasu), do których zalicza się: ciężar własny konstrukcji, ciężar warstw nawierzchni, ciężar balastu itp.,
- obciążenia działające na konstrukcję w sposób długotrwały, których chwilowa wielkość jest funkcją czasu. Zalicza się do nich wszelkie siły wprowadzane celowo do konstrukcji jak: siły sprężające i rozprężające,
- siły wymuszone przez np. nierównomierne osiadanie podpór,
- zmienne obciążenia montażowe o wielkościach przewyższających czasami te, jakie wystąpią w normalnej eksploatacji obiektu,
- zmienne obciążenia użytkowe,
- obciążenia wyjątkowe, pojawiające się rzadko, ale o wielkości przewyższającej normalnie występujące obciążenia użytkowe,
- oraz obciążenia o charakterze uderzeniowym (uderzenia statków (rys. 2.12) lub pojazdów o konstrukcję mostu) i sejsmicznym.



Rys. 2.12. Widok mostu przez jezioro Maracaibo po uderzeniu statku w jedną z podpór.

Fig. 2.12. The view of the bridge over the Maracaibo Lake after one of its supports was stroken by a ship.



T a b e l a 2.2

Ekstremalne naprężenia mogące powstać w elementach dwuprzęsłowego mostu skrzynkowego na skutek działania nierównomiernego pola temperatury [172]

Analizowany element		Kierunek poprzeczny $\sigma_y$	Kierunek podłużny $\sigma_x$	Wytrzymałość betonu na rozciąganie $R_f$
Płyta pomostu	Ściskanie	+ 4,6 MPa	+ 5,0 MPa	Beton B 45 Wytrzymałość gwarantowana z prawdopodobieństwem 95% wynosi 3,1 MPa
	Rozciąganie	- 2,8	- 2,0	
Ściany dźwigara skrzynkowego	Ściskanie	+ 8,7 Luty	+ 1,4	
	Rozciąganie	- 4,3 Czerw.	- 3,5	
Płyta dolna		- 1,7	- 1,7	

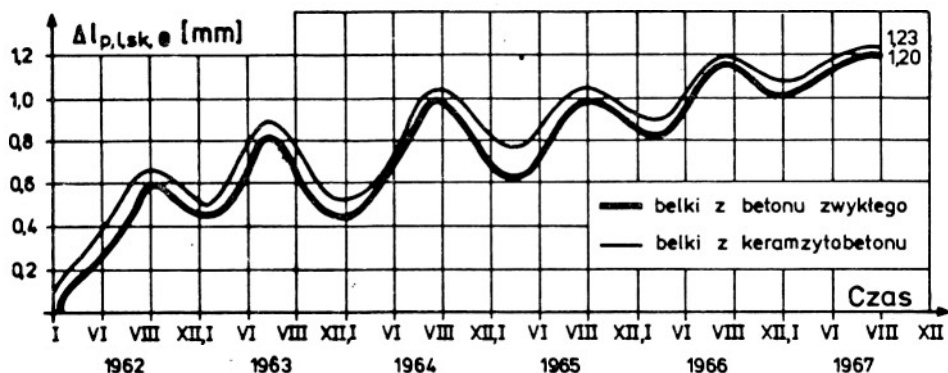
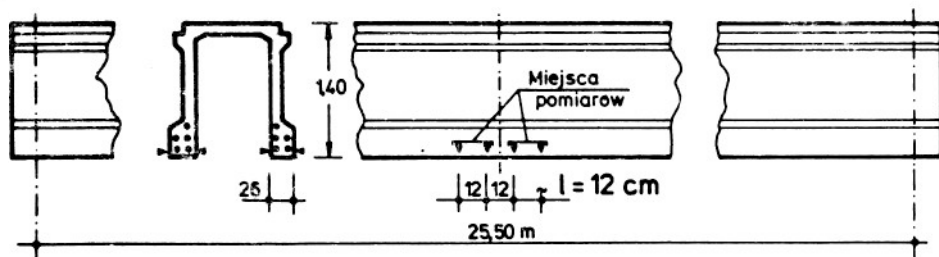
  

Przekrój poprzeczny analizowanego mostu skrzynkowego

Do niemechanicznych czynników wpływających na stan deformacji i wyężenia konstrukcji należą zmienne w czasie pola temperatury i wilgotności [17,112,172,199,204-206,261] - tab. 2.2 i rys. 2.13.

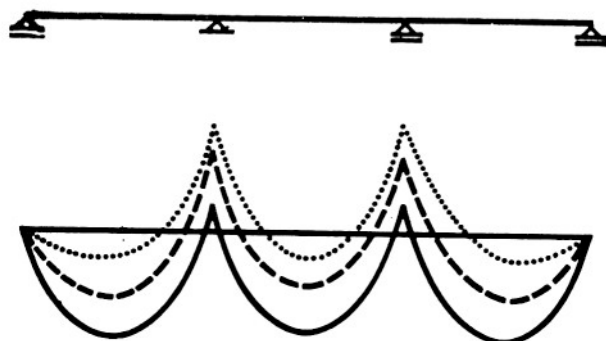
Podsumowując przedstawione dotychczas rozważania stwierdzamy, iż:

- obciążenia stałe długotrwałe czy montażowe przykładane są do konstrukcji sukcesywnie, a poszczególne ich składowe działają na konstrukcję (beton) o różnych właściwościach (różnej dojrzałości),
- obciążenia użytkowe, występujące zwykle w superpozycji ze zmiennymi polami wilgoci i temperatury, wywołują w konstrukcji losowe, pulsujące w czasie stany naprężenia,
- obciążenia wyjątkowe i uderzeniowe wywołują znaczne przeciążenia konstrukcji ponad poziom występujący w normalnej eksploatacji [297,344]
- obciążenie mostów jest procesem losowym [257-259].



Rys. 2.13. Deformacje opóźnione betonu mierzone w środku rozpiętości belek sprężonych.

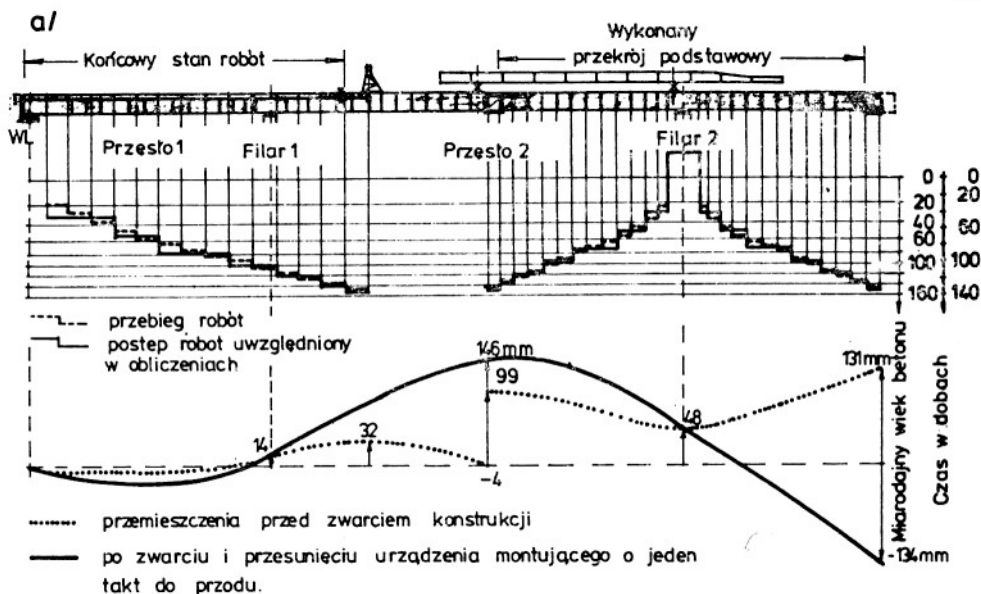
Fig. 2.13. Delayed deformations in concrete measured at the midspan of beams.



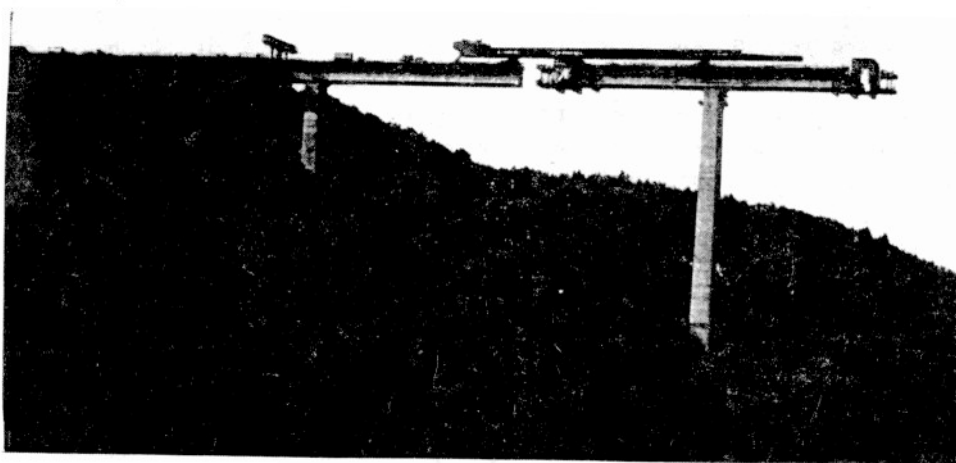
- ustroj ciągły wykonany z belek prefabrykowanych
- - - - - ustroj wykonany na mokro w tradycyjnym rusztowaniu
- ..... ustroj wykonany metodą betonowania lub montażu wspornikowego

Rys. 2.14. Wpływ technologii budowy mostu na rozkład momentów zginających wywołanych ciężarem własnym.

Fig. 2.14. The effect of the construction on the distribution of bending moments caused by the dead weight of the bridge.



b/



Rys. 2.15. Fragment analizy statycznej stanów montażowych wykonanej dla mostu przez rzekę Kocher w Geislingen [186]; a) rozważany schemat teoretyczny, b) odpowiadający mu postęp montażu.

Fig. 2.15. A fragment of the static analysis of assembly states, performed for the bridge over the Kocher River in Geislingen [168]; a) theoretical diagram considered, b) the corresponding advance in assembly.

Struktura, charakter i złożoność obciążeń oraz oddziaływań, jakim podlegają budowle mostowe stwarzają znaczne trudności w teoretycznym ujęciu relacji zachodzących między tymi obciążeniami a skutkami ich działania. W szczególności musimy zwrócić uwagę na to, że uwzględnienie wymienionych czynników w konstrukcji modelu teoretycznego betonu zmusza do rozpatrywania szeregu problemów, wykraczających poza liniową reologię, z zakresu zmęczenia materiałów, teorii przystosowania czy metod probabilistycznych.

### 2.3.3. Wpływ technologii na rozkład sił wewnętrznych i wyężenie konstrukcji

Przyzwyczajeni do tradycyjnych (stosowanych na ogół w naszym kraju) metod wznoszenia mostów betonowych nie zawsze zdajemy sobie sprawę z faktu, jak dalece technologia ingeruje w proces projektowania (analizę statyczną) obiektów mostowych. Najprostszym przykładem potwierdzającym to jest porównanie rozkładu momentów zginających w trójprzęsłowym moście wykonanym według trzech różnych technologii - rys. 2.14.

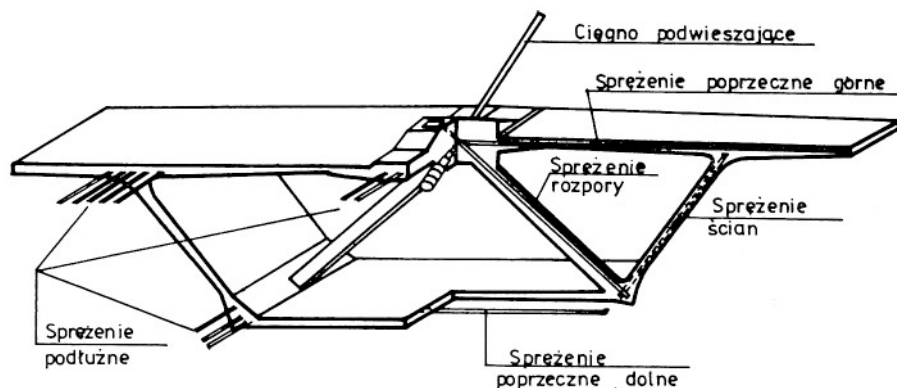
Na następnym rysunku 2.15 przedstawiono fragment analizy stanów montażowych mostu wykonywanego metodą betonowania wspornikowego [186]. Określenie osi odkształczonej i stanu wyężenia wykonanej części mostu wymagało uwzględnienia całej jego historii. Podobne problemy można spotkać podczas projektowania (obliczania) mostów budowanych metodą wypychania [137,138,207]. Tutaj most wykonuje się z odcinków mających w czasie budowy różną dojrzałość betonu, a tym samym i różne cechy mechaniczne. Ponadto w czasie nasuwania w przekrojach mostu pojawiają się naprzemian momenty dodatnie i ujemne wywołane ciężarem własnym.

Widzimy więc, że stosowanie nowoczesnych technologii wymaga od projektanta szerokiego zakresu obliczeń stanów montażowych i uwzględniania w tych obliczeniach niejednorodności materiałowej konstrukcji.

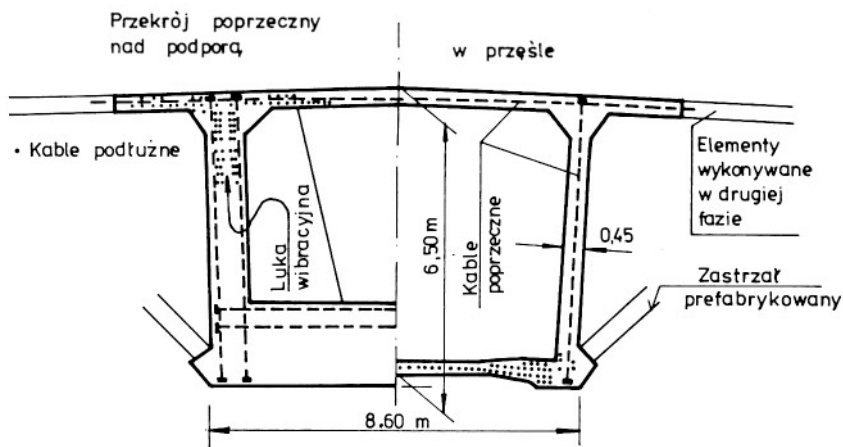
Wracając jednak do podstawowej problematyki niniejszej monografii, stwierdzamy, że stosowanie nowoczesnych technologii wymaga szczegółowego rozpoznania właściwości betonów o młodym wieku (betonów o niepełnej dojrzałości), a także cech betonów poddanych różnym zabiegom przyspieszającym dojrzewanie (np. naparzenie [120,148,250,349]).

### 2.3.4. Wyężenie betonu w mostach betonowych

W betonowych konstrukcjach mostowych poddanych różnorodnym obciążeniom i oddziaływaniom występuje przeważnie złożony stan napięcia. Prosty stan naprężenia jest zjawiskiem wyjątkowym i nie może stanowić podstawy wymiarowania nowoczesnych konstrukcji mostowych (rys. 2.4 i 2.5). Ukształtowanie i będące jego efektem (stosowane coraz częściej) wielokierunkowe



Układ kabli sprężających w przęśle mostu w Brotonne [223]



Układ kabli w przęśle i nad podporą w moście nad doliną rzeki Kocher w Geisingen [186]

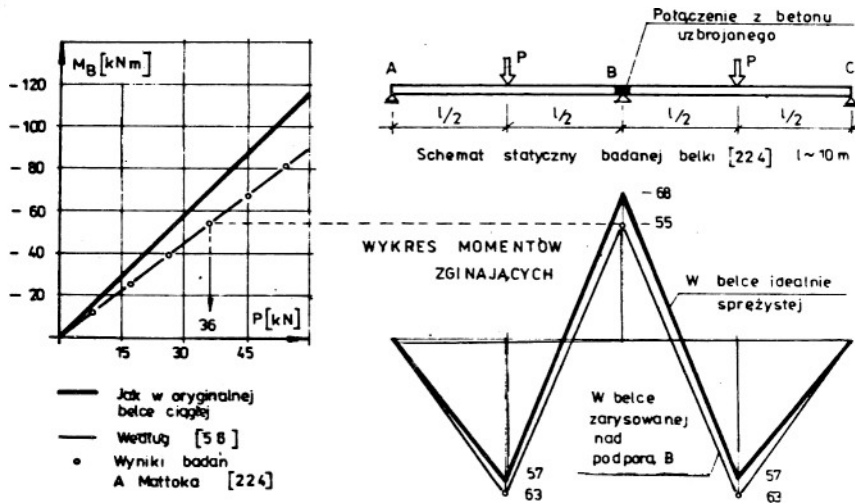
Rys. 2.16. Przykłady wielokierunkowego sprężenia stosowane w rozwiązaniach współczesnych mostów betonowych dużej rozpiętości.

Fig. 2.16. Examples of multi-directional post-tensioning used in contemporary constructions of large-span bridges.

sprężanie konstrukcji (rys. 2.16) sprawiły to, że bardzo ważnym problemem staje się ocena stopnia wyętwienia betonu w założonym stanie naprężenia.

Dokładność oceny stopnia wyętwienia betonu w konstrukcji zależy od tego, czy przyjęty model obliczeniowy odwzorowuje ściśle jej cechy

i od poziomu rozeznania właściwości materiału w złożonych stanach naprężenia.



Rys. 2.17. Porównanie pracy belki jednorodnej i zarysowanej nad podporą B, na przykładzie belki ciągłej utworzonej z elementów sprężonych połączonych złączem żelbetowym.

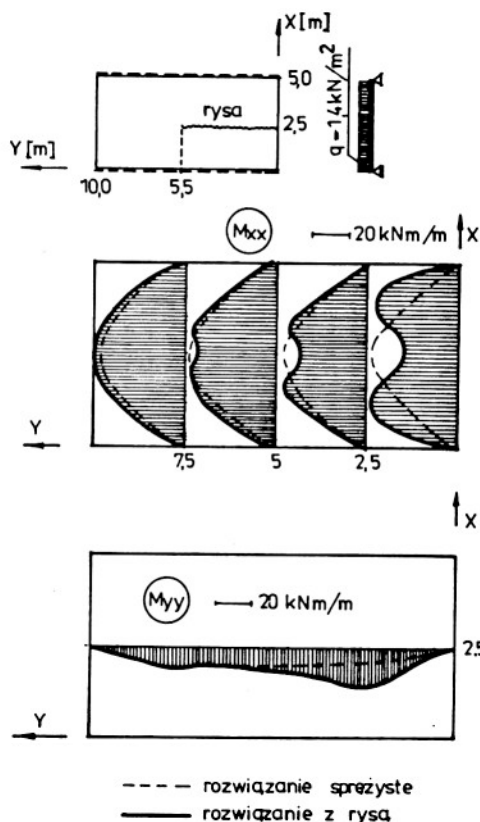
Fig. 2.17. The comparison of the performance of a homogeneous beam and the one cracked over the support B; the example of a continuous beam made up from prestressed elements joined with a reinforced concrete bond.

Na podstawie rozeznania literaturowego tych dwóch problemów możemy stwierdzić, że:

- aktualny stan rozwoju metod obliczeń pozwala (w przyszłości należy się liczyć z dalszymi postępami w tej dziedzinie) na wyznaczenie pełnego tensora naprężeń w dowolnym punkcie konstrukcji przy uwzględnieniu skomplikowanego (przestrzennego i niejednorodnego) jej ukształtowania [28,40,75,83,146,181,186,285,292,308,351], zbrojenia [40,41,43,50,113,225,291], nieliniowości fizycznej materiałów [28,40,43,50,75,170,208,262,292] czy zarysowania [28,64,146,170,217,285,292],

- stan badań betonu poddanego działaniu złożonych stanów naprężenia pozwala już obecnie na sformułowanie dostatecznie dokładnego prawa pęknięcia [10,50,82,83,94,113,132,140,196-198,209,226,245,283,292,302,345].

Znajomość prawa pęknięcia betonu jest szczególnie istotna z uwagi na to, że powstanie rys w konstrukcjach betonowych jest zależne od poziomu ich wyteżenia (intensywności obciążenia). Zależnie od rodzaju konstrukcji czy środowiska, w jakim ona pracuje, dopuszcza się możliwość powsta-



Rys. 2.18. Redystrybucja momentów zginających  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  w płycie żelbetowej wskutek zarysowania [217].  
 Fig. 2.18. Cracking-induced redistribution of bending moments  $M_{xx}$ ,  $M_{yy}$  in a reinforced concrete plate [217].

nia rys w niektórych jej strefach przy działaniu określonego rodzaju obciążenia i tak:

- w konstrukcjach żelbetowych rysy mogą wystąpić już pod działaniem ciężaru własnego,
- w elementach zaprojektowanych jako częściowo sprężone dopuszcza się rozwarcie rys tylko pod obciążeniem użytkowym, natomiast w stanie bezużytkowym rysy są zamknięte,
- konstrukcje o pełnym sprężeniu przenoszą bez spękań obciążenia stanu użytkowego i obciążenia wyjątkowe, zarysowanie może wystąpić dopiero przy wprowadzeniu na most obciążeń większych niż normowe.

Powstanie rys powoduje zwykle redystrybucję naprężeń w przekrojach konstrukcji (konstrukcje izo- i hiperstatyczne) i redystrybucję sił wewnętrznych (konstrukcje hiperstatyczne). Problem ten przedstawiono na rysunkach 2.17 i 2.18, na których porównano rozkład momentów występują-

Przeciętny stopień wyteżenia betonu w polskich mostach betonowych [297]

Rodzaj konstrukcji	Poziom wyteżenia przy obciążeniu	
	użytkowym	wyjatkowym
Żelbetowa	0,55	0,75
Sprężona	0,45	0,60

cy w różnych konstrukcjach przed i po zarysowaniu. Pokazane wyniki [56, 217, 224] wskazują wyraźnie, że zarysowanie wprowadza istotne zmiany w rozkładzie sił wewnętrznych, w związku z czym nie powinno być pomijane.

W tabeli 2.3 podano oszacowane przez Ryżyńskiego [297] poziomy wyteżenia występujące w belkowych mostach żelbetowych i sprężonych poddanych różnym rodzajom obciążeń. Zestawione dane wyraźnie wskazują, że podczas obciążeń ponadnormatywnych stopień wyteżenia betonu w niektórych częściach konstrukcji jest bardzo wysoki. Analizując więc problemy z tego zakresu (np. Wołowicki [344]), wkraczamy w obszar nieliniowej mechaniki konstrukcji betonowych. Ważność zagadnienia ponadnormatywnych obciążeń mostów w skali polskiego mostownictwa znacznie wzrosło w najbliższych latach w związku z wprowadzoną ostatnio nową normą obciążeń. Norma ta, podnosząc generalnie wielkość obciążeń mostowych, wymusi sprawdzenie (przeliczenie) wielu starych mostów na nowe obciążenia. W wielu przypadkach, aby podjąć decyzję o zezwoleniu na przejazd przez most bardzo ciężkich pojazdów, trzeba będzie ocenić skutki takiego przeciążenia w oparciu o nieliniowe (uwzględniające zarysowanie) metody mechaniki konstrukcji betonowych. Aby można było rozwijać i w przyszłości stosować te metody, niezbędne jest poznanie właściwości betonu w złożonych stanach naprężenia i przy różnym jego wyteżeniu.

### 2.3.5. Podsumowanie

Rozpatrując wyniki rozważań zawarte w podrozdziale 2.3 należy stwierdzić, że model teoretyczny betonu, budowany w celu zastosowania go do analizy wyteżenia i deformacji betonowych konstrukcji mostowych powinien uwzględniać następujące zagadnienia:

- zmianę właściwości betonu w czasie (starzenie betonu),
- nieliniowość odkształceń,
- zachowanie się betonu w warunkach obciążeń powtarzających się cyklicznie (zjawisko wibropełzania i zmęczenia),
- wpływ warunków higrotermicznych środowiska zewnętrznego na odkształcalność betonu,
- pękanie betonu w prostych i złożonych stanach naprężenia.



### 3. STRUKTURA BETONU

#### 3.1. Informacje podstawowe

Wyjaśnienie procesów zachodzących w betonie poddanym działaniu obciążeń i opisanie jego fizyko-mechanicznych właściwości jest niemożliwe bez poznania (choćby w ograniczonym zakresie) budowy wewnętrznej tego materiału. W rozdziale tym przedstawione będą podstawowe informacje o strukturze betonu i jej wpływie na cechy oraz wartość techniczną tego tworzywa.

Stwardniały beton jest wielofazowym niejednorodnym kompozytem, którego matrycą jest kruchy zaczyn cementowy, a wypełniaczem kruszywo mineralne. Struktura wewnętrzna tego kompozytu jest złożona i podlega przeobrażeniom w czasie. Na rysunku 3.1 pokazano zmiany wzajemnych proporcji objętościowych poszczególnych faz zachodzące w przykładowym betonie wraz z postępującą hydratacją. Świeży beton jest plastycznym układem ziarn kruszywa w zaczynie cementowym, jednak od chwili związania jego objętość pozostaje w przybliżeniu stała.

Struktura betonu jest więc funkcją wielu czynników o różnym charakterze, które można zestawić w dwie grupy:

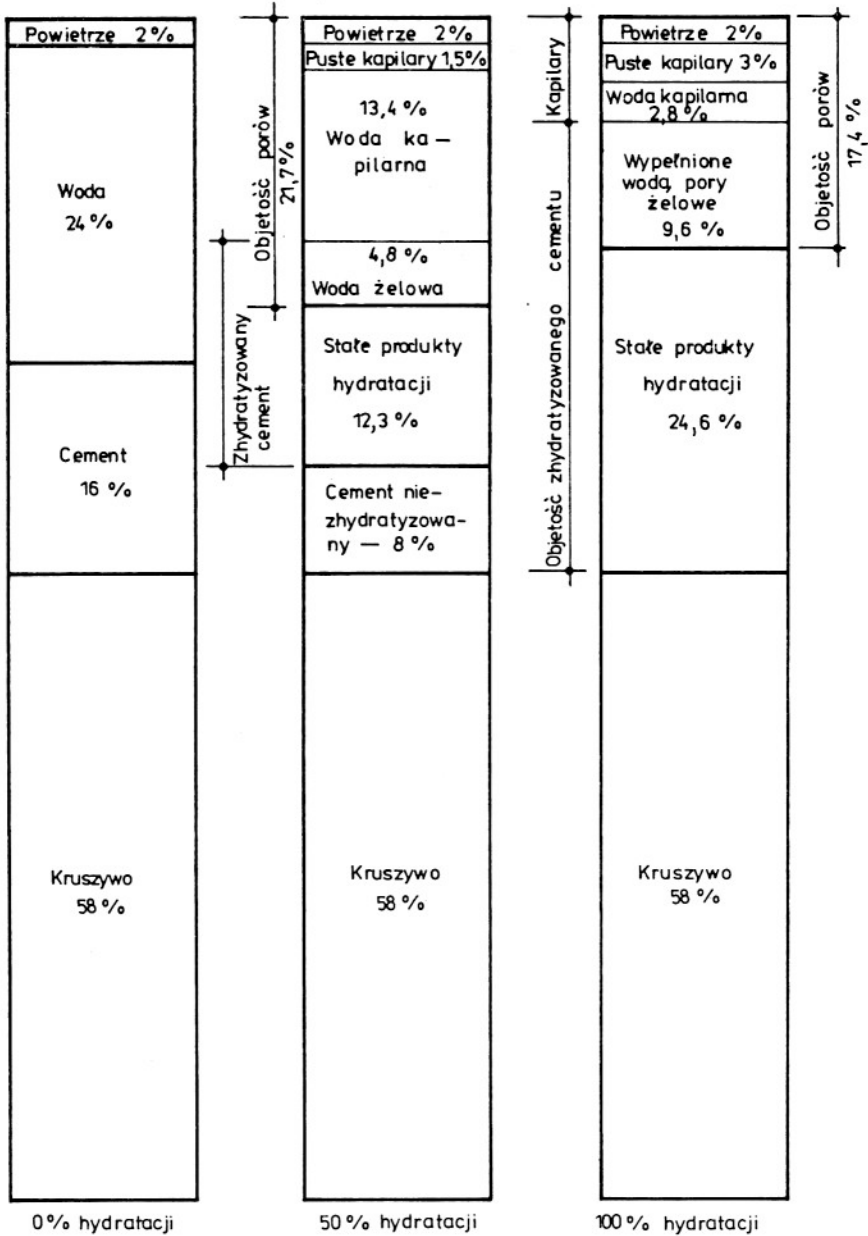
- a) czynniki materiałowe takie jak: rodzaj, jakość i wzajemne proporcje poszczególnych składników,
- b) parametry technologiczne dotyczące sposobu wykonywania, układania i zagęszczania mieszanki betonowej oraz warunków jej dojrzewania.

Wpływ wymienionych parametrów na strukturę betonu został już obszernie przebadany i opisany w wielu monografiach – jak np. Bukowskiego [71], Kuczyńskiego [193] czy Neville'a [250]. W niniejszych rozważaniach skupimy się tylko na tych czynnikach, które są istotne z punktu widzenia makrostruktury betonu i modelowania jego właściwości.

#### 3.2. Składniki podstawowe betonu i ich wpływ na jego strukturę

Podstawowymi składnikami świeżego betonu są:

- kruszywa mineralne o różnych frakcjach. W niniejszej pracy zakładamy, że jest to kruszywo o cechach zgodnych z tymi, jakie są wymagane od kruszyw stosowanych do betonów konstrukcyjnych. Przyjmujemy też a priori, że stos okruszowy spełnia podstawowe postulaty technologii betonu [57,71,145,177,187,193,250,254,269,324];
- cement spełniający rolę spoiwa, z tym, że przedstawione rozważania dotyczą w zasadzie betonów na cemencie portlandzkim;



Beton o  $\omega_{wc} = 0,48$ ,  $w = 240 \text{ l/m}^3$ ,  $c = 500 \text{ kg/m}^3$

Rys. 3.1. Schemat proporcji objętościowych w betonie o różnym stopniu hydratacji.

Fig. 3.1. The diagram of volumetric proportions in the concrete of different degrees of hydration.

- woda zarobowa,
- powietrze, które może zajmować pewną część objętości betonu.

Objętość ta będzie oznaczana przez  $V_p$ . Dobre zagęszczenie betonu polega na maksymalnej zwartości mieszanki, co uzyskuje się przez usunięcie z niej powietrza.

Masy wymienionych wyżej składników liczone na  $1 \text{ m}^3$  świeżego betonu i odpowiadające tym masom objętości oznaczono przez:

- k,  $V_k$  - dla kruszywa,
- c,  $V_c$  - dla cementu,
- w,  $V_w$  - dla wody.

Oczywiście objętości te spełniają tzw. równanie szczelności

$$V_k + V_c + V_w + V_p = 1. \quad (3.1)$$

Parametrami charakteryzującymi świeży beton i mającymi niebagatelny wpływ na strukturę stwardniałego są:

- stosunek masy wody zarobowej do cementu oznaczany przez  $\omega_{wc}$

$$\omega_{wc} = \frac{w}{c}, \quad (3.2)$$

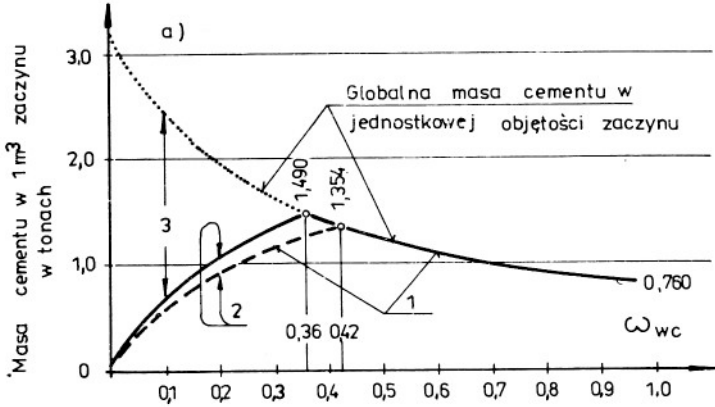
- stosunek objętości zaczynu (sumarycznej objętości cementu i wody zarobowej oraz powietrza) do objętości kruszywa nazywany  $\omega_{zk}$

$$\omega_{zk} = \frac{V_z}{V_k}, \quad V_z = V_c + V_w + V_p. \quad (3.3)$$

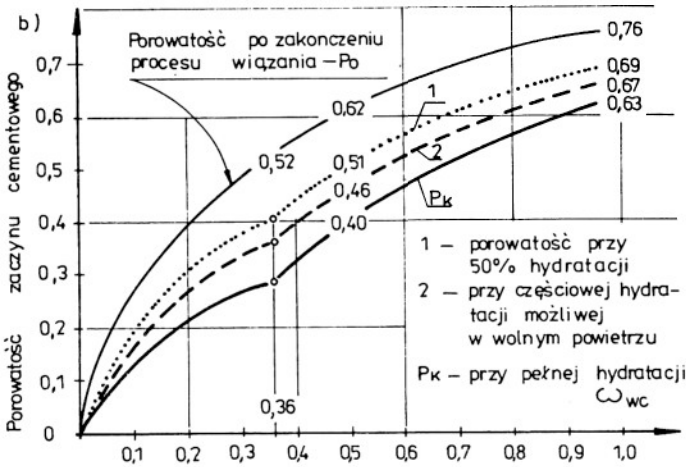
Wpływ składników betonu i ich wzajemnych proporcji na strukturę tego tworzywa będziemy analizować z pozycji makro ograniczając się do wyodrębnienia w niej fazy kruszywa, fazy zaczynu i różnego rodzaju defektów strukturalnych występujących najczęściej pod postacią porów i mikropęknięć.

Podstawowym parametrem determinującym właściwości i przydatność techniczną betonu jest porowatość jego struktury. Jeżeli pominiemy nieznaczną porowatość kruszywa (pory zawarte w szczelnie zamkniętych ziarnach kruszywa lekkiego nie obniżają jego wartości), to okaże się, że ścisłość struktury stwardniałego betonu jest zależna wyłącznie od objętości porów zawartych w zaczynie cementowym.

Na każdym etapie hydratacji stwardniały zaczyn cementowy składa się z hydratów różnych związków określonych jako żel. W zhydratyzowanym zaczynie występują pory różnego rodzaju:



- 1 – masa cementu, która może zhydrytuzować wiążąc tylko wodę zarobową,
- 2 – masa cementu, która może dodatkowo ulec hydratacji przy adsorbkcji wody z zewnątrz
- 3 – cement, który nie zostanie uwodniony



Rys. 3.2. Wpływ stosunku wodno-cementowego na: a) zakres hydratacji cementu, b) porowatość zaczynu.

Fig. 3.2. The effect of water to cement ratio on: a) range of cement hydration, b) porosity of cement paste.

- pory strukturalne wynikające z budowy krystalicznej żelu; stanowią one aż 28% objętości żelu i zwykle są wypełnione wodą;
- pory kapilarne będące zbiornikami wody zarobowej; z postępowm hydratacji ich objętość maleje i przy stosunku wody zarobowej w do masy cementu c mniejszym od 0,36 mogą teoretycznie zanikać całkowicie, na .

tomiast przy  $\omega_{wc} > 0,36$  będą występować zawsze, ponieważ ilość cementu jest zbyt mała, by je wypełnić produktami hydratacji [71,193,250,275 333];

- pory powstające na skutek celowego (napowietrzanie) lub przypadkowego (niedostateczne zagęszczenie) wprowadzenia pewnej objętości powietrza do betonu.

Dalsze rozważania dotyczące struktury betonu będą więc oparte na założeniu, że składnikiem aktywnym, dokonującym przemian strukturalnych w betonie, jest zaczyn cementowy, a kruszywo spełnia w tym układzie rolę bierną. Założenie to nie może być wykorzystywane przy stosowaniu kruszywa wapiennego [270].

Na rysunku 3.2 pokazano jaki wpływ na zwartość struktury zaczynu cementowego ma zawartość wody w zaczynie i stopień hydratacji cementu. Wyniki przedstawione na tym rysunku otrzymano wykorzystując informacje dotyczące procesów hydratacji podane w [250] i [275]. Porowatość zaczynu całkowicie zagęszczonego (a tym samym betonu) zmienia się wraz z postępującą hydratacją cementu od wielkości początkowej odpowiadającej objętości wody w  $1 \text{ m}^3$  zaczynu do pewnej wielkości końcowej ustalającej się po ustaniu procesu uwadniania. Obie te graniczne porowatości są ściśle zależne od parametru  $\omega_{wc}$ . I tak - porowatość początkowa zaczynu całkowicie zagęszczonego jest równa:

$$P_0 = \frac{\omega_{wc}}{\omega_{wc} + 0,317}, \quad (3.4)$$

a porowatość końcowa (po zakończeniu hydratacji cementu) wyraża się wzorem

$$P_k = P_0 - \bar{\Delta}_p, \quad (3.5)$$

gdzie  $\bar{\Delta}_p$  określa graniczne wypełnienie części porów przez żel - wzory:

$$\bar{\Delta}_p = \frac{0,171 \omega_{wc}}{0,113 + 0,36 \omega_{wc}} \quad \text{dla } \omega_{wc} < 0,36 \quad (3.6)$$

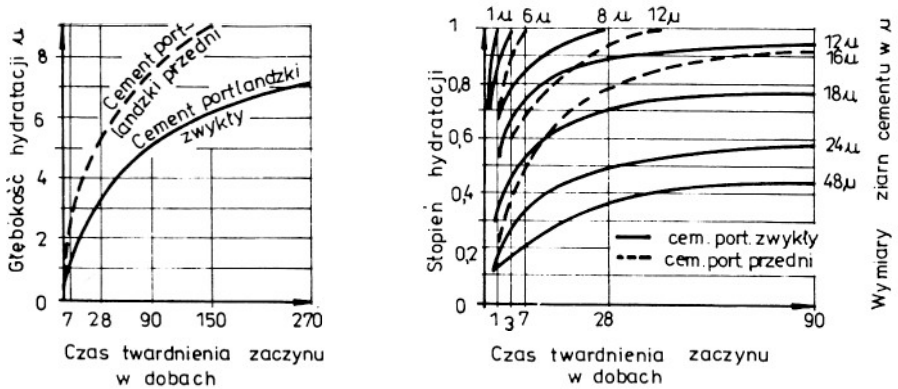
$$\bar{\Delta}_p = \frac{0,171 \omega_{wc}}{0,317 + \omega_{wc}} \quad \text{dla } \omega_{wc} \geq 0,36.$$

Wzory te wyprowadzono w oparciu o elementarne rozważania, których przytaczanie wydaje się zbędne. Porowatość otrzymuje się z nich w postaci liczby bezwymiarowej określającej udział porów w objętości zaczynu - rys. 3.2.

### 3.3. Proces wiązania betonu - hydratacja cementu

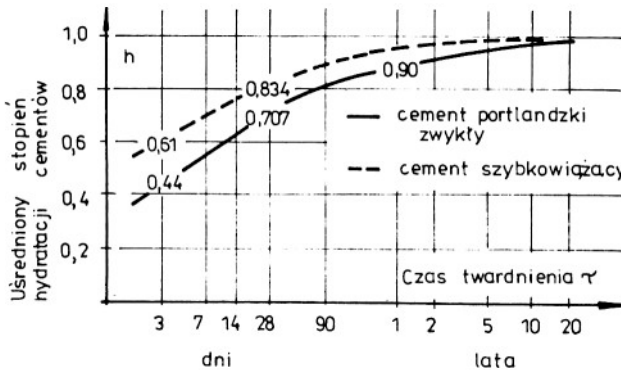
Po związaniu betonu (zaczynu) jedynym czynnikiem przeobrażającym jego strukturę jest zjawisko hydratacji. Polega ono na wytrącaniu się z zaczynu cementowego cząstek stałych, spajających stos okruchowy.

Istotnymi parametrami charakteryzującymi proces uwadniania cementu są jego zakres oraz prędkość przebiegu. Zakres hydratacji cementu jest zdeterminowany przez:



a) Głębokość hydratacji ziarn wg Anderegga i Hubbella za [71]

b) Stopień hydratacji ziarn jako funkcja ich średnicy i czasu twardnienia [105]



c) Średni stopień hydratacji różnych cementów jako funkcja czasu trwania zaczynu według Chambaud [85]

Rys. 3.3. Proces hydratacji cementów portlandzkich.

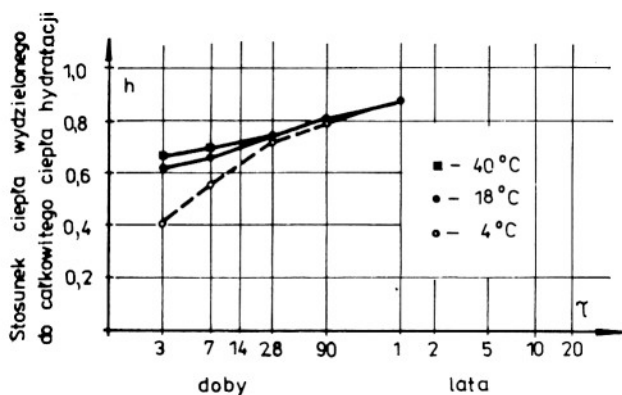
Fig. 3.3. Hydration of Portland cements.

- stosunek wody zarobowej do masy cementu  $\omega_{wc}$  - rys. 3.2.a,
- miążkość przemiału cementu (średnicę ziarn) - rys. 3.3,
- warunki pielęgnacji betonu (zaczynu).

Teoretycznie, według [250], cały cement może ulec hydratacji tylko wtedy, gdy ilość wody w zaczynie jest większa od 0,36 masy cementu - rys. 3.2. Przy niższych stosunkach wodno-cementowych hydratacji może ulec tylko część masy cementu równa 2,38 masy wody zarobowej [250,275]. Uważa się jednak, że nawet wtedy, gdy teoretycznie pełna hydratacja jest możliwa ( $\omega_{wc} > 0,36$ ), nastąpi ona tylko wówczas, gdy beton może dostatecznie długo adsorbować wodę z otoczenia. Praktycznie więc może to wystąpić tylko w betonach lub zaczynach znajdujących się w środowisku wodnym. W warunkach wolnego powietrza zakres hydratacji zależy od jakości i ilości użytego cementu (rys. 3.2a i 3.3) oraz ilości wody w zaczynie czy betonie ( $\omega_{wc}$ ) i mieści się w granicach od 70% dla cementów portlandzkich zwykłych do 85% dla cementów szybkowiązujących. Zakres ten odnosi się oczywiście do tej masy cementu, która przy danym  $\omega_{wc}$  może ulec hydratacji. Należy zauważyć, że praktycznie zawsze w zaczynie pozostają ziarna cementu nie w pełni zhydratyzowane. Są to ziarna o średnicy większej od 30  $\mu\text{m}$  [71]. Obecność w zaczynie ziarn częściowo zhydratyzowanych nie wpływa ujemnie na jego jakość pod warunkiem, że produkty hydratacji uwodnionej części cementu wypełnią całkowicie przestrzeń zajmowaną uprzednio przez wodę zarobową. Nieuwodnione ziarna cementu odgrywają też znaczną rolę w procesie samoregeneracji (zasklepianiu mikro-uszkodzeń), o czym będzie mowa w dalszej części pracy.

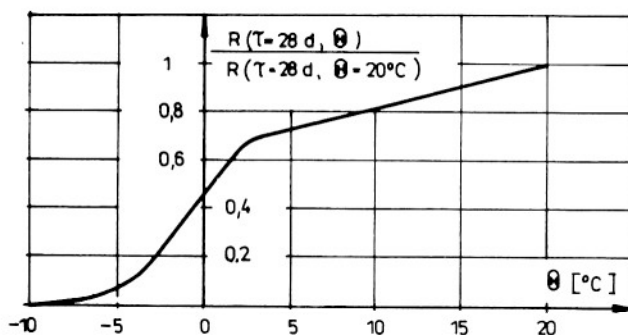
Prędkość hydratacji jest nie tylko funkcją miążkości przemiału cementu (średnicy ziarn - rys. 3.3), ale również jego składu mineralogicznego i temperatury, w jakiej przebiega proces twardnienia. Jest ona większa dla cementów drobniej zmielonych i mniejsza dla cementów zawierających grube ziarna. Jest rzeczą oczywistą, że szybkość hydratacji ulega zatrzymaniu z chwilą, gdy wszystkie dostępna woda zostanie związana.

Temperatura zaczynu odgrywa również istotną rolę w uwodnieniu zawartego w nim cementu. Ilustracją zależności występujących w tym procesie jest rys. 3.4, na którym pokazano jak wydziela się ciepło hydratacji w procesie uwadniania cementu przebiegającym w różnych temperaturach. Stosunek ciepła wydzielonego w przeciągu dowolnego okresu dojrzewania do ciepła wydzielonego przy pełnym uwodnieniu możemy uważać za miarę postępu hydratacji (stopień hydratacji -  $h$ ). Trzeba zaznaczyć, że badania bezpośrednie procesu hydratacji są trudne i dlatego stosunkowo rzadko były wykonywane, w związku z czym informacje o przebiegu tego zjawiska możemy uzyskać tylko w sposób pośredni. W tej sytuacji będą to dane o charakterze przybliżonym (jakościowym). Danych tego rodzaju dostarczają



Rys. 3.4. Wydzielanie ciepła hydratacji przez cement portlandzki - opracowano wg [337].

Fig. 3.4. Hydration heat emitted by Portland cement - according to [337].



Rys. 3.5. Wytrzymałość 28-dniowa betonu jako funkcja temperatury środowiska zewnętrznego [234].

Fig. 3.5. The 28 day strength of concrete as the function of ambient temperature [234].

wyniki badań wytrzymałości betonu na ściskanie uzyskane na próbkach dojrzewających w różnych warunkach - rys. 3.5. Zależność wytrzymałości betonu od stopnia hydratacji zawartego w nim cementu jest oczywista [57,71,120,124,250], lecz, jak to zostanie wykazane w następnym rozdziale, nie jest to zależność wprost proporcjonalna. Możemy jednak na podstawie tego rodzaju badań [120,250,234,281] (rys. 4.16 i 4.17) stwierdzić, że prędkość hydratacji zależy od temperatury nieliniowo i przy temperaturze niższej od  $-5^\circ \text{C}$  praktycznie ustaje. W temperaturach od  $+2^\circ \text{C}$  do około  $46^\circ \text{C}$  możemy uważać, że analizowana zależność jest liniowa. Uwadnianie cementu w temperaturach wyższych [120,133,148,234] ma już nieco inny charakter, przebiega w sposób lawinowy i nieregularny, prowadząc do innej jakościowo, mniej uporządkowanej struktury hydratów. Szczegółowe omówienie tych problemów, związanych z dojrzewaniem betonu w parze nisko lub wysoko ciśnieniowej [120,133,148,250,269,305,348] czy w warunkach elektronagrzewu [349], przekracza ramy objętościowe niniejszej pracy.



Zakładamy, że stopień hydratacji tej części cementu, która może ulec uwodnieniu jest funkcją:

$$h = h(\tau, \theta, W, \omega_{wc}), \quad 0 \leq h \leq 1, \quad (3.7)$$

gdzie  $\tau$  - okres twardnienia betonu czy zaczynu lub mówiąc inaczej wiek betonu,

$\theta$  i  $W$  - temperatura i wilgotność środowiska, w którym znajduje się beton.

Przykładowe przebiegi funkcji, opisującej zależność stopnia hydratacji francuskich cementów portlandzkich od czasu twardnienia, podano na rys. 3.3 [85].

Parametr opisujący zmianę porowatości zaczynu, wynikającą z sukcesywnego wypełniania por przez stałe produkty hydratacji, jest wprost proporcjonalny do stopnia hydratacji cementu, co można zapisać w postaci

$$\Delta_p = \bar{\Delta}_p \cdot h, \quad \text{gdzie} \quad \bar{\Delta}_p = \Delta_p (h = 1), \quad (3.8)$$

pamiętając, że  $\bar{\Delta}_p$  określają wyrażenia (3.6).

Porowatość zaczynu w zależności od stopnia hydratacji cementu określa wyrażenie

$$p(h) = p_0 - \bar{\Delta}_p \cdot h, \quad p_k = p(h = 1), \quad (3.9)$$

zaś porowatość betonu określa wzór

$$p_b(h) = p(h) : V_z. \quad (3.10)$$

Minimalna porowatość betonu wyraża się wzorem

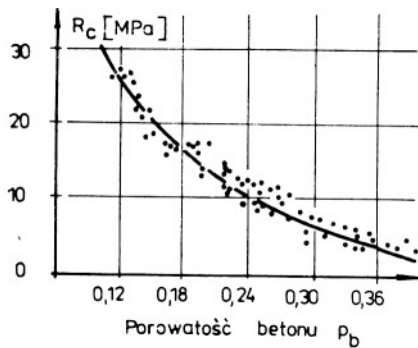
$$p_{bk} = p_b(h = 1) = p_k \cdot V_z. \quad (3.11)$$

Często struktura betonu bywa charakteryzowana przez szczelność zaczynu ( $s$ ) lub betonu ( $s_b$ ):

$$s = 1 - p(h), \quad s_b = 1 - p_b(h). \quad (3.12)$$

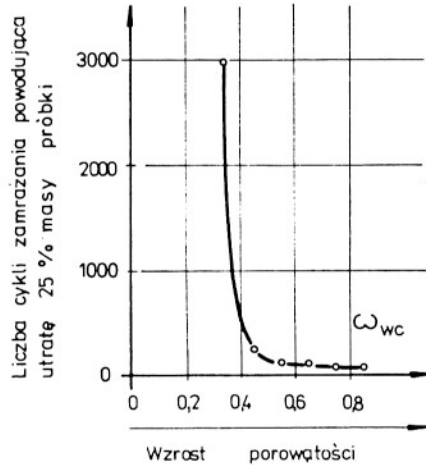
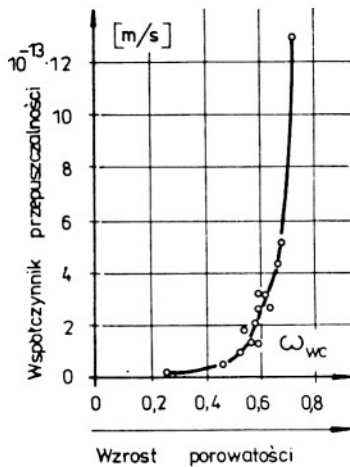
#### 3.4. Wpływ struktury betonu na jego właściwości

Wszystkie fizyczne właściwości betonu zależą od jego struktury, ale zależności te będą na ogół różne dla różnych wielkości charakteryzujących stwardniały beton. W dalszej części pracy zależności te będą omawiane kompleksowo, tu poruszymy tylko te problemy, które pozwalają na ocenę jakości betonu i jego technicznej przydatności.



Rys. 3.6. Wpływ porowatości betonu  $p_b$  na wytrzymałość przy ścisaniu  $R_c$  [323].

Fig. 3.6. The effect of concrete porosity  $p_b$  on its strength at compression  $R_c$  [323].



Rys. 3.7. Wpływ stosunku wodno-cementowego na przepuszczalność i mrozoodporność betonu [250, 277].

Fig. 3.7. The effect of water to cement ratio on the permeability and frost-resistance of concrete [250, 277].

Na rysunku 3.6 pokazano, jaki wpływ na wytrzymałość przy ścisaniu ma porowatość betonu. Przedstawione wyniki pokazują wyraźnie, że uzyskanie betonu konstrukcyjnego (o  $B \sim 20$  MPa) wymaga ograniczenia jego porowatości do około 16%, a betonu o wyższej wytrzymałości ( $B \sim 40$  MPa) aż do 8%. Ogólnie można stwierdzić, że betony o dużej wytrzymałości charakteryzują się zwykle mniejszą porowatością o czym decyduje niska wartość  $\omega_{wc}$ .

Duża szczelność betonu (mała wartość  $\omega_{wc}$ ) decyduje nie tylko o korzystnych cechach wytrzymałościowo-mechanicznych betonu, ale również o jego trwałości i odporności na korozję [3,71,250,277], co obrazuje rys. 3.7.

Przedstawione rozważania pozwalają już stwierdzić jakie betony nie mogą być stosowane do budowy mostów. I tak z uwagi na trwałość, o której decydują nasiąkliwość, przepuszczalność, mrozoodporność i wytrzymałość zmęczeniowa, nie powinno się stosować betonów o stosunku wodno-cementowym większym niż 0,45. Nietrzymanie tego warunku (co u nas zdarzało się i niestety zdarza dalej) powoduje skrócenie życia obiektu do okresu przewidywanego dla konstrukcji tymczasowych [294].

Rozważania przedstawione w niniejszej pracy nie obejmują więc problematyki betonów o dużej porowatości, nieprzydatnych dla budownictwa mostowego.

#### 4. DORAŻNA WYTRZYMAŁOŚĆ BETONU W PROSTYCH STANACH NAPRĘŻENIA

##### 4.1. Wytrzymałość betonu przy prostym ściskaniu

##### 4.1.1. Badanie wytrzymałości betonu na ściskanie

Wyznaczanie wytrzymałości na ściskanie jest najbardziej rozpowszechnionym badaniem stwardniałego betonu. Jest tak nie tylko dlatego, że jest to badanie łatwe do przeprowadzenia, ale również dlatego, że od jego wytrzymałości zależy wiele podstawowych cech betonu. Wytrzymałość betonu na ściskanie może więc służyć jako miara jakości tego tworzywa i jego technicznej przydatności.

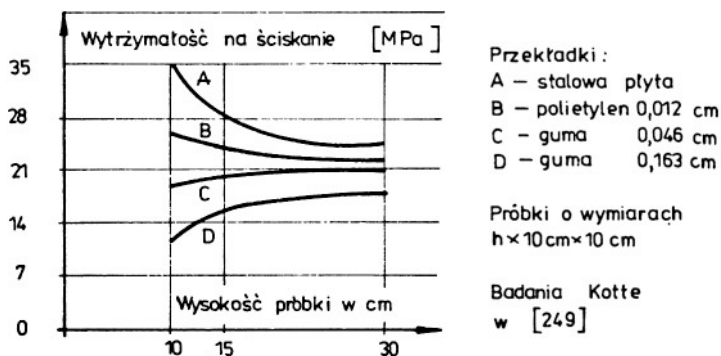
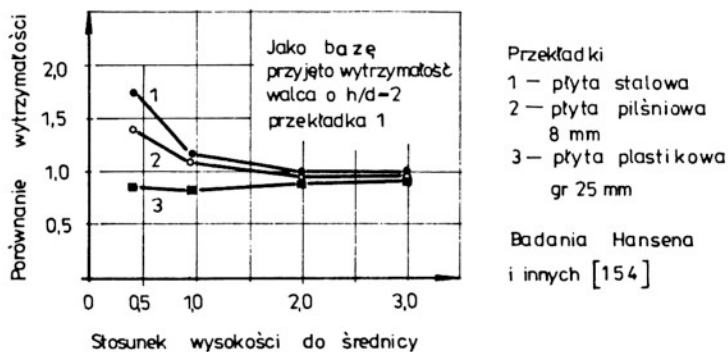
Właściwości betonu (w tym i jego wytrzymałość na ściskanie) zależą od szeregu czynników, które szczegółowo zostaną omówione w dalszej części pracy. Tu zwracamy uwagę na te, które są ważne dla poprawnego zaprogramowania badań wytrzymałości. Czynnikiem tymi są wiek betonu w chwili badania, jego wilgotność i temperatura. By badania były pełnowartościowe (porównywalne), należy je prowadzić w ściśle określonych warunkach lub przynajmniej w warunkach znanych.

W równaniach konstytutywnych i hipotezach wytrzymałościowych występuje często jako stała materiałowa wytrzymałość betonu przy ściskaniu prostym  $R_c$ , więc rzeczą ważną jest jej dokładne wyznaczenie. Realizacja praktyczna stanu jednoosiowego (prostego) ściskania jest trudna. Na rysunku 4.1 pokazano w jakich granicach może kształtować się stan naprężenia na obciążonej powierzchni próbki w zależności od sztywności zastosowanych przekładek. Jeżeli przekładki są sztywne (np. płyta stalowa), wówczas przy powierzchniach, na które działa obciążenie, powstają napręże-



Rys. 4.1. Wpływ sztywności przekładek na naprężenia powstające na obciążonej powierzchni próbki [249].

Fig. 4.1. The effect of separators' stiffness on stresses occurring at the surface of the loaded specimen [249].

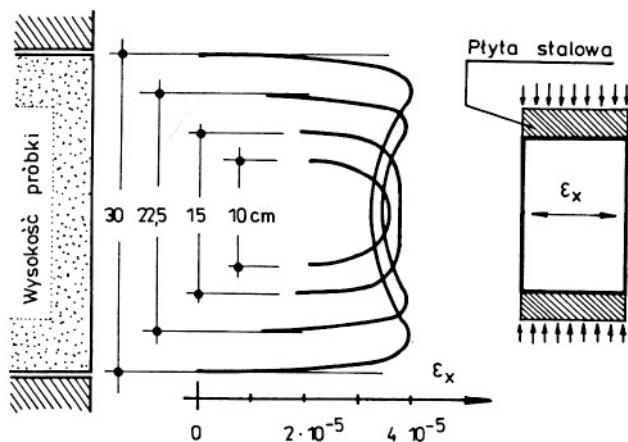


Rys. 4.2. Wpływ zastosowanych przekładek na wyniki badań.

Fig. 4.2. The effect of the interlayers used on the results of tests.

nia styczne skierowane do wnętrza próbki. Gdy natomiast zastosujemy przekładki miękkie, powierzchniowe naprężenia styczne mają zwrot przeciwny, tzn. są skierowane w kierunku krawędzi zewnętrznych próbki. Tak więc zamiast prostego ściskania w pierwszym przypadku w obszarach położonych blisko płaszczyzny docisku (przekazywania obciążenia) występuje przestrzenne ściskanie, natomiast w drugim - próbka jest ściskana w kierunku podłużnym, a rozciągana w poprzecznym. Jest więc rzeczą oczywistą, że przy zastosowaniu odmiennych przekładek siły niszczące badane próbki będą znacznie się od siebie różnić - rys. 4.2.

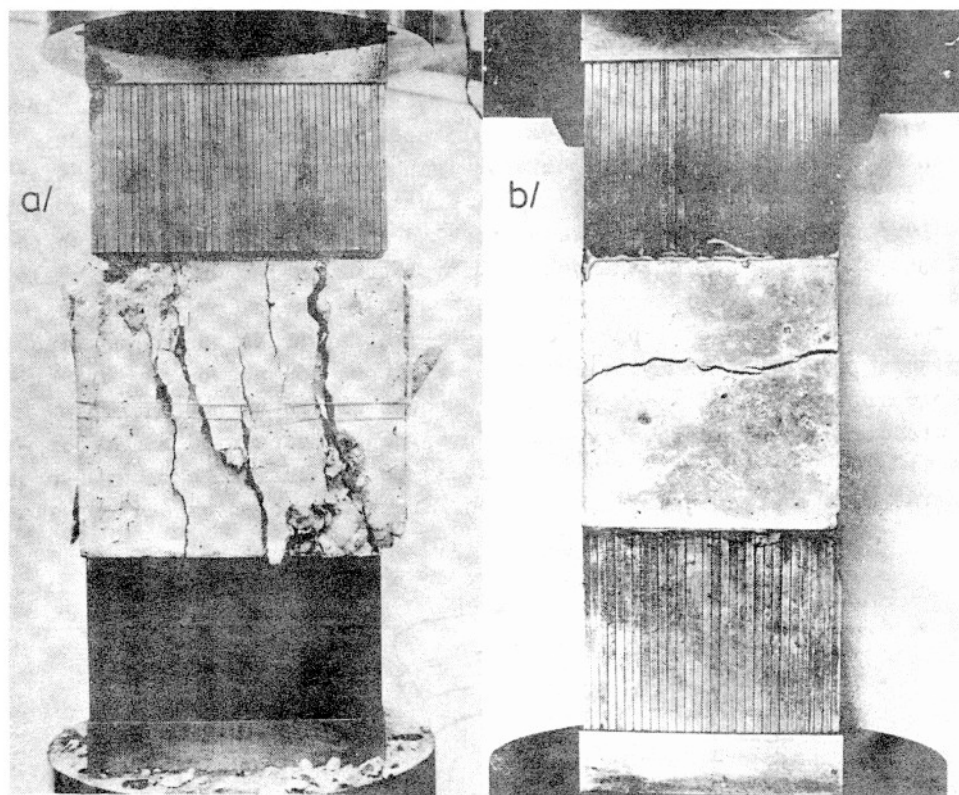
Wpływ rodzaju użytych przekładek na wyniki pomiarów maleje wraz ze smukłością próbek. Można to wyjaśnić tym, że w elementach krępych złożony stan napięcia wywołany przez płyty dociskowe dominuje w zasadzie na całej wysokości próbki, natomiast w smukłych elementach jego zasięg ogranicza się do obszarów krańcowych. Ilustracją tego stwierdzenia jest rys. 4.3, na którym pokazano [249] rozkład odkształceń poprzecznych powstających w próbkach ściskanych o różnych smukłościach. Z przedstawionych danych wynika, iż dopiero przy stosunku wysokości próbki do jej szerokości większym od 2 praktyczny zasięg stref przestrzennego stanu napięcia jest ograniczony tylko do jej krańców. Wpływ stosunku wysokości próbki do jej najmniejszego wymiaru poprzecznego na wytrzymałość (a właściwie na wielkość siły powodującej jej zniszczenie) znika oczywiście, jeśli wyeliminujemy tarcie między powierzchniami czołowymi próbki a płytami maszyny wytrzymałościowej. Efekt ten można uzyskać przeka-



Rys. 4.3. Rozkład odkształceń poprzecznych w próbkach o przekroju poprzecznym 10 x 10 cm i różnej wysokości [249].

Fig. 4.3. The distribution of transverse strains in 10 x 10 cm specimens of different heights [249].

zując obciążenie na próbkę za pośrednictwem tzw. szczotki ze sztywnych drutów stalowych. Przykład wykorzystania tego rozwiązania w badaniach prowadzonych na Uniwersytecie w Delft [249] pokazano na rys. 4.4. Wykorzystana tam do badań szczotkowa płyta dociskowa umożliwia swobodne od-



Rys. 4.4. Sposób przekazywania obciążenia na badane próbki zastosowany na Uniwersytecie w Delft [249] a) próbka ściskana, b) próbka rozciągana (pręty szczotki przyklejono do próbki).

Fig. 4.4. The way in which the load is applied to the specimens tested used at the Delft University [249], a) the road platens subject to compression, b) specimen subject to tension.

kształcanie się betonu w kierunku poprzecznym, przy czym włókna szczotki nie ulegają wyboczeniu.

Naprężenie powodujące zniszczenie próbki betonowej przy przekazywaniu na nią obciążeń przez płytę szczotkową może być interpretowane jako wytrzymałość betonu przy prostym ściskaniu. Ponieważ większość światło-

wych laboratoriów nie ma odpowiedniego oprzyrządowania, z pewnym przybliżeniem możemy przyjmować, iż wytrzymałość wyznaczona na próbkach o stosunku wysokości do średnicy (lub szerokości minimalnej) większym od 2 (np.  $h = 30$  cm i  $d = 15$  cm – próbki stosowane w USA) jest porównywalna z tą, jaką otrzymujemy stosując płyty szcztokowe.

Polska Norma PN-75/B-06250 nakazuje wykonywanie badań wytrzymałości betonu na próbkach sześciennych, o boku 15 cm, przy zastosowaniu sztyw-nych przekładek z blachy stalowej. Przedstawione poprzednio rozważania nie umniejszają przydatności badań normowych do celów kontrolnych czy

T a b e l a 4.1

Zależności pomiędzy wytrzymałościami betonu określonymi na różnych próbkach, a wytrzymałością  $R_c$

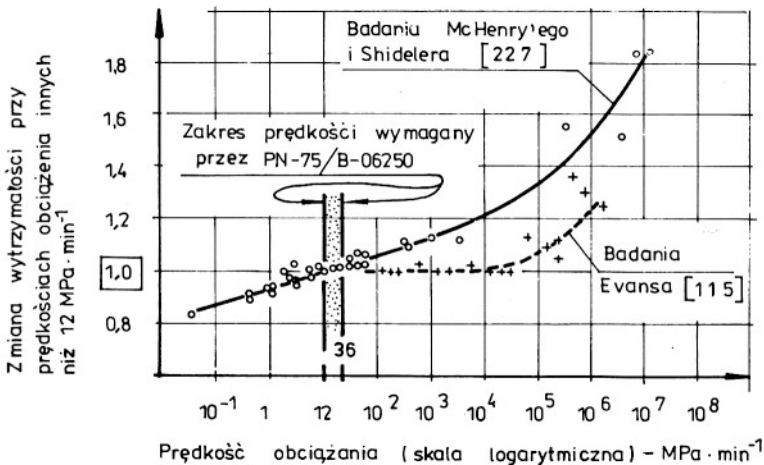
Rodzaj próbki	Wymiary próbki w cm	Stosunek $R_c$ do wytrzymałości określonej na dowolnej próbce
Szescian	10 × 10 × 10	0,72
	15 × 15 × 15	0,8
	20 × 20 × 20	0,84
Walec	$\phi 15$ , $h = 30$	1
	$\phi 16$ , $h = 30$	0,92

porównawczych, wskazują jednak, iż wytrzymałości normowej nie należy utożsamiać z wytrzymałością na proste ściskanie.

Zależności wyników prób wytrzymałości betonu od kształtu próbki poświęcono wiele prac [37, 125, 140, 154, 187, 193, 249, 250, 301]. Szczegółowo problem ten omawiają np. Neville [250], Godycki-Ćwirko [140], Kuczyński [193] czy Schickert [301]. W oparciu o przytoczone prace możemy znaleźć przybliżone zależności między wytrzymałością przy prostym ściskaniu (nazywaną często wytrzymałością słupową), określaną na próbkach smukłych ( $h = 30$  cm;  $d = 15$  cm – wymiary zalecane przez RILEMICEB) a wytrzymałością określaną na innych próbkach (np. normowych). Zależności te zestawiono w tab. 4.1. Trzeba jednak zaznaczyć, że współczynniki te mogą się nieco zmieniać w zależności od rodzaju betonu i jego wytrzymałości [250]. Wydaje się jednak, że dla betonów konstrukcyjnych [140] zmiany te nie będą zbyt duże.

Ponieważ siła niszcząca próbkę zależy również od prędkości przyrostu obciążeń (rys. 4.5), więc za doraźną (statyczną) wytrzymałość będziemy w niniejszej pracy uważać tę, jaką otrzymamy obciążając próbki z prędkością od 12 do 36 MPa/min. Prędkość ta jest zalecana przez cytowaną już normę PN-75/B-06250.

Poruszona w tym podrozdziale problematyka dotycząca badania betonu na ściskanie nie została omówiona wyczerpująco. Zasygnalizowano tylko te zagadnienia, które obrazują trudności w wyznaczeniu podstawowych sta-



Rys. 4.5. Wpływ prędkości obciążenia na wytrzymałość betonu na ściskanie.

Fig. 4.5. The effect of the loading rate on the compressive strength of concrete.

łych niezbędnych do opisanja właściwości betonu. Całościowo zagadnienia związane z badaniem wytrzymałości stwardniałego betonu omówiono np. w pracach [71,193,250].

#### 4.1.2. Czynniki determinujące doraźną wytrzymałość betonu na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia

Wytrzymałość betonu na ściskanie jest przede wszystkim funkcją czynników strukturalnych, które omówiono w poprzednim rozdziale. Tu należy zwrócić jeszcze uwagę na pewne zagadnienia szczególnie istotne dla omawianej problematyki.

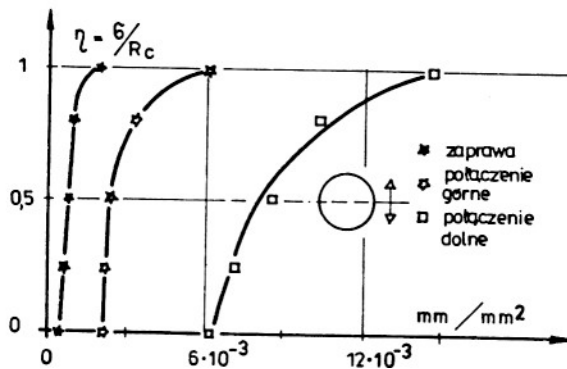
Analizując beton od strony jego makrostruktury, stwierdzamy, że jest on kompozytem złożonym z ziarn kruszywa grubego, otoczonego zaprawą (kruszywo drobne plus zhydratyzowany zaczyn cementowy) i przestrzeni



T a b e l a 4.2

Właściwości fizyczne kruszyw i zaczynów cementowych

Cechy fizyczne skał używanych na kruszywo do betonu				
Nazwy skał	Masa właściwa $t/m^3$	Wytrzymałość na ściskanie MPa	Wytrzymałość na zginanie MPa	Moduł sprężystości GPa
Bazalt	2,90–2,30	250–400	15–20	56–115
Diabaz	2,80–2,90	180–250	4–6	70–90
Porfir	~2,80	160–300	5–8	36–68
Granit	2,60–2,80	160–240	3–14	13–61
Piaskowiec kwarcytowy	2,60–2,65	120–200	7–10	4–43
Wapień	2,60–2,85	80–180	4–8	23–83
Cechy fizyczne kruszyw lekkich używanych w mostownictwie				
Keramzyt	1,40–1,60	—	—	15–20
Łupkoporyt	1,50–1,75	—	—	16–21
Cechy fizyczne zaczynów cementowych o $0,50 > w/c > 0,25$				
Zaczyn	1,46–2,10	22–70	2–6	8–23
Zestawienie niniejsze opracowano wykorzystując prace [71, 177, 192, 250, 270]				



Rys. 4.6. Proces rozwoju mikrozarysowań w betonie według [94].

Fig. 4.6. The development of micro-cracks acc. to [94].

wolnych (porów) występujących zarówno w kruszywie grubym, jak i w zaprawie. Dalsze rozważania ograniczymy do przypadku betonów konstrukcyjnych średniej i dużej wytrzymałości wykonywanych na kruszywach wysokiej jakości. Ziarna tych kruszyw wykazują dużą wytrzymałość na ściskanie ( $R_{kc}$ ) przewyższającą znacznie wytrzymałość zaprawy ( $R_{zc}$ ) - tab. 4.2 [71,177, 192,250,270]. Teraz należy odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób następuje zniszczenie takiego kompozytu, jakim jest beton i który z jego elementów jest najsłabszy. Odpowiedzi na te pytania dostarczają wyniki badań eksperymentalnych [29,94,226], których ilustracją jest rysunek 4.6. Pokazano tam proces ewolucji mikrozarysowań w zaprawie i strefie międzyfazowej w wyniku narastających obciążeń. Przez  $\eta$  oznaczono stopień wytężenia elementu definiowany jako stosunek panujących naprężeń  $\sigma_1$  do wytrzymałości materiału na ściskanie  $R_c$ . Wyniki tych badań wskazują, iż najsłabszym elementem, który decyduje o wytrzymałości całego układu jest strefa kontaktu (połączenia) obu faz (kruszywa i zaczynu). Obszar ten charakteryzuje się znaczną liczbą defektów powstałych już w procesie hydratacji zaczynu i jego wiązania z kruszywem. Szczególnie duża koncentracja mikrouszkodzeń występuje w dolnej strefie kontaktu ziarna kruszywa z zaprawą (15 razy większa niż w samej zaprawie). Spowodowane to jest tym [34], że pod ziarnami kruszywa skupia się nadmiar wody, co powoduje zwiększoną porowatość zaczynu (zaprawy) w tym obszarze.

Obciążenie prowadzi do dalszego rozwoju mikrozarysowań strefy kontaktu, aż do zniszczenia całej struktury betonu. Tak więc miarą wytrzymałości betonu na ściskanie jest przyczepność zaprawy do ziarn kruszywa grubego. Stwierdzeniu temu możemy nadać następującą postać matematyczną

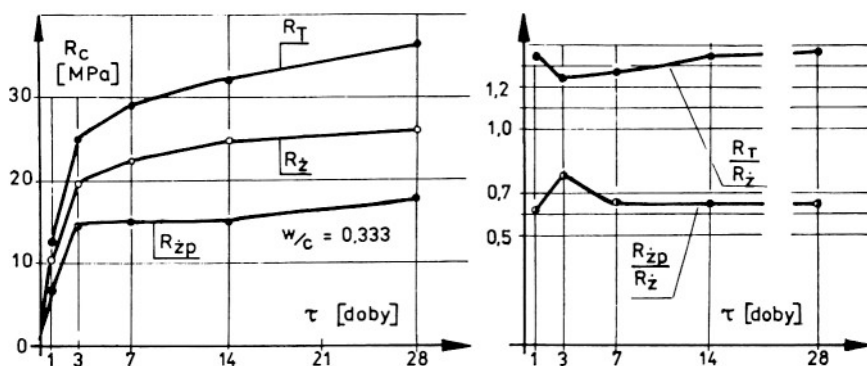
$$R_c = R_c(R_{pz}). \quad (4.1)$$

Przyczepność ta ( $R_{pz}$ ) zależna jest od:

- rodzaju kruszywa użytego do betonu, z tym, że decydujące znaczenie ma tu szorstkość i aktywność chemiczna powierzchni ziarn, oraz
- wytrzymałość samej zaprawy ( $R_{zc}$ ).

Badań dotyczących przyczepności zaprawy do różnego rodzaju kruszyw dotychczas nie przeprowadzono. Wykonano natomiast badania nad kształtowaniem się wytrzymałości betonów wykonanych na różnych kruszywach (Kuczynski [192], Piasta [270]), które dostatecznie jasno wyjaśniają interesujące nas zależności. Wyniki tych badań w opracowaniu autora przedstawiono na rys. 4.7. Możemy na ich podstawie wnioskować, że:

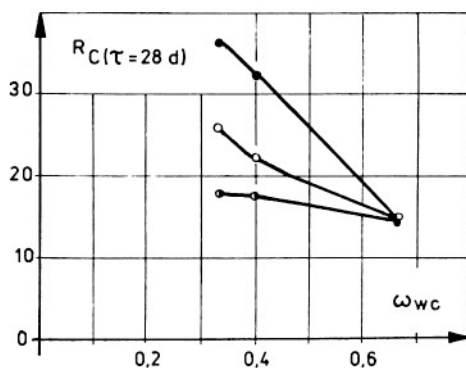
- przyczepność zaprawy do kruszyw uzyskiwanych z rozdrobnienia skał (kruszyw tłuczniowych) jest większa niż do ziarn kruszyw naturalnych,



Wzrost w czasie wytrzymałości betonów wykonanych na różnych kruszywach.

Analiza wpływu użytego kruszywa na szybkość przyrostu wytrzymałości.

Przez  $R_T$ ,  $R_z$  i  $R_{zp}$  oznaczono wytrzymałości na ściskanie analizowanych betonów.



Wytrzymałość betonów wykonanych na różnych kruszywach jako funkcja  $\omega_{wc}$ .

Oznaczenia		
Beton na kruszywie tłucznio- wym	Beton zwirowy	Beton zwirowy o ziarnach oparafinowanych
$R_T$ •	$R_z$ ○	$R_{zp}$ ◐

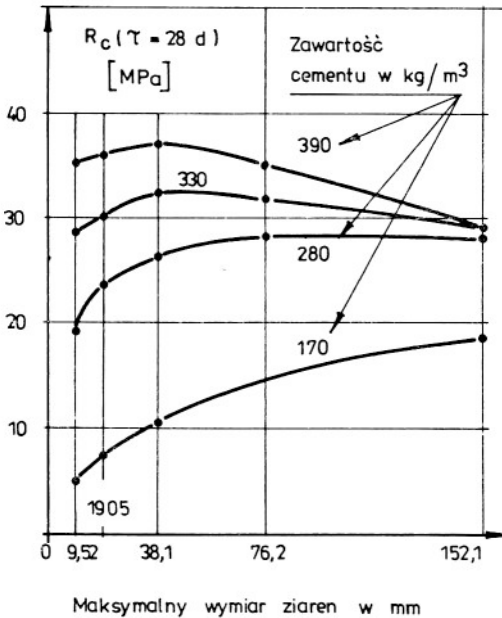
Rys. 4.7. Wpływ rodzaju kruszywa grubego na wytrzymałość betonu [192].

Fig. 4.7. The effect of the type of coarse aggregate on the strength of concrete [192].

na co wskazuje porównanie wytrzymałości betonów wykonanych z różnymi wypełniaczami,

- przyczepność tę mogą znacznie zmniejszyć różnego rodzaju zanieczyszczenia naturalne kruszywa (np. glina otaczająca ziarna) lub zanieczyszczenia sztuczne (np. oleje),

- rodzaj kruszywa w zasadzie nie wpływa na szybkość przyrostu wytrzymałości betonu, a tym samym na proces hydratacji zaczynu cementowego. Wyjątek stanowią kruszywa wapienne [270],



Rys. 4.8. Wytrzymałość betonu jako funkcja maksymalnego wymiaru ziarn kruszywa i zawartości cementu [157].

Fig. 4.8. The strength of concrete as the function of the maximum grain size of the aggregate and the content of cement [157].

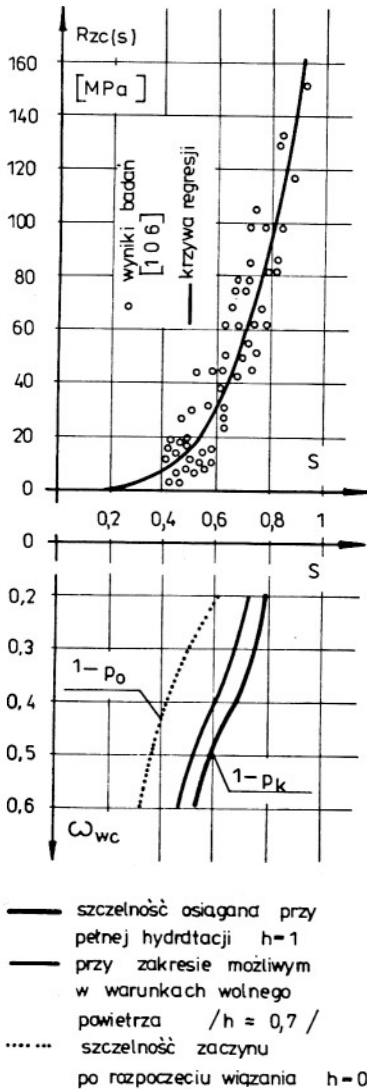
- przyczepność zaprawy maleje zdecydowanie wraz ze wzrostem ilości wody dodanej do betonu (wzrostem tzw. współczynnika wodno-cementowego  $w_{w/c}$ ). Kiedy wielkość tego parametru przekracza 0,67, rodzaj kruszywa przestaje być istotny.

Przyczepność zaprawy do kruszywa jest też funkcją maksymalnego wymiaru ziarn kruszywa i ilości cementu w zaprawie [157,165]. Wyniki badań (rys. 4.8) pokazują, że jest to zależność złożona. Nakładają się tu na siebie dwa zjawiska, których efekty wzajemnie się znoszą:

- po pierwsze zastosowanie kruszywa o dużych średnicach zmniejsza jego zaczynoządną, co powoduje również zmniejszenie ilości wody w zaczynie i prowadzi do wzrostu wytrzymałości betonu. Efekt ten uwidacznia się w betonach słabych (o małej zawartości cementu),

- po drugie przyczepność zaprawy do ziarn kruszywa jest odwrotnie proporcjonalna do ich średnicy. Ziarna kruszywa przeciwstawiają się zmianom objętościowym zaczynu, co prowadzi do koncentracji naprężeń w strefie kontaktu. Wielkość tych naprężeń (powodujących osłabienie przyczepności) jest tym większa, im większe są wymiary ziarn [157,250].

Dla betonów konstrukcyjnych o dużej zawartości cementu istnieje optymalna średnica największych ziarn kruszywa grubego, która waha się w gra-



Rys. 4.9. Zależność między szczelnością a wytrzymałością stwardniałego zaczynu [106].

Fig. 4.9. The relationship between the tightness and the strength of the hardened paste [106].

nicach 25–40 mm. W praktyce musimy również brać pod uwagę ograniczenia konstrukcyjne obowiązujące w tym zakresie, takie jak: grubość przekroju elementu czy rozstaw zbrojenia [187,207].

Z kolei przeanalizujemy jakie czynniki wpływają na wytrzymałość zaprawy cementowej. Na podstawie wszechstronnych badań zestawionych w wielu pracach, jak np. [57,71,90,105,106,145,177,193,250,324], można stwierdzić, że wytrzymałość zaprawy zależy głównie od jej porowatości (liczby mikrodefektów początkowych). Porowatość lub szczelnosc zaprawy (zaczynu)

jest czynnikiem strukturalnym, który został szeroko omówiony w rozdziale 3.2. Na rysunku 4.9 pokazano stwierdzoną doświadczalnie [106] zależność między szczelnością zaczynu ( $1 - p$ ) a jego wytrzymałością. W dolnej części tego rysunku podano granice, w jakich może się zmieniać szczelność betonów konstrukcyjnych ( $0,2 < \omega_{wc} < 0,5$ ). Porównanie danych zawartych na górnej i dolnej części rysunku 4.9 wskazuje, że zmian wytrzymałości zaczynu, zachodzących wraz z postępującą hydratacją, nie można odnieść bezpośrednio do zmian szczelności czy porowatości. Dzieje się tak dlatego, iż po związaniu zaczynu jego szczelność wynosi  $1 - p_0$ , a wytrzymałość jest wówczas bliska zeru. Tak więc wyniki podane na rys. 4.10 mogą być przydatne tylko do oszacowania wytrzymałości zaczynów o znacznym stopniu hydratacji.

Neville w swojej monografii [250] przytacza szereg różnych sposobów uzależnienia wytrzymałości od różnych parametrów strukturalnych. Wydaje się, że większość tych propozycji ma ograniczony zakres ważności (nie obejmuje całego zakresu  $\omega_{wc}$ ), dlatego też trudno którąkolwiek z nich rekomendować do szerszego stosowania. W niniejszej pracy - z uwagi na to, iż chodzi nam głównie o oszacowania jakościowe - problem ten zostanie rozwiązany w sposób przybliżony. Zakładamy, że maksymalna wytrzymałość zaczynu na ściskanie, jaka może być osiągnięta w warunkach pełnej hydratacji, jest wyrażona wzorem

$$R_{zc} = f[p(h)] \quad (4.2)$$

i przy  $h = 1$  osiąga wartość maksymalną równą  $\bar{R}_{zc}$

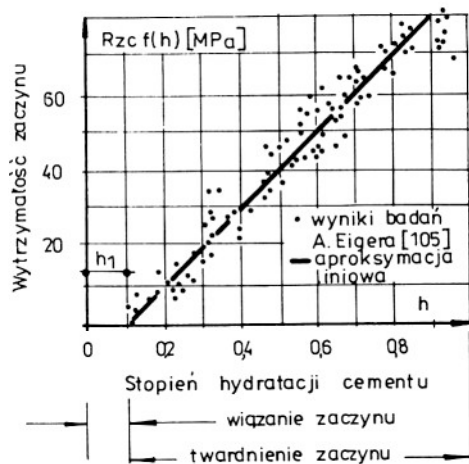
$$\bar{R}_{zc} = f(p_k) = r_z (1 - p_k)^3. \quad (4.3)$$

Na podstawie danych z rys. 4.9 można przyjąć, że  $r_z$  jest równe około 170 MPa. Zależność (4.3) dobrze aproksymuje wyniki badań w rozpatrywanym zakresie porowatości.

Pewne światło na postać funkcji (4.2) rzucają wyniki badań zamieszczone na rys. 4.10 [105]. Wynika z nich, że wytrzymałość zaczynu jest liniową funkcją stopnia hydratacji (potwierdzają to również badania Fowersa [275], co zapiszemy w postaci wyrażenia

$$R_{zc} = \bar{R}_{zc} (h - h_1). \quad (4.4)$$

Taka zależność wytrzymałości zaczynu od stopnia jego hydratacji wynika z faktu, iż powstanie rozproszonych i odizolowanych hydratów cementu (w początkowym etapie hydratacji) nie oznacza jeszcze, że utworzyła się struktura zdolna do przenoszenia obciążeń. Produkty hydratacji tworzą taką strukturę dopiero po uwodnieniu pewnej części tej masy cementu, która w danych warunkach może być uwodniona. Parametr  $h_1$  określa więc poziom



Rys. 4.10. Weryfikacja wzoru (4.4) w oparciu o badania [105].

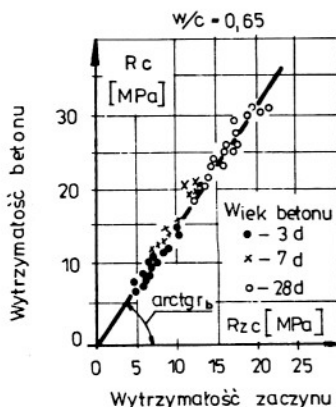
Fig. 4.10. Verification of Eq. (4.4) based on studies presented in [105].

hydratacji niezbędny do tego, by struktura zaczynu osiągnęła pewną wytrzymałość. Należy zaznaczyć, że przypuszczalnie wartość  $h_1$  zależy od szczelności początkowej ( $1 - p_0$ ) zaczynu i może być nieco mniejsza dla zaczynów ścisłych i nieco większa dla bardziej porowatych. Brak jednak bezpośrednich eksperymentów potwierdzających to przypuszczenie.

Wytrzymałość betonu na ściskanie możemy teraz przedstawić rozwijając wzór (4.1) w postaci funkcji:

$$R_c = R_c [R_{pz}(R_{zc})]. \quad (4.5)$$

Powyższa zależność sugeruje, że wytrzymałość betonu na ściskanie jest w jakiś sposób związana z wytrzymałością zaczynu. Powstaje oczywiście py-



Rys. 4.11. Zależność między wytrzymałością zaczynu, a betonu [333].

Fig. 4.11. The relationship between the strength of paste and that of concrete [333].

tanie w jaki? Odpowiedź możemy uzyskać analizując wyniki badań Walkera i Bloema [333], które pokazano na rys. 4.11. Wynika z nich, że jest to zależność wprost proporcjonalna, co wyraża się wzorem:

$$R_c = r_b \cdot R_{zc}. \quad (4.6)$$

Po wykorzystaniu (4.4) otrzymamy

$$R_c = r_b \cdot \bar{R}_{zc} (h - h_1) = \bar{R}_c (h - h_1), \quad (4.7)$$

$r_b$  - współczynnik proporcjonalności zależny od szeregu czynników strukturalnych, materiałowych i technologicznych - rys. 4.11.

$$\bar{R}_c = \lim_{h \rightarrow 1} R_c; \quad \bar{R}_c = f \left\{ R_{zc} [c, \Delta p (\omega_{wc}, V_p)], \omega_{zk}, j_k, j_c \right\}. \quad (4.8)$$

Przez  $\bar{R}_c$  oznaczono więc graniczną wielkość wytrzymałości betonu możliwą do osiągnięcia przy  $h = 1$  (po zakończeniu procesu hydratacji), a występujące we wzorze (4.8) niezdefiniowane dotąd parametry  $j_k$  i  $j_c$  oznaczają jakość kruszywa (gramulację, rodzaj, kształt ziarn i ich powierzchnię) i cementu.

Ustaleniem zależności funkcyjnej  $\bar{R}_{bc}$  od wielkości zapisanych po prawej stronie równania (4.8) zajmują się technolodzy betonu. Mimo ustalenia szeregu ważnych zależności szczegółowych, ogólna postać funkcji (4.8) nie jest znana. W związku z czym w projektowaniu betonu wykorzystywane są różne związki empiryczne wiążące funkcyjnie  $\bar{R}_c$  tylko z  $\omega_{wc}$  jak: tzw. prawo Fereta (1896) [71,193] czy Bolomeya (1925) [71,193] oraz szereg innych zestawionych np. w [71,187,193,250].

Łatwo można sprawdzić, że propozycja autora przy ograniczeniu zależności funkcyjnej do jednej zmiennej  $\omega_{wc}$  prowadzi do następującego wzoru zbliżonego bardzo do wzoru Fereta

$$R_c = r_z \cdot r_b \left[ 1 - \frac{0,829 \omega_{wc}}{0,317 + \omega_{wc}} \right]^3. \quad (4.9)$$

Wzór ten jest ważny przy  $\omega_{wc} > 0,36$ .

#### 4.1.3. Wytrzymałość betonu na ściskanie jako funkcja jego wieku

Zależność wytrzymałości betonu od jego wieku jest zawarta już we wzorze (4.7), gdyż, jak wykazano w rozdziale 3.3, stopień hydratacji  $h$  jest między innymi funkcją okresu twardnienia betonu (wieku -  $\tau$ ). W praktyce określenie funkcji  $h(\tau)$  jest bardzo trudne i dlatego nieliczne wyniki badań opublikowane dotychczas [85,105,120,337] można traktować tylko jako oszacowania jakościowe.

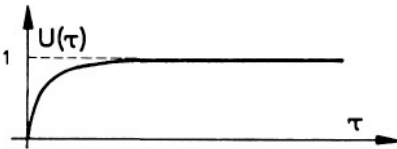


Z drugiej strony przeprowadzono ogromną liczbę badań narastania wytrzymałości betonu wraz z jego wiekiem. Badania te były prowadzone przez wielu autorów w sposób wszechstronny i obejmowały różne aspekty problemu. W literaturze [10,12,23,34,35,42,49,50,71,81,114,120,125,133,239,250,291] można znaleźć wiele danych na temat wzrostu wytrzymałości betonów wykonanych z różnych cementów i dojrzewających w różnych warunkach. Funkcję opisującą zmiany wytrzymałości w czasie można łatwo wyznaczyć na podstawie wielu danych eksperymentalnych. Wychodząc z wzoru (4.7) możemy ją zdefiniować jako

$$U(\tau) = \frac{R_c(\tau)}{\bar{R}_c} = \frac{h - h_1}{1 - h_1}, \quad R_c(\tau) = \bar{R}_c \cdot U(\tau). \quad (4.9)$$

Funkcja  $U(\tau)$  określa narastanie zwartości struktury zaczynu (betonu) w procesie hydratacji cementu (rys. 4.11) lub, mówiąc inaczej, opisuje proces twardnienia betonu. Ponieważ za jej pośrednictwem można opisać zmiany w czasie również innych cech betonu, będzie dalej nazywana uniwersalną funkcją starzenia.

Podana tutaj definicja jest bardziej poprawna od podanej w innych pracach autora [42,46,49,50], gdzie utożsamiano ją wprost z funkcją hydratacji.



Rys. 4.12. Obraz graficzny uniwersalnej bezwymiarowej funkcji starzenia betonu.

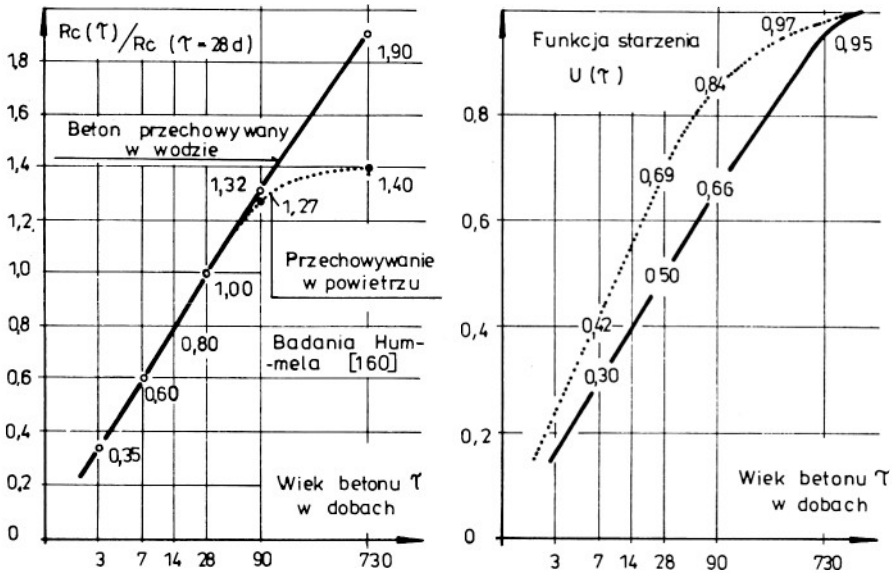
Fig. 4.12. Graphical representation of a universal, dimensionless function of concrete ageing.

Znając fenomenologiczny obraz przebiegu rozpatrywanych tu zjawisk (rys. 4.12), możemy analizowaną funkcję podać w następującej postaci:

$$U(\tau) = 1 - \sum_{i=1}^n u_i e^{-\rho_i \tau}, \quad (4.10)$$

gdzie  $\sum_{i=1}^n u_i = 1$ , a współczynniki  $u_i$  i  $\rho_i$  należy określać eksperymentalnie. Wyrażenie (4.10) spełnia wypływające z badań eksperymentalnych postulaty co do wartości granicznej funkcji  $U(\tau)$ :

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} U(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} U(\tau) = 1, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{dU(\tau)}{d\tau} = 0. \quad (4.11)$$



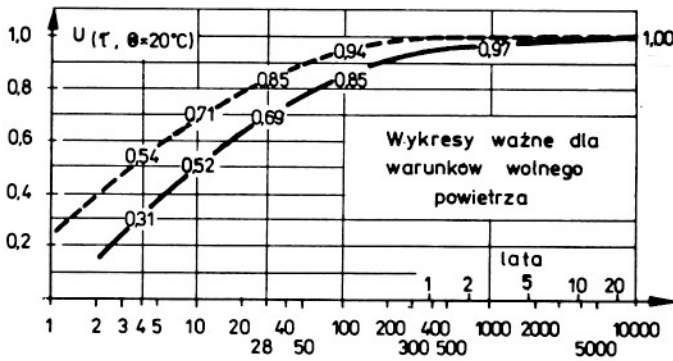
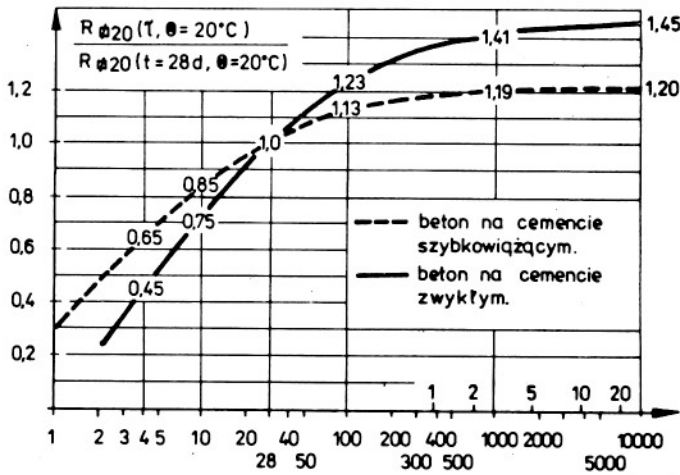
Rys. 4.13. Wpływ warunków środowiska w jakich dojrzewa beton na jego wytrzymałość i funkcję starzenia.

Fig. 4.13. The effect of the environmental curing conditions of concrete on its strength and function of ageing.

Wiek betonu  $\tau$  jest tu liczony od chwili związania betonu (koniec wiązania można określić np. na aparacie Vicata [71, 193, 250]) i nie pokrywa się ściśle z długością okresu hydratacji. Różnica ta wynosi 5-10 godzin i dla praktycznych obliczeń nie ma większego znaczenia.

Tak zdefiniowana funkcja będzie wyraźnie zależeć od warunków, w jakich przebiega proces twardnienia. Na rysunku 4.13 pokazano przebieg narastania wytrzymałości betonu w czasie i przebieg uniwersalnej funkcji starzenia betonów dojrzewających w środowisku wodnym i powietrznym. Różny kształt funkcji  $U(\tau)$  odpowiadający różnym warunkom przechowywania betonu należy tłumaczyć tym, że na powietrzu (gdzie beton podlega wysychaniu) proces hydratacji zostaje dość szybko spowolniony (na skutek braku wody mogącej podtrzymać hydratację), a następnie zatrzymany. Natomiast w warunkach wodnych hydratacja przebiega tak długo (teoretycznie nieskończenie długo), aż cały cement ( $c_h$ ) ulegnie uwodnieniu. W związku z tym funkcje opisujące narastanie wytrzymałości (dla różnych warunków przechowywania) nie są afiniczne, co prowadzi do różnych funkcji  $U(\tau)$ .

Na rysunku 4.14 podano wykresy funkcji  $U(\tau)$  dla cementów portlandzkich zwykłych i szybkowiązających sporządzone w oparciu o pracę Rüscha i Jungwirtha [291]. Podane wykresy bardzo dobrze pokrywają się z podob-



Wiek betonu „ $\tau$ ” w dobach, logarytmiczna skala czasu

Rys. 4.14. Wykresy  $U(\tau)$  sporządzone w oparciu o [291].

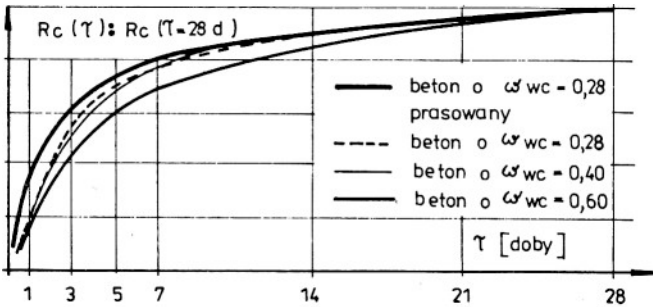
Fig. 4.14. Diagrams of  $U(\tau)$  based on [291].

T a b e l a 4.3

Wartości parametrów określających proces starzenia betonu

Rodzaj cementu	Parametry funkcji $U(\tau)$					
	$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\vartheta_1$	$\vartheta_2$	$\vartheta_3$
Zwykły	0,65	0,31	0,04	0,1400	0,0070	0,0004
Szybkowiąjący	0,79	0,20	0,01	0,1400	0,0090	0,0004

nymi, charakteryzującymi portlandzkie cementy amerykańskie [280] i z krzywymi zalecanymi przez CEB-FIP [81]. W tabeli 4.3 podano wartości parametrów występujących w funkcji  $U(\tau)$  (4.10) oszacowane na podstawie [291]. Trzeba tu jednak jeszcze raz poczynić zastrzeżenie, że podane wykresy obowiązują w ściśle określonych granicach, tzn. dla betonów o  $0,25 < \omega_{wc} < 0,5$  i zwyczajnie zagęszczanych. W innym przypadku - rys. 4.15 - mogą występować duże rozbieżności. Jest to spowodowane tym, że w zaczynach ścisłych (dobrze zagęszczonych i o małym  $\omega_{wc}$ ) ziarna cementu leżą bliżej siebie, co powoduje szybsze uzyskanie przez żel struktury ciągłej (patrz beton prasowany - rys. 4.15). O tym efekcie wspomniano już uprzednio, omawiając czynniki wpływające na wielkość  $h_1$ .



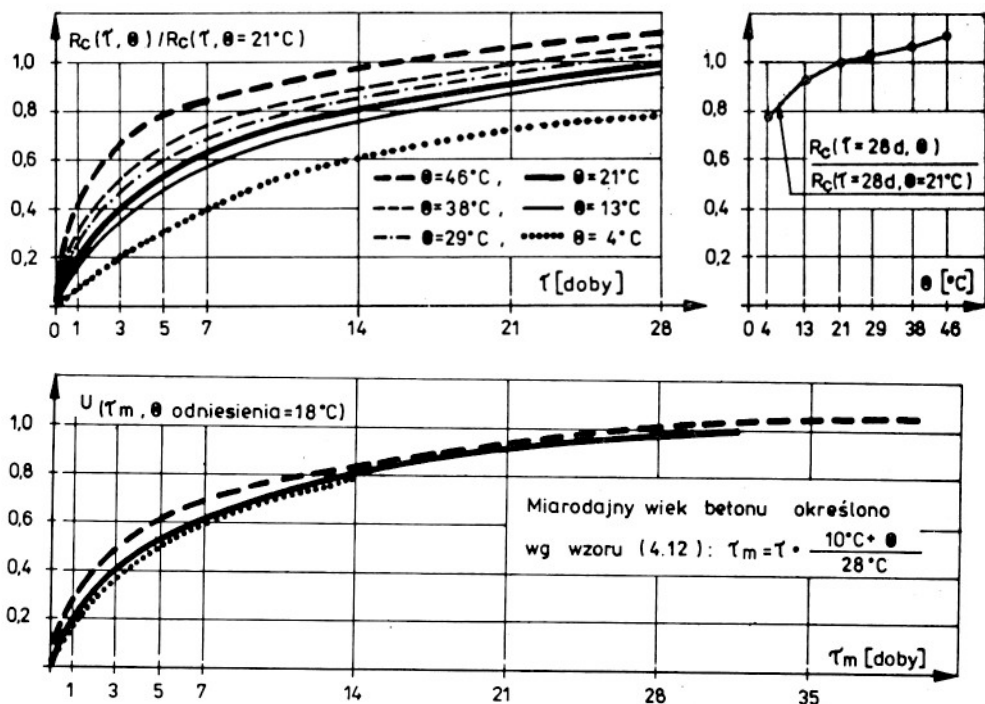
Rys. 4.15. Przyrost w czasie wytrzymałości betonów o różnym stosunku wodno-cementowym [71].

Fig. 4.15. Time-dependent increment in concrete strength for different water-cement ratios [71].

Teraz rozważmy, jak wpływają warunki dojrzewania na prędkość wzrostu wytrzymałości na ściskanie. Problem ten ilustrują wyniki badań opublikowane przez Price'a [281] - rys. 4.16. Powyżej  $40^{\circ}\text{C}$  wzrost wytrzymałości jest już bardziej intensywny [250] i zostanie omówiony osobno (problem naparzenia betonu). Można przyjąć, że prędkość wzrostu wytrzymałości betonu zależy liniowo od temperatury, w jakiej beton dojrzewa (w granicach od  $0^{\circ}\text{C}$  do  $40^{\circ}\text{C}$ ) - badania [71, 193, 250]. Można ten fakt uwzględnić na różne sposoby [120, 193, 250, 291], ale najważniejsze wydaje się wprowadzenie tzw. wieku miarodajnego  $\tau_m$

$$\tau_m = j_c \sum_{i=1}^n \Delta \tau_i \frac{10^{\circ}\text{C} + \theta(\tau_i)}{28^{\circ}\text{C}}, \quad (4.12)$$

gdymiany temperatury następują skokowo lub



Rys. 4.16. Wpływ temperatury otoczenia na szybkość wzrostu wytrzymałości betonu [281].

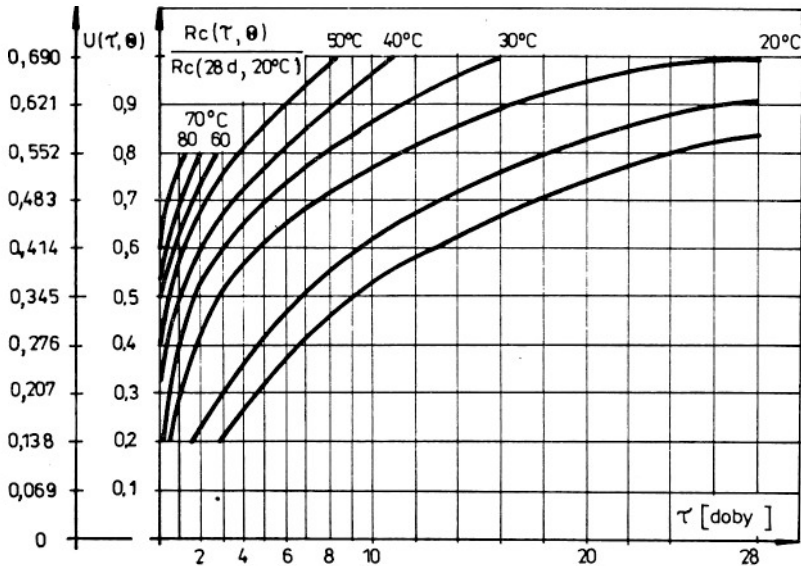
Fig. 4.16. The effect of ambient temperature on the growth rate of concrete strength [281].

$$\tau_m = j_c \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{10 \text{ }^{\circ}\text{C} + \theta(r)}{28 \text{ }^{\circ}\text{C}} dr \quad (4.13)$$

dla zmian temperatury w  $^{\circ}\text{C}$  podanych według funkcji  $\theta(\tau)$ . We wzorach (4.12) i (4.13) poszczególne parametry oznaczają:

- $j_c$  - parametr określający jakość cementu; za pracą [291] przyjęto że  $j_c = 1$  dla cementów portlandzkich zwykłych i  $j_c = 2$  dla cementów szybkowiązujących,
- $r$  - pod całką (4.13) i dalej w podobnych przypadkach oznaczać będzie wiek betonu.

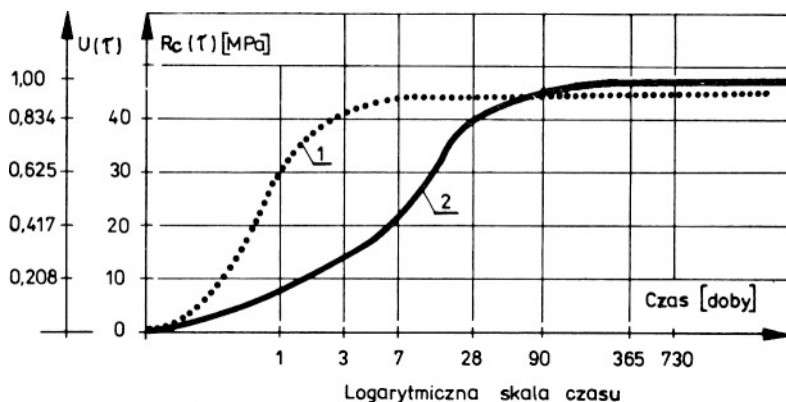
Wzory (4.12) i (4.13) pozwalają na przeliczenie okresu dojrzewania betonu w różnych temperaturach na czas, w jakim beton osiągnąłby taką samą wytrzymałość na ściskanie w temperaturze  $18 \text{ }^{\circ}\text{C}$ . Temperatura ta jest uznana przez PN-75/B-06250 za tzw. temperaturę normalną i do niej należy odnosić miarodajny wiek betonu.



Rys. 4.17. Przyrost wytrzymałości na ściskanie betonu dojrzewającego w wysokich temperaturach [234].

Fig. 4.17. The increment in compressive strength of concrete hardened at high temperatures [234].

W technologii betonu w powszechnym stosowaniu jest metoda termicznej obróbki tego materiału, polegająca na podgrzewaniu elementów betonowych w atmosferze pary wodnej. Szczegółowe omówienie tej problematyki zawierają prace Neville'a [250], Flagi [120], Grudzińskiego [148], Gerwicka [133], Mironowa [234] i innych, nie ma więc potrzeby szerszego omawiania jej w niniejszej pracy. Tutaj interesować nas będą wyłącznie skutki naparzenia widoczne w postaci szybkiego przyrostu wytrzymałości betonu dojrzewającego w wysokiej temperaturze - rys. 4.17, a także dalszy przyrost wytrzymałości po zakończeniu procesu termoobróbki. To ostatnie zagadnienie wyjaśnia praca [133], z której zaczerpnięto rys. 4.18. Otóż wytrzymałość betonu po zakończeniu procesu naparzenia wzrasta dalej (z rozważań wykluczamy przypadki niewłaściwego posługiwania się tą technologią - patrz praca Neville'a [250]), a wzrost ten jest zbliżony do tego, jaki wykazuje beton dojrzewający w normalnych warunkach. Niemniej końcowa wytrzymałość betonu naparzanego będzie o około 5% niższa, co tłumaczy się tym, że przy gwałtownej hydratacji jej produkty tworzą strukturę mniej uporządkowaną (a tym samym mniej wytrzymałą) niż ta, która powstaje przy wolniejszym uwadnianiu cementu. Wydaje się, że różnica ta jest mała i w naszych rozważaniach może być pominięta.



- 1- beton naparzony przez 12h ( $\theta=63-70^\circ\text{C}$ ),  
 2- beton przechowywany w wodzie przez 7 pierwszych dni.  
 Po okresie pielęgnacji próbki były przechowywane w warunkach wolnego powietrza

Rys. 4.18. Zmiana wytrzymałości betonu w czasie w zależności od sposobu jego pielęgnacji [133].

Fig. 4.18. Time-dependent change of concrete strength depending on curing method [133].

Podsumowując problematykę tego rozdziału możemy stwierdzić, że w wypadku naparzenia wiek miarodajny należy określać w sposób następujący:

$$\tau_m = (\tau - t_n) + \tau_h, \quad (4.14)$$

gdzie  $t_n$  - długość cyklu naparzenia,

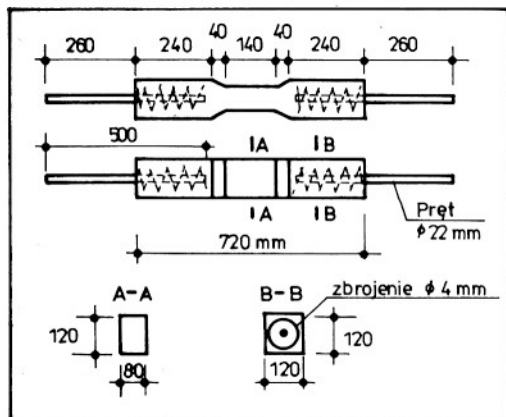
$\tau_h$  - okres normalnego dojrzewania, po którym beton miałby taką samą wytrzymałość, jaką uzyska w wyniku naparzenia.

## 4.2. Wytrzymałość betonu przy prostym rozciąganiu

### 4.2.1. Badanie wytrzymałości betonu na rozciąganie

Wytrzymałość na rozciąganie<sup>\*</sup>  $R_T$  jest drugą (po ściskaniu) ważną cechą betonu, charakteryzującą jego konstrukcyjne właściwości. Doświadczalne określenie jej jest jednak trudne i wymaga zastosowania specjalnych próbek [119,125,165,250] lub nietypowego oprzyrządowania maszyny wytrzymałościowej [165,249]. Na rysunku 4.19 pokazano próbkę pozwalającą na wyznaczenie  $R_T$  [125]. Sporządzanie takich próbek podraża badania do te-

<sup>\*</sup> Ponieważ za dodatnie uważamy naprężenia ściskające, wytrzymałość na rozciąganie przyjmować będzie wartości ujemne.



Rys. 4.19. Próbkę do badań wytrzymałości betonu na proste rozciąganie [125].

Fig. 4.19. Specimen of concrete for tensile strength tests [125].

go stopnia, że mogą one być stosowane w zasadzie tylko do badań naukowych. W badaniach kontrolnych wykorzystuje się inne, pośrednie metody badań, np. przez rozłupywanie próbek walcowych lub zginanie beleczek. Ponieważ znane są korelacje pomiędzy  $R_T$  a wielkościami uzyskanymi w badaniach pośrednich [71,119,193,250], możemy w prosty sposób oszacować wielkość wytrzymałości na rozciąganie.

Należy jeszcze zaznaczyć, że o wytrzymałości na rozciąganie decyduje najszlubszy przekrój badanej próbki (w myśl teorii niezawodności możemy próbkę traktować jako element o szeregowym połączeniu poszczególnych przekrojów), inaczej niż przy ścisaniu (gdzie zniszczenie przebiega zgodnie z zasadami modelu równoległego). W związku z tym przy badaniu wytrzymałości na rozciąganie obserwuje się znacznie wyższe rozrzuty wyników niż przy badaniu próbek na ścisaniu [165].

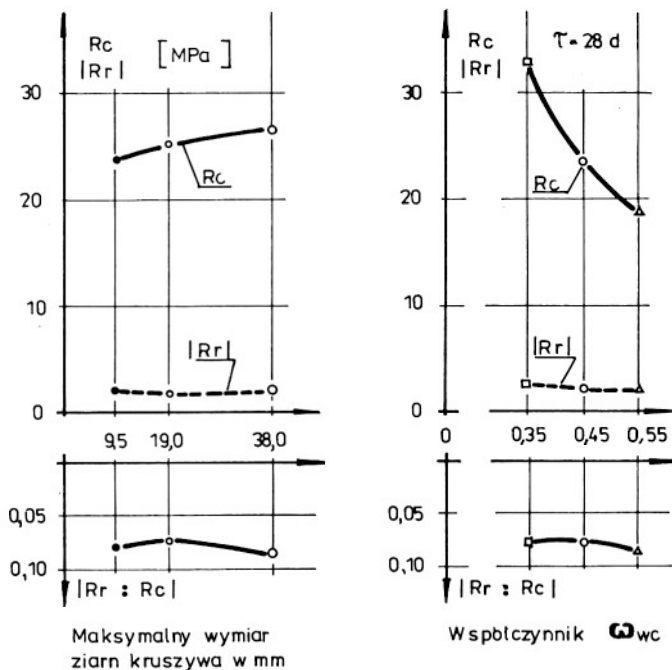
#### 4.2.2. Czynniki wpływające na wytrzymałość betonu przy rozciąganiu

O wytrzymałości betonu na rozciąganie decydują te same czynniki, które w istotny sposób wpływają na wytrzymałość przy ścisaniu (rozdział 4.1.2). Na rysunku 4.20 pokazano w jaki sposób analizowane tu wytrzymałości zależą od parametrów opisujących strukturę betonu. Okazuje się, że czynniki te determinują  $R_T$  i  $R_C$  w podobny, ale nie identyczny sposób. Wzajemny stosunek tych dwu wielkości zależy od:

- maksymalnego i średniego (rys. 4.21) wymiaru ziarn kruszywa - badania Johnstona i Sidwella [165],
- współczynnika wodno-cementowego,

nie zależy natomiast od rodzaju kruszywa (tłuczniowe, żwirowe), co wykazały badania Kuczyńskiego [192].





Rys. 4.20. Zależność  $R_c$  i  $R_r$  od parametrów charakteryzujących strukturę betonu [125].

Fig. 4.20.  $R_c$  and  $R_r$  versus the parameters characterizing the structure of concrete [125].

Przyjmujemy, że wytrzymałość betonu na rozciąganie  $R_r$  jest równa:

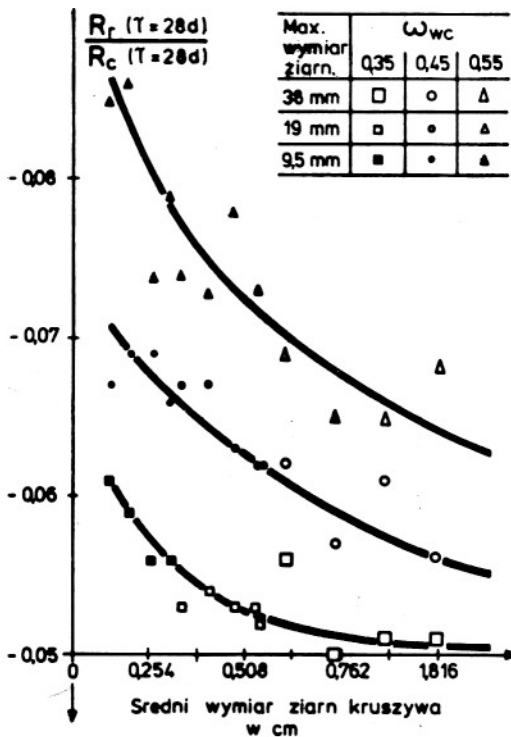
$$R_r = k_r \cdot R_c, \quad (4.15)$$

gdzie  $k_r$  jest współczynnikiem proporcjonalności zależnym od czynników wymienionych wyżej oraz wieku betonu i mieści się w granicach od  $-0,11$  do  $-0,04$ .

#### 4.2.3. Wpływ wieku betonu na jego wytrzymałość przy rozciąganiu

Zagadnieniu temu poświęcono szereg prac badawczych, jak np. [119, 125, 165, 193, 250]. Wykazują one, że stosunek  $R_r : R_c$  zmienia się z wiekiem betonu (rys. 4.22) i to w taki sposób, że wytrzymałość na rozciąganie stanowi coraz mniejszy ułamek wytrzymałości na ściskanie. Wynika to z tego, że  $k_r = k_r(\tau)$

$$k_r(\tau) = k_0 - k_1 \cdot U(\tau), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} k_r(\tau) = \bar{k}_r = k_0 - k_1. \quad (4.16)$$



Rys. 4.21. Stosunek wytrzymałości na rozciąganie do wytrzymałości na ściskanie jako funkcja średniego wymiaru ziarn kruszywa i współczynnika  $\omega_{wc}$  [165].

Fig. 4.21. Tensile strength to compressive strength ratio as a function of an average grain size of the aggregate and of coefficient  $\omega_{wc}$  [165].

We wzorze tym  $k_0$  zależy od składu betonu (średnicy ziarn i  $\omega_{wc}$ ), zaś  $k_1$  określa zakres zmian  $k_T(\tau)$  w zależności od jego wieku. Średnie wartości tych parametrów zestawiono w tab. 4.4. Wykorzystując (4.15) i (4.16), zmianę wytrzymałości betonu na rozciąganie możemy opisać wzorem

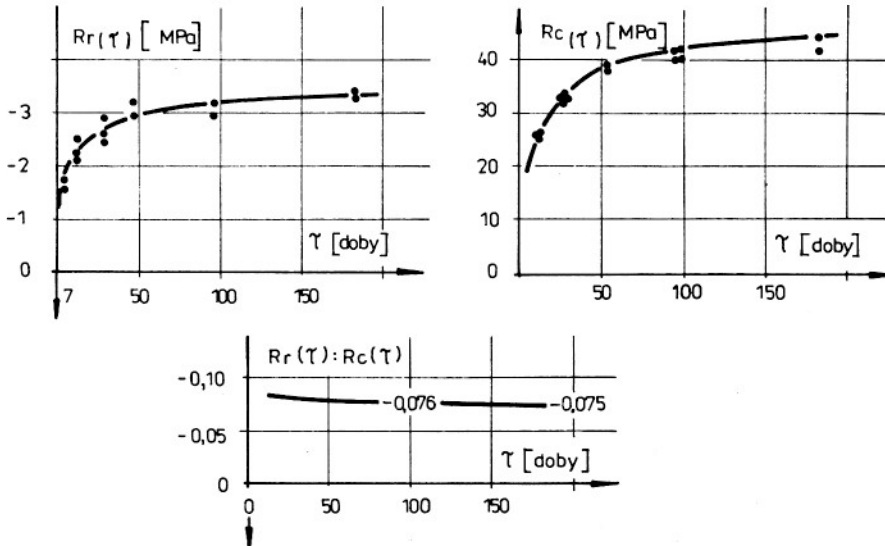
$$R_T(\tau) = \bar{R}_c \cdot k_T(\tau) \cdot U(\tau) \quad (4.17)$$

lub

$$R_T(\tau) = \bar{R}_T \frac{k_T(\tau) \cdot U(\tau)}{k_T}, \quad (4.18)$$

gdzie  $\bar{R}_T = \bar{R}_c \cdot \bar{k}_T$ .

Wydaje się, że wzór (4.17) jest bardziej ogólny od wyrażeń proponowanych w zaleceniach CEB-FIP [114] i innych pozycjach literatury.



Rys. 4.22. Wytrzymałości betonu na rozciąganie i ściskanie jako funkcje jego wieku [125].

Fig. 4.22. Tensile and compressive strengths of concrete as functions of its age [125].

T a b e l a 4.4

Zestawienie parametrów wchodzących do wzoru (4.16)

Współczynnik wodno — cementowy	Maksymalny wymiar ziarn kruszywa w mm	$k_0$	$k_1$
0,55	9,5	-0,110	-0,04
	19,0	-0,105	
	38,0	-0,100	
0,45	9,5	-0,100	
	19,0	-0,095	
	38,0	-0,090	
0,35	9,5	-0,090	
	19,0	-0,085	
	38,0	-0,080	
0,35 >	9,5 ÷ 38,0	-0,080	

## 5. DORAŻNA WYTRZYMAŁOŚĆ BETONU W ZŁOŻONYCH STANACH NAPRĘŻENIA

### 5.1. Badania wytrzymałości betonu w złożonych stanach naprężenia

Badania wytrzymałości betonu w złożonych stanach naprężenia zostały zapoczątkowane przez Föppla (w 1900 r.), który badał wytrzymałość tego tworzywa w warunkach dwuosowego ściskania [140]. Przez następne 50 lat od czasu do czasu podejmowano ten temat, o czym informują np. prace [140,198,249,264]. Szersze zainteresowanie tym problemem obserwujemy dopiero z początkiem lat pięćdziesiątych, kiedy to, w związku z powszechnym stosowaniem betonu do budowy osłon reaktorów jądrowych, chłodni kominowych, silosów, przekryć powłokowych czy mostów, znajomość właściwości betonu poddanego działaniu złożonych stanów naprężenia okazała się niezbędna dla bezpiecznego projektowania tych budowli.

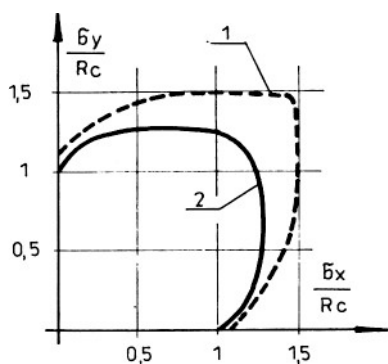
W Polsce badania z tego zakresu zapoczątkował Głomb [135,136] (w roku 1958), prowadząc je pod kątem wykorzystania ich wyników przy projektowaniu wielokierunkowego sprzężania dźwigarów powierzchniowych.

Obszerne zestawienia i krytyczne omówienia dotychczasowego stanu badań w tym zakresie można znaleźć w pracach Nelissena [249] (do 1971 r.), Kupfera, Hilsdorfa i Rüscha [197], Patasa [264], Godyckiego-Ćwirko [140] czy Gerstla [132].

Wszechstronne badania (Kupfer [198]) wykazały, że podobnie jak w próbie jednoosowego ściskania, wielkość sił niszczących próbkę w złożonym stanie naprężenia, w sposób istotny zależy od rodzaju zastosowanych płyt dociskowych - rys. 5.1. W związku z tym ustalili się poglądy [132, 140,249,250,264], że wyniki najbardziej zbliżone do rzeczywistej wytrzymałości betonu w złożonych stanach naprężenia uzyskuje się przekazując obciążenia na badaną próbkę poprzez tzw. płyty szczotkowe. W dalszych rozważaniach analizowane będą tylko te wyniki badań, które uzyskano używając płyt szczotkowych.

### 5.2. Wytrzymałość betonu w płaskim stanie naprężenia

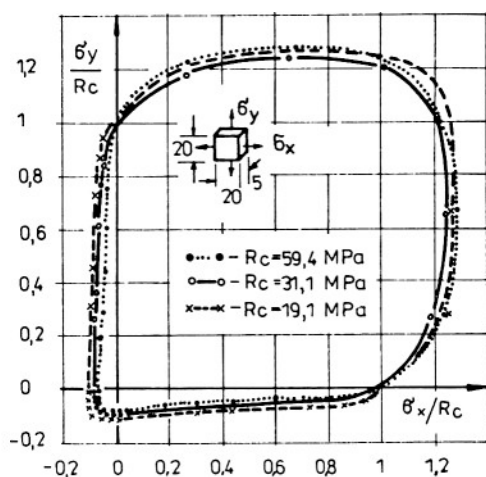
Problem ten był przedmiotem wielu prac badawczych i teoretycznych z uwagi na duże znaczenie praktyczne; posiada więc bogatą i wszechstronną bibliografię, np. [132,135,136,166,196-198,226,249,264]. Ponieważ są dostępne (również w języku polskim) obszerne opracowania monograficzne tego problemu, jak np. Nelissena [249], Kupfera [198], Gerstla [132], Patasa [264], Godyckiego-Ćwirko [140], w niniejszej pracy ograniczymy się do przytoczenia tylko najbardziej reprezentatywnych badań eksperymentalnych i do podania wniosków podsumowujących aktualne rozpoznanie rozważanego problemu.



- 1 Obciążenie przekazywano za pośrednictwem płyt masywnych;
- 2 za pośrednictwem płyt szcztokowych

Rys. 5.1. Wpływ rodzaju zastosowanych płyt dociskowych na wytrzymałość betonu w płaskim stanie naprężenia [196].

Fig. 5.1. The effect of the kind of pressure plates used on the strength of concrete in plane stress [196].

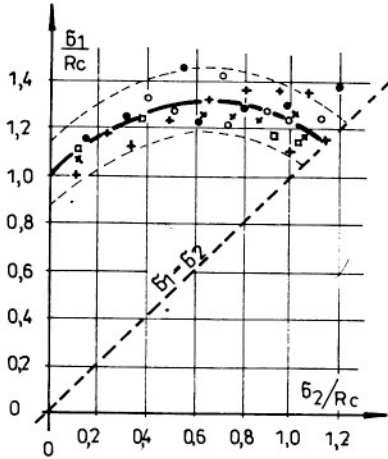


Rys. 5.2. Obwiednie graniczne określające wytrzymałość różnych betonów w płaskim stanie naprężenia [197].

Fig. 5.2. Limit envelopes determining the strength of different types of concrete in plane stress [197].

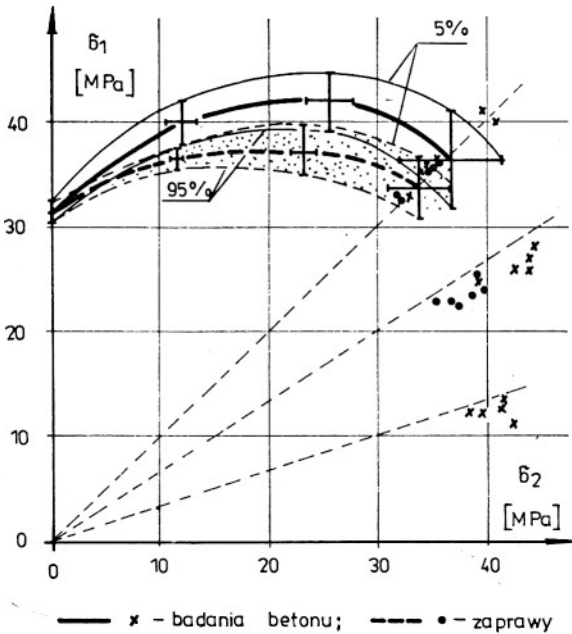
Na rysunku 5.2 przedstawiono wyniki badań wytrzymałości betonu w dwuosowym stanie naprężenia uzyskane przez Kupfera, Hilsdorfa i Rüscha [197]. Badania te przeprowadzono na trzech różnych betonach (o wyraźnie różniących się wytrzymałościami na proste ściskanie), wykazując jakościową zgodność otrzymanych wyników.

Podobne rezultaty uzyskał Nelissen [249] (rys. 5.3), który również badał betony o różnej wytrzymałości normowej ( $R_c \text{ } \phi_{20} = 25$  lub  $35 \text{ MPa}$ ) stosując ponadto dwie prędkości wymuszania odkształceń ( $0,00001 \text{ s}^{-1}$  i



Rys. 5.3. Wyniki badań wytrzymałości betonu w dwuosiowym stanie naprężeń ściskających [249].

Fig. 5.3. The results of tests of concrete strength under biaxial compression [249].



Rys. 5.4. Porównanie wytrzymałości na dwukierunkowe ściskanie betonu i zaprawy [196].

Fig. 5.4. The comparison of two-directional compressive strength of concrete with that of paste [196].

$0,0002 \text{ s}^{-1}$ , co odpowiada w zakresie liniowym prędkościom zmian naprężeń równym  $3 \text{ MPa/min}$  i  $60 \text{ MPa/min}$ , por. rys. 4.5). Analizując przedstawione na rys. 5.3 rezultaty badań możemy stwierdzić, że wpływ rozpatrywanych przez Nelissena czynników na kształt obwiedni granicznych jest nieznaczny.

Należy jednak zaznaczyć, że zbliżony przebieg krzywych granicznych uzyskamy tylko wówczas, gdy będziemy rozpatrywać betony o podobnym składzie granulometrycznym. W przypadku betonów wykonanych na kruszywach drobnych (np. piaskobetonów) lub zapraw przebieg obwiedni granicznych może być zdecydowanie inny - rys. 5.4 (zaczepnięty z [196]).

Podsumowując analizę rozpatrywanego problemu możemy w oparciu o przytoczone wyniki badań i o bogate informacje zawarte w przedmiotowej literaturze [132,135,136,196-198,166,249,250,252,264] stwierdzić, że:

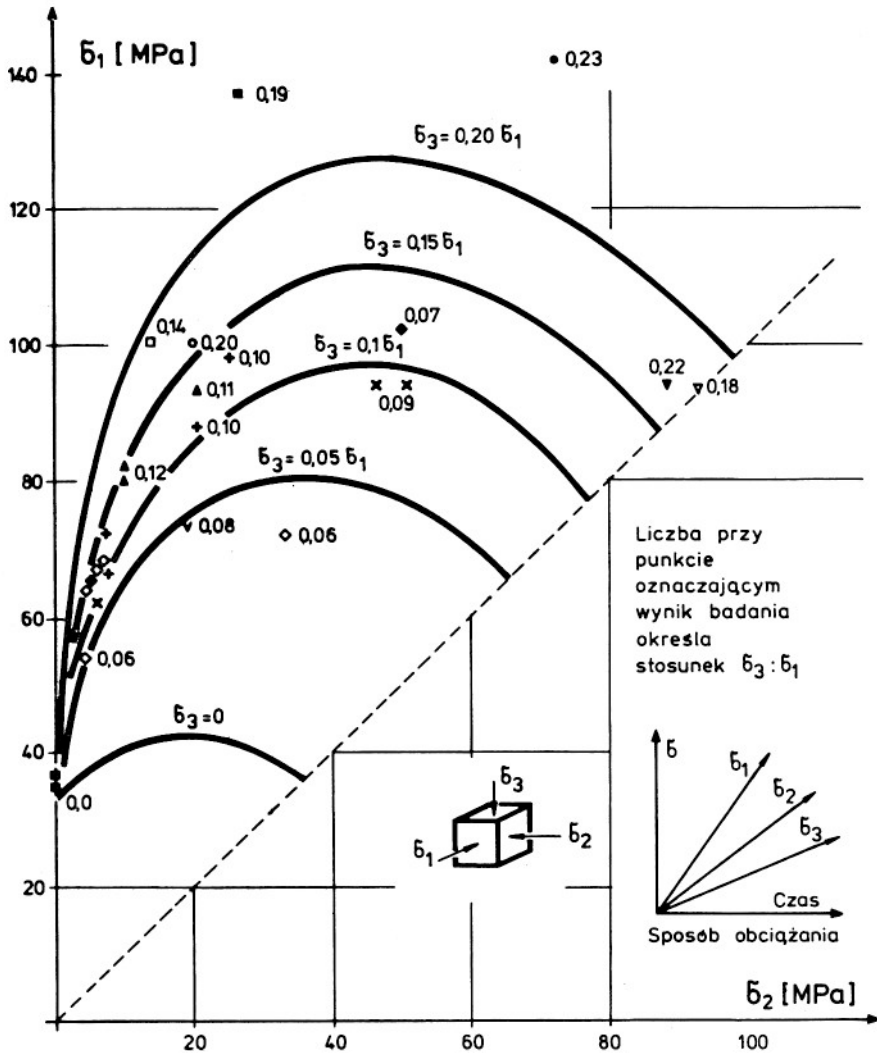
- w stanie dwukierunkowego ściskania beton zawsze wykazuje wytrzymałość wyższą od wytrzymałości przy jednokierunkowym ściskaniu. Maksymalną wytrzymałość (równą około  $(1,25-1,35) R_c$ ) osiąga się wówczas, gdy stosunek  $\sigma_1 : \sigma_2 \approx 2$ , natomiast w warunkach równomiernego ściskania wytrzymałość ta jest nieco mniejsza i wynosi  $(1,10-1,25) R_c$ ,
- w przypadku gdy jedno z naprężeń jest rozciągające (ujemne) wytrzymałość betonu jest zawsze mniejsza od  $R_c$  - rys. 5.2,
- w strefie płaskiego rozciągania wytrzymałość betonu jest zbliżona (w zasadzie nieco mniejsza) do wytrzymałości na rozciąganie jednokierunkowe  $R_T$ .

### 5.3. Wytrzymałość betonu w przestrzennym stanie naprężenia

Dla rozwiązania tego problemu powołano w 1975 r. międzynarodowy program badawczy koordynowany przez Uniwersytet w Colorado (Gerstle). W programie tym wzięło udział 7 różnych placówek badawczych z Europy i Ameryki. Próbkę do badań (sześciennie o boku równym 10 cm) wykonano na uniwersytecie w Colorado i przesłano poszczególnym współpracującym instytucjom. W badaniach tych brał udział również zespół Kupfera [196], którego wyniki cytowane są w niniejszej pracy. Wyniki prac innych zespołów można znaleźć np. w [83,176,189,196], a w polskiej literaturze w [140].

Na rysunku 5.5 [196] pokazano jak kształtuje się wytrzymałość betonu w warunkach trójkierunkowego ściskania. Z przedstawionych wyników można wyciągnąć wniosek, iż wraz ze wzrostem trzeciego naprężenia ścisniającego wzrasta wytrzymałość betonu. W niektórych badaniach osiągnęto zniszczenie betonu przy naprężeniach nawet kilkakrotnie wyższych od wytrzymałości na proste ściskanie [196,264].

Z badań Kupfera [198], Kotsovosa [189] i Gerstle'a [132] wynika, iż droga przyrostu naprężeń, według której powstaje w próbce określony stan naprężenia, nie pozostaje bez wpływu na stan wyężenia materiału. Obrazują to wyniki badań [196] pokazane na rys. 5.6. Widać z nich wyraźnie, że zależność między naprężeniami oktoedrycznymi ( $\sigma_{okt}$  i  $\tau_{okt}$  - normalnymi i ścinającymi) jest funkcją zastosowanego sposobu obciążenia

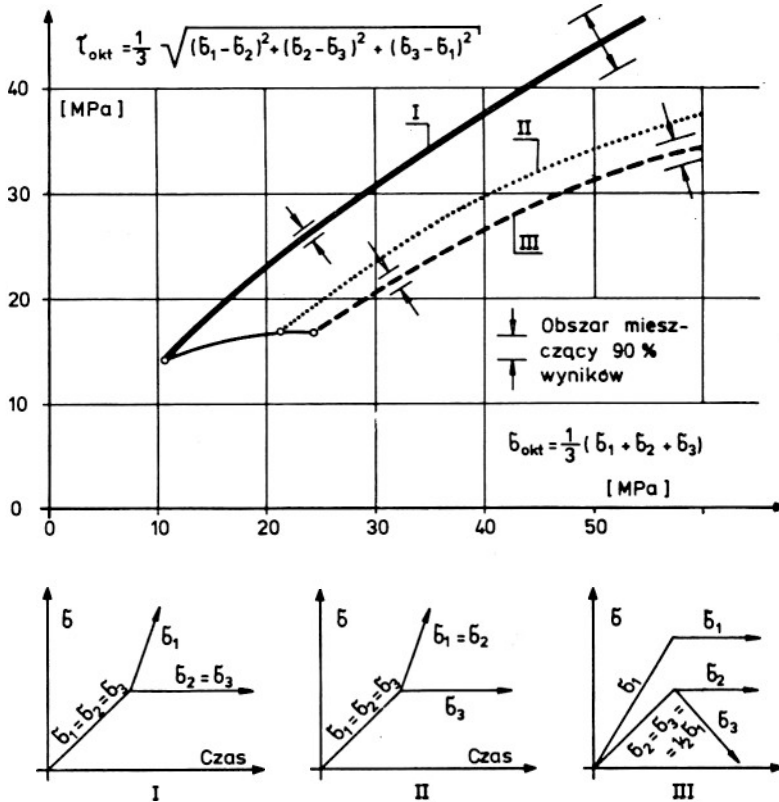


Rys. 5.5. Wyniki badań wytrzymałości betonu w stanie przestrzennego ściskania [196].

Fig. 5.5. The strength of concrete in general state of stress - results of tests [196].

próbki. Jeżeli przynajmniej jedno z trzech naprężeń głównych jest rozciągające (ujemne), to wówczas wytrzymałość betonu jest mniejsza niż w stanie dwukierunkowego ściskania jak i jednoosiowego rozciągania [140, 196, 264]. Jest ona tym mniejsza - w stosunku do płaskiego ściskania -





Stosowane sposoby obciążenia próbek.

Rys. 5.6. Zależność między naprężeniami oktaedrycznymi  $\sigma_{\text{okt}}$  i  $\tau_{\text{okt}}$  występującymi w chwili zniszczenia próbek obciążonych w różny sposób [196].

Fig. 5.6. The relationship between octahedral stresses  $\sigma_{\text{okt}}$  and  $\tau_{\text{okt}}$  occurring at breaking of specimens loaded in different ways [196].

im większe jest naprężenie rozciągające lub - w stosunku do prostego rozciągania - im większe są naprężenia ściskające.

W konkluzji możemy stwierdzić, że:

- w stanie hydrostatycznego ściskania beton wykazuje teoretycznie nieograniczoną wytrzymałość,

- gdy występuje ściskanie nierówne (są to tzw. przypadki praktyczne), wytrzymałość betonu jest zawsze większa od tej, jaką wykazywałby beton w płaskim stanie naprężenia - rys. 5.5,

- w stanie hydrostatycznego lub nierównomiernego rozciągania wytrzymałość jest zawsze niższa od wytrzymałości przy rozciąganiu prostym.

## 6. GRANICZNY STAN WYTĘŻENIA BETONU

### 6.1. Definicje i podstawowe założenia

#### 6.1.1. Kilka informacji o tensorze naprężeń

Stan naprężeń w dowolnym punkcie konstrukcji określa dziewięć składowych działających na sześć wzajemnie prostopadłych płaszczyzn, wydzielających z przestrzeni elementarny sześcian o krawędziach równoległych do przyjętego układu współrzędnych  $x, y, z$ . W środku tego sześcianu znajduje się rozpatrywany punkt, w którym panuje stan naprężeń jednoznacznie określony przez tensor naprężeń  $\sigma_{ij}$

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{yx} & \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{zy} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (6.1)$$

Stosowane mogą być dwa zasadnicze sposoby zapisu składowych tensora naprężeń: zapis matematyczny (dwuwskaznikowy), umożliwiający stosowanie konwencji sumacyjnej Einsteina oraz zapis inżynierski, w którym składowe normalne oznacza się symbolem  $\sigma$  z jednym indeksem, natomiast składowe styczne symbolem  $\tau$  z dwoma wskaźnikami.

Opisany wzorem (6.1) tensor naprężeń możemy rozłożyć na tensor kulisty (aksjator) naprężeń  $\sigma_0 \delta_{ij}$  i dewiator naprężeń  $s_{ij}$ . Zachodzi więc zależność:

$$\sigma_{ij} = \sigma_0 \delta_{ij} + s_{ij} = \sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - \sigma_0 \end{vmatrix}, \quad (6.2)$$

gdzie  $\sigma_0$  jest średnim (lub izotropowym) naprężeniem obrazującym hydrostatyczne ściskanie lub rozciąganie, a  $\delta_{ik}$  jest tzw. deltą Kroneckera

$$\sigma_0 = 1/3 (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (6.3)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{gdy } i = j \\ 0 & \text{gdy } i \neq j \end{cases}. \quad (6.4)$$

Dokonując stosownego obrotu układu współrzędnych, możemy tensor naprężeń (wyznaczony dla dowolnego układu współrzędnych, np.  $x, y, z$ ) sprowadzić do tzw. kierunków głównych (1,2,3).

Tensor naprężeń głównych ma postać:

$$\sigma_{ij} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_0 \sigma_{ij} + s_{ij} = \sigma_0 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 - \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - \sigma_0 \end{vmatrix} \quad (6.5)$$

przy czym  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ .

Wartość średniego naprężenia  $\sigma_0$  nie zależy od przyjętego układu współrzędnych i zawsze jest równa jednej trzeciej sumy naprężeń normalnych. W przypadku naprężeń głównych obowiązuje wzór (6.3), w którym należy dokonać zamiany wskaźników z  $x, y, z$  na  $1, 2, 3$ .

$$\sigma_0 = \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (6.6)$$

#### 6.1.2. Niezmienniki tensora i dewiatora naprężeń

W teorii stanu wyłączenia często wykorzystywane są tzw. niezmienniki tensora i dewiatora naprężeń. Szczegółowe informacje na ten temat można znaleźć w [132, 140, 174, 198, 218, 226, 248]; tutaj podano tylko podstawowe, wykorzystywane w dalszej części pracy, zależności z tego zakresu.

Niezmienniki tensora naprężeń to:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3 \sigma_0, \quad (6.7)$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad (6.8)$$

$$I_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2 \tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3, \quad (6.9)$$

zaś niezmienniki dewiatora naprężeń definiowane są następująco:

$$J_1 = (\sigma_x - \sigma_0) + (\sigma_y - \sigma_0) + (\sigma_z - \sigma_0) = (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_0) + (\sigma_3 - \sigma_0) = 0, \quad (6.10)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)] = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]. \quad (6.11)$$

### 6.1.3. Naprężenia oktaedryczne i intensywność naprężeń

Naprężenia oktaedryczne są to naprężenia (normalne i styczne) odnoszone do płaszczyzny nachylonej pod jednakowym kątem do wszystkich osi współrzędnych głównych (1,2,3), leżącej w dodatnim oktancie układu. Wyrażają się one [140,174,218,248] wzorami:

$$\sigma_{\text{okt}} = \sigma_0 = \frac{1}{3} I_1, \quad (6.12)$$

$$\begin{aligned} \tau_{\text{okt}} &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2)} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}, \quad (6.13) \end{aligned}$$

gdzie  $\sigma_{\text{okt}}$  i  $\tau_{\text{okt}}$  - oktaedryczne naprężenia normalne i styczne,  
 $\sigma_i$  - intensywność naprężeń, definiowana jako:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{okt}} = \sqrt{3 J_2}. \quad (6.14)$$

Z wzorów (6.12), (6.13) i (6.14) wynika wyraźnie, że wielkości  $\sigma_{\text{okt}}$ ,  $\tau_{\text{okt}}$  i  $\sigma_i$  są również niezmiennikami tensora naprężeń.

### 6.1.4. Założenia wykorzystywane w dalszych rozważaniach

Przed przystąpieniem do analizy granicznego stanu wyciężenia betonu musimy określić założenia, na jakich oparte zostaną nasze rozważania. A więc zakładamy, że:

- naprężenia wyznaczone z pominięciem lokalnych zaburzeń, przy przyjęciu ciągłej izotropowej budowy materiału, mogą być miarą wyciężenia betonu. Założenie to będzie jeszcze dyskutowane w rozdz. 7.1,

- za dodatnie będziemy w niniejszej pracy uważać naprężenia ściskające, tak jak to zwykle przyjmuje się w teorii betonowych konstrukcji sprężonych.

## 6.2. Aktualny stan opracowania teorii wyciężenia betonu

### 6.2.1. Wprowadzenie

Obszerne studium tego tematu zawiera monografia Godyckiego-Ćwirko [140]. Również w wielu innych pracach, np. [35,75,82,83,100,113,146,176,198,209,226,249,285,292], są zawarte bogate informacje z tego zakresu. Dlatego rozdział ten został opracowany syntetycznie, bez przytaczania szczegółowych równań poszczególnych teorii, które można znaleźć w cytowanych wyżej pracach.

Prace badawcze odnoszące się do teorii zniszczenia ciała stałego można podzielić na dwie zasadnicze grupy [191]:

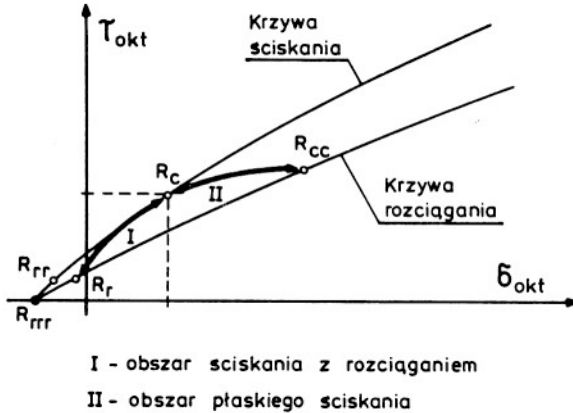
Pierwsza, historycznie wcześniejsza, dotyczy inżynierskich teorii wytrzymałości, w których materiał traktowany jest jako kontinuum, a zależności graniczne wyprowadzane są zwykle w oparciu o teorię sprężystości. Do tej grupy należą wszystkie klasyczne hipotezy, takie jak: największego odkształcenia, największego naprężenia normalnego, największego naprężenia stycznego Mohra, wszystkie hipotezy energetyczne (w tym Hubera-Misesa - Hencky'ego), hipotezy określające stan graniczny jako funkcję niezmienników stanu naprężenia (np. Nadai [248] i Burzyńskiego [74]) oraz teorie wiążące wyężenie z propagacją rys w materiale [253, 345] (chodzi tu o teorię Griffitha [145] i jej rozwinięcia [134, 160, 345 346]). Do tej grupy należy zaliczyć też prace Murzewskiego [247], Kaczanowa i Rabotnowa [283] oraz dalsze kontynuacje tych prac [226, 246, 272, 345] oparte na koncepcji uszkodzenia.

Druga grupa prac obejmuje teorie fizyczne i w jej ramach rozpatrywane są ciała krystaliczne. Modelem materiału jest tu struktura dyskretna. Początkowo prace z tego zakresu dotyczyły praw rządzących oddziaływaniami między atomami sieci krystalicznej. Dalsze uwzględniały już błędy struktury rzeczywistej, przez uwzględnienie wakansji, dyslokacji, atomów międzywęzłowych itp. Podsumowaniem dotychczasowego stanu badań w tej dziedzinie jest monografia Hulla [159].

Analizując dotychczasowy stan badań w zakresie teorii wyężenia ciała stałego, trzeba stwierdzić, że druga grupa prac, mimo szeregu interesujących spostrzeżeń, ma dla analizy wyężenia betonu mniejsze znaczenie. Jest tak dlatego (mimo że obie fazy tworzące beton są ciałami krystalicznymi), że o wytrzymałości betonu nie decydują defekty struktur kruszywa i zaczynu, ale wytrzymałość strefy międzyfazowej - rys. 4.6. Dlatego rozwiązania problemu wyężenia betonu mogącego mieć pewną przydatność praktyczną należy poszukiwać wśród koncepcji zaliczonych do grupy pierwszej.

#### 6.2.2. Kryteria fizyczne, jakie powinien spełniać warunek granicznego wyężenia betonu

Kryteria te mogą być wyprowadzone wyłącznie z analizy wyników badań eksperymentalnych, których stan dosyć szeroko omówiono w poprzednim rozdziale. Rysunek 6.1 [140] stanowi więc podsumowanie aktualnego stanu badań nad granicznym wyężeniem betonu. Synteza wielu doświadczeń prowadzi do wniosku, że w układzie naprężeń oktaedrycznych wyniki pomiarów wytrzymałości betonu, mierzone w różnych stanach naprężeń, układają się wzdłuż dwóch krzywych granicznych. Są to tzw. krzywe ściskania i rozciągania; nazwy te przyjęto na podstawie obserwacji postaci zniszczenia



Rys. 6.1. Uogólnienie aktualnego stanu badań nad granicznym wyężeniem betonu

Fig. 6.1. General outlook on the state of the art in studies on limit state effort of concrete.

próbek [140,196,264] (rys. 16.1 i 16.2). Nowsze badania (rys. 5.6 [196]) sugerują, że być może dla każdej drogi obciążenia istnieje inna krzywa graniczna. Nawiązując do danych przedstawionych na rys. 6.1 oraz mając na uwadze cel naszych rozważań, możemy stwierdzić, że:

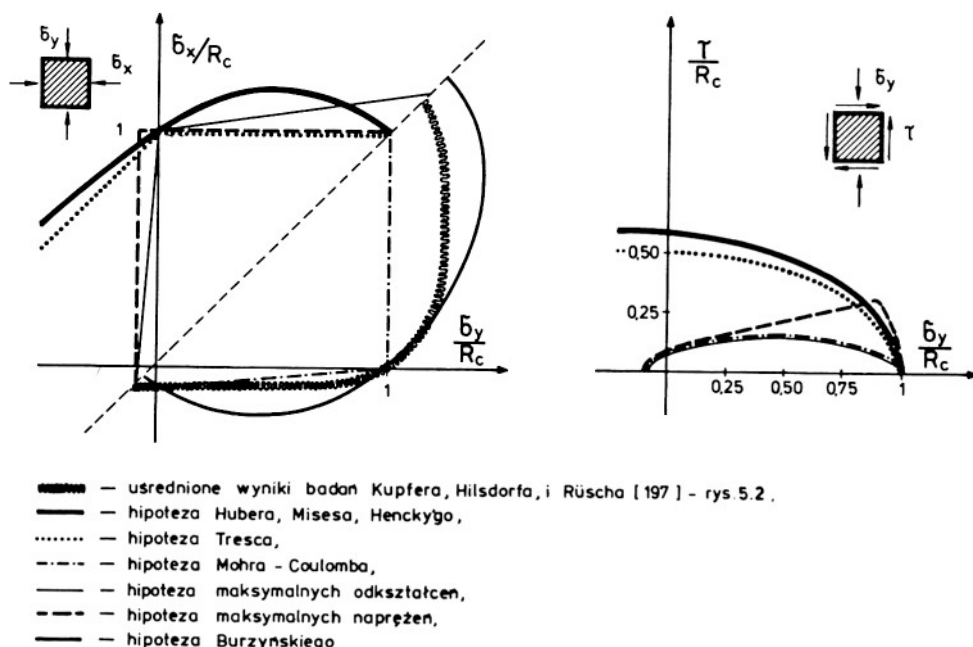
- poszczególne wytrzymałości podstawowe określone w szczególnych stanach obciążeń ( $R_r$ ,  $R_{rr}$ ,  $R_{rrr}$ ,  $R_c$ ,  $R_{cc}$ ) leżą na różnych krzywych granicznych, w związku z czym warunek zniszczenia przyjęty w postaci gładkiej powierzchni obrotowo-symetrycznej nie może dać jednoznacznej oceny stopnia wyężenia betonu, gdyż określonej wartości  $\sigma_{okt}$  mogą odpowiadać różne graniczne naprężenia  $\tau_{okt}$ ,

- mając jednak na uwadze praktyczny aspekt zagadnienia trzeba podkreślić, że oceniając wyężenie istniejącej konstrukcji (np. elementów mostu pracujących w złożonym stanie naprężenia) lub określając współczynnik bezpieczeństwa dla projektowanego obiektu, rzadko kiedy będziemy mogli przewidzieć czy bardziej prawdopodobne jest zniszczenie danego elementu według programu "ściskanie" czy "rozciąganie",

- z uwagi na bezpieczeństwo konstrukcji jako najwłaściwsze wydaje się przyjęcie powierzchni granicznej w postaci obwiedni usytuowanej w przestrzeni naprężeń w ten sposób, by wewnątrz bryły (wyciętej w przestrzeni naprężeń przez tak przyjętą powierzchnię graniczną) mieściły się stany bezpieczne, a na zewnątrz niebezpieczne,

- odnośnie do kształtu powierzchni granicznej należy poprowadzić ją w ten sposób, by możliwie najwięcej punktów określających wytrzymałości podstawowe ( $R_r$ ,  $R_{rr}$ ,  $R_{rrr}$ ,  $R_c$ ,  $R_{cc}$ ) znalazło się na tej powierzchni.

Gwoli ścisłości musimy zaznaczyć, że są podejmowane próby uwzględnienia wpływu drogi obciążenia (lub "wielkości skosu" dewiatora) na graniczny



Rys. 6.2. Porównanie klasycznych teorii wyciężenia z wynikami badań [197] wyciężenia betonu w płaskim stanie naprężenia.

Fig. 6.2. The comparison of classic effort theories with the experimental results [197] obtained for effort of concrete in plane stress.

stan wyciężenia (np. [140,189]), lecz omawianie tych zagadnień przekracza ramy niniejszej pracy.

### 6.2.3. Klasyczne teorie wytrzymałościowe

Na rysunku 6.2 dokonano porównania krzywych granicznych wynikających z różnych klasycznych teorii wytrzymałościowych z wynikami badań wytrzymałości betonu w płaskim stanie naprężenia. Porównanie to wskazuje wyraźnie, że żadna z klasycznych teorii wytrzymałościowych nie opisuje poprawnie granicznego wyciężenia betonu w tym stanie naprężenia. Rozbieżności te stają się jeszcze większe w przestrzennych stanach naprężeń, co łatwo sprawdzić przekształcając poszczególne warunki niszczenia struktury betonu do zależności między  $\sigma_{okt}$  i  $\tau_{okt}$ . Trzeba jednak podkreślić, że niemal dla każdej fizycznie uzasadnionej teorii istnieje pewien obszar naprężeń, dla którego zgodność wielkości przewidywanych z pomierzonymi jest wystarczająca.

## 6.2.4. Współczesne teorie wytrzymałościowe

Wydaje się, że współcześnie stosunkowo najbardziej intensywnie rozwijane jest podejście do problemu granicznego stanu wyężenia betonu, polegające na określaniu powierzchni granicznych jako funkcji niezmienników tensora i dewiatora naprężenia [74,75,76,82,83,113,132,146,209,218,245,248,267,285,302].

$$F(I_1, I_2, I_3, J_1, J_2, J_3, a, b, \dots, f) = 0, \quad (6.15)$$

gdzie  $a, b, \dots, f$  są stałymi materiałowymi.

W literaturze można znaleźć wiele różnych koncepcji stosowania funkcji (6.15). Większość autorów przyjmuje założenie, że istotny wpływ na wyężenie betonu mają tylko pierwszy niezmiennik tensora naprężeń  $I_1$  i drugi niezmiennik dewiatora  $J_2$ . Wówczas warunek (6.15) przyjmuje postać:

$$F(I_1, J_2, a, b, \dots) = 0. \quad (6.16)$$

Warunek (6.16), wykorzystując zależności (6.12) i (6.13), można też zapisać jako funkcję naprężeń oktaedrycznych

$$F(\sigma_{\text{okt}}, \tau_{\text{okt}}, a, b, \dots) = 0. \quad (6.17)$$

Liczba stałych ( $a, b, \dots$ ) zależy od narzuconej liczby punktów (w przestrzeni naprężeń), które muszą leżeć na powierzchni granicznej. Punktami tymi będą oczywiście wytrzymałości podstawowe określone w pewnych specjalnych stanach naprężeń, z tym, że decydujące znaczenie ma tu łatwość doświadczalnego wyznaczenia tych wytrzymałości i dlatego w różnych sformułowaniach warunku (6.16) wykorzystywane są co najwyżej trzy wytrzymałości podstawowe -  $R_T$ ,  $R_C$  i  $R_{CC}$ .

Szereg różnych wariantów powierzchni granicznej dla betonu zapisanych w postaci (6.16) lub (6.17) analizuje Godycki-Ćwirko w [140]. Podobne analizy można znaleźć również w innych pracach, np. [75,76,82,113,189,209,285]. Trudno jednak któryś z tych warunków zdecydowanie wyróżnić, gdyż żaden z nich nie znalazł szerszego zastosowania. Większość z nich została natomiast sformułowana pod kątem wykorzystania do rozwiązania określonego problemu [75,83,113,146,225,285,302] i ma ograniczony zakres zastosowania. Z częściej wykorzystywanych należy tu wymienić propozycje Chenów [82,83], Buyukozturka [75], Epsteina i Murraya [113] oraz Mroza [176,245].

Podkreślenia wymaga jeszcze fakt, iż weryfikując doświadczalnie teorie wytrzymałościowe nie możemy oczekiwać całkowitej zgodności między innymi z tej prostej przyczyny, że każda teoria zakłada pewien model



tworzywa o cechach tylko zbliżonych do cech materiału rzeczywistego. Oprócz tego musimy z pewną rezerwą i ostrożnością traktować wyniki badań eksperymentalnych, szczególnie te dotyczące trójosiowych stanów naprężenia.

#### 6.2.5. Powierzchnia graniczna w warunkach obciążeń doraźnych

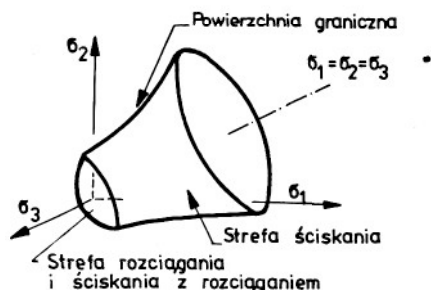
Wykorzystując spostrzeżenia i postulaty z podrozdziałów 6.2.2 i 6.2.3, przyjęto powierzchnię graniczną w postaci funkcji (6.16) nadając jej następującą postać

$$J_2 - \left[ \frac{55}{384} - \frac{39}{384} (-1)^{1+H(\sigma_3)} \right] I_1^2 + \frac{1}{3} a I_1 - b^2 = 0. \quad (6.18)$$

Jak łatwo zauważyć, tak sformułowany warunek graniczny nie wychodzi poza ramy związku postulowanego przez Nadaia [248] i swoją konstrukcją jest bardzo zbliżony do propozycji Chenów [82,83] czy Buyukozturka [75]. Przyjęcie nieco innych współczynników liczbowych, niż to proponowano w wymienionych pracach, wynika z potraktowania powierzchni granicznej wytyczenia betonu jako obwiedni - rozdział 6.2.

We wzorze tym  $H(\sigma_3)$  jest jednostkową funkcją Heaviside'a przyjmującą wartość zerową dla wszystkich  $\sigma_3 < 0$  i równą jedności, gdy  $\sigma_3 \geq 0$ .

Takie sformułowanie warunku zniszczenia oznacza, że powierzchnia graniczna wytyczenia opisana jest w przestrzeni naprężeń dwoma różnymi równaniami obowiązującymi w określonych przez wyrażenie  $H(\sigma_3)$  obszarach - rys. 6.3. I tak w strefie rozciągania ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 < 0$ ) i rozciągania ze ścisaniem (przynajmniej  $\sigma_3 < 0$ ) równanie (6.18) przedstawia paraboloidę obrotową, a w strefie ścisania ( $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 > 0$ ) hiperboloidę obrotową.



Rys. 6.3. Interpretacja geometryczna przyjętego warunku wytyczenia betonu (6.18).

Fig. 6.3. Geometric interpretation of the adopted condition of concrete effort (6.18).

Warunek (6.18), wykorzystując zależności (6.12) i (6.13), możemy wyrazić jako zależność pomiędzy naprężeniami oktaedrycznymi

$$\tau_{\text{okt,gr}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt[3]{\frac{55}{128} - \frac{39}{128} (-1)^{1+H(\sigma_3)}} \sigma_0^2 - a \sigma_0 + b^2, \quad (6.19)$$

gdzie  $\tau_{\text{okt,gr}}$  oznacza graniczną wielkość stycznych naprężeń oktaedrycznych, które nie mogą być przekroczone przy określonym poziomie naprężeń hydrostatycznych  $\sigma_0$ .

Stałe  $a$  i  $b$  występujące we wzorach (6.18) i (6.19) wyznaczmy żądając, by powierzchnia graniczna przechodziła przez pewne charakterystyczne punkty przestrzeni naprężeń, będące wytrzymałościami podstawowymi. W naszym przypadku żądamy, by dla  $\sigma_3 < 0$  na powierzchni granicznej leżały  $R_c$  i  $R_r$ , zaś przy  $\sigma_3 \geq 0$  -  $R_c$  i  $R_{cc}$ .

Przy przyjęciu takich warunków wytrzymałości  $R_c$ ,  $R_{cc}$  i  $R_r$  stają się parametrami charakteryzującymi wytrzymałościowe cechy betonu i będą w dalszych rozważaniach traktowane jako stałe materiałowe. Ponieważ relacje między tymi stałymi zmieniają się w zależności od klasy, składu betonu, jego wieku i innych parametrów, byłoby rzeczą pożądaną określać  $R_c$ ,  $R_{cc}$  i  $R_r$  w badaniach bezpośrednich. Takie podejście jest jednak celowe i możliwe w zasadzie tylko w przypadku badań podstawowych lub przy projektowaniu wyjątkowo odpowiedzialnych konstrukcji. W codziennej praktyce inżynierskiej weryfikowana doświadczalnie jest tylko wielkość  $R_c$  (i to tylko pośrednio - rozdział 4.1.1), a pozostałe wytrzymałości podstawowe ( $R_{cc}$ ,  $R_r$  i  $R_t$ ) są przyjmowane w zależności od wielkości  $R_c$  na podstawie literatury i przepisów normowych.

Wygodnie jest wytrzymałości wyznaczone w rozmaitych stanach naprężenia odnosić do wytrzymałości na ściskanie proste i posługiwać się bezwymiarowymi współczynnikami porównawczymi:

$$k_r = \frac{R_r}{R_c} \quad \text{i} \quad k_c = \frac{R_{cc}}{R_c}. \quad (6.20)$$

W rozdziałach 4.2.2 i 5.2 szeroko dyskutowaliśmy zakres zmian stosunków  $R_r : R_c$ ; średnie ich wielkości podano w tab. 6.1. W tabeli 6.2 zestawiono wzory pozwalające na wyznaczenie stałych występujących w przyjętym warunku granicznym i podano wartości liczbowe tych stałych wyliczone przy przyjęciu wartości średnich współczynników  $k_r$  i  $k_c$  z tab. 6.1.

Stałe  $a_r$ ,  $a_c$  i  $b_c$  nie mają żadnej interpretacji fizycznej, natomiast stała  $b_r$  jest równa wytrzymałości betonu przy czystym ścinaniu.

Tabela 6.1

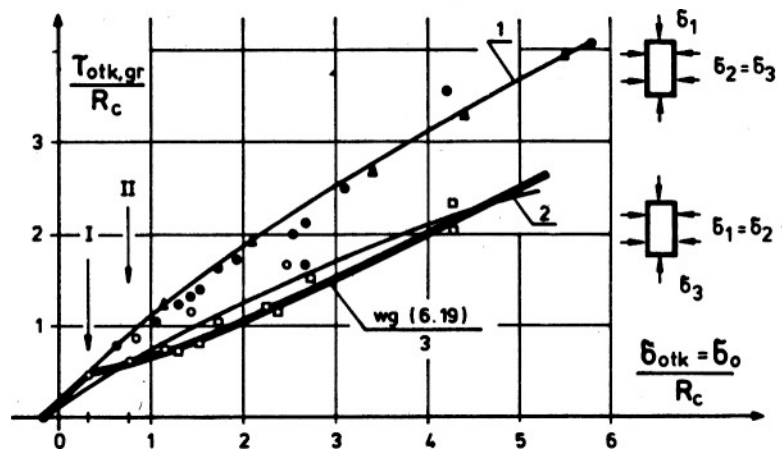
Przeciętne i średnie wartości parametrów  $k_r$  i  $k_c$ 

Współczynniki $k_r$ i $k_c$	$k_r$	$k_c$
Wielkości przeciętne uzyskane w badaniach betonów zwykłych o $R_c$ od 20-50 MPa	-0,10 ÷ -0,05	1,10 ÷ 1,25
Wielkości średnie, które można przyjąć dla zwykłych betonów konstrukcyjnych	-0,075	1,16

Tabela 6.2

Wzory określające stałe występujące w warunkach (6.18) i (6.19) oraz wartości liczbowe tych stałych

Nazwa stałej	Obszar ważności wzorów	
	Rozciąganie i rozciąganie ze sciskaniem	Sciskanie
	$\sigma_3 < 0$	$\sigma_3 \geq 0$
a	$a_r = -\frac{17}{64} \cdot \frac{1-k_r^2}{1-k_r} R_c$	$a_c = -\frac{1}{8} \cdot \frac{7-4k_c^2}{1-2k_c} R_c$
$b^2$	$b_r^2 = \frac{17}{192} \cdot \frac{k_r^2 - k_r}{1 - k_r} R_c^2$	$b_c^2 = \frac{1}{12} \cdot \frac{2k_c^2 - 7k_c}{1 - 2k_c} R_c^2$
Przez $k_r$ i $k_c$ oznaczono: $k_r = R_r : R_c$ a $k_c = R_{cc} : R_c$		
Wielkości liczbowe stałych wyliczono przy przyjęciu że: $k_c = 1,16$ a $k_r = -0,075$		
a	$a_r = -0,245703 R_c$	$a_c = 0,153180 R_c$
$b^2$	$b_r^2 = +0,006640 R_c^2$	$b_c^2 = 0,342727 R_c^2$

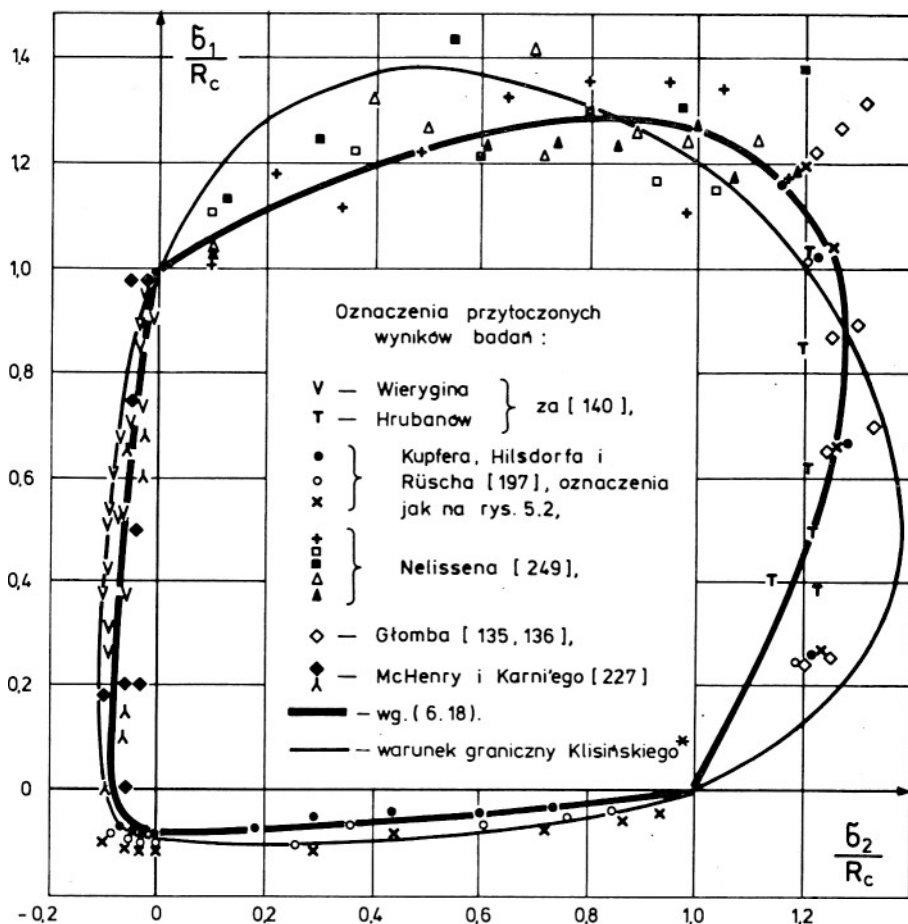


- 1 — tzw. krzywa sciskania  
 2 — tzw. krzywa rozciągania  
 3 — krzywa graniczna wg (6.19)  
 I — proste, a II — płaskie sciskanie  
 ●▲□ — wyniki badań różnych autorów zestawione przez Reimanna cytowane za [140]

Rys. 6.4. Weryfikacja przyjętego warunku wyłączenia granicznego (6.19) w oparciu o wynik badań eksperymentalnych.

Fig. 6.4. Verification of the adopted condition of limit state effort (6.19) based on results of experimental studies.

Weryfikacji doświadczalnej przyjętego warunku granicznego dokonano w oparciu o wyniki badań różnych autorów zestawione przez Reimanna (cytowane za [140]) - rys. 6.4. Widać tam wyraźnie, że przyjęta powierzch-



Rys. 6.5. Obszar graniczny w płaskim stanie naprężenia na tle wyników badań różnych autorów.

Fig. 6.5. Boundary region in the plane stress compared with the results obtained by various authors.

\* Klisiński M., Degradacja i odkształcenia plastyczne betonu. Prace IPPT, nr 38/1984, Warszawa 1984.

nia graniczna ma charakter obwiedni. Z kolei na rys. 6.5 porównano obszar graniczny wyznaczony według (6.18) dla płaskiego stanu naprężenia z wynikami badań wytrzymałości betonu w tym stanie. Wydaje się, że proponowane równanie dosyć dobrze opisuje graniczny stan wytężenia betonu w tym mającym duże znaczenie praktyczne stanie wytężenia.

W świetle danych przedstawionych na rys. 6.4 i 6.5 widać wyraźnie, że przyjęcie średnich współczynników porównawczych  $k_p$  i  $k_c$  jest uzasadnione i może być wykorzystywane w analizie wytężenia betonu konstrukcyjnego.

W tabeli 6.3 zestawiono podstawowe wytrzymałości betonu (odniesione do wytrzymałości przy prostym ściskaniu) wyliczone według równania (6.18) przy przyjęciu stałych jak w tab. 6.1. Pewne wątpliwości nasuwają się tu w odniesieniu do  $R_t$ , która w myśl przyjętych założeń jest

T a b e l a 6.3

Wytrzymałości betonu w różnych stanach naprężenia  
odniesione do wytrzymałości na proste ściskanie

Stan naprężenia	Oznaczenia	Wielkości liczbowe	
		średnie oszacowane na podstawie badań	wyliczone na podstawie wzoru (6.18)
Proste sciskanie	$\frac{R_c}{R_c}$	1,0	1,0
Dwuosiowe równomierne sciskanie	$\frac{R_{cc}}{R_c} = k_c$	1,16	1,16
Hydrostatyczne sciskanie	$\frac{R_{ccc}}{R_c}$	—	$\infty$
Rozciąganie proste	$\frac{R_r}{R_c} = k_r$	-0,075	-0,075
Dwuosiowe równomierne rozciąganie	$\frac{R_{rr}}{R_c}$	—	-0,0507
Hydrostatyczne rozciąganie	$\frac{R_{rrr}}{R_c}$	—	-0,0460
Czyste scinanie	$\frac{R_t}{R_c} = \frac{b_r}{R_c}$	—	$\pm 0,0815$

większa od  $R_T$ , a według wielu badaczy [51,71,140,193,198,250] powinna być nieco mniejsza (o ok. 10%). Ponieważ różnica ta wynosi tu +8,7%, biorąc pod uwagę obserwowany rozrzut wyników badań (rys. 6.5), możemy uznać ten fakt za mało istotny.

## 7. STOPIEŃ WYŁĘŻENIA BETONU

### 7.1. Stopień wyłężenia betonu przy obciążeniu doraźnym

#### 7.1.1. Stopień wyłężenia betonu przy doraźnym obciążeniu prostym

Przez obciążenie proste [218,300] będziemy rozumieli takie obciążenie, przy którym wszystkie składowe tensora naprężeń wznoszą się proporcjonalnie do tego obciążenia.

Wyraźmy graniczny warunek wyłężenia betonu (6.19) wykorzystując wprowadzoną uprzednio intensywność naprężenia  $\sigma_i$  (wzór (6.14)) co prowadzi do

$$\sigma_{i,gr} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{\left[ \frac{55}{128} - \frac{39}{128} (-1)^{1+H(\sigma_3)} \right] \sigma_0^2 - a \sigma_0 + b^2}}. \quad (7.1)$$

Jako stopień wyłężenia betonu przy prostym obciążeniu doraźnym w prostych i złożonych stanach naprężenia przyjmujemy stosunek:

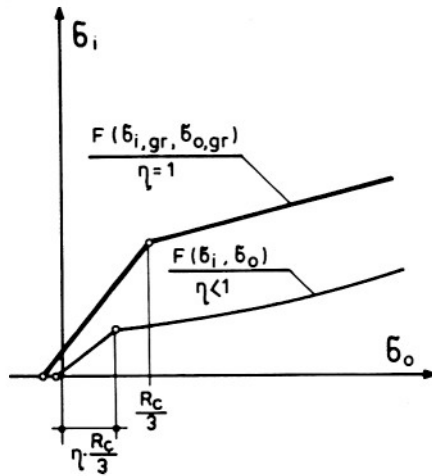
$$\eta = \frac{\sigma_i}{\sigma_{i,gr}}, \quad 0 \leq \eta \leq 1. \quad (7.2)$$

Tak przyjęty stopień (poziom) wyłężenia daje nam informację o tym, jak daleko aktualny stan naprężenia  $\sigma_{ij}$  (którego miarą jest intensywność naprężeń  $\sigma_i$ ) jest odległy od granicznego wyłężenia odpowiadającego przyjętej drodze obciążenia. Łatwo wykazać, że dla jedoosiowego ściskania otrzymamy

$$\eta = \frac{\sigma_1}{R_c}. \quad (7.3)$$

W przedstawionym podejściu należy oczywiście brać pod uwagę wiek betonu w chwili obciążenia, to znaczy, że do wzorów (7.2) i (7.3) należy podstawiać odpowiadające chwili obciążenia wielkości  $\sigma_{i,gr}$  i  $R_c$ .

Zauważmy jednak, że na ogół nie będziemy znali wielkości naprężeń  $\sigma_{i,gr}$  i  $\sigma_{0,gr}$ , do których zmierza wzdłuż zadanej drogi obciążenia ak-



Rys. 7.1. Interpretacja geometryczna stopnia wyciężenia betonu.

Fig. 7.1. Geometric interpretation of the degree of concrete effort

tualny stan naprężenia określony przez  $\sigma_i$ ,  $\sigma_o$ . Stopień wyciężenia betonu możemy określać w ten sposób, że przez rozpatrywany punkt  $(\sigma_i, \sigma_o)$  poprowadzimy linię afiniczną do krzywej granicznej - rys. 7.1. Wykorzystując warunek afiniczności obu krzywych, czyli podstawiając do równania (7.1) zamiast  $a$  i  $b$ ;  $a^{**} = a\eta$  i  $b^{**} = b\eta$  otrzymamy równanie kwadratowe (7.4), z którego bez trudu wyznaczymy poszukiwaną wielkość. Oczywiście dla  $\eta = 1$   $\sigma_i = \sigma_{i,gr}$  i  $\sigma_o = \sigma_{o,gr}$ .

$$\eta^2 b^2 - \eta a \sigma_o + \left\{ 3 \left[ \frac{55}{128} - \frac{39}{128} (-1)^{1+H(\sigma_3)} \right] \sigma_o^2 - \frac{\sigma_i^2}{3} \right\} = 0. \quad (7.4)$$

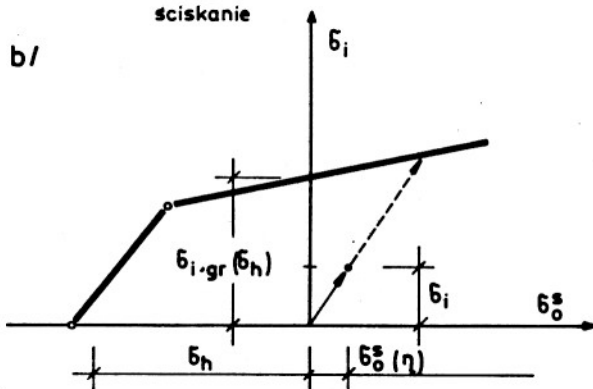
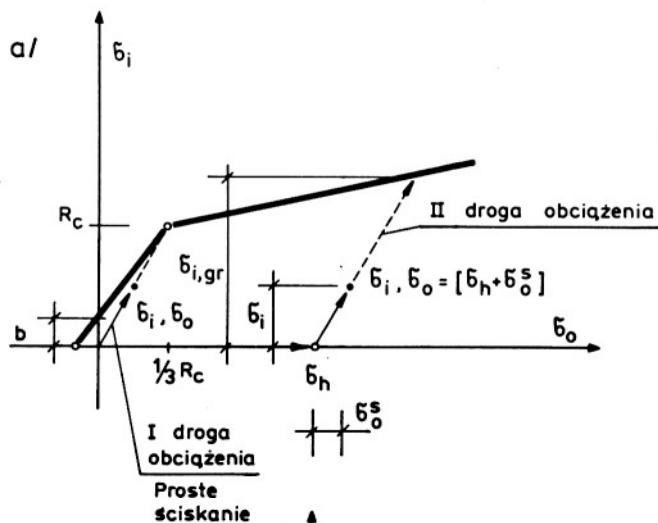
Warto również zauważyć, że w przypadku obciążenia prostego stosunek obu części tensora naprężeń (aksjatorowej i dewiatorowej), których miarą są  $\sigma_o$  i  $\sigma_i$  nie zmienia się wraz ze stopniem wyciężenia materiału, czyli zachodzi

$$\frac{\sigma_o(\eta)}{\sigma_i(\eta)} = \text{const.} \quad (7.5)$$

#### 7.1.2. Stopień wyciężenia betonu przy doraźnym obciążeniu złożonym narastającym wzdłuż drogi leżącej na płaszczyźnie

Rozpatrzmy tu takie przypadki wyciężenia betonu, kiedy kierunek naprężenia  $\sigma_i$  na płaszczyźnie dewiatorowej jest ustalony i nie ulega zmianie wraz ze wzrostem obciążenia, co jest równoznaczne z założeniem, że droga obciążenia leży na płaszczyźnie  $\sigma_i, \sigma_o$ .





c/

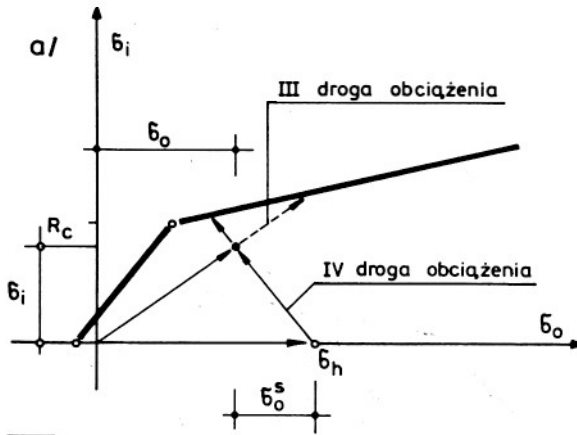
Stopień wyczerpania przy różnych drogach obciążenia	
I droga obciążenia $\sigma_i = \frac{1}{2} R_c$ $\sigma_o = \frac{1}{6} R_c$	II droga obciążenia $\sigma_i = \frac{1}{2} R_c$ , $\sigma_o^s = \frac{1}{6} R_c$ , $\sigma_h = R_c$
$\eta_I = 0,5$	$\eta_{II} = 0,2891$

Rys. 7.2. Stopień wyczerpania betonu przy różnych drogach obciążenia, leżących jednak w jednej płaszczyźnie.

Fig. 7.2. The degree of concrete effort for different loading paths lying in one plane.

Na rysunku 7.2a przedstawiono dwie różne drogi obciążenia, z których pierwsza rozpatrywana była w poprzednim podrozdziale, natomiast przedmiotem rozważań tu podejmowanych jest druga droga przyrostu obciążenia. Przedstawia ona sposób obciążania wykorzystywany często w badaniach eksperymentalnych, w których najpierw wprowadzamy hydrostatyczny stan naprężenia  $\sigma_0 = \sigma_h$ , a następnie, zwiększając np.  $\sigma_1$ , doprowadzamy do zniszczenia próbki.

Stopień wyczerpania w takich przypadkach określamy wprowadzając nowy lokalny układ współrzędnych  $\sigma_1, \sigma_0^s$ , przesunięty w stosunku do układu globalnego wzdłuż osi  $\sigma_0$  o wielkość  $\sigma_h$  (rys. 7.2b). W nowym układzie współrzędnych trzeba wyznaczyć nowe stałe  $a$  i  $b$  (występujące w równaniach (7.1) i (7.4)). Stałe te będziemy oznaczać  $a_h$  i  $b_h$ ; będą



b/	
Stopień wyczerpania przy różnych drogach obciążenia	
III droga obciążenia $b_i = 0,8 R_c$ , $b_0 = 2/3 R_c$	IV droga obciążenia $b_i = 0,8 R_c$ , $b_0^s = 1/3 R_c$ $b_h = R_c$
$\eta_{III} = 0,54692$	$\eta_{IV} = 0,75505$

Rys. 7.3. Stopień wyczerpania jako funkcja kierunku a) zadane kierunki, b) wyniki przykładu.

Fig. 7.3. The degree effort as the function of direction, a) predetermined directions, b) results obtained.

one oczywiście różne w obu sferach powierzchni granicznej. Ponieważ przesunięcie układu współrzędnych jest klasycznym zagadnieniem geometrii analitycznej, więc nie będziemy tu pokazywać wzorów na wyznaczenie tych stałych.

Na rysunku 7.2c pokazano przykład liczbowy, który ilustruje wpływ wstępnego hydrostatycznego ściśnięcia próbki naprężeniem  $\sigma_h = R_c$  na zmianę jej wyężenia.

Podsumowując stwierdzamy, że określenie stopnia wyężenia betonu poddanego naprężeniom  $\sigma_i, \sigma_o$  wymaga znajomości kierunku, wzdłuż którego dążymy do powierzchni granicznej. Obrazuje to rys. 7.3.

### 7.1.3. Stopień wyężenia betonu w warunkach dowolnej drogi obciążenia doraźnego

W przypadku ogólnym aktualnego stopnia wyężenia należy poszukiwać prowadząc przez rozpatrywany punkt  $\sigma_i, \sigma_o$  styczną do drogi obciążenia w rozpatrywanym punkcie. Tak poprowadzona styczna wskaże punkt na powierzchni granicznej, do którego zmierza stan naprężenia, a tym samym poszukiwaną przez nas wielkość  $\sigma_{i,gr}$  niezbędną do określenia stopnia wyężenia.

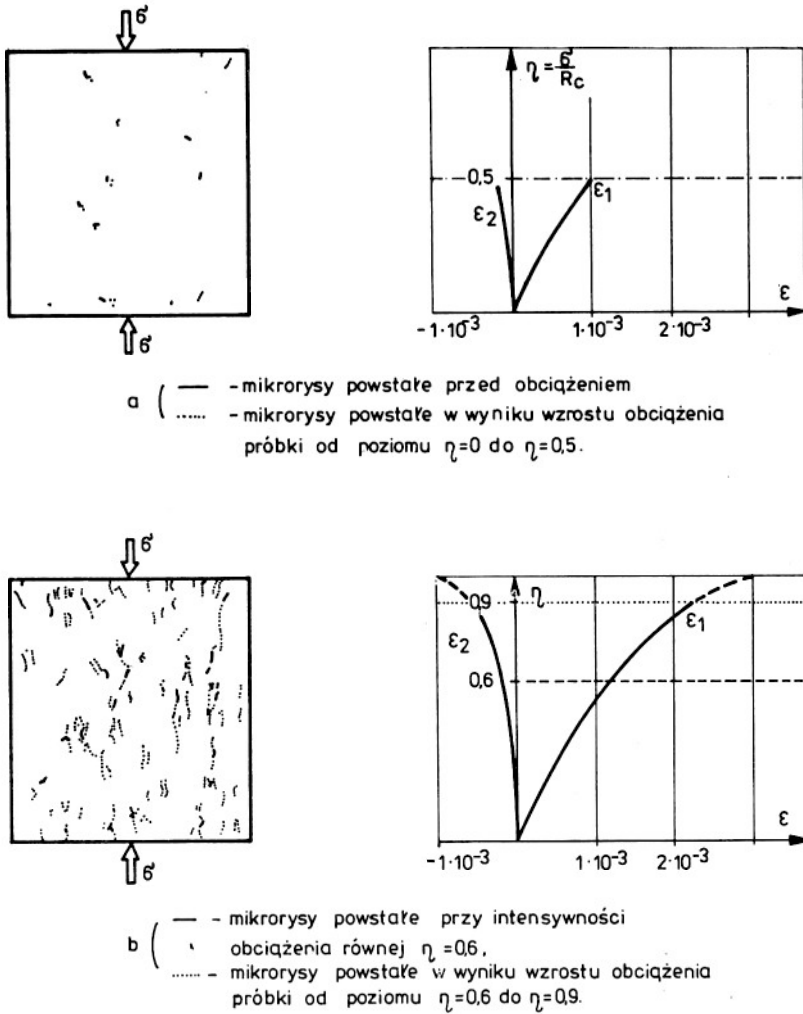
## 7.2. Procesy destrukcyjne zachodzące w betonie przy obciążeniach doraźnych

### 7.2.1. Ogólne naświetlenie problemu

W analizie procesów nieodwracalnych zachodzi konieczność uwzględniania nie tylko drogi obciążenia, ale również jego rozciągniętej w czasie historii. Chcąc więc uwzględnić wpływ czasu na wyężenie materiału musimy wziąć pod uwagę destrukcyjne procesy zachodzące w strukturze ciała, będące pochodną działających obciążeń.

Na rysunku 7.4 zaczerpniętym z pracy Robinsona [287] pokazano, w jaki sposób narastają defekty struktury betonu (znajdowano je za pomocą mikroskopu elektronowego) wraz z wielkością przykładanego obciążenia. Przedstawione wyniki wykazują, iż liczba mikrouszkodzeń próbki (która może być miarą destrukcji struktury) jest nieliniową funkcją stopnia wyężenia. Warto też zwrócić uwagę na fakt, że kierunki powstających mikrorys są równoległe do kierunku ściskania. Przyczynę powstawania tego zjawiska wyjaśnia rys. 7.5, a szersze jego omówienie można znaleźć w pracach [76,211].

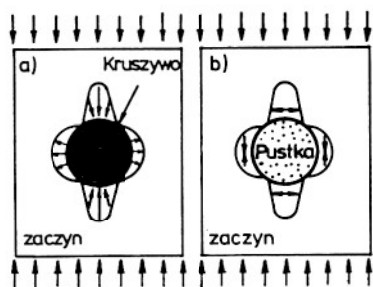
Jako miarę stopnia destrukcji struktury betonu w procesie obciążania można też przyjąć (np. Maliszkiwicz [219]) liczbę trzasków będącą efektem mikropęknięć międzyfazowych. Na rysunku 7.6 pokazano, jak wzrasta względna liczba impulsów akustycznych (stosunek sumy impulsów, jakie



Rys. 7.4. Rozwój mikrozarysowań i odkształceń próbki betonowej poddanej wzrastającemu obciążeniu [287].

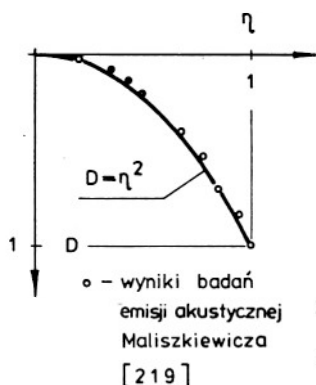
Fig. 7.4. The development of micro-cracks and strains in a concrete specimen subject to increasing load [287].

wystąpiły do momentu, gdy materiał osiągnął stopień wyężenia  $\eta$ , do globalnej sumy impulsów odpowiadającej zniszczeniu materiału) wraz z obciążaniem próbki. Z danych zestawionych na rys. 7.4 i 7.6 jednoznacznie wynika, że zakres procesów destrukcyjnych jest ściśle związany ze stopniem wyężenia betonu. Jest on niewielki przy małym zaawansowaniu obciążenia, a osiąga maksimum, gdy obciążenie zbliża się do wielkości niszczącej.



Rys. 7.5. Rozwój naprężeń w elemencie ściskanym z zaczynu cementowego wokół inkluzji sztywniejszej niż zaczyn a) i podatniejszej b).

Fig. 7.5. The development of stresses around the inclusion: a) stiffer than the cement paste of which the element subject to compression is made and b) more deformable than the cement paste.



Rys. 7.6. Stopień uszkodzenia materiału jako funkcja wyciężenia.

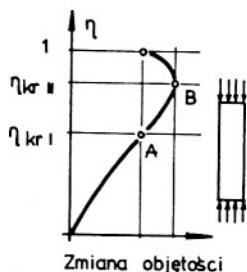
Fig. 7.6. The degree of material damage as the function of effort.

Niech miarą zakresu destrukcji będzie parametr  $D$  zwany też często miarą uszkodzenia. Możemy przyjąć, a potwierdzają to rezultaty badań (rys. 7.6 - miarę uszkodzenia identyfikujemy tam ze względną liczbą mikrotrząsków), że zakres destrukcji jest wprost proporcjonalny do kwadratu stopnia wyciężenia materiału

$$D = \eta^2. \quad (7.6)'$$

### 7.2.2. Krytyczne poziomy wyciężenia betonu

Już dosyć wcześnie zauważono, że wytrzymałość dojrzałego betonu poddanego długotrwałym obciążeniom jest niższa od wyznaczonej w badaniach doraźnych [71,191,290]. W latach sześćdziesiątych Hsu, Slate [158] oraz Berg [34,35] wyjaśnili przyczynę tego zjawiska. Zauważyli oni, że proces niszczenia struktury betonu przebiega w trzech dających się wyodrębnić stadiach. Na rysunku 7.7, będącym idealizacją wyników badań (dla osiowego ściskania), przedstawiono wykres deformacji objętościowych próbki w funkcji stopnia wyciężenia betonu. Na rysunku tym zaznaczono charak-



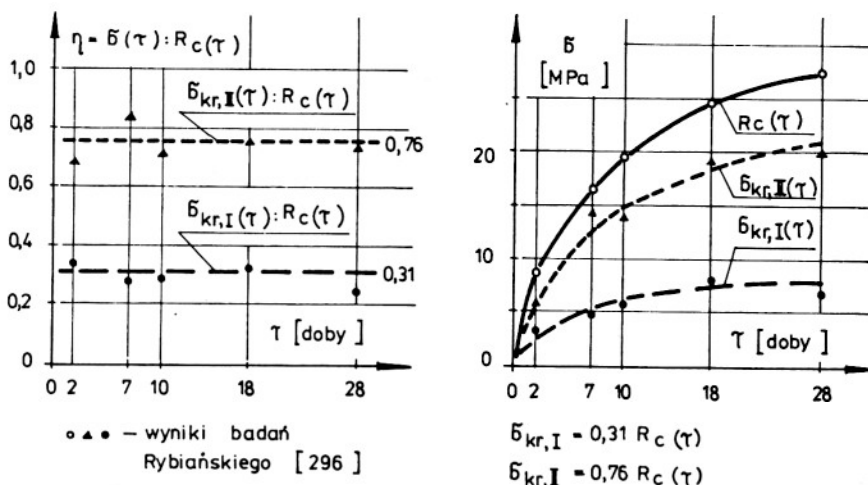
Rys. 7.7. Krytyczne poziomy wyćżenia betonu.  
Fig. 7.7. Critical levels of concrete efforts.

terystyczne punkty tego wykresu i odpowiadające im krytyczne poziomy wyćżenia. Poziomy te stanowią progi graniczne na przejściu z jednego stadium uszkodzenia struktury do drugiego, a mianowicie:

- poziom  $\eta_{kr,I}$  stanowi granicę, po przekroczeniu której rozpoczyna się intensywny rozwój mikrozarysowań strefy kontaktowej. Na rysunku 7.7 progowi temu odpowiada punkt A - punkt przegięcia krzywej zmian objętości. Przez wielu badaczy [34,35,121,127,158,296] próg ten jest uznawany za granicę sprężystej pracy betonu (przyjmuje się, że do jego przekroczenia efekty nieliniowe są pomijalne) i za trwałą wytrzymałość przy obciążeniach zmęczeniowych. Dla betonów konstrukcyjnych  $\eta_{kr,I}$  mieści się w granicach od 0,3 do 0,4,

- poziom  $\eta_{kr,II}$  jest granicą stateczności materiału, tzn. po jego przekroczeniu powstają ciągłe łańcuchy mikrorys, w związku z czym beton traci zdolność do długotrwałego przenoszenia obciążeń powodujących stopień jego wyćżenia wyższy niż  $\eta_{kr,II}$ . Fakt ten potwierdzają badania eksperymentalne, np. Rüscha [289,290] czy Foure [125]. Na rysunku 7.7 progowi stateczności odpowiada punkt B, w którym funkcja zmian objętości osiąga ekstremum. Po przekroczeniu progu stateczności materiału traktowanie betonu jako ciała jednorodnego jest już dużym uproszczeniem. Dla betonów konstrukcyjnych [239,250,289,290] ( $B \geq 20$  MPa)  $\eta_{kr,II}$  mieści się w granicach od 0,75 do 0,85.

Krytyczne poziomy wyćżenia betonu (lub jak często nazywa się je w literaturze poziomy naprężen krytycznych  $\sigma_{kr}(\tau) = \eta_{kr} R_c(\tau)$ ) nie zależą, jak wykazały to badania Rybiańskiego [296] (rys. 7.8), od wieku betonu.



Rys. 7.8. Poziomy naprężenia krytycznych, jako funkcja wieku betonu.  
 Fig. 7.8. Critical stress levels as the function of concrete age.

### 7.3. Zachodzące w czasie zmiany zakresu destrukcji betonu

#### 7.3.1. Sprecyzowanie problemu

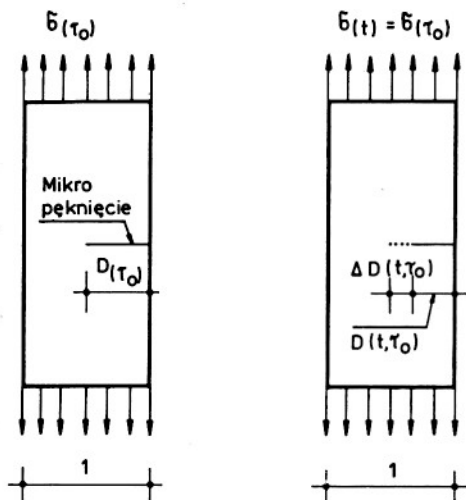
Po przyłożeniu do materiału obciążenia, które spowoduje pewne uszkodzenie początkowe  $D(\tau_0)$ , w betonie zachodzą dwa wzajemnie sprzężone i działające w przeciwnych kierunkach zjawiska: propagacji uszkodzenia i regeneracji.

Zjawisko pierwsze występuje tylko wtedy, gdy wyężenie przekracza próg stateczności materiału, natomiast regeneracja występuje przy każdym poziomie wyężenia, a jej intensywność zależy od wieku betonu w chwili obciążenia.

#### 7.3.2. Zjawisko regeneracji

W rozważaniach będziemy wykorzystywali dwie osie czasu  $\tau$  i  $t$  o wspólnym punkcie początkowym odpowiadającym chwili zarobienia betonu. Jak zaznaczono już wcześniej (rozdziały 3 i 4),  $\tau$  oznacza wiek betonu, natomiast  $t$  określa bieżącą chwilę obserwacji.

W poprzednim rozdziale podano wzór na wielkość miary uszkodzenia materiału poddanego działaniu obciążenia doraźnego. Teraz zastanowimy się nad tym, co się dzieje w materiale po pewnym czasie od chwili obciążenia.



Rys. 7.9. Ilustracja przebiegu zjawiska regeneracji.

Fig. 7.9. The illustration of regeneration process.

Rozważania nasze opierają się na następujących spostrzeżeniach, których ilustracją jest rys. 7.9, a mianowicie:

- jeżeli beton o wieku  $\tau_0$  zostanie obciążony pewnym stanem naprężenia o intensywności naprężeń  $\sigma_i(\tau_0)$ , to stopień wytwężenia będzie równy

$$\eta(\tau_0) = \frac{\sigma_i(\tau_0)}{\sigma_{i,gr}(\tau_0)}, \quad (7.7)$$

a miara uszkodzenia doraźnego wyrazi się wzorem

$$D(\tau_0) = [\eta(\tau_0)]^2, \quad (7.8)$$

- zgodnie z ustaleniami zawartymi w rozdziale 4 (wzór (4.9)), w chwili  $\tau_0$  funkcja opisująca przebieg procesu starzenia osiąga wartość  $U(\tau_0) < 1$ . Oznacza to, że w betonie nie zostały jeszcze zakończone reakcje twardnienia (hydratacji), więc ma on możliwość dalszego wzmacnienia swojej struktury. Z elementarnych rozważań dotyczących przebiegu procesu starzenia dla  $t > \tau_0$  możemy wyprowadzić wzór na zmniejszanie się uszkodzenia materiału wraz z czasem. Otóż przyjmujemy, że regeneracja uszkodzenia następuje w wyniku hydratacji niewyodrębnionego do chwili  $\tau_0$  cementu, która będzie dalej przebiegać aż do momentu obserwacji  $t$

$$\Delta D(t, \tau_0) = D(\tau_0)[U(t) - U(\tau_0)], \quad (7.9)$$



- uszkodzenie betonu w chwili  $t > \tau_0$  będziemy wyrażać wzorem

$$D(t, \tau_0) = D(\tau_0) - \Delta D(t, \tau_0). \quad (7.10)$$

Po podstawieniu (7.9) do (7.10) otrzymamy

$$D(t, \tau_0) = D(\tau_0) [1 - U(t) + U(\tau_0)], \quad (7.11)$$

a biorąc pod uwagę (7.8) i (7.11), łatwo skojarzymy następującą zależność

$$\eta(t, \tau_0) = \eta(\tau_0) \sqrt{1 - U(t) + U(\tau_0)}, \quad (7.12)$$

gdzie wyrażenie

$$1 - U(t) + U(\tau_0) = f_r(t, \tau_0) \quad (7.13)$$

będziemy nazywać funkcją regeneracji.

### 7.3.3. Propagacja uszkodzeń przy niezmiennym w czasie tensorze naprężenia

Wymieniony w tytule podrozdziału problem jest złożony i trudny do ujęcia teoretycznego z uwagi na sprzężenie przebiegu propagacji uszkodzeń ze zjawiskiem regeneracji. Teoretyczne ujęcia tego problemu, jak Eimera [107-109], Piechnika i Pchali [272], Wnuka [345,346], Irwina [161] czy inne, pomijają zjawisko regeneracji materiału, w związku z czym mogą być wykorzystywane tylko w odniesieniu do starego betonu. Oprócz ujęć opartych na pewnych podstawach teoretycznych w literaturze można spotkać podejścia fenomenologiczne ustawiane pod kątem wyznaczania wytrzymałości betonu pod obciążeniem długotrwałym (Rüsch [291] czy Mittel [239]) lub tzw. długości życia obciążonego materiału (Fouré [125]). W niniejszej pracy z uwagi na to, że w mostownictwie (a także w innych działach budownictwa) praktycznie nie stosuje się długotrwałych obciążeń wywołujących wyższy od  $\eta_{kr,II}$  poziom wyężenia początkowego, propagacja uszkodzeń wywołana takimi obciążeniami nie będzie rozpatrywana.

### 7.4. Wpływ wcześniejszego obciążenia betonu na późniejszą jego wytrzymałość

W praktyce często zachodzi konieczność obciążenia konstrukcji przed osiągnięciem przez beton normowej (28-dniowej) dojrzałości, np. w produkcji sprężonych belek prefabrykowanych czy przy stosowaniu nowoczesnych technologii wznoszenia obiektów inżynierskich. Przepisy normowe (np. PN-66/B-03320 - obowiązująca w mostownictwie) dopuszczają taką moż-

liwość, zezwalając na sprężanie konstrukcji betonowych przed upływem 28 dni pielęgnacji do wysokiego bo wynoszącego 0,7 poziomu wyężenia. W tej sytuacji musimy postawić pytanie: czy i w jakim stopniu wczesne obciążenie wpływa na proces dojrzewania, a tym samym na późniejszą (np. końcową) wytrzymałość betonu?

Nieliczne wyniki badań, np. [10,20,125,291], nie dają jednoznacznej odpowiedzi na to pytanie, więc udzielimy jej opierając się głównie na wyprowadzonych wcześniej zależnościach teoretycznych - wzór (7.12).

Rozważmy sytuację, w której beton o wieku  $\tau_0$  został obciążony krótkotrwałym impulsem o wartości  $\sigma(\tau_0)$ . Doraźny poziom wyężenia wywołany tym naprężeniem jest równy  $\eta(\tau_0)$  i wraz z czasem będzie malał zgodnie ze wzorem (7.12). Ponieważ zniszczenie doraźne materiału następuje przy  $\eta = 1$ , więc aby osiągnąć ten stan, należy w chwili  $t > \tau_0$  przyłożyć naprężenie dające przyrost wyężenia o  $\Delta \eta(t)$

$$\Delta \eta(t) = 1 - \eta(t, \tau_0), \quad (7.14)$$

gdzie  $\eta(t, \tau_0)$  należy przyjmować według (7.12). Pamiętając, że

$$\Delta \eta(t) = \frac{\sigma(t) - \sigma(\tau_0)}{R_c(t)}, \quad (7.15)$$

po prostych przekształceniach uzyskamy wzór na zmianę w czasie wytrzymałości betonu poddanego wcześniejszemu obciążeniu

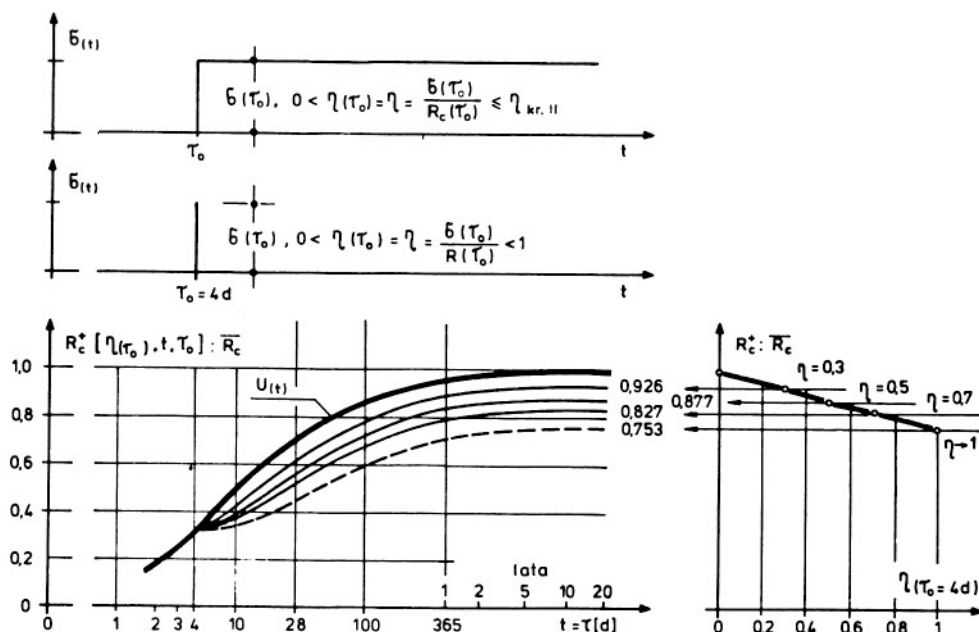
$$R_c^+(t, \tau_0) = \bar{R}_c \left\{ U(t) - \eta(\tau_0) \left[ U(t) \sqrt{1 - U(t) + U(\tau_0)} - U(\tau_0) \right] \right\}, \quad (7.16)$$

przy przyjęciu  $\eta(\tau_0) = 0$  i pamiętając, że  $U(t) = U(\tau)$ , otrzymamy wzór (4.9), opisujący narastanie wytrzymałości betonu nieobciążonego. Równanie (7.16) również przechodzi w (4.9), gdy  $\tau_0 \rightarrow \infty$ .

W przypadku gdy impuls obciążenia zastąpimy obciążeniem działającym długotrwale, zakres ważności przedstawionego wyżej równania ograniczy się do poziomu wyężenia nie przekraczającego progu stateczności materiału.

Na rysunku 7.10 pokazano, jak zmienia się wytrzymałość betonu wykonanego na cemencie zwykłym ( $U(\tau)$  wg tab. 4.1), obciążonego w wieku  $\tau_0 = 4$  doby obciążeniem ściskającym o różnej intensywności. Dane przedstawione na tym rysunku wskazują, że obciążenie powodujące stan naprężenia różny od hydrostatycznego zawsze spowoduje obniżenie wytrzymałości betonu.

Musimy jednak zaznaczyć, że przyjęty w niniejszej pracy model regeneracji jest modelem najprostszym z możliwych i nie uwzględnia on faktu (sugerowanego np. przez Neville'a [250]), że mikrororysy mogą działać ak-



Rys. 7.10. Wpływ obciążenia nie w pełni dojrzałego betonu na późniejszą jego wytrzymałość.

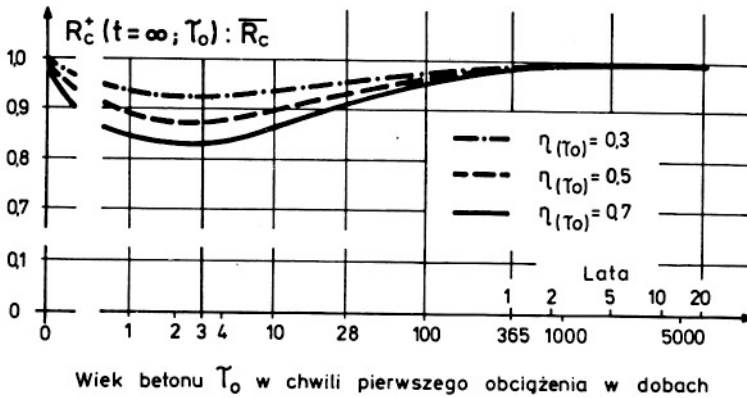
Fig. 7.10. The loading effect of a not-fully cured concrete on its subsequent strength.

tywizująco na ziarna cementu, powodując doprowadzenie wody do ich wnętrza, a tym samym zwiększając zakres możliwej hydratacji. Tak więc prezentowane ujęcie może nie doceniać zakresu regeneracji. Problem ten mogą rozstrzygnąć tylko odpowiednio zaprogramowane eksperymenty przeprowadzone na dużej liczbie ciał próbnych.

Zastanówmy się teraz jak wpływa wiek betonu w chwili przyłożenia obciążenia na jego wytrzymałość końcową. Analizując funkcję (7.16) łatwo ustalimy, że ma ona minimum ze względu na  $\tau_0$  przy

$$\frac{\partial R_c^+(t, \tau_0)}{\partial \tau_0} = 0 \rightarrow U(\tau_0) = 0,25 \rightarrow \tau_0 = 3 \text{ doby.} \quad (7.17)$$

Minimum funkcji (7.16) nie zależy od stopnia wyętnienia materiału, jaki powoduje obciążenie. Na rysunku 7.11 przedstawiono wpływ analizowanego czynnika na rozważany problem, przyjmując dane wyjściowe ( $U(\tau)$ ) takie same jak na rys. 7.10.



Rys. 7.11. Końcowa wytrzymałość betonu na proste ściskanie, jako funkcja jego wieku w chwili przyłożenia obciążenia.

Fig. 7.11. Final compressive strength of concrete as the function of its age at the moment of loading.

Z informacji zestawionych na tym rysunku wynika, że największy ubytek wytrzymałości obserwujemy wówczas, gdy obciążenie betonu następuje trzeciego dnia po jego zabetonowaniu; przy wcześniejszym (co nie ma praktycznego znaczenia) i późniejszym ubytek wytrzymałości jest mniejszy.

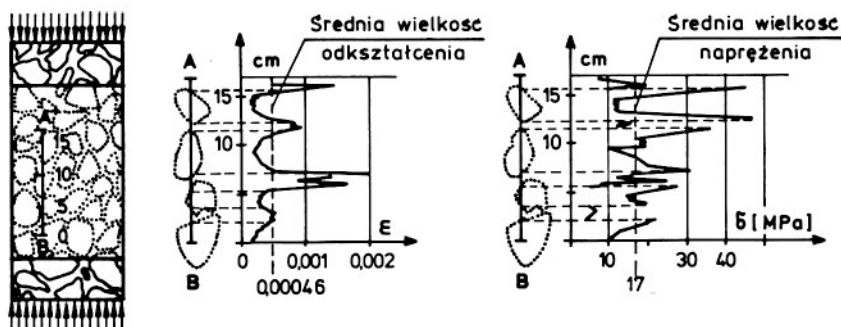
Wpływ przyłożonego obciążenia na ubytek wytrzymałości jest tym większy, im wymusiło ono większy stopień wyczerpania materiału.

## 8. WPROWADZENIE DO ZAGADNIENIŃ ZWIĄZANYCH Z ODKSZTAŁCALNOŚCIĄ BETONU

### 8.1. Problemy analizy stanu odkształcenia

Jak już zaznaczono w rozdziale 3, beton jest kompozytem o strukturze losowo heterogenicznej, co oznacza, iż jego właściwości zmieniają się losowo w całej objętości rozpatrywanego ciała. Struktura taka powoduje, iż powstające w elemencie betonowym w wyniku jego obciążenia odpowiadające sobie stany naprężenia i odkształcenia zależą w dużym stopniu od właściwości, jakie ma materiał w rozpatrywanym punkcie analizowanego elementu. Ilustracją tego stwierdzenia są badania Dantu [90] (rys. 8.1) w których wykazano, iż różne punkty próbki poddanej równomiernemu ścisnaniu doznają różnych odkształceń o wielkości znacznie odbiegającej od wielkości średniej. Podobnie rzecz ma się z naprężeniami.

Na podstawie teoretycznych rozważań dotyczących odkształcania się materiałów z różnego rodzaju inkluzjami (prace Lusche'a [211], zespołu



Rys. 8.1. Rozkład odkształceń i naprężeń w ziarnach kruszywa i stwardniałym zacynie cementowym [90].

Fig. 8.1. The distribution of strains and stresses in aggregate grains and in hardened cement paste [90].

Achwierdowa [5] czy Buyukozturka [76]) można udowodnić, iż w elementach betonowych poddanych równomiernemu ścisaniu (czy rozciąganiu) powstaje złożony stan napięcia - rys. 7.2.

Już na podstawie tego krótkiego wprowadzenia możemy stwierdzić, iż istnieją poważne trudności w jednoznacznej interpretacji zmierzonych w badaniach odkształceń betonu. Możliwe są tu dwa podejścia do tego zagadnienia, a mianowicie:

a) analiza odkształceń może być dokonywana na poziomie mikrostruktury materiału, co prowadzi do modelu, w którym wyodrębnia się stan odkształcenia panujący w inkluzjach kompozytu (ziarnach kruszywa) i matrycy (zacynie cementowym). W ujęciu tym szczególną uwagę należy zwrócić na odpowiednie wymodelowanie decydującego o odkształcalności i wytrzymałości całego układu połączenia obu faz,

b) rozpatrywanie zagadnienia w ujęciu makroskopowym, co sprowadza się do operowania odkształceniami średnimi, a tym samym przyjęcia modelu o charakterystykach materiałowych uśrednionych po objętości materiału. Parametry charakteryzujące strukturę betonu są tu wykorzystywane wyłącznie w celu określenia uśrednionych fizyko-mechanicznych cech tworzywa.

W obu wymienionych wyżej podejściach odkształcenia betonu (a tym samym i jego właściwości) mogą być traktowane jako wielkości deterministyczne lub probabilistyczne.

Podsumowując powyższe spostrzeżenia należy stwierdzić, że na obecnym etapie rozwoju mechaniki betonu podejście pierwsze jest stosowane

prawie wyłącznie do wyjaśnienia charakteru procesów destrukcyjnych zachodzących w materiale poddanym obciążeniu [5,70,155,306,319]. Próby budowy modelu teoretycznego opartego na tej koncepcji można znaleźć w pracach Eimera [108,111] lub innych opracowaniach dotyczących mechaniki kompozytów, np. [306,319].

Na drugim podejściu opierają się wszystkie fenomenologiczne modele opisujące odkształcalność betonu traktowanego jako kontinuum materialne. Podejście to może być stosowane tylko wówczas, gdy rozważamy odkształcenia elementów betonowych o wymiarach znacznie większych od wymiarów ziarn kruszywa. Możemy przyjąć za pracę [140], że uśrednienie cech betonu jest wystarczające, jeżeli najmniejszy element konstrukcji ma wymiar 4 razy większy niż maksymalna średnica ziarn kruszywa. Ponieważ w mostach, z uwagi na gęste rozmieszczenie zbrojenia, rzadko kiedy stosuje się kruszywo o średnicach większych niż 25 mm, a minimalne wymiary konstrukcji prawie zawsze są większe od 100 mm, możemy uznać iż warunek zapisany wyżej jest tam spełniony. Wydaje się więc, że pierwsze podejście będzie na pewno rozwijane w przyszłości, lecz należy wątpić by jego zastosowanie wyszło poza ramy rozważań typu jakościowego i problemy weryfikacji modeli fenomenologicznych. Natomiast podejście drugie jest obecnie i będzie w przyszłości podstawą budowania modeli betonu do zastosowań praktycznych.

W niniejszej pracy odkształcenia i naprężenia betonu będą rozumiane jako wartości uśrednione po objętości obu faz tworzących rozpatrywany materiał i na ogół uważane za wielkości deterministyczne.

## 8.2. Założenia wykorzystywane w analizie stanu odkształcenia

Do dalszych rozważań przyjmujemy następujące założenia:

- beton traktujemy jako kontinuum materialne o cechach uśrednionych po jednostkowej objętości materiału,

- nie będziemy w tym kontinuum wyróżniać żadnego kierunku, np. kierunku układania warstw betonu [12,168], co sprowadza się do założenia izotropii materiału. Znaczący to, że pomijamy wpływ kierunkowości uszkodzenia na zmianę cech materiału,

- przyjmujemy, że naprężenia wstępne [10,50,140,250,291] mogące pojawić się w betonie, głównie w początkowym okresie wiązania i twardnienia oraz wysychania jako efekt niejednorodności wewnętrznej, są znikomo małe i mogą być pominięte w analizie stanu odkształcenia tego tworzywa,

- w niniejszej pracy rozpatrywano będą wyłącznie małe deformacje materiału, w zakresie których dopuszczalne jest rozłożenie tensora odkształceń całkowitych na poszczególne części określające różnego rodzaju odkształcenia składowe,

- parametry charakteryzujące fizyko-mechaniczne właściwości betonu i związki między tymi parametrami będziemy ustalać przy założeniu, że beton jest materiałem dwufazowym (kruszywo i porowaty zaczyn cementowy).

### 8.3. Analiza niektórych aspektów odkształcalności betonu

#### 8.3.1. Klasyfikacja odkształceń

Analiza wielu prac doświadczalnych, w których badano zachowanie się betonu poddanego działaniu różnego rodzaju obciążeń [10,12-16,23,34,35, 42,49,66,67,69,86,89,90,94,104,115,129,130,140,141,145,151-153,156,158, 162,164,166,167,169,172,179,196,199,219,226,228,239,251,275-277,283,288-291,296,315,316,328-332], przeprowadzona w opracowaniach monograficznych Aleksandrowskiego [10,12], autora [50], Neville'a [251], Rüscha i Jungwirtha [291] i innych prowadzi do dość zgodnego wniosku, że całkowite odkształcenia betonu składają się z odkształceń:

- sprężystych  $\epsilon_s$  (w przypadku zapisu tensorowego  $\epsilon_{ij}^s$ ),
- plastycznych  $\epsilon_p$  ( $\epsilon_{ij}^p$ ),
- lepkich  $\epsilon_l$  ( $\epsilon_{ij}^l$ ),
- skurczowych  $\epsilon_{sk}$  ( $\epsilon_{ij}^{sk}$ ),
- termicznych  $\epsilon_\theta$  ( $\epsilon_{ij}^\theta$ ),

to znaczy:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^s + \epsilon_{ij}^p + \epsilon_{ij}^l + \epsilon_{ij}^{sk} + \epsilon_{ij}^\theta. \quad (8.1)$$

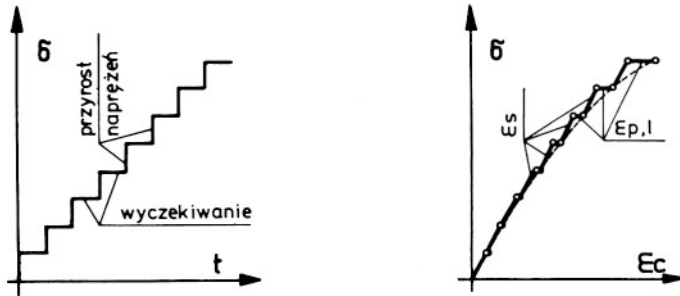
Zapisany wyżej wzór\* ujmuje całkowite odkształcenia betonu jako sumę poszczególnych rodzajów odkształceń.

#### 8.3.2. Odkształcalność betonu a destrukcja jego struktury

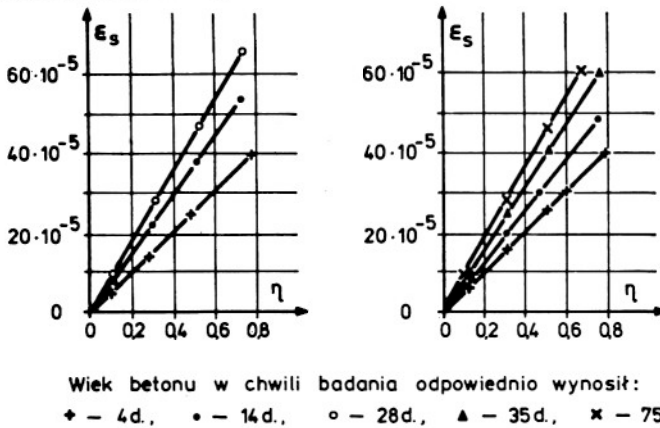
Dane przedstawione na rys. 7.1 wskazują wyraźnie na to, że stan odkształceń betonu jest ściśle związany ze stopniem jego wyciężenia, a tym samym z zakresem destrukcji. Przy niewielkim wyciężeniu materiału (co odpowiada nieznacznym uszkodzeniom struktury) przyrosty odkształceń są proporcjonalne do przyrostów wymuszających je naprężeń. Gdy wzrośnie poziom wyciężenia materiału (i odpowiadający mu zakres destrukcji) zależność pomiędzy odkształceniami a naprężeniami staje się nieliniowa.

---

\* W zaawansowanych stanach obciążenia pojawiają się również odkształcenia wywołane sprężystą degradacją materiału [176]. W niniejszej pracy odkształcenia te pominięto.



Rys. 8.2. Eksperymentalna interpretacja odkształceń sprężystych betonu.  
 Fig. 8.2. Experimental interpretation of elastic strains in concrete.



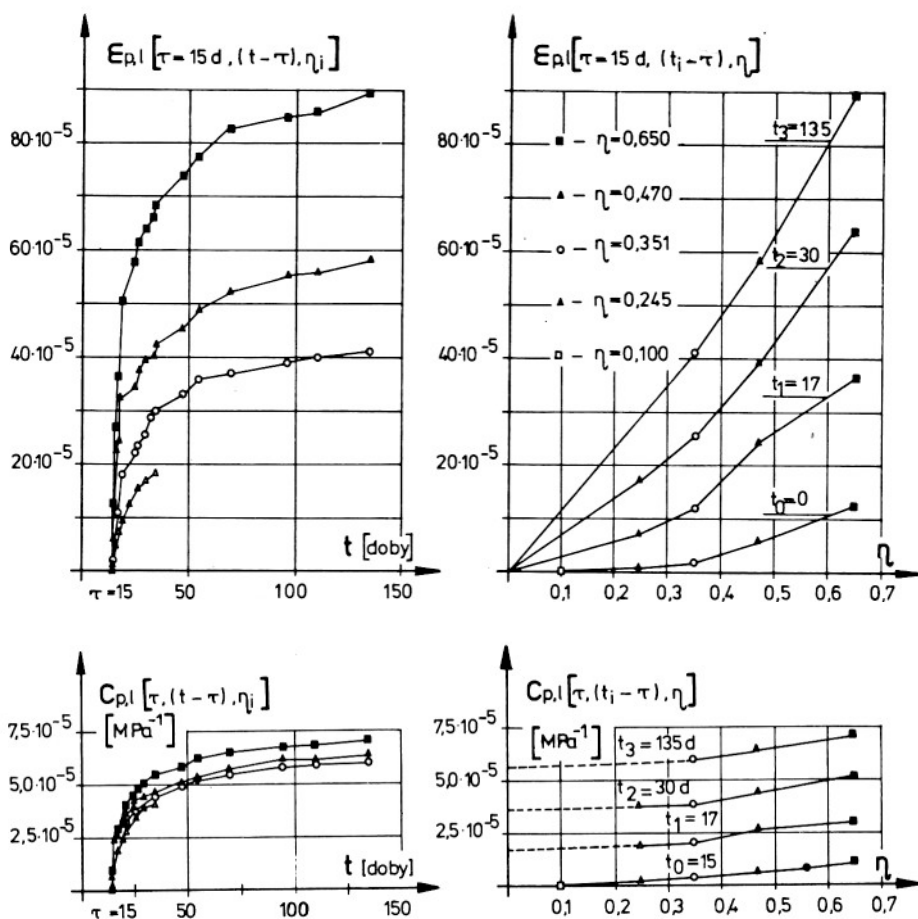
Rys. 8.3. Zależność sprężystych odkształceń od poziomu wyężenia betonu [12].  
 Fig. 8.3. Elastic strains of concrete versus the degree of its effort [12].

Przeanalizujemy teraz, w jakiej zależności z wymuszającymi je naprężeniami pozostają różne (wymienione uprzednio) rodzaje odkształceń. Nasze rozważania rozpocznijmy od odkształceń sprężystych. Na rysunku 8.2 pokazano eksperymentalny sposób określania tych odkształceń. Czas wyczekiwania jest różny w różnych badaniach i wynosi od 3 do 15 min. W świetle przedstawionej konwencji, za odkształcenia sprężyste będziemy uważali te, które odpowiadają szybkiemu przyrostowi naprężenia, co sprowadza się do założenia, iż są to odkształcenia doraźne.

Badania Aleksandrowskiego [12,15] (rys. 8.3) wykazały ponadto, że odkształcenia sprężyste są liniową funkcją stopnia wyężenia betonu, nie zależą więc one od zakresu destrukcji materiału.

Przyjrzyjmy się teraz bliżej odkształceniom, które narastają w okresach wyczekiwania (czyli odkształceniom zależnym od czasu działania obciążenia); są to odkształcenia plastyczno-lepkie.





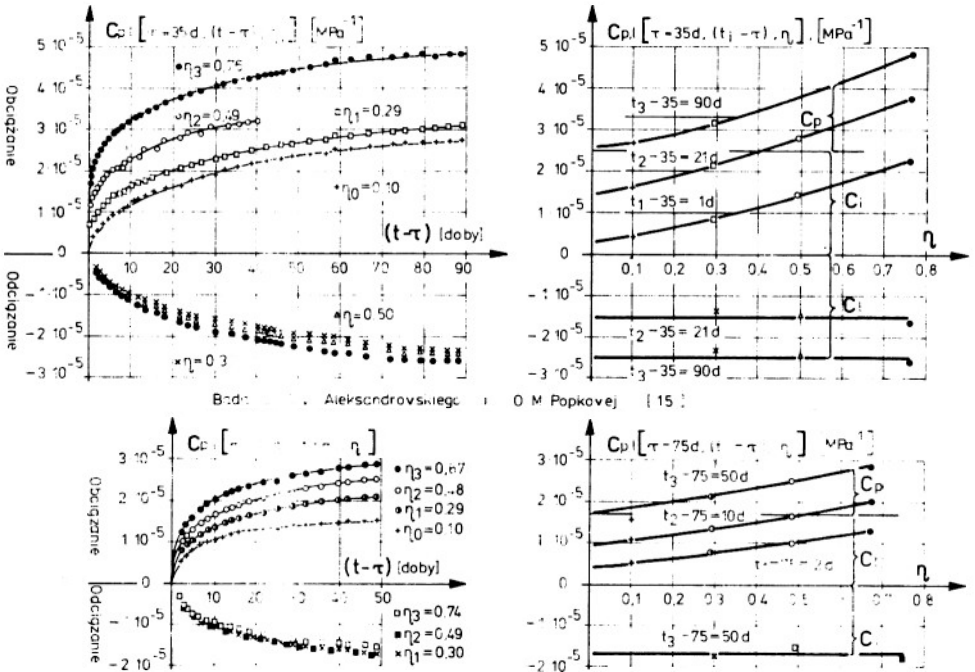
Rys. 8.4. Zależność odkształceń plastyczno-lepkich betonu od stopnia jego wytężenia, według badań własnych [50].

Fig. 8.4. Visco-plastic strains of concrete versus the degree of its effort, acc. to the author's own studies [50].

Na rysunku 8.4 przedstawiono wyniki badań autora [50] ilustrujące zależność odkształceń plastyczno-lepkich od stopnia wytężenia betonu. Widać z nich wyraźnie, że są one nieliniową funkcją stopnia wytężenia. W tej sytuacji musimy postawić pytanie, czy oba rozpatrywane odkształcenia są nieliniowymi funkcjami naprężeń, czy też tylko jedno z nich? Odpowiedzi na tak postawione pytanie dostarczają nam badania Aleksandrowskiego i Popkovej [15], których wyniki podano na rys. 8.5. Trzeba wyjaśnić, że  $C_{p,l} [t, (\tau - \tau), \eta]$  jest miarą odkształceń plastyczno-lepkich definiowaną według wzoru

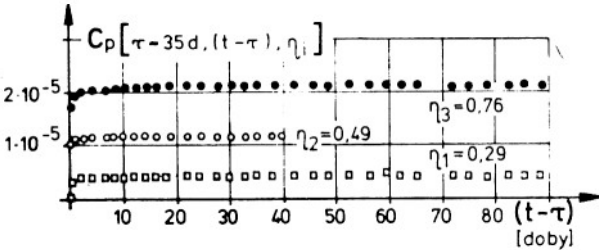
$$C_{p,1} [\tau, (t - \tau), \eta] = \frac{\epsilon_{p,1} [\tau, (t - \tau), \eta]}{\eta R_c(\tau)} \quad (8.2)$$

Miara ta jest średnim odkształceniem wywołanym jednostkowym naprężeniem. Jest to wielkość często wykorzystywana w radzieckich opracowaniach reologii betonu [8-16, 19, 20, 61, 62, 87, 151-153, 222, 298, 313-315, 328, 329].



Бод. 8.5. Александровский и О. М. Попковей [15].

Rys. 8.5. Liniowa (lepka) i nieliniowa (plastyczna) część odkształceń opóźnionych.  
 Fig. 8.5. Linear (viscous) and non-linear (plastic) portions of delayed deformations.

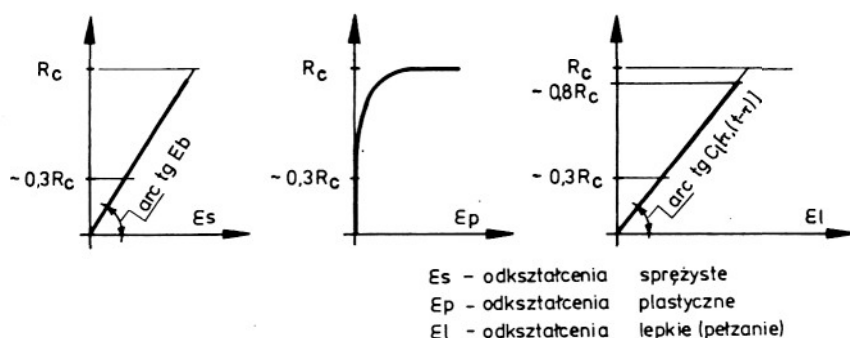


Rys. 8.6. Rozwój nieliniowych (plastycznych) odkształceń betonu [15].

Fig. 8.6. The development of non-linear (plastic) deformations of concrete [15].

Na podstawie przedstawionego materiału doświadczalnego można następująco zdefiniować plastyczne odkształcenia betonu i sformułować pewne ogólne wnioski:

- za odkształcenia plastyczne betonu będziemy uważać tę część odkształceń opóźnionych ( $C_p$  na rys. 8.5), która jest pochodną zachodzących w betonie procesów destrukcyjnych; są to więc odkształcenia nieodwracalne,
- dominująca część analizowanych odkształceń jest wyzwalana już w procesie obciążania badanych elementów [10-15, 24-27, 50, 61, 62, 130, 140, 196, 233, 249, 250, 290, 291, 313-315, 328, 329, 334] (rys. 8.5 i 8.6), a cały proces przyrostu odkształceń plastycznych (przy  $\eta < \eta_{kr, II}$ ) jest praktycznie zakończony, gdy czas działania obciążenia wynosi 24 godziny,
- odkształcenia plastyczne pojawiają się już przy stosunkowo niskim poziomie wyężenia betonu i są nieliniową funkcją naprężenia,
- gdy z całkowitych odkształceń betonu wydzielimy odkształcenia plastyczne, to okaże się, że pozostała część deformacji jest liniowo związana z naprężeniami [50].



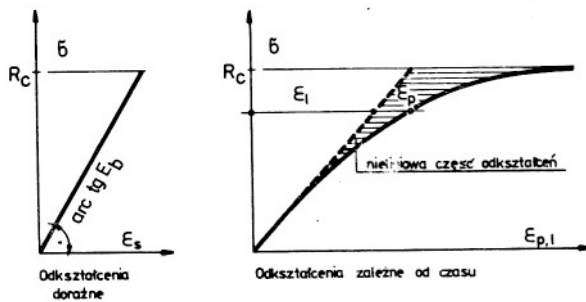
Rys. 8.7. Ilustracja ideowa zależności różnych rodzajów odkształceń od naprężeń.

Fig. 8.7. Schematic illustration of the different types of strains versus stresses.

Podsumowaniem przeprowadzonych rozważań jest rys. 8.7, na którym pokazano przyjęte w niniejszej pracy zależności różnych rodzajów odkształceń od naprężeń.

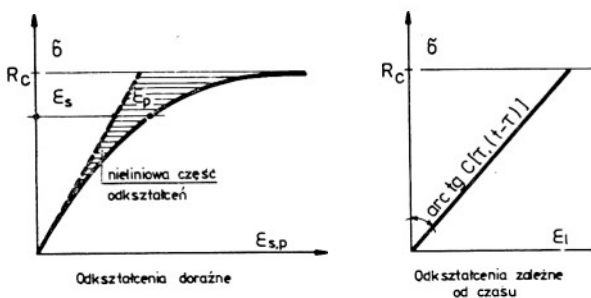
### 8.3.3. Odkształcenia doraźne i opóźnione

Rozdzielny wymienione (w 8.3.1) odkształcenia na dwie grupy w zależności od tego, czy występują one natychmiast po zadziałaniu czynnika je wywołującego czy też narastają w dłuższym okresie czasu.



Rys. 8.8. Pierwszy sposób interpretacji odkształceń betonu.

Fig. 8.8. First interpretation of concrete strains.



Rys. 8.9. Drugi sposób ujęcia problemu.

Fig. 8.9. Second interpretation of the problem.

Do odkształceń doraźnych zaliczymy odkształcenia sprężyste i termiczne, natomiast do zależnych od czasu - lepkie i skurczowe.

Odształcenia plastyczne (nie liniowe) są traktowane różnie przez różnych autorów i tak:

a) podejście pierwsze, rozwijane w pracach Arutiuniana [19,20], Aleksandrowskiego i jego szkoły [10-16,24-27,87,315], Kłapocia [178,179], Ulickiego [328,329] i innych [97,98,118,201,235,236,317,347], polega na zaliczeniu odkształceń plastycznych do grupy odkształceń opóźnionych; konsekwencje takiej interpretacji ilustruje rys. 8.8. Takie potraktowanie odkształceń plastycznych (zwanymi w literaturze radzieckiej odkształceniami nieodwracalnymi pierwszego rodzaju lub pełzaniem szybko narastającym) sprowadza się do założenia, że odkształcenia doraźne są liniową, a opóźnione nieliniową funkcją naprężenia,

b) drugie podejście (ostatnio częściej wykorzystywane) jest reprezentowane np. przez prace Růscha [291], Bondarenki [61,62], Gwozdiewa [151-153], Bilińskiego [40], Lewickiego [206], Buyukozturka [75,76], Chena [82,83], autora [49,50,53] i innych [130,146,334].

Autorzy wymienionych prac uznają, że czas, w ciągu którego następu-

je rozwój odkształceń plastycznych jest tak krótki (90% tych odkształceń występuje w czasie procesu obciążania), że można je zaliczyć do odkształceń doraźnych - rys. 8.9.

Obie przedstawione koncepcje mają swoje wady i zalety. Do najważniejszych zalet pierwszej z nich należy liniowa zależność odkształceń doraźnych od naprężeń, co pozwala na wyznaczenie początkowego stanu naprężenia na podstawie zasad liniowej teorii sprężystości. Przyjęcie drugiej koncepcji pozwala zaś wykorzystać dorobek teorii odkształceń sprężysto-plastycznych [75,83,113,146,262,285].

Zauważmy, że druga koncepcja stanowi tylko uproszczenie pierwszej. Wystarczy bowiem funkcję opisującą narastanie w czasie odkształceń plastycznych przyjąć w postaci jednostkowej funkcji Heaviside'a (co, biorąc pod uwagę rys. 8.6, nie jest zbyt dużym uproszczeniem), by ujęcie pierwsze sprowadzić do drugiego.

Dalsze rozważania zawarte w niniejszej pracy zostaną przeprowadzone przy zaliczeniu odkształceń plastycznych do grupy odkształceń doraźnych. Zaznaczymy, że związek konstytutywny zbudowany w oparciu o to założenie pozwoli na analizę wszystkich zagadnień z zakresu statyki i reologii konstrukcji betonowych, natomiast w zagadnieniach dynamiki poprawniejsze byłoby, ściśle rzecz biorąc, podejście pierwsze.

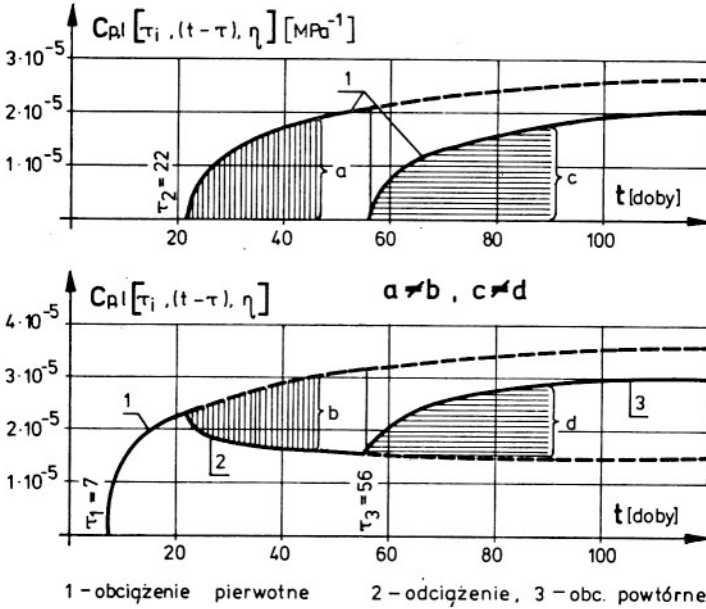
Pamiętając jednak o tym, że efektywne rozwiązania z zakresu mechaniki konstrukcji betonowych można uzyskać drogą dyskretną analizy numerycznej budując odpowiednie algorytmy typu przyrostowego [43,50,75,83,88,146,285], niedogodność takiego ujęcia problemu w odniesieniu do dynamiki konstrukcji staje się nieistotna.

#### 8.3.4. Nieodwracalność odkształceń betonu

Występowanie odkształceń trwałych w betonie nie podlegającym wysychaniu (izolowanym) spowodowane jest dwoma zjawiskami [10-15,46,50,81,86,143,250,291,229]:

- narastającą destrukcją struktury betonu, co jak już zaznaczono, przyczynia się do powstawania nieodwracalnych odkształceń plastycznych,
- postępującą hydratacją cementu zawartego w zaczynie (starzeniem betonu), która wpływa na zmniejszanie się z wiekiem odkształcalności tego tworzywa. Efekt ten maleje wraz z wiekiem betonu i w betonie w pełni dojrzałym nie występuje.

Dowodu na to, że odkształcenia plastyczne są nieodwracalne dostarczają wyniki badań Gwozdiewa [151,152] przedstawione na rys. 8.10. Analiza przedstawionych tam wyników prowadzi do wniosku, że:



Rys. 8.10. Wyniki badań Gwozdiewa i innych [151].

Fig. 8.10. Results obtained by Gwozdiew et al. [151].

- miara odkształceń plastyczno-lepkich betonu (pełzania) obciążonego po raz pierwszy: jest większa od miary odkształceń będącej następstwem odciążenia ( $a > b$ ),

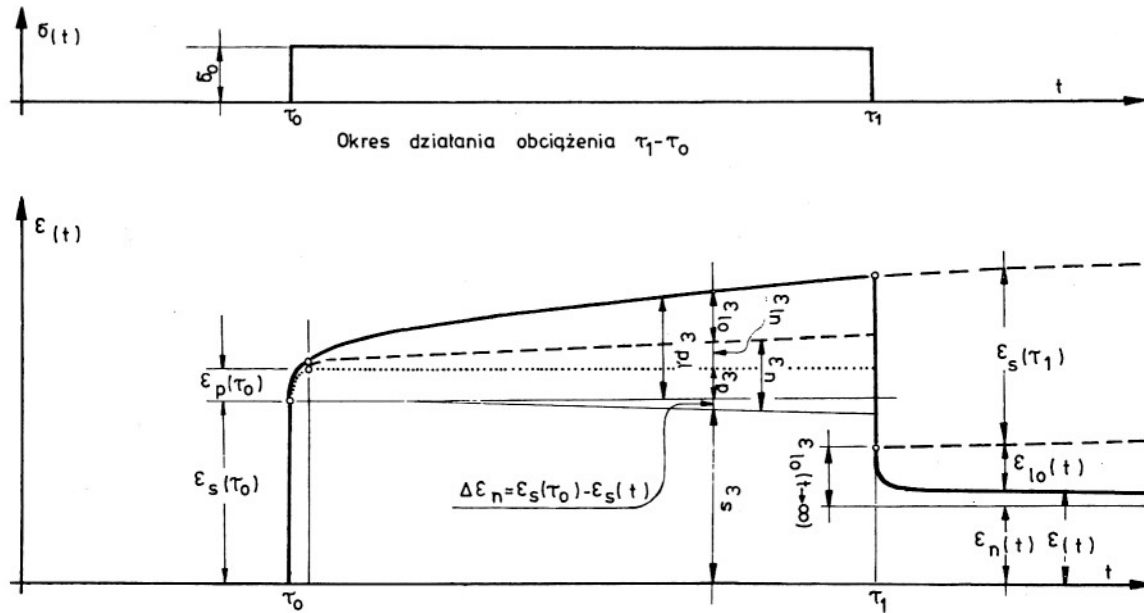
- powtórnie obciążony beton (po poprzednim odciążeniu) wykazuje odkształcenia plastyczno-lepkie znacznie mniejsze niż beton obciążony pierwotnie ( $d < c$  - rys. 8.10).

W obu przypadkach różnicę stanowią odkształcenia plastyczne powstające głównie przy pierwotnym obciążeniu, co dowodzi nieodwracalności tych odkształceń.

Co do wpływu starzenia betonu na powstawanie odkształceń trwałych, to istnieje zgodność poglądów badaczy [10-15, 25-27, 42, 49, 50, 81, 250, 291] i nie będziemy szerzej tego problemu analizowali, ograniczając się do syntetycznego przedstawienia tej problematyki na rys. 8.11. Wyodrębniono na nim te odkształcenia nieodwracalne, które są wynikiem starzenia materiału, i tak odkształcenia lepkie przedstawiono jako sumę

$$\epsilon_1 = \epsilon_{1,0} + \epsilon_{1,n} \quad (8.3)$$

gdzie  $\epsilon_{1,0}$  i  $\epsilon_{1,n}$  to część odwracalna i nieodwracalna odkształceń lepkich



Rys. 8.11. Podział całkowitych odkształceń betonu izolowanego na poszczególne części składowe.

Fig. 8.11. Complete deformations of concrete specimen isolated from any environmental effects divided into particular components.

$$\Delta \epsilon_n(t) = \epsilon_s(\tau_0) - \epsilon_s(t), \quad (8.4)$$

przez  $\Delta \epsilon_n(t)$  oznaczono zaś trwałe odkształcenia wynikające ze wzrostu w czasie modułu sprężystości betonu.

#### 8.4. Niektóre ustalenia dotyczące struktury związku konstytutywnego betonu

Z przeprowadzonej analizy wynika jednoznacznie, że beton z punktu widzenia mechaniki należy traktować jako ciało sprężysto-plastyczno-

T a b e l a 8.1

Przyporządkowanie poszczególnych rodzajów odkształceń ujmującym je działom mechaniki

Rodzaj odkształceń	$\epsilon_s$	$\Delta \epsilon_n$	$\epsilon_{lo}$	$\epsilon_{ln}$	$\epsilon_p$
Odkształcenia doraźne i opóźnione					
Doraźne	$\epsilon_s$	$\Delta \epsilon_n$			$\epsilon_p$
Opóźnione			$\epsilon_{lo}$	$\epsilon_{ln}$	
Odkształcenia odwracalne i trwałe					
Odwracalne	$\epsilon_s$		$\epsilon_{lo}$		
Trwałe		$\Delta \epsilon_n$		$\epsilon_{ln}$	$\epsilon_p$
Ujęcie teoretyczne poszczególnych rodzajów odkształceń betonu					
Teoria sprężystości z uwzględnieniem starzenia materiału	$\epsilon_s$	$\Delta \epsilon_n$	—	—	—
Teoria ciała lepkiego - w ujęciu Maśłowa - Arutiuniana	—	—	$\epsilon_{lo}$	$\epsilon_{ln}$	—
			$\epsilon_l$		
Teoria małych odkształceń plastycznych Prandtla - Reussa z uwzględnieniem plastycznych odkształceń objętościowych	—	—	—	—	$\epsilon_p$



lepiej o właściwościach zmieniających się z jego wiekiem.

Odształcenia betonu są funkcją nie tylko składowych tensora naprężeń, ale także czynników higro-termicznych środowiska zewnętrznego. Problemy związane z tym zagadnieniem zostaną omówione oddzielnie w rozdziale 13.

W tabeli 8.1 zestawiono wyodrębnione rodzaje odształceń i podano, w ramach jakiej teorii będą one analizowane w następnych rozdziałach pracy.

## 9. ODSZTAŁCENIA SPRĘŻYSTE BETONU

### 9.1. Pojęcia podstawowe

Odształcenia sprężyste, zgodnie z poglądem utrwalonym w reologii betonu [10,12,50,251,291], potwierdzonym wszechstronnymi badaniami, można uważać za liniowe.

Parametrami charakteryzującymi sprężyste właściwości betonu są:

- moduł sprężystości  $E_b(\tau)$  będący funkcją wieku betonu,
- współczynnik sprężystych odształceń poprzecznych  $\nu_s(\tau)$  (współczynnik Poissona) również zależny od wieku betonu.

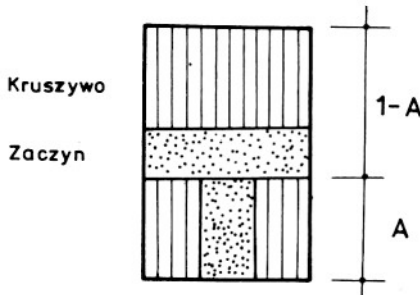
Przy takiej interpretacji odształceń sprężystych jak pokazano na rys. 8.2, wyznaczony moduł sprężystości jest tzw. modułem stycznym.

### 9.2. Zależność stałych materiałowych opisujących sprężyste cechy betonu od jego wieku

#### 9.2.1. Moduł sprężystości jako funkcja wieku betonu

Liniowo-sprężyste odształcenia doraźne betonu są wypadkową odształceń zachodzących w obu jego składnikach (twardniejącym zaczynie cementowym i wypełniaczu), dlatego dobór właściwego związku określającego zależność doraźnego modułu sprężystości od uniwersalnej funkcji starzenia betonu (lub jego wytrzymałości na ściskanie) nie jest sprawą łatwą. W literaturze [5,10,19,114,184,187,238,239,250,251,291,310,318] można znaleźć wiele propozycji teoretycznego ujęcia tego problemu; już sama ich mnogość świadczy o braku jednoznacznej oceny analizowanego zjawiska. Problem polega na tym, że wraz z wiekiem betonu zmieniają się tylko właściwości zaczynu, podczas gdy cechy kruszywa można uważać za niezmiennie. W związku z tym dla określenia funkcji opisującej zmianę modułu sprężystości betonu w czasie niezbędna jest znajomość nie tylko cech mechanicznych komponentów (modułu sprężystości i współczynnika Poissona)

i parametrów charakteryzujących proporcje objętościowe, ale również struktury betonu. Chodzi tu o przyjęcie najbardziej zbliżonego do rzeczywistości modelu struktury tego tworzywa. Problem ten jest podstawowym zagadnieniem mechaniki kompozytów i był analizowany w wielu pracach jak np. [5,70,108,111,155,211,306,319], w których uzyskano szereg interesujących rozwiązań. Przydatność ich jednak do naszych celów jest mała, a to dlatego, że losowość struktury betonu poważnie utrudnia oszacowanie wartości stałych występujących w tych modelach. Pokażemy to na przykładzie prostego modelu struktury ciała dwufazowego zaczerpniętego z pracy [4] (rys. 9.1). Model ten składa się z dwóch elementów podstawowych



Rys. 9.1. Przyjęty w niniejszej pracy model struktury betonu.

Fig. 9.1. The model of the concrete structure assumed in this work.

wych (szeregowego i równoległego) połączonych szeregowo. Zwróćmy uwagę, że już przy przyjęciu tak prostego modelu mamy poważne trudności w wyznaczaniu stałej  $A$ . Określa ona udział w strukturze betonu połączenia szeregowego. Wyznaczenie doświadczalne tej stałej jest praktycznie bardzo trudne. Podobnie trudne jest oszacowanie parametrów mechanicznych kruszywa i zaczynu.

Mając na uwadze zastrzeżenia wymienione wyżej, zapiszmy wzór na moduł sprężystości ciała o budowie strukturalnej z rys. 9.1, przyjmując przedtem, że

$$E_z(\tau) = \bar{E}_z U(\tau); \quad \bar{E}_z = \lim_{\tau \rightarrow \infty} E_z(\tau), \quad (9.1)$$

$$E_D(\tau) = \frac{1}{(1-A) \left[ \frac{V_z}{\bar{E}_z U(\tau)} + \frac{V_k}{E_k} \right] + A \left[ \frac{1}{V_z \bar{E}_z U(\tau) + V_k E_k} \right]} \quad (9.2)$$

Wzór ten określa z dokładnością do występujących w nim parametrów przebieg zmian modułu sprężystości betonu w czasie. Posługiwanie się nim jest jednak uciążliwe z uwagi na konieczność wyznaczenia pięciu stałych, które należy określić w sposób bezpośredni lub pośredni przez aproksymację krzywej zmian modułu sprężystości wyznaczonej doświadczalnie.

Do obliczeń praktycznych musimy więc przyjąć jakieś prostsze formuły, ograniczając zastosowania podanego na rys. 9.1 modelu struktury betonu i odpowiadającego jej wzoru (9.2) do oszacowań typu jakościowego.

Dostateczną do celów praktycznych dokładność odwzorowania zmieniających się w czasie właściwości sprężystych betonu można uzyskać wykorzystując model szeregowy ciała dwufazowego, przyjęty do opisu rozpatrywanego tu problemu przez Hansena [155]

$$E_b(\tau) = \frac{E_z(\tau)}{1 + \frac{E_z(\tau)}{E_k}} \quad (9.3)$$

Po odpowiednich przekształceniach otrzymamy

$$E_b(\tau) = \frac{E_1 U(\tau)}{1 + E_2 U(\tau)} \quad (9.4)$$

gdzie  $E_1 = \bar{E}_z$ ,  $E_2 = \bar{E}_z/E_k$ . Przez  $\bar{E}_z$  oznaczono końcową wartość modułu sprężystości zaczynu, a przez  $E_k$  moduł sprężystości kruszywa (wypełniacza).

W dalszych rozważaniach będzie również brana pod uwagę pewna modyfikacja wzoru zalecanego przez CEB-FIP [81,114] w postaci:

$$E_b(\tau) = \bar{E}_b \sqrt{U(\tau)} \quad (9.5)$$

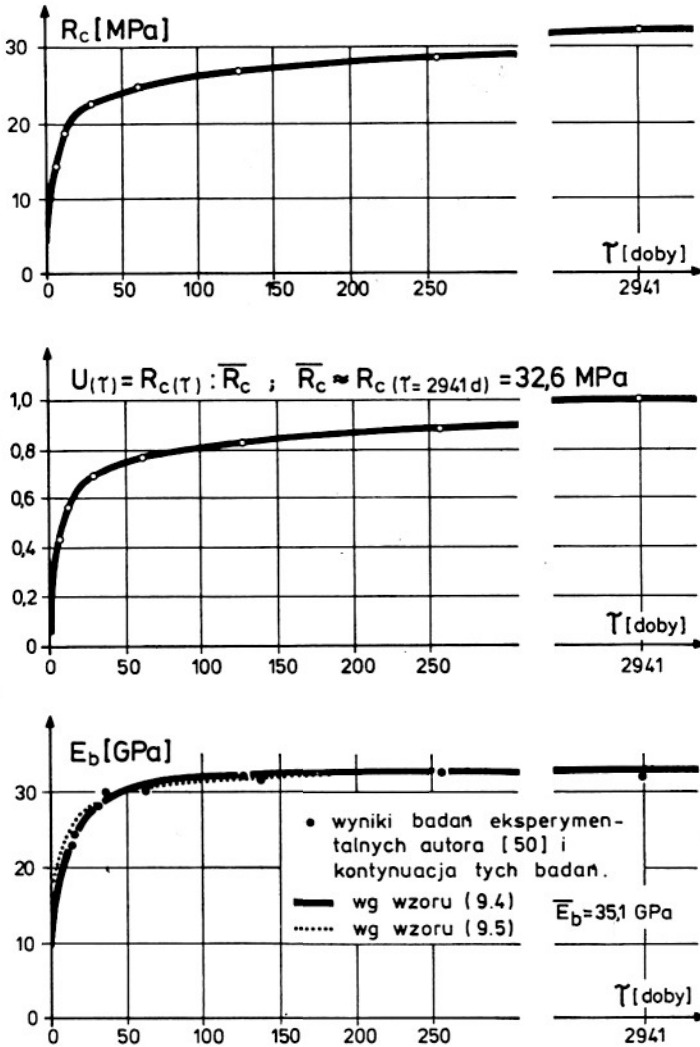
Obie zapisane wyżej funkcje spełniają wypływające z badań postulaty co do wartości granicznych modułu doraźnej sprężystości betonu przy  $\tau \rightarrow \infty$  i  $\tau \rightarrow 0^+$

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} E_b(\tau) = \bar{E}_b = \frac{E_1}{1 + E_2} = \text{const} \quad (9.6)$$

i

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^+} E_b(\tau) = 0 \quad (9.7)$$

Spróbujmy zweryfikować przyjęte zależności w oparciu o badania eksperymentalne. Jest rzeczą zrozumiałą [50], że weryfikacji tej można dokonać wyłącznie w oparciu o badania, w których wyeliminowano efekt skali i ortotropii betonu [12,168]. Oznacza to, że wyznaczenie wszystkich cech betonu musi być przeprowadzone na identycznych geometrycznie i w jednakowy sposób wykonanych próbkach. Na rysunku 9.2 podano wyniki badań autora [50], z którymi skonfrontowano proponowane ujęcia teoretyczne problemu. Można uznać, że wzory (9.4) i (9.5) wystarczająco dokład-



Rys. 9.2. Weryfikacja wprowadzonych zależności w oparciu o badania autora.

Fig. 9.2. Verification of the obtained relationships, based on the author's own studies.

nie aproksymują wyniki uzyskane na drodze eksperymentalnej. Szerszą weryfikację tych zależności, opartą również na badaniach innych badaczy, przeprowadzono w poprzednich pracach autora [49,50]. Na marginesie rozważań trzeba zauważyć, że funkcja  $U(\tau)$  wyznaczona w badaniach autora (dla betonu na zwykłym cemencie portlandzkim marki 35 MPa, przechowywa-

nego przez 260 dni w powietrzu o wilgotności 90-95%, a następnie w warunkach wolnego powietrza) jest bardzo zbliżona do zalecanych przez CEB-FIP [81] i Rüscha [291].

Analizując wyrażenia (4.9), (9.4) i (9.5) łatwo skojarzymy następującą zależność:

$$E_b = \frac{E_1 \frac{R_c(\tau)}{\bar{R}_c}}{1 + E_2 \frac{R_c(\tau)}{\bar{R}_c}}, \quad (9.8)$$

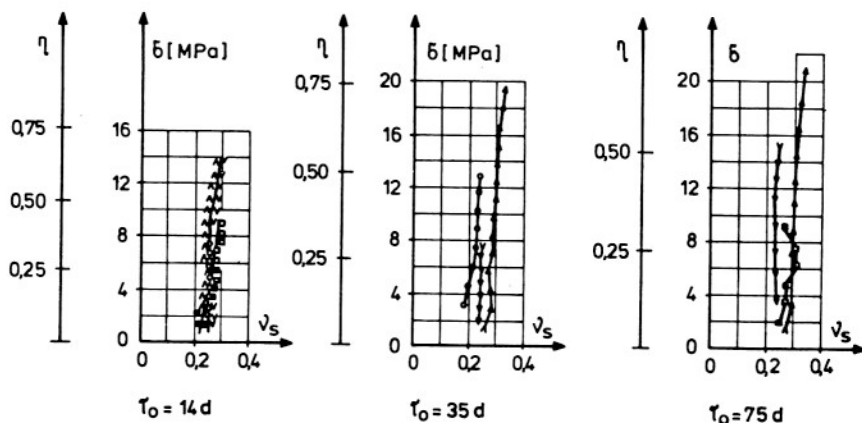
$$E_b = \bar{E}_b \sqrt{\frac{R_c(\tau)}{\bar{R}_c}}. \quad (9.9)$$

Przepisy normowe bazują na cechach materiału określonych przy 28-dniowej dojrzałości betonu. Związek między stałymi normowymi a wprowadzonymi przez autora jest następujący:

$$\bar{R}_c = \frac{R_c(28)}{U(\tau = 28)}, \quad \bar{E}_b = \frac{E_b(28)}{\sqrt{U(\tau = 28)}}. \quad (9.10)$$

### 9.2.2. Współczynnik Poissona dla odkształceń sprężystych

Brak jest wiarygodnych informacji o zmianach współczynnika Poissona z wiekiem, wytrzymałością i innymi właściwościami betonu [250]. W literaturze [10-15, 132, 196-198, 250] i przepisach normowych [81, 114] podawa-



Rys. 9.3. Wartość współczynnika Poissona w świetle badań [13].

Fig. 9.3. The value of Poisson's ratio in the light of studies in [13].

ne są różne wartości tego współczynnika w granicach 0,15-0,25. Otrzymane wartości w dużym stopniu zależą od przyjętej metody wyznaczania [250], z tym, że według badań dynamicznych lub bazujących na pojęciu dynamicznych stałych materiałowych uzyskiwano wartości 0,24-0,25.

Na rysunku 9.3 podano wyniki badań Aleksandrowskiego i Popkowej [12] przeprowadzone na rozmaitych betonach o różnym wieku. Rezultaty tych badań potwierdzają przedstawione wyżej informacje literaturowe.

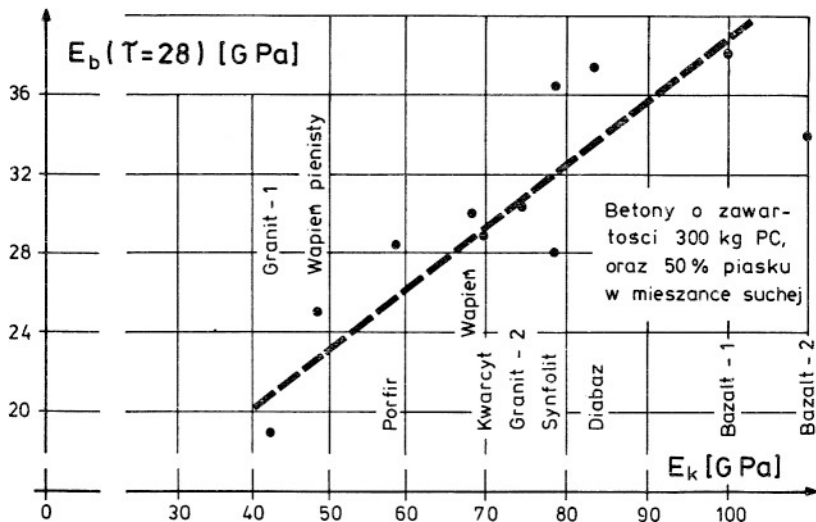
W konkluzji przyjmujemy, że współczynnik Poissona dla odkształceń sprężystych jest parametrem, którego wartość nie zależy od wieku betonu

$$v_s(\tau) = v_s = \text{const.} \quad (9.11)$$

### 9.3. Wartości liczbowe modułu sprężystości i współczynnika Poissona dla odkształceń sprężystych

Kiedy nie dysponujemy szczegółowymi wynikami badań, pozwalającymi na określenie wartości stałych charakteryzujących sprężyste właściwości betonu (jak to jest zwykle w obliczeniach o znaczeniu praktycznym) możemy te stałe przyjmować według danych zawartych w tab. 9.1.

Stale te określono korzystając z ustaleń normowych PN-75/B-06250 i PN-75/B-06263, zaleceń CEB-FIP [81,114] i danych literaturowych [10-15, 34,35,121,132,196-198,250,296]; szczególnie gdy chodzi o  $v_s$ . Wykorzysta-



Rys. 9.4. Wpływ modułu sprężystości kruszywa grubego na wielkość modułu sprężystości betonu [144].

Fig. 9.4. The effect of elastic modulus of coarse aggregate on the value of elastic modulus of concrete [144].

T a b e l a 9.1

Stałe materiałowe charakteryzujące cechy sprężyste betonu,  
określone wg PN-75/B-06250, PN-75/B-06263 i zaleceń CEB-FIP [81,114]

Klasa betonu	Oznac.		B 15	B 20	B 25	B 30	B 35	B 40	B 50
Srednia wytrzymałość * na sciskanie po 28 d	$R_C(28)$	MPa	15,67	21,18	25,81	31,38	35,30	39,22	47,07
Srednia graniczna wytrzymałość na sciskanie	$\bar{R}_C$	MPa	22,72	30,71	37,42	45,50	51,19	56,87	68,25
Wytrzymałość gwarantowana z prawdopodobieństwem 95%	$R_C^G(28)$	MPa	12,0	16,0	20,0	24,0	28,0	32,0	40,0
Gwarantowana wytrzymałość graniczna	$\bar{R}_C^G$	MPa	17,4	23,2	29,0	34,8	40,6	46,1	58,0
Moduł sprężystości i współczynnik Poissona dla betonu zwykłego									
Normowy moduł sprężystości	$E_b(28)$	GPa	23	27	30	32,5	34,5	36,0	39
Koncowa wartość modułu sprężystości	$\bar{E}_b$	GPa	27,6	32,4	36,0	39,0	41,4	43,2	46,8
Współczynnik Poissona	$\nu_s$	—	0,22	0,21	0,20	0,20	0,19	0,18	0,17
Moduł sprężystości** i współczynnik Poissona dla betonu lekkiego									
Normowy moduł sprężystości	$E_b(28)$	GPa	14,5 - 15,5	17,0 - 18,0	18,0 - 19,0	18,5 - 20,0	—	—	—
Koncowa wartość modułu sprężystości	$\bar{E}_b$	GPa	17,4 - 18,6	20,4 - 21,6	21,6 - 23,4	22,2 - 24,0	—	—	—
Współczynnik Poissona	$\nu_s$	—	0,22	0,21	0,20	0,20	—	—	—
<p>* — zależność pomiędzy <math>R_C(28)</math> a <math>R_C^G(28)</math> ustalono przyjmując że jednorodność betonu jest dobra tzn że współczynnik zmienności waha się w granicach od 0,10 - 0,15</p> <p>** — sprężystość betonu lekkiego zależy od jego masy PN - 75 / B - 06263</p>									

tano tu spostrzeżenia, że współczynnik Poissona dla odkształceń sprężystych maleje wraz ze wzrostem klasy betonu [250].

Trzeba pamiętać także o tym, że przyporządkowane odpowiednim klasom betonu wartości modułu sprężystości dotyczą warunków przeciętnych. W praktyce w zależności od rodzaju zastosowanego kruszywa (wpływ rodzaju cementu jest pomijalny) wartości rzeczywiste modułu sprężystości mogą się różnić od podanych w tab. 9.1 o  $\pm 10\%$  [71,144,193,250,291].

Wpływ rodzaju kruszywa na moduł sprężystości betonu przedstawiono na rys. 9.4 [144].

W mostownictwie nie powinniśmy stosować kruszyw o  $E_k < 60$  GPa.

#### 9.4. Równanie konstytutywne dla odkształceń sprężystych betonu

Tensor odkształceń sprężystych w przypadku działania dowolnego, zmiennego w czasie tensora naprężenia wyraża się równaniem:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^s(t) = & \sigma_{ij}(\tau_0) \frac{1 + \nu_s}{E_b(\tau_0)} - \sigma_0(\tau_0) \frac{3 \nu_s \delta_{ij}}{E_b(\tau_0)} + \\ & + \int_{\tau_0}^t \left[ \frac{\partial \sigma_{ij}(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1 + \nu_s}{E_b(\tau)} - \frac{\partial \sigma_0(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{3 \nu_s \delta_{ij}}{E_b(\tau)} \right] d\tau, \end{aligned} \quad (9.12)$$

w przypadku jednoosiowego stanu naprężenia  $\sigma_{11} = \sigma_x \neq 0$ , a dla wszystkich  $i, j \neq 1$ ,  $\sigma_{ij} = 0$  otrzymamy

$$\epsilon_{ij}^s = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_s & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_s \end{vmatrix} \left\{ \frac{\sigma_{11}(\tau_0)}{E_b(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t \frac{\partial \sigma_{11}(\tau)}{d\tau} \cdot \frac{1}{E_b(\tau)} d\tau \right\}. \quad (9.13)$$

### 10. ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNO-LEPKIE A WIEK BETONU W CHWILI OBCIĄŻENIA

#### 10.1. Miara plastyczno-lepkich odkształceń betonu

Odkształcenia plastyczno-lepkie betonu określamy, stosując pewną modyfikację zaproponowanej przez Masłowa [222] i Arutiuniana [19] miary tych deformacji

$$c_{p,1}[\tau, (t - \tau), \eta] = \Phi_{p,1}^T(\tau, \eta) F(t - \tau) \quad (10.1)$$

Funkcja ta opisuje nieliniową zależność odkształceń plastyczno-lepkich betonu od jednostkowego naprężenia przyłożonego w dowolnym jego wieku.



Symbol  $T$  oznacza transpozycję. Wektory  $\Phi_{p,1}(\tau, \eta)$  i  $F(t - \tau)$  określone są wzorami:

$$\begin{aligned}\Phi_{p,1}^T(\tau, \eta) &= \left\{ \varphi_p(\tau, \eta), \varphi_1(\tau) \right\}, \\ F^T(t - \tau) &= \left\{ f_p(t - \tau), f_1(t - \tau) \right\}.\end{aligned}\tag{10.2}$$

Występujące w (10.1) i (10.2) funkcje i parametry to:

$\varphi_p(\tau, \eta), \varphi_1(\tau)$  - funkcje określające końcowe wielkości miar odkształceń plastycznych i lepkich betonu w zależności od wieku betonu w chwili obciążenia ( $\tau$ ),  
 $f_p(t - \tau), f_1(t - \tau)$  - funkcje określające sposób narastania wymiennych wyżej odkształceń w czasie trwania obciążenia ( $t - \tau$ ).

Po wstawieniu wyrażeń (10.2) do wzoru (10.1) i wykonaniu mnożenia okazuje się, że miara odkształceń plastyczno-lepkich betonu jest sumą nieliniowej miary odkształceń plastycznych i liniowej odkształceń lepkich

$$C_{p1}[\tau, (t - \tau), \eta] = C_p[\tau, (t - \tau), \eta] + C_1[\tau, (t - \tau)],\tag{10.3}$$

gdzie

$$\begin{aligned}C_p[\tau, (t - \tau), \eta] &= \varphi_p(\tau, \eta) \cdot f_p(t - \tau), \\ C_1[\tau, (t - \tau)] &= \varphi_1(\tau) \cdot f_1(t - \tau).\end{aligned}$$

Wykorzystując rozważania przeprowadzone w rozdziale 8 (doraźność odkształceń plastycznych) przyjmujemy, że

$$f_p(t - \tau) = H(t - \tau),\tag{10.4}$$

co sprowadza przyjęte podejście do wcześniejszych ustaleń (tab. 8.1), bo  $H(t - \tau)$  jest jednostkową funkcją Heaviside'a. Funkcje wchodzące do wyrażenia (10.1) należy dobrać tak, by miara odkształceń plastyczno-lepkich betonu spełniała następujące (wynikające z obserwacji doświadczalnych) warunki:

- w chwili przyłożenia obciążenia ( $t = \tau$ ) wielkość odkształceń plastyczno-lepkich równa się zero

$$\lim_{(t-\tau) \rightarrow 0} C_{p,1}[\tau, (t - \tau), \eta] = 0,\tag{10.5}$$

- końcowa wielkość odkształceń plastyczno-lepkich betonu określona jest zależnością

$$\lim_{(t-\tau) \rightarrow \infty} C_{p,1}[\tau, (t-\tau), \eta] = \varphi_p(\tau, \eta) + \varphi_1(\tau) = \varphi_{p,1}(\tau, \eta), \quad (10.6)$$

- zależności (10.5) i (10.6) narzucają ograniczenia na  $f_p(t-\tau)$  i  $f_1(t-\tau)$ , a mianowicie przy  $(t-\tau) = 0$  obie te funkcje są równe zero, a przy  $(t-\tau) \rightarrow \infty$  dążą do jedności,

- w miarę wzrostu wieku betonu  $\varphi_{p,1}(\tau, \eta)$  powinno maleć aż do osiągnięcia wielkości granicznej

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \varphi_{p,1}(\tau, \eta) = \bar{\varphi}_{p,1}(\eta) = \bar{\varphi}_p(\eta) + \bar{\varphi}_1. \quad (10.7)$$

Analizując fizykalną stronę zagadnienia odkształceń plastyczno-lepkich betonu [10,12,16,31,42,49,50,86,202,203,228,291,322,325,326,328] należy stwierdzić, że o ich wielkości decyduje głównie pełzanie zaczynu cementowego. Przy poziomie naprężeń panujących w ziarnach kruszywa w zasadzie nie wykazuje ono godnych uwagi odkształceń pełzania<sup>\*\*</sup> [250,330,331] aczkolwiek rodzaj kruszywa wpływa znacznie na wielkość analizowanych odkształceń (na co wskazują na przykład badania Troxella [325]). Czynnikiem ten nie jest jednak związany z niesprężystymi odkształceniami kruszywa [86,250,330,331], a także wiekiem betonu<sup>\*\*\*</sup>.

Ponieważ, jak to ustalono, pełzanie betonu jest związane z odkształceniami plastyczno-lepkimi zaczynu, o jego wielkości decyduje stopień stwardnienia zaczynu cementowego. Można je zatem zdefiniować wykorzystując funkcję  $U(\tau)$ . Zakłada się więc a priori, że graniczna (końcowa) wartość miary odkształceń plastyczno-lepkich określona funkcją  $\varphi_{p,1}(\tau, \eta)$  jest odwrotnie proporcjonalna do uniwersalnej bezwymiarowej funkcji starzenia betonu

$$\varphi_{p,1}(\tau, \eta) = \frac{\varphi_{p,1}(\eta)}{U(\tau)}. \quad (10.8)$$

Jak nietrudno sprawdzić powyższe wyrażenie spełnia niezbędne warunki graniczne [10,19] (przy  $\tau \rightarrow 0^+$  i  $\tau \rightarrow \infty$ ).

Wartość  $\varphi_{p,1}(\eta)$  określa się biorąc pod uwagę wszystkie inne niezwiązane z procesem starzenia czynniki wpływające na wielkość pełzania, jak na przykład: skład betonu, rodzaj i ilość cementu, wartość współczynnika cementowo-wodnego i inne.

<sup>\*\*</sup> Niektóre kruszywa ulegają jednak pełzaniu przy naprężeniach nie większych niż kilka MPa. McHenry wykazał to w przypadku aglomeratów wulkanicznych [228], a w US Bureau of Reclamation stwierdzono pełzanie piaskowca z Glen Canyon [330] oraz szarogłazu z Taiwanu [331].

<sup>\*\*\*</sup> Zjawisko to nie jest ostatecznie wyjaśnione, a aktualny stan jego rozpoznania zawiera na przykład praca Neville'a [250].

Analizując wyrażenia (8.2), (10.1) i (10.8) łatwo skojarzymy następujące zależności

$$\eta R_c(\tau) \cdot C_{p,1}[\tau, (t - \tau), \eta] = \epsilon_{p,1}[(t - \tau), \eta], \quad (10.9)$$

przy czym  $\epsilon_{p,1}[(t - \tau), \eta] = \text{const}$ , gdy  $(t - \tau) = \text{const}$  i  $\eta = \text{const}$ , lub

$$C_{p,1}[\tau, (t - \tau), \eta] = \frac{\epsilon_{p,1}[(t - \tau), \eta]}{\eta R_c(\tau)}. \quad (10.10)$$

### 10.2. Weryfikacja doświadczalna przedstawionych zależności teoretycznych

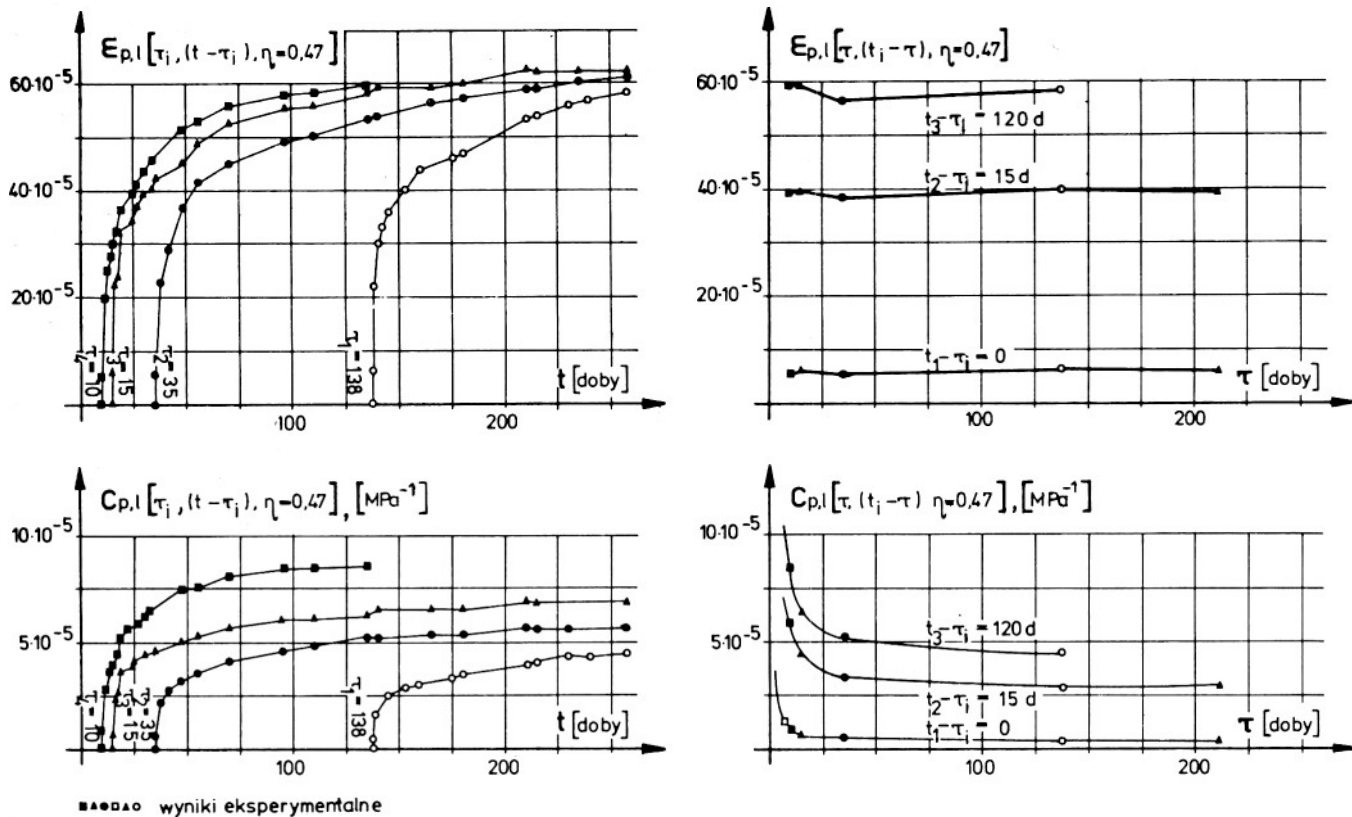
Przedstawione poprzednio zależności zostaną zweryfikowane na podstawie badań własnych i innych autorów. Trzeba zaznaczyć (o czym już wspomniano w rozdziale 9), że w badaniach tych musi być wyeliminowany zarówno efekt skali, jak i ortotropii betonu. Oznacza to, że wyznaczenie wszystkich cech betonu musi być przeprowadzone na identycznych geometrycznie i w jednakowy sposób wykonanych próbkach. Wyniki badań spełniających wymienione uprzednio warunki, a tym samym mogące stanowić podstawę do weryfikacji zależności teoretycznych, przedstawiono na rys. 10.1 i 10.2. Szerszą analizę doświadczalną tego problemu zawierają prace autora [49,50].

Analizując przedstawione wyniki badań oraz rezultaty innych nie pokazanych tu eksperymentów, można stwierdzić, że wyprowadzone zależności teoretyczne (8.2), (10.8) i (10.10) zostały potwierdzone eksperymentalnie i mogą być stosowane do praktycznego wyznaczania właściwości mechanicznych betonu i dalszych rozważań analitycznych.

Dotychczas nie określono jeszcze górnego kresu stopnia wyężenia betonu, przy którym zachowują ważność wyprowadzone zależności. Opierając się na bardzo obszernych badaniach eksperymentalnych Rüscha [290] i Kłąpocia [179], można stwierdzić, że wyprowadzone tu zależności są praktycznie słuszne dla takiego stopnia wyężenia betonu, który nie spowoduje reologicznego zniszczenia próbki betonowej.

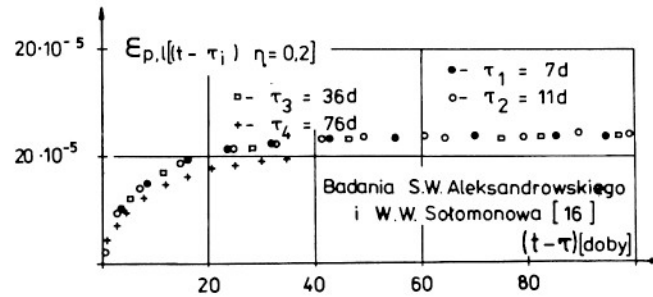
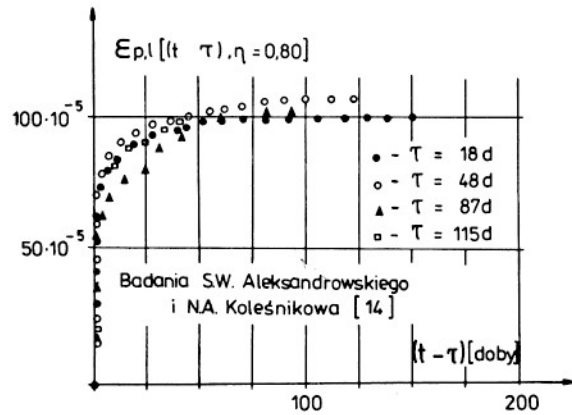
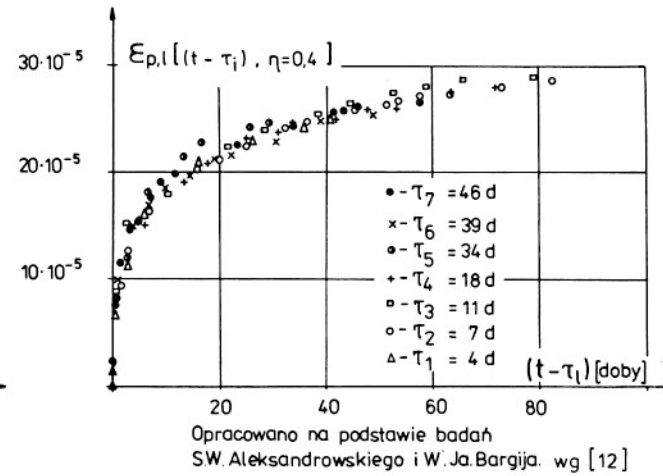
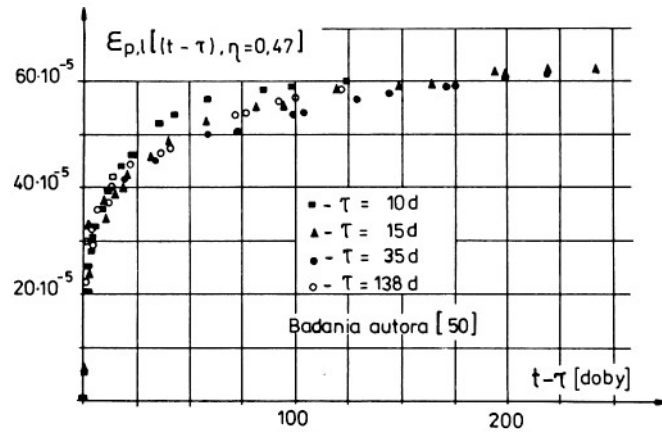
### 10.3. Sposób zastosowania wyprowadzonych zależności do wyznaczania zmieniających się w czasie cech mechanicznych betonu

Zastosowanie przedstawionych uprzednio zależności pozwala na uproszczenie i znaczne zmniejszenie zakresu badań niezbędnych do uzyskania poprawnej oceny właściwości mechanicznych betonu, a szczególnie ich zmianę w czasie. Wynika to z faktu, że wystarczy wyznaczyć eksperymentalnie funkcję  $R(\tau)$ , co jest rzeczą stosunkowo prostą - wzór (4.9).



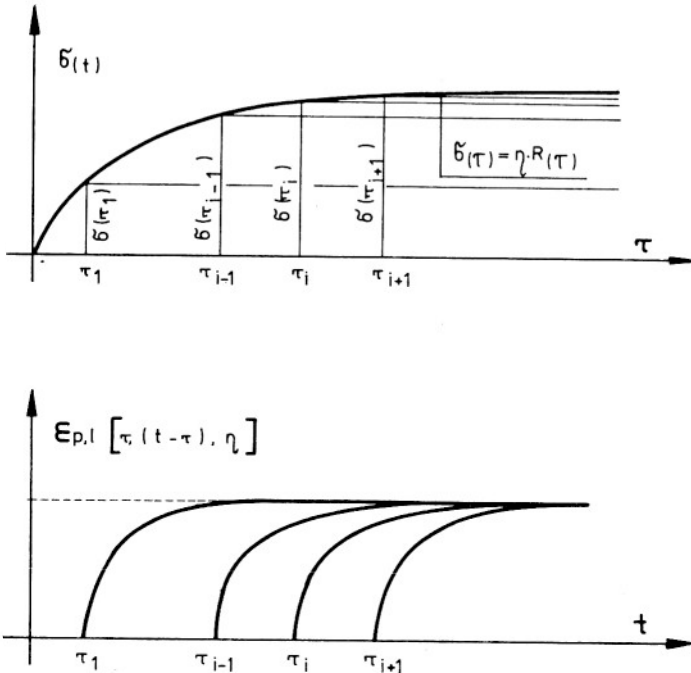
Rys. 10.1. Odkształcenia plastyczno-lepkie i miara tych odkształceń według badań autora [50].

Fig. 10.1. Visco-plastic deformations and their measure, acc. to the author's own studies [50].



Rys. 10.2. Odkształcenia plastyczno-lepkie betonu, jako funkcja stopnia wyężenia materiału i czasu działania obciążenia.

Fig. 10.2. Visco-plastic deformations of concrete as the function of its effort degree and the time of loading action.



Rys. 10.3. Graficzna ilustracja twierdzenia (1).

Fig. 10.3. Graphic illustration of the theorem given in item (1).

Najwięcej kłopotów eksperymentatorom przysparza wyznaczenie miary odkształceń plastyczno-lepkich (10.1). Problem ten znacznie uprości się, jeśli wykorzystać zależności (10.9) lub (10.10), gdyż po przeanalizowaniu tych wyrażeń można sformułować następujące twierdzenia:

1) beton o dowolnym wieku  $\tau_i$  poddany działaniu niezmiennego w czasie obciążenia spełniającego warunek  $\sigma(\tau_i) = \eta R(\tau_i)$  (ten sam stopień wyężenia) wykazuje odkształcenia plastyczno-lepkie, których wielkość nie zależy od wieku betonu w chwili jego obciążenia, a tylko od stopnia wyężenia betonu i okresu działania obciążenia (rys. 10.3),

2) miarę odkształceń plastyczno-lepkich przy ustalonym stopniu wyężenia betonu można określić, dysponując jedną krzywą przyrostu tych odkształceń wyznaczoną dla dowolnego  $\tau$ .

## 11. ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNE BETONU W UJĘCIU TEORETYCZNYM

### 11.1. Przyjęte założenia odnośnie do odkształcalności plastycznej betonu

#### 11.1.1. Tensor odkształceń plastycznych betonu w świetle badań eksperymentalnych

W literaturze możemy znaleźć opisy i wyniki wielu badań dotyczących odkształcalności betonu w różnych stanach obciążenia. Większość ich jednak dotyczy jednoosiowego stanu naprężenia, stosunkowo niewielka część poświęcona jest odkształcalności betonu w płaskim stanie naprężenia, a przestrzennego stanu dotyczy zaledwie kilka wartościowych opracowań, np. [189, 196, 288]. Trzeba więc zaznaczyć, że przedstawiona dalej analiza tensora odkształceń plastycznych ma charakter głównie jakościowy, gdyż obecnie dostępna baza danych doświadczalnych (dla przestrzennych stanów naprężenia) jest zbyt skąpa dla szczegółowych oszacowań ilościowych.

Na rysunku 11.1, opracowanym na podstawie wyników badań zespołu Kupfera [196], dokonano podziału tensora odkształceń plastycznych  $\epsilon_{ij}^p$  na część aksjatorową, związaną z plastyczną zmianą objętości ( $\epsilon_{ij}^{p,0}$ ) i dewiatorową ( $e_{ij}^p$ ), związaną z plastyczną zmianą postaci.

W świetle przedstawionych wyników badań widać wyraźnie, że:

- w procesie obciążania w betonie powstają odkształcenia plastyczne o charakterze objętościowym i postaciowym.
- w złożonych stanach naprężenia wielkość plastycznych odkształceń objętościowych jest znaczna i w analizach tego stanu nie powinna być pomijana,

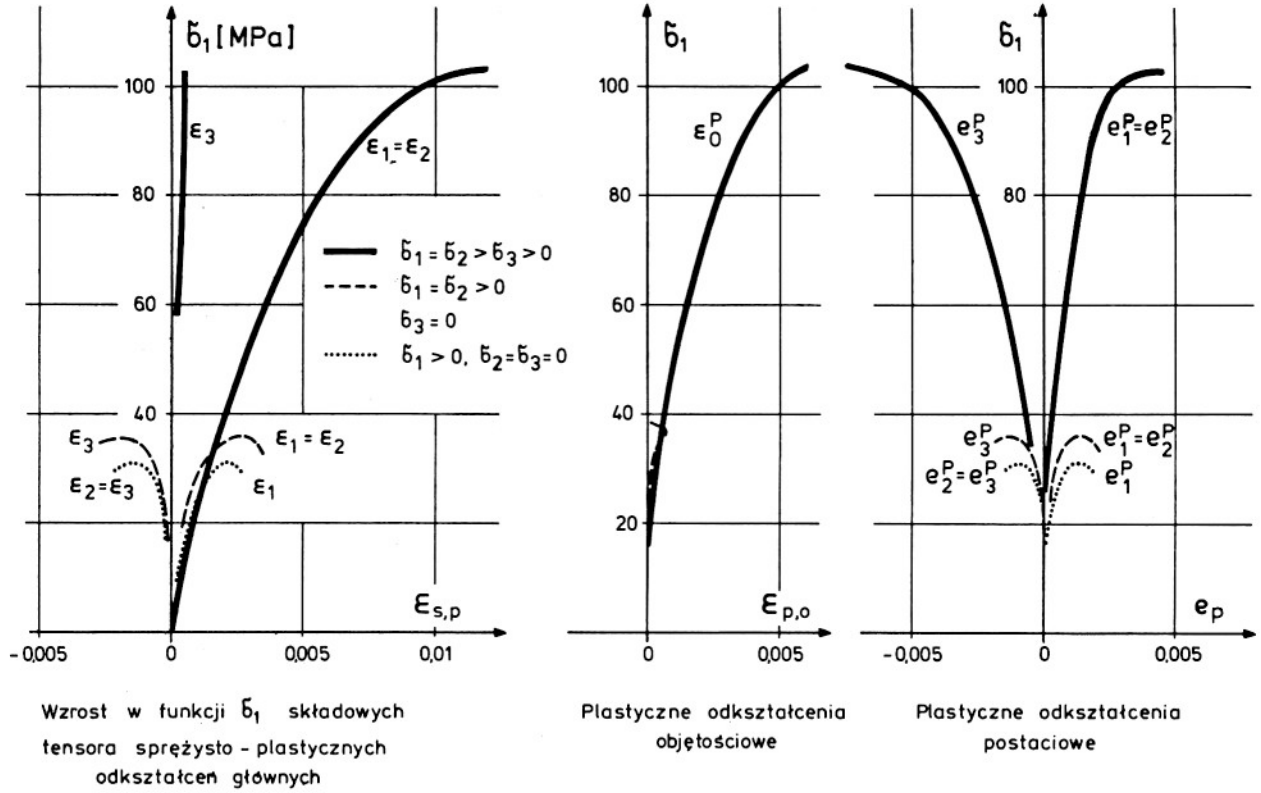
- zdolność betonu do plastycznych odkształceń postaciowych rośnie wraz z wielkością hydrostatycznego naprężenia ściskającego  $\sigma_0$  [189].

$$\epsilon_{ij}^p = \epsilon_{ij}^{p,0} + e_{ij}^p. \quad (11.1)$$

#### 11.1.2. Założenia wykorzystane przy formułowaniu równania konstytutywnego odkształceń plastycznych betonu

Zależności przedstawione w niniejszym rozdziale wyprowadzimy bazując na ustaleniach poczynionych w rozdziałach 7 i 8, przyjmując dodatkowo następujące założenia:

- proces plastycznej deformacji betonu jest nieliniowy (w stosunku do stopnia wyłączenia materiału) i nieodwracalny,
- w materiale, w wyniku działania obciążenia, zachodzi zjawisko przystosowania - rys. 11.2. Oczywiście założenie to traci ważność, gdy liczba impulsów obciążenia i częstość ich występowania rośnie, gdyż wówczas mamy do czynienia z nowym zjawiskiem, a mianowicie wibropełzaniem.



Wzrost w funkcji  $\delta_1$  składowych tensora sprężysto - plastycznych odkształceń głównych

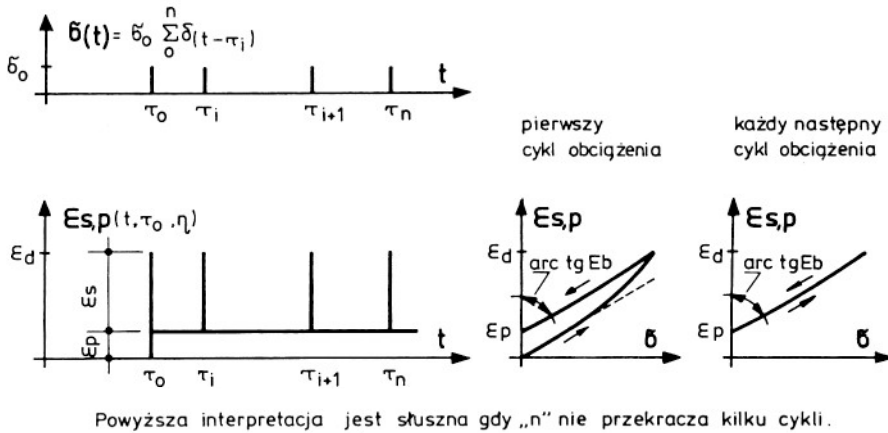
Plastyczne odkształcenia objętościowe

Plastyczne odkształcenia postaciowe

Rys. 11.1. Wynik badań odkształceń doraźnych betonu poddanego trójosiowemu ścisłaniu.

Fig. 11.1. Initial strains of concrete subject to triaxial compression - results of tests.





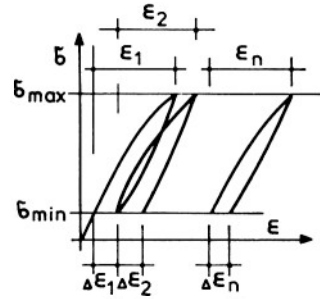
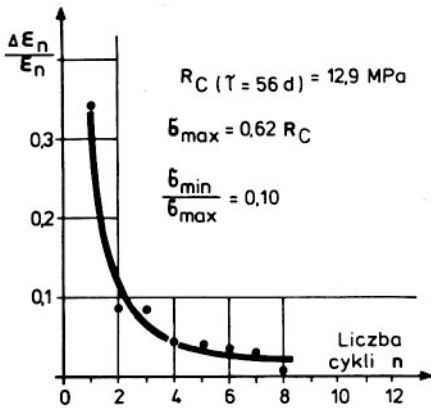
Rys. 11.2. Przyjęte założenie odnośnie zachowania się niestarczającego betonu pod wpływem kolejnych doraźnych impulsów obciążenia.

Fig. 11.2. The assumption concerning the behaviour a nonageing concrete subject to successive cyclic loadings.

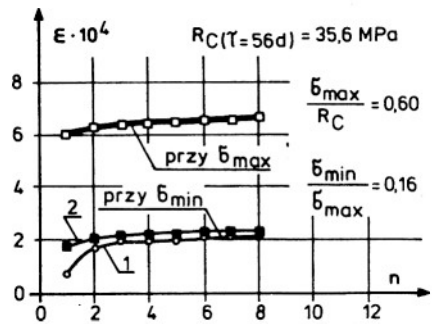
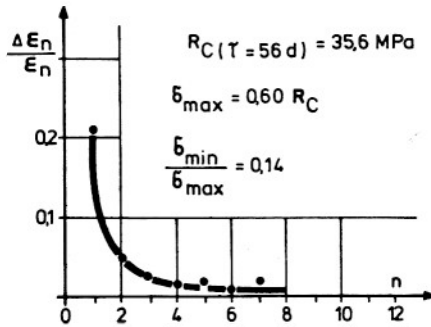
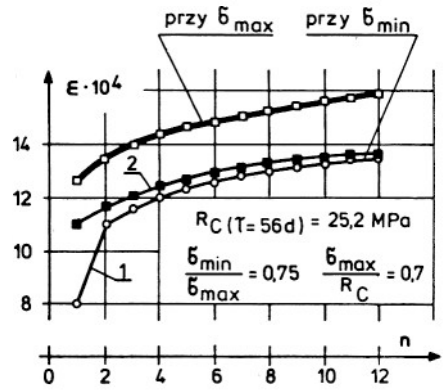
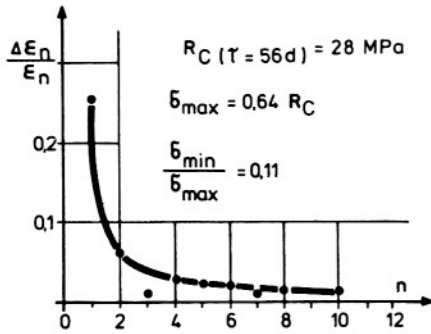
Na rysunku 11.3 pokazano, jaki jest udział następnych cykli obciążenia w powstawaniu odkształceń plastycznych. W świetle przedstawionych badań [129] wpływ następnych 10 cykli powoduje wzrost odkształceń plastycznych o około 30% (dla betonów konstrukcyjnych  $B > 20$  MPa). Problem obciążeń cyklicznych będzie rozpatrzony w rozdziale 16,

- tensor odkształceń plastycznych betonu składa się zarówno z części kulistej (aksjatorowej), jak i dewiatorowej - rys. 11.1, wzór (11.1)
- tylko dewiator odkształceń plastycznych zależy od drogi obciążenia, czyli od tego, w jaki sposób osiągnięty został aktualny stan naprężenia,
- beton w całym zakresie obciążeń zachowuje się jak ciało izotropowe i ciągłe. Z analizy rezultatów badań wynika, iż przyjęte założenie jest poprawne dotąd, dopóki przyłożone obciążenie nie przekracza tzw. drugiego poziomu wyężenia (tworzenie się ciągłych łańcuchów mikrorys). Po przekroczeniu tego progu obciążenia zakres destrukcji jest tak znaczny, że dalsze traktowanie betonu jako ciała kontynuального jest już znacznym uproszczeniem (należałoby uwzględnić sprężystą ortotropową degradację materiału [176] ).

- w betonie nie występuje efekt Bauschingera, co oznacza, że pomijamy wpływ drogi obciążenia na kształt powierzchni granicznej - rozdziały 6 i 7.



Ilustracja ideowa omawianych badań eksperymentalnych



- 1.- odkształcenia przed rozpoczęciem kolejnego cyklu obciążenia,
- 2.- po zakończeniu

Rys. 11.3. Odkształcalność betonu w warunkach ściskających obciążeń powtarzalnych [129].

Fig. 11.3. Deformability of concrete under repeated compressive loads [129].

### 11.2. Równanie konstytutywne dla plastycznych odkształceń objętościowych betonu

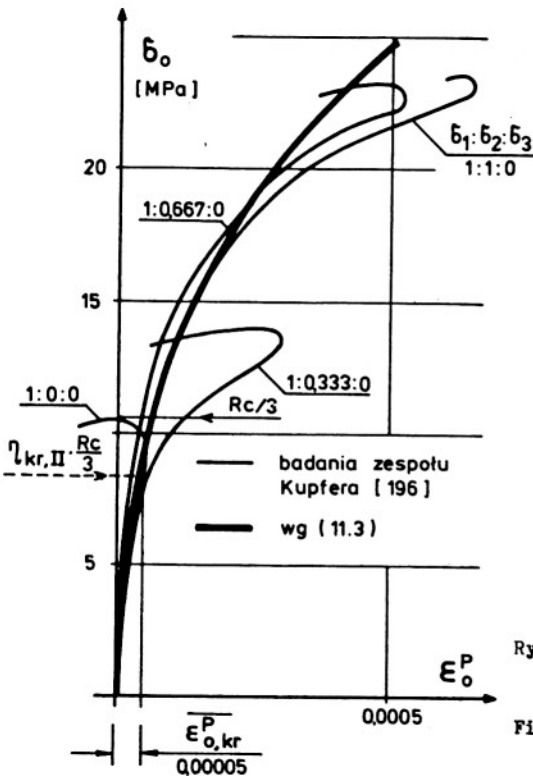
Przyjęto, że równanie to może mieć następującą postać:

$$\epsilon_{ij}^{p,o} = \delta_{ij} \bar{\epsilon}_{o,kr}^p \left( \frac{3 \sigma_{o,max}}{R_c \eta_{kr,II}} \right)^2, \quad \text{dla } \sigma_o \geq 0, \quad (11.2)$$

$$\epsilon_{ij}^{p,o} = 0 \quad \text{dla } \sigma_o < 0 \text{ (rozciąganie).}$$

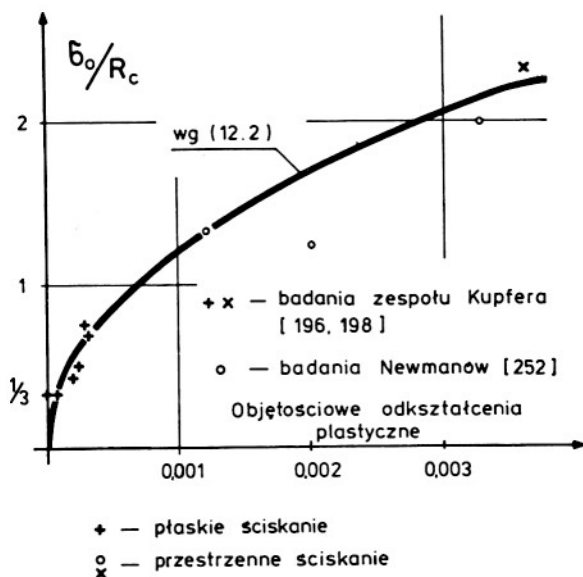
W równaniu tym  $\bar{\epsilon}_{o,kr}^p$  jest stałą materiałową określającą podatność materiału na plastyczne deformacje objętościowe. Jej sens fizyczny łatwo wyjaśnić, gdyż przy

$$\sigma_{o,max} = \frac{1}{3} \eta_{kr,II} R_c, \quad \frac{3 \sigma_{o,max}}{R_c \eta_{kr,II}} = 1, \quad (11.3)$$



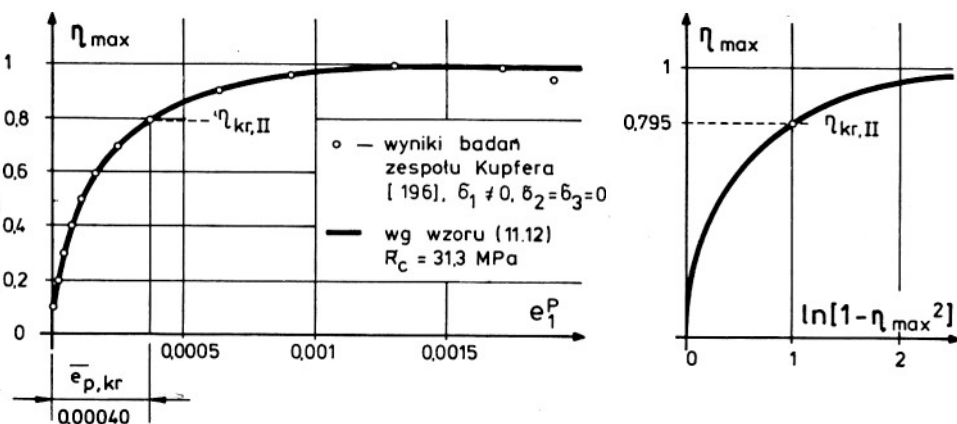
Rys. 11.4. Stała materiałowa charakteryzująca plastyczne odkształcenia objętościowe.

Fig. 11.4. Material constant characterizing plastic volumetric strains.



Rys. 11.5. Weryfikacja doświadczalna równania (11.2). Beton o  $R_c \approx 30$  MPa.

Fig. 11.5. Experimental verification of Eq. (11.2) for concrete characterized by  $R_c \approx 30$  MPa.



Rys. 11.6. Postaciowe odkształcenia plastyczne w funkcji stopnia wyężenia.

Fig. 11.6. Plastic non-dilatational strains as the function of the degree of effort.

co oznacza, że  $\overline{\epsilon}_{o,kr}^p$  jest plastycznym odkształceniem objętościowym występującym przy prostym ściskaniu, gdy stopień wyężenia materiału osiąga  $\eta_{kr,II}$ .

Na rysunku 11.4 przedstawiono sposób wyznaczenia tej stałej materiałowej, a na rys. 11.5 zweryfikowano proponowane równanie (11.2) w oparciu o wyniki badań betonu w złożonych stanach obciążenia. Wydaje się, że proponowana zależność dosyć dobrze opisuje zmiany objętościowe betonu.

### 11.3. Równanie konstytutywne dla plastycznych odkształceń postaciowych

#### 11.3.1. Sformułowanie ogólne

Przyjęto, że z dostateczną dokładnością przyrosty postaciowych odkształceń plastycznych betonu  $de_{ij}^p$  mogą być opisane równaniem Prandla-Reussa

$$de_{ij}^p = \frac{3}{2} \frac{s_{ij}}{\sigma_i} de_i^p. \quad (11.4)$$

W równaniu tym  $de_i^p$  oznacza intensywność przyrostu postaciowych odkształceń plastycznych, którą będziemy wyznaczać z wzoru:

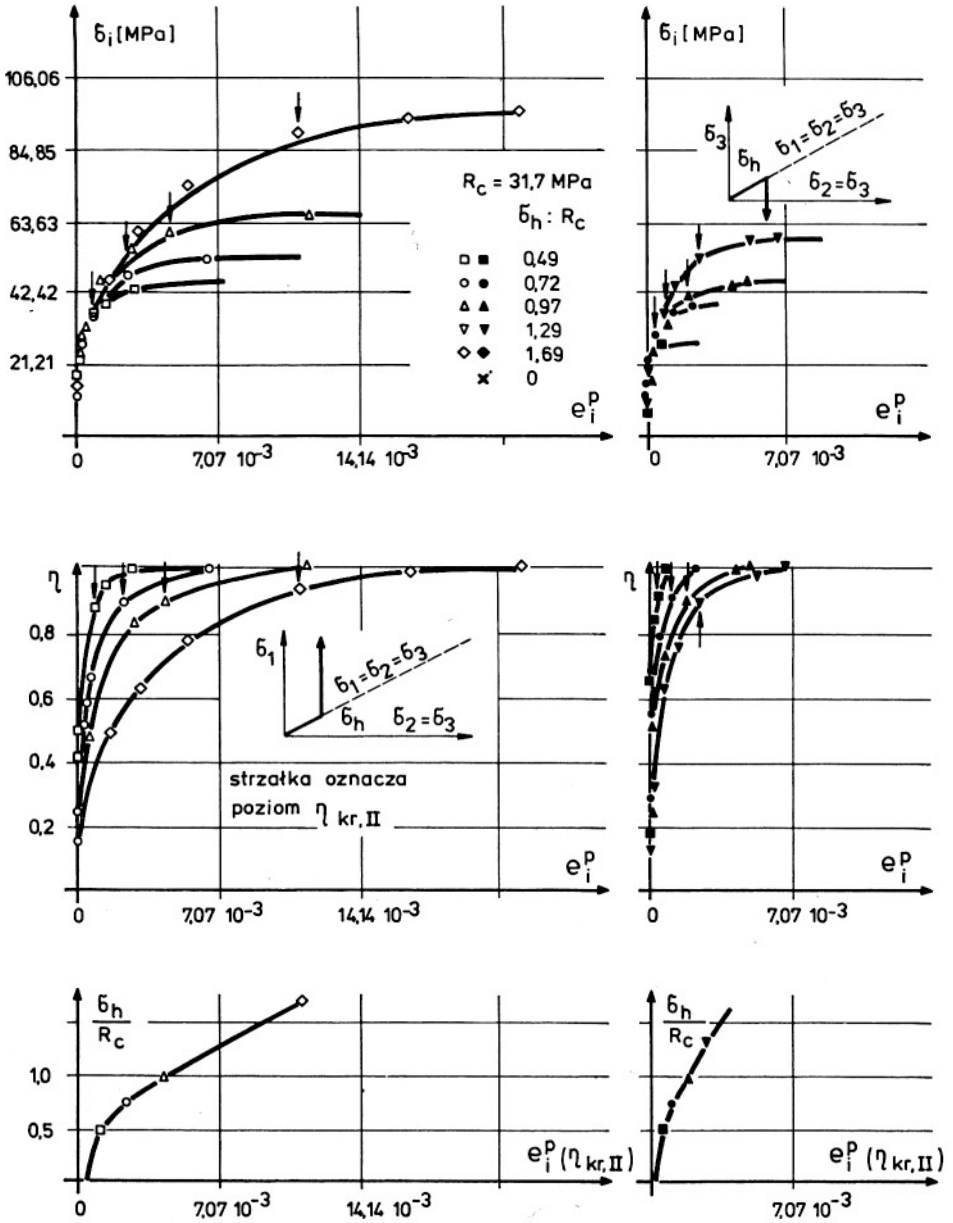
$$de_i^p = e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) f[D(\eta)] d\eta, \quad (11.5)$$

gdzie:

- $e_{i,kr}(\sigma_{i,gr})$  - jest funkcją określającą zdolność betonu do plastycznych deformacji postaciowych w zależności od granicznej intensywności naprężeń, do której zmierza wzdłuż zadanej drogi obciążenia (rys. 7.2 i 7.3) aktualny stan naprężenia wywołujący stopień wyężenia równy  $\eta$ ,
- $f[D(\eta)]$  - jest nieliniową funkcją uzależniającą wielkość przyrostu intensywności odkształceń od zakresu uszkodzenia materiału. Funkcję tę należy określać podobnie jak to ma miejsce w odkształceniowej teorii Nadai-Hencky'ego-Iliuszina drogą dopasowania do wyników badań eksperymentalnych.

W niniejszej pracy przyjęto funkcję  $f[D(\eta)]$  w następującej postaci (rys. 11.6):

$$f D(\eta) = \frac{\frac{d}{d\eta} D}{1 - D} = \frac{2\eta}{1 - \eta^2} = f(\eta). \quad (11.6)$$



Rys. 11.7. Wpływ drogi przyrostu obciążenia na wielkość intensywności odkształceń plastycznych; badania [189].

Fig. 11.7. The effect of load increment path on the intensity of plastic strain [189].

### 11.3.2. Plastyczne odkształcenia postaciowe w przypadku dowolnego obciążenia doraźnego

Wyznaczenie dewiatora odkształceń plastycznych sprowadza się do scałkowania równania (11.4) przy uwzględnieniu (11.5) w granicach od 0 do  $\eta_{\max}$

$$e_{ij}^p = \frac{\sum}{2} \int_0^{\eta_{\max}} e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) \frac{s_{ij}}{\sigma_i} f(\eta) d\eta. \quad (11.7)$$

W ogólnym przypadku (dowolnej drogi wzrostu obciążenia) funkcja  $e_{i,kr}(\sigma_{i,gr})$ , dewiator  $s_{ij}$  oraz intensywność naprężeń będą się zmieniać wraz z postępującym stopniem wyciężenia  $\eta$ , w związku z czym muszą się znaleźć pod znakiem całki.

Dla dowolnej drogi obciążenia równanie (11.7) nie daje się scałkować w sposób analityczny, więc efektywne wyniki można uzyskać tylko na drodze całkowania numerycznego, wprowadzając dodatkowe założenia o kierunku procesów destrukcyjnych.

### 11.3.3. Postaciowe odkształcenia plastyczne w przypadku doraźnego obciążenia prostego

W przypadku obciążenia prostego obciążenie zmierza do powierzchni granicznej wzdłuż linii prostej (drogi I, II, III, IV na rys. 7.2 i 7.3), więc wielkość  $\sigma_{i,gr}$  jest ustalona, ponadto zarówno dewiator  $s_{ij}$ , jak i intensywność naprężeń wzrastają wówczas proporcjonalnie do aktualnego stopnia wyciężenia, w związku z czym zachodzi

$$\frac{s_{ij}(\eta)}{\sigma_i(\eta)} = \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} = \text{const}, \quad (11.8)$$

gdzie  $s_{ij}^*$  i  $\sigma_i^*$  to dewiator tensora naprężeń i intensywność naprężeń w przypadku obciążenia prostego.

Wykorzystując powyższe z (11.7) otrzymujemy

$$e_{ij}^p = \frac{\sum}{2} e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} \int_0^{\eta_{\max}} f(\eta) d\eta. \quad (11.9)$$

Przyjmując  $f(\eta)$  w postaci (11.6), po wykonaniu całkowania i wzięciu bezwzględnej wartości z logarytmu otrzymamy

$$e_{ij}^p = \frac{\sum}{2} e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} \left| \ln [1 - (\eta_{\max})^2] \right|. \quad (11.10)$$

Ponieważ iloraz  $s_{ij}^*/\sigma_i^*$  nie zależy od stopnia wyężenia (poziomu naprężenia), może być wyznaczony ze stanów naprężenia odpowiadających dowolnemu poziomowi naprężenia (leżącemu na tej samej drodze obciążenia). Ze względów praktycznych najwygodniej wyliczać je wykorzystując stan naprężenia odpowiadający  $\eta_{\max}$ .

#### 11.3.4. Funkcja określająca postaciową odkształcalność betonu

Już w rozdziale 11.1 zaznaczono, że zdolność betonu do plastycznych odkształceń postaciowych rośnie wraz z wielkością naprężenia hydrostatycznego. Potwierdzają to wyniki badań Kotsovosa i Newmana [189], zamieszczone na rys. 11.7. Nie przeczą one przyjętym uprzednio założeniom odnośnie do postaci funkcji określającej zdolność betonu do postaciowych odkształceń plastycznych, gdyż  $\sigma_{i,gr} = \sigma_{i,gr}(\sigma_0)$ .

Jak zaznaczono już poprzednio, po przekroczeniu poziomu wyężenia  $\eta_{kr,II}$  następuje gwałtowny rozwój mikrouszkodzeń wewnętrznych, co narusza strukturalną ciągłość materiału, dlatego analizowaną funkcję będziemy odnosić (tak jak to czyniliśmy w przypadku plastycznych odkształceń objętościowych) do odkształceń zmierzonych na poziomie  $\eta_{kr,II}$ .

Przyjmijmy zatem, że zdolność betonu do odkształcania się postaciowego wyraża się wzorem

$$e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) = \bar{e}_{p,kr} \left( \frac{\sigma_{i,gr}}{R_c} \right)^3, \quad (11.11)$$

w którym  $\bar{e}_{p,kr}$  jest stałą materiałową charakteryzującą beton. Jest ona plastycznym odkształceniem postaciowym określonym w próbie osiowego ściskania przy stopniu wyężenia materiału równym  $\eta_{kr,II}$ .

Podstawiając (11.11) do równania (11.10) otrzymamy

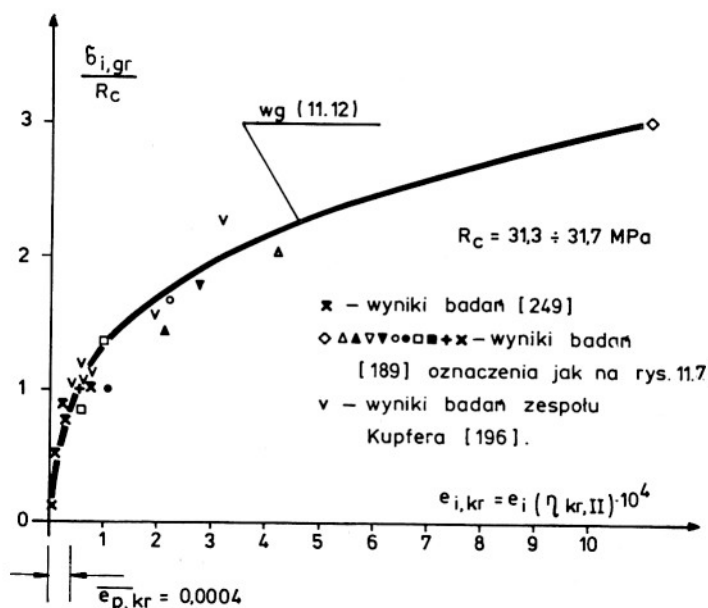
$$e_{ij}^p = \frac{2}{3} \bar{e}_{p,kr} \left( \frac{\sigma_{i,gr}}{R_c} \right)^3 \frac{s_{ij}^*}{\sigma_{ij}^*} \left| \ln [1 - (\eta_{\max})] \right|^2. \quad (11.12)$$

Dla jednoosiowego ściskania zachodzą zależności

$$\frac{\sigma_{i,gr}}{R_c} = 1 \quad i \quad \frac{s_{ij}^*}{\sigma_{ij}^*} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad (11.13)$$

przy wykorzystaniu których łatwo wyprowadzimy z (11.12) wzór na postaciowe odkształcenia plastyczne odpowiadające kierunkowi osiowego ściskania





Rys. 11.8. Funkcja materiałowa (11.11) opisująca zdolność betonu do plastycznej zmiany postaci.

Fig. 11.8. Material function (11.11) describing the ability of concrete to a plastic change of its form.

$$e_{11}^p = \bar{e}_{p,kr} \left| \ln \left[ 1 - (\eta_{\max})^2 \right] \right|. \quad (11.14)$$

Ponieważ funkcja logarytmiczna osiąga wartość 1 przy  $\eta_{\max} = 0,795$  (rys. 11.6), co z dużą dokładnością odpowiada  $\eta_{kr,II}$ , możemy napisać, że

$$\bar{e}_{p,kr} = e_{11}^p(\eta_{kr,II}) \quad \text{przy} \quad \sigma_1 \neq 0 \quad \text{i} \quad \sigma_2 = \sigma_3 = 0. \quad (11.15)$$

Na rysunku 11.8 dokonano weryfikacji równania (11.11) w oparciu o wyniki badań różnych autorów [189,196,249], uzyskując zadowalającą zgodność przyjętej funkcji z rezultatami badań.

#### 11.4. Ogólna postać równania konstytutywnego dla odkształceń plastycznych w warunkach obciążeń doraźnych

Podstawiając do wzoru (11.1) wyrażenia (11.2) i (11.7) przy  $\sigma_0 > 0$  otrzymamy:

$$\epsilon_{ij}^p = \delta_{ij} \bar{\epsilon}_{0,kr}^p \left( \frac{\beta \sigma_{0,max}}{R_c \eta_{kr,II}} \right)^2 + \sum_2 \int_0^{\eta_{\max}} e_{i,kr}(\sigma_{i,gr}) \frac{s_{ij}}{\sigma_i} f(\eta) d\eta. \quad (11.16)$$

W przypadku obciążenia prostego drugi człon równania (11.16) przyjmuje postać (11.10).

Dla  $\sigma_0 < 0$  pierwszy człon zanika i zachodzą wyłącznie odkształcenia postaciowe.

#### 11.5. Maksymalny stopień wyężenia betonu poddanego działaniu obciążenia prostego będącego funkcją czasu

Obciążenie konstrukcji zmienia się w czasie w sposób związany z przyjętą technologią jej wznoszenia i warunkami eksploatacji, w związku z czym naprężenia w poszczególnych punktach konstrukcji mogą wzrastać a następnie maleć lub, mówiąc inaczej, zmieniać się w sposób dość dowolny. Ponieważ analizujemy stopień wyężenia materiału z punktu widzenia procesów nieodwracalnych, musimy wprowadzić pojęcie maksymalnego wyężenia jakie miało miejsce od chwili  $\tau_0$  (pierwsze obciążenie) do rozpatrywanej chwili  $t$ . Tak zdefiniowane wyężenie maksymalne będziemy określać według wzoru

$$\eta_{\max}(t) = \eta_{\max}(t, \tau_0) = \frac{\sigma_i(\tau_0)}{\sigma_{i,gr}(\tau_0)} \sqrt{f_R(t, \tau_0)} + \int_{\tau_0}^t \frac{d\sigma_{i,\max}(\tau)}{d\tau} \frac{\sqrt{f_R(t, \tau)}}{\sigma_{i,gr}} d\tau, \quad (11.17)$$

gdzie

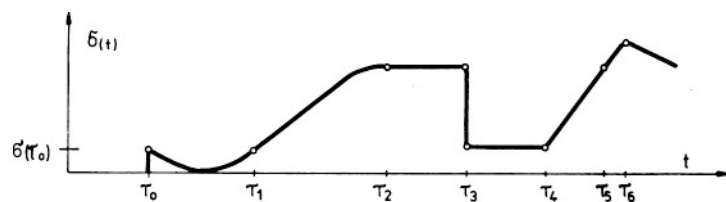
$$\sigma_{i,\max}(t) = \max [\sigma_i(\tau)] \quad \text{przy} \quad \tau_0 \leq \tau \leq t, \quad (11.18)$$

a  $f_R(t, \tau)$  jest wyprowadzoną w rozdziale 7 funkcją regeneracji.

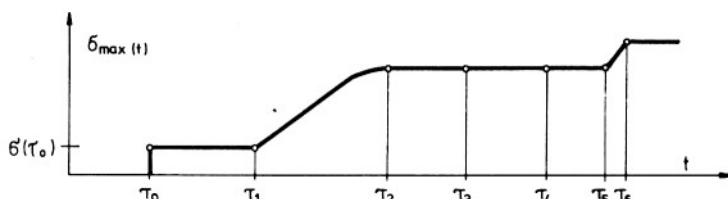
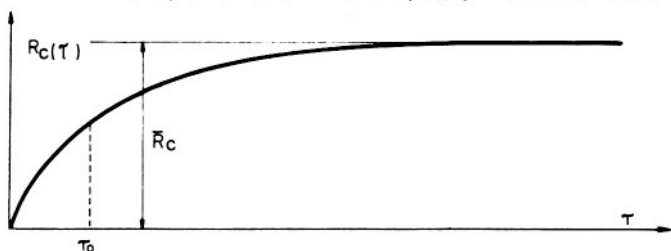
Dla jednoosiowego stanu naprężenia po przyjęciu, że  $f_R(t, \tau) = 1$  (brak regeneracji) otrzymamy wzór

$$\eta_{\max}(t) = \frac{\sigma(\tau_0)}{R_c(\tau_0)} + \int_{\tau_0}^t \frac{d\sigma_{\max}(\tau)}{d\tau} \frac{1}{R_c(\tau)} d\tau, \quad (11.19)$$

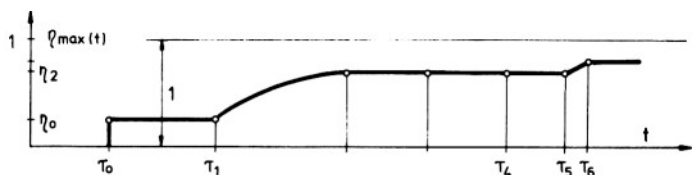
wykorzystywany często we wcześniejszych pracach autora [38,50,182]. Szczegółową interpretację fizyczną tego wzoru przedstawiono na rys. 11.9.



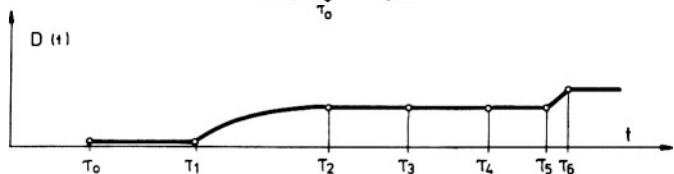
Naprężenia zmienne w czasie

Maksymalne naprężenia jakie wystąpiły w przedziale  $\langle t_0, t \rangle$ 

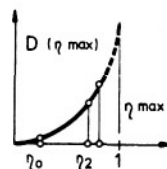
Zmiana wytrzymałości betonu w czasie



$$D_{\max}(t) = \frac{\sigma_{\max}(t_0)}{R_c(t_0)} + \int_{t_0}^t \frac{d\sigma_{\max}(\tau)}{R_c(\tau)} d\tau$$



Zakres destrukcji betonu



Rys. 11.9. Interpretacja fizyczna wzoru (11.19).

Fig. 11.9. Physical interpretation of Eq. (11.19).

## 11.6. Maksymalny stopień wyężenia betonu w warunkach dowolnego statycznego obciążenia zewnętrznego

### 11.6.1. Uszkodzenie jako funkcja kierunku obciążenia

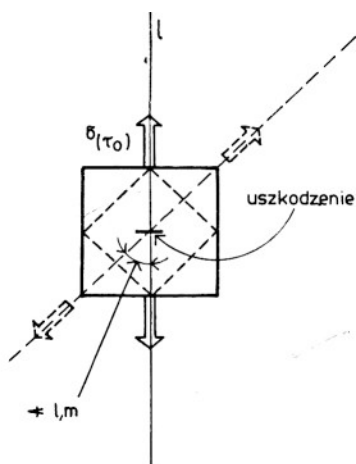
Zakładamy, że uszkodzenie struktury betonu ma charakter kierunkowy, co oznacza, iż w kierunku ortogonalnym do działającego obciążenia jest ono równe zero - rys. 11.10. Zgodnie z ideą przedstawioną na tym rysunku naprężenie  $\sigma_i(\tau_0)$  działające na kierunku  $l$  wywoła uszkodzenie  $D_l(\tau_0)$ . Jeżeli następnie zmienimy kierunek działania naprężeń o  $\angle l, m$ , to składowa wpływu uszkodzenia  $D_l(\tau_0)$  na kierunek  $m$  będzie następująca

$$D_m(\tau_0) = D_l(\tau_0) \cos \angle l, m. \quad (11.20)$$

Przy uwzględnieniu dłuższego okresu działania obciążenia oczywiście zachodzi

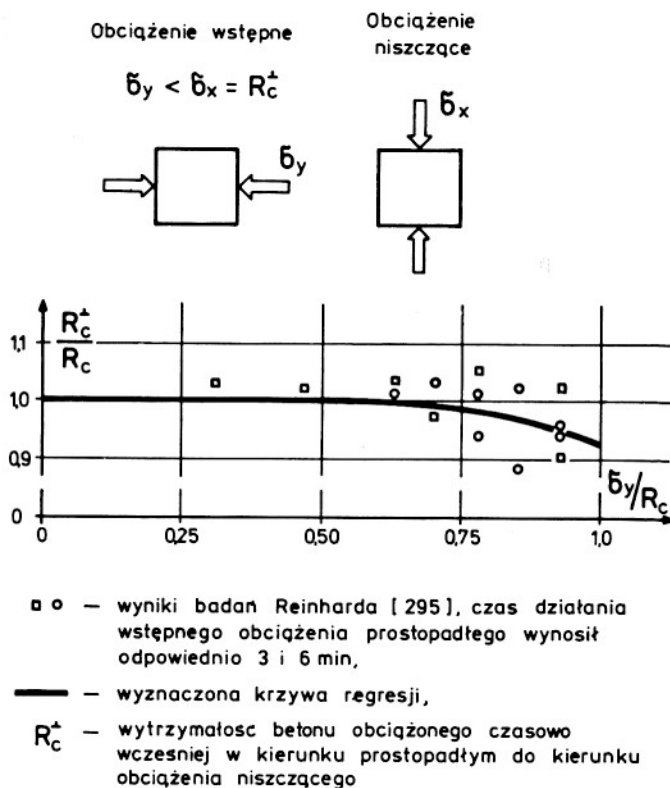
$$D_m(t, \tau_0) = D_l(t, \tau_0) \cos \angle l, m. \quad (11.21)$$

Uzasadnieniem przyjętych założeń są cytowane wcześniej wyniki badań Robinsona [287] (rys. 7.4) i eksperymenty przeprowadzone przez Reinhardta [295], których rezultaty przedstawiono na rys. 11.11. Badania te dotyczyły wpływu krótkotrwałego ściśnięcia próbki, w kierunku prostopadłym do kierunku późniejszego niszczenia, na wytrzymałość betonu przy osiowym ściskaniu. Stwierdzono, że wcześniejsze obciążenie próbki w kierunku prostopadłym do kierunku niszczenia wpływa nieznacznie na obniżenie wytrzymałości betonu.



Rys. 11.10. Kierunkowość uszkodzenia - idea ujęcia problemu.

Fig. 11.10. Directive tendency of damage - approach to the problem.



Rys. 11.11. Wyniki badań Reinhardta [295].

Fig. 11.11. The results of Reinhardt's studies [295].

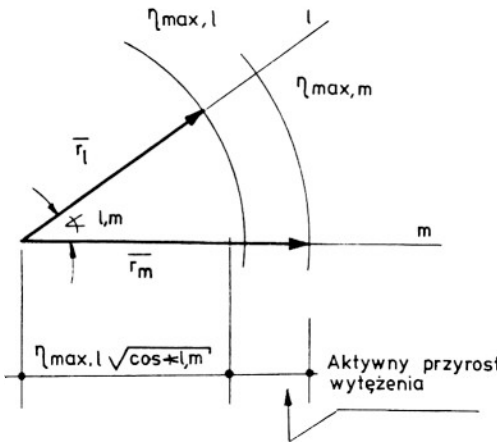
#### 11.6.2. Problem oceny maksymalnego wyłączenia betonu w warunkach dowolnych zmian kierunku obciążenia

Ze wzoru (11.21) przy wykorzystaniu (7.8) otrzymamy

$$\eta_m(t, \tau_0) = \eta_1(t, \tau_0) \sqrt{\cos \alpha} \quad (11.22)$$

Obliczanie maksymalnego stopnia wyłączenia betonu w warunkach dowolnych zmian wielkości i kierunku działania obciążenia (obciążenie wówczas nie spełnia warunku obciążenia prostego) może odbywać się wyłącznie w sposób przyrostowy. Podział na przyrosty musi być dokonany w ten sposób, aby na obszarze rozpatrywanego odcinka spełniało ono warunek obciążenia prostego. Ilustracją takiego sposobu obliczania wyłączenia jest rys. 11.12. Sposób ten polega na następującym rozumowaniu:

— każdy stan naprężenia działający w wybranym punkcie konstrukcji możemy przedstawić w postaci wektora o module



Rys. 11.12. Przyrost wyężenia przy zmianie kierunku działania obciążenia.

Fig. 11.12. The increment of effort at the change of the direction of the load action.

$$|\bar{r}| = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} = \sqrt{3\sigma_0^2 + \frac{2}{3}\sigma_1^2}. \quad (11.23)$$

Prosta działania wektora  $\bar{r}$  zawsze przechodzi przez środek układu współrzędnych naprężeń głównych, w związku z czym wektory działające wzdłuż dwóch kierunków leżą na jednej płaszczyźnie i można wyznaczyć kąt zawarty między nimi - rys. 11.12. Kąt ten będziemy traktować jako kąt zmiany kierunku obciążenia,

- jeżeli w chwili  $\tau_0$  w kierunku  $l$  działa tensor naprężenia reprezentowany przez wektor  $\bar{r}_1$  o intensywności  $\sigma_{i,1}$ , to wyężenie materiału odpowiadające temu kierunkowi jest równe  $\eta_{\max,1} = \sigma_{i,1} : \sigma_{i,gr,1}$
- jeżeli następnie odciążymy element (możemy zrobić to zawsze choćby myślowo) i zaczniemy go obciążać w kierunku  $m$ , to do momentu osiągnięcia poziomu wyężenia równego  $\eta_{\max,1} \sqrt{\cos \phi_{l,m}}$  nie wystąpią żadne dodatkowe uszkodzenia betonu, a tym samym odkształcenia plastyczne. Wystąpią one dopiero po przekroczeniu tego poziomu,
- czyli maksymalny stopień wyężenia (wpływający na destrukcję materiału) wyrazi się wzorem

$$\eta_{\max,m}(t, \tau_0) = \eta_{\max,1}(t, \tau_0) \sqrt{\cos \phi_{l,m}} + \frac{\sigma_{i,m}(t) - \sigma_{i,1}(\tau_0) \sqrt{\cos \phi_{l,m}}}{\sigma_{i,gr,m}(t)}. \quad (11.24)$$

Należy teraz odpowiedzieć na pytanie, w jaki sposób wyznaczyć kąt odpowiadający kierunkom działania tensora naprężeń, a szczególnie w złożonych stanach naprężenia.

Trzeba jeszcze zaznaczyć, że kierunki główne tensora naprężeń mogą zmieniać się wraz ze zmianą składowych tensora naprężenia i w związku z tym trzeba zwykle wektory  $\bar{r}_1$  i  $\bar{r}_m$  odnosić do przyjętego z góry niezmiennego układu współrzędnych, np.  $x, y, z$ . Ponieważ wzory pozwalające na przejście z kierunków naprężeń głównych na dowolne kierunki są podane w wielu podręcznikach [140, 174, 218], nie ma potrzeby ich przytaczać.

Wykorzystując zasady podane w niniejszym podrozdziale można zbudować algorytm pozwalający na wyznaczenie stopnia wytężenia przy obciążeniu nie spełniającym warunków obciążenia prostego.

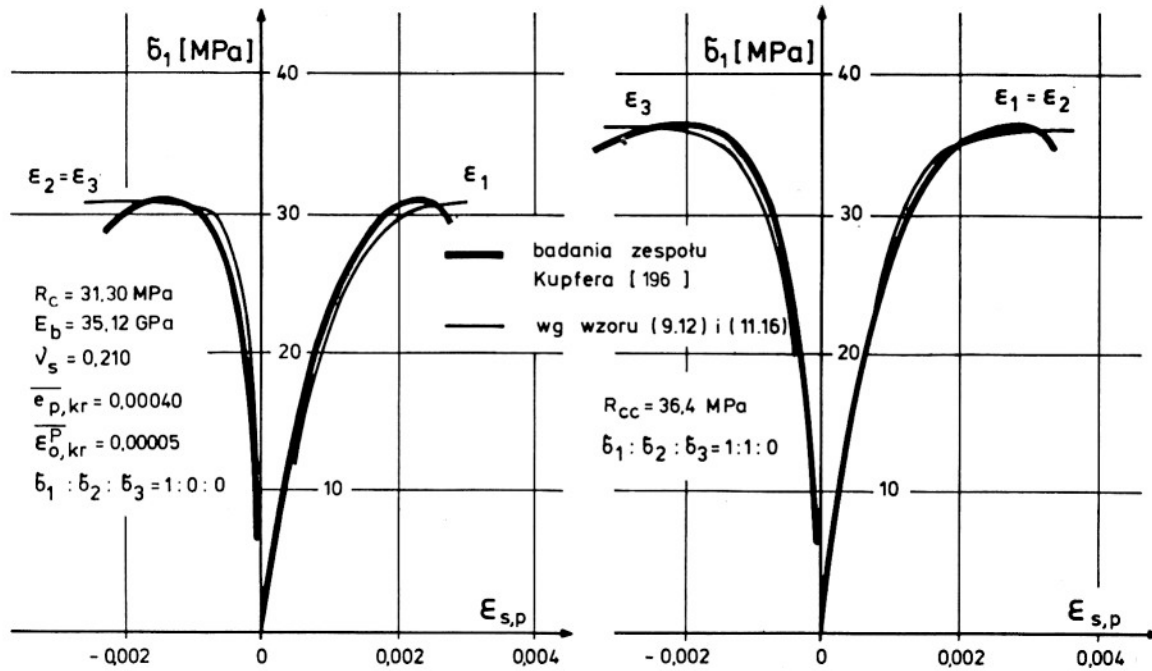
### 11.7. Weryfikacja doświadczalna równania konstytutywnego odkształceń plastycznych

Weryfikacji doświadczalnej otrzymanego równania (11.16) dokonamy wykorzystując wyniki badań zespołu Kupfera [196]. W badaniach tych obciążenie spełniało warunek obciążenia prostego, więc drugi człon wyrażenia (11.16) przyjmuje postać (11.12). Stałe materiałowe charakteryzujące wytrzymałościowe i sprężyste cechy betonu przyjęto za [132, 198], natomiast stałe określające plastyczne właściwości betonu wyznaczono analizując

T a b e l a 11.1

Stałe materiałowe określone dla betonu użytego w badaniach zespołu Kupfera [196]

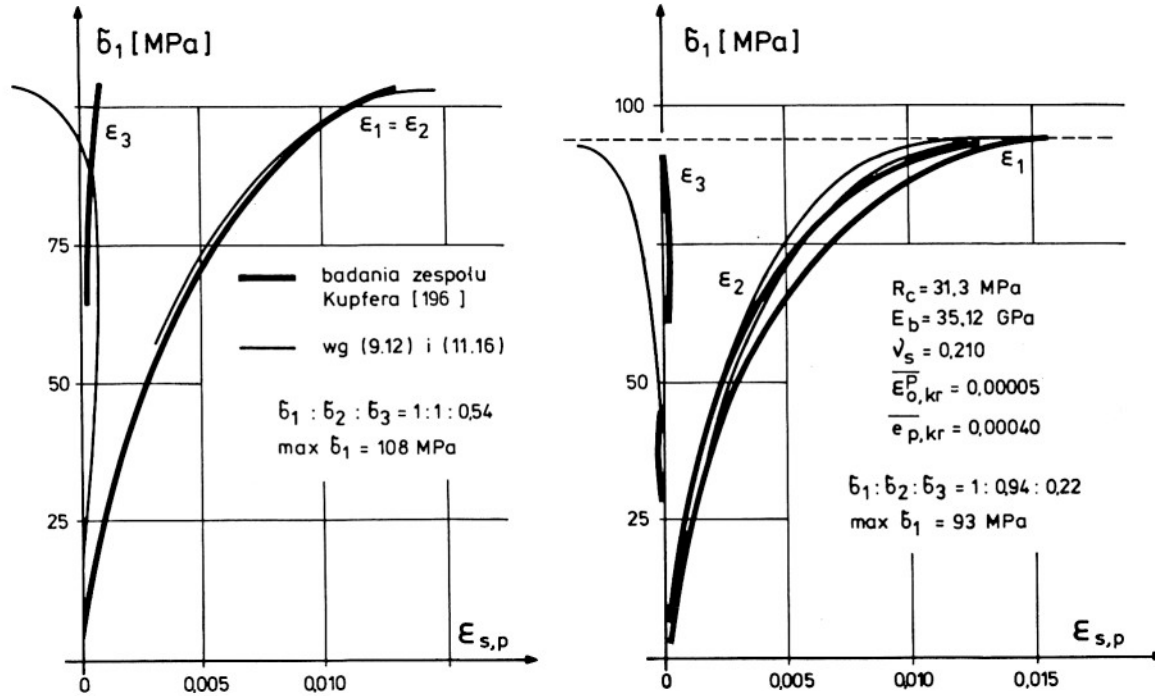
Wyznaczona wielkość	Oznaczenie	Wartość	Jednostki
Wytrzymałość przy prostym sciskaniu	$R_c$	31,3	MPa
Wytrzymałość przy równomiernym sciskaniu płaskim	$R_{cc}$	36,4	MPa
Moduł sprężystości	$E_b$	35,1	GPa
Współczynnik Poissona /dla odkształceń sprężystych/	$\nu_s$	0,21	—
Krytyczne plastyczne odkształcenia objętościowe	$\bar{\epsilon}_{o,kr}^p$	0,00005	—
Krytyczne plastyczne odkształcenia postaciowe	$\bar{e}_{p,kr}$	0,00040	—
Wielkość $\bar{\epsilon}_{o,kr}^p$ wyznaczono na rys. 11.4 a $\bar{e}_{p,kr}$ na rys. 11.6			



Rys. 11.13. Porównanie wyników badań z teoretycznymi przewidywaniami dla osiowego i płaskiego ściskania.

Fig. 11.13. Comparison of the test results obtained studies for axial and plane compressions with the theoretical expectations.





Rys. 11.14. Porównanie wyników badań z teoretycznymi przewidywaniami dla przestrzennego ściskania.

Fig. 11.14. Comparison of the results obtained for general compression with the theoretical expectations.

rezultaty badań - rys. 11.4 i 11.5. Wartości tych stałych zestawiono w tab. 11.1.

Na rysunkach 11.13 i 11.14 dokonano porównania rezultatów otrzymanych w badaniach [196] z teoretycznymi. Wydaje się, że obserwowana zbieżność potwierdza założenia poczynione w 11.1 i pozwala stwierdzić, że równanie (11.16) z dostateczną dokładnością opisuje odkształcalność betonu w różnych stanach obciążenia.

### 11.8. Możliwości uproszczeń równania konstytutywnego odkształceń plastycznych

Posługiwanie się tak złożonym równaniem konstytutywnym jest dosyć kłopotliwe (co nie ma większego znaczenia w wypadku stosowania metod numerycznych) i nie zawsze celowe. Już z danych przedstawionych na rys. 11.1 i 11.5 wynika, że plastyczne odkształcenia objętościowe są małe w jednoosiowych i płaskich stanach naprężenia. Należy się spodziewać, że będą jeszcze mniejsze w przypadku betonów o dużej szczelności  $w/c < 0,5$ . W cytowanych badaniach beton miał  $w/c = 0,85$ . Możemy więc w obliczeniach konstrukcji betonowych, w których dominują te stany naprężenia przyjąć, że

$$\epsilon_{ij}^{o,p} = 0, \text{ gdy } \begin{cases} \sigma_1 \neq 0, \text{ a } \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \\ \sigma_1 \neq 0, \text{ i } \sigma_2 \neq 0, \text{ a } \sigma_3 = 0. \end{cases} \quad (11.25)$$

Oprócz tego zauważmy (rys. 11.8), że dla jednoosiowych i płaskich stanów naprężenia możemy przyjąć średnią wartość funkcji  $\bar{\epsilon}_{p,kr} = \bar{\epsilon}_{p,\acute{s}r}$ . Wówczas równanie (11.12) sprowadza się do zależności

$$\epsilon_{ij}^p = \frac{3}{2} \bar{\epsilon}_{p,\acute{s}r} \frac{s_{ij}^*}{\sigma_i^*} \left| \ln \left[ 1 - (\eta_{\max})^2 \right] \right|, \quad (11.26)$$

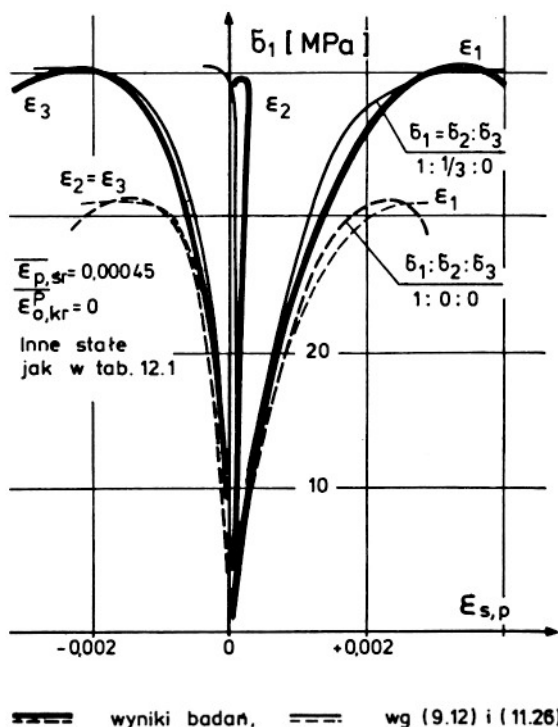
a na mocy (11.1) można przyjąć, że

$$\epsilon_{ij}^p = e_{ij}^p. \quad (11.27)$$

Odkształcenia plastyczne odpowiadające kierunkowi osiowego ściskania wyrażą się wzorem

$$\epsilon_p = \bar{\epsilon}_{p,\acute{s}r} \left| \ln \left[ 1 - (\eta_{\max})^2 \right] \right|. \quad (11.28)$$

Podstawiając za  $\bar{\epsilon}_{p,\acute{s}r} = 0,5 \bar{\varphi}_p \bar{R}_c$  (parametr  $\bar{\varphi}_p$  był definiowany w rozdziale 10 i w poprzednich pracach autora jako miara odkształceń plastycznych) otrzymamy równanie wykorzystywane w poprzednich pracach autora, np.



Rys. 11.15. Weryfikacja wzoru (11.26) w oparciu o badania [196].

Fig. 11.15. Verification of Eq. (11.26) based on studies in [196].

w [43,47,50]. Porównania wyników otrzymywanych z uproszczonego równania (11.26) z wynikami badań [196] dokonano na rys. 11.15, uzyskując zadowalającą zgodność.

### 11.9. Obliczanie odkształceń plastycznych dla wybranych dróg wzrostu obciążenia doraźnego według równania uproszczonego

#### 11.9.1. Proste ściskanie

Dewiator naprężenia  $s_{ij}^{\#}$ , intensywność naprężeń  $\sigma_i^{\#}$  i dewiator  $s_{ij}^{\#}$ :  $\sigma_i^{\#}$  wyrażają się w tym przypadku wzorami

$$s_{ij}^{\#} = \sigma_x \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad \sigma_i^{\#} = \sigma_x, \quad \frac{s_{ij}^{\#}}{\sigma_i^{\#}} = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3} \end{vmatrix}, \quad (11.29)$$

gdzie  $\sigma_x$  jest naprężeniem ściskającym. Maksymalny stopień wyężenia wyraża się wzorem

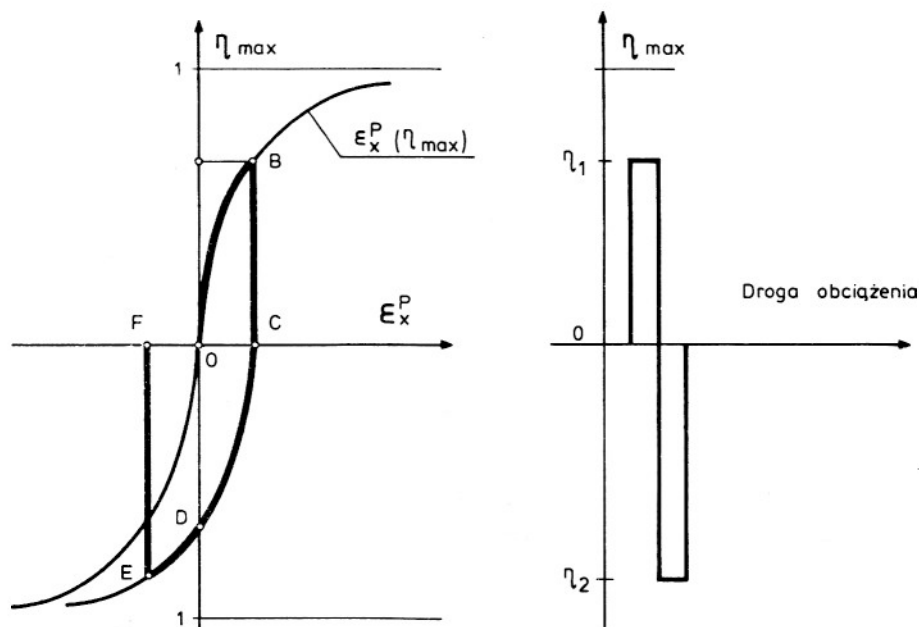
$$\eta_{\max} = \frac{\sigma_x}{R_c} . \quad (11.30)$$

Odształcenia plastyczne w rozpatrywanym przypadku będziemy wyznaczać z wzoru

$$\epsilon_{ij}^p = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \bar{\epsilon}_{p, \text{sr}} \left| \ln \left[ 1 - \left( \frac{\sigma_x}{R_c} \right)^2 \right] \right| . \quad (11.31)$$

### 11.9.2. Odształcenia plastyczne przy rozciąganiu osiowym poprzedzonym ścisnięciem wzdłuż tej samej osi

Obciążenie przemienne, mimo że działa wzdłuż tej samej osi, nie spełnia już warunków obciążenia prostego z uwagi na zmianę znaku. Odształcenia plastyczne w tym przypadku można łatwo wyznaczyć, dokonując całko-



Rys. 11.16. Odształcenia plastyczne w przypadku obciążenia przemiennego.

Fig. 11.16. Plastic strain for alternating load.

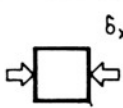
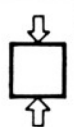
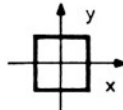
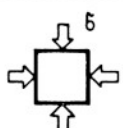
wania wzdłuż obu dróg:  $0-\eta_1$  i  $0-\eta_2$ , a następnie dodając do siebie otrzymane wyniki. Ilustruje to rys. 11.16.

### 11.9.3. Odształcenia plastyczne przy ściskaniu przebiegającym kolejno wzdłuż dwóch prostopadłych kierunków

Odształcenia te obliczamy superponując wyniki uzyskane dla obu kierunków traktowanych niezależnie, to znaczy - obciążenie występujące w drugim etapie traktujemy także jako obciążenie pierwotne, zgodnie z założeniem o kierunkowości uszkodzenia. Wyniki tych obliczeń podano w tab. 11.2, gdzie dla porównania podano również wielkość odształceń plastycznych, powstających w warunkach płaskiego równomiernego stanu naprężenia.

T a b e l a 11.2

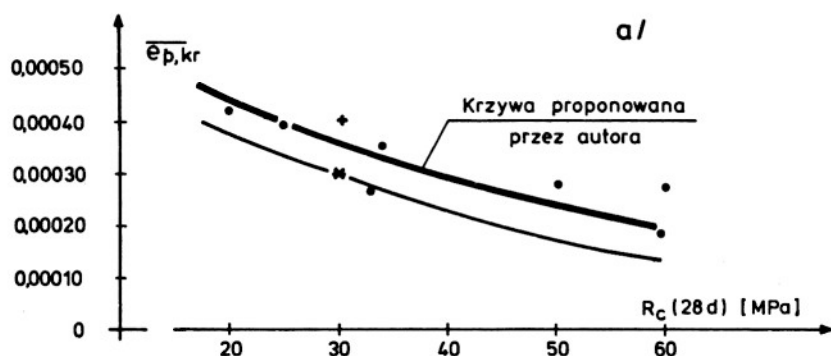
Odształcenia plastyczne betonu w płaskim stanie naprężenia jako funkcja drogi obciążenia

Sposób obciążenia		$\frac{\epsilon_{x,p}}{\epsilon_{p,sr}}$	$\frac{\epsilon_{y,p}}{\epsilon_{p,sr}}$	$\frac{\epsilon_{z,p}}{\epsilon_{p,sr}}$
Ściskanie kolejno w kierunkach prostopadłych				
Etap I		1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
Etap II		$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$
SUMA $\delta = 0,80 R_c$ $\eta = 0,80$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1
Równomierne ściskanie płaskie				
$\delta = 0,80 R_c$ $\eta = 0,6896$		$0,65 \cdot \frac{1}{2}$	$0,65 \cdot \frac{1}{2}$	-0,65

#### 11.9.4. Uwagi na temat obliczania odkształceń plastycznych w warunkach dowolnych przebiegów obciążenia doraźnego

Pamiętając o tym, że tylko dewiatorowa część odkształceń plastycznych zależy od drogi obciążenia, możemy ją wyznaczyć wykorzystując ustalenia z rozdz. 7.6 (wzór (7.23)) dotyczące przyrostowego obliczania stopnia wyciężenia betonu poddanego dowolnym obciążeniom.

Obliczenia należy przeprowadzać w sposób przyrostowy całkując numerycznie równanie (11.8) wzdłuż drogi obciążenia.



- oszacowanie wg DIN - 1045,
- \* badania autora [50],
- + badania zespołu Kupfera [196,198],
- Badania Rüscha i zespołu [290],

b/

Klasa betonu	MPa	B 20	B 25	B 30	B 35	B 40	B 50
$R_c(28)$	MPa	21,18	25,81	31,38	35,30	39,22	47,07
$\bar{\epsilon}_{p,kr} \cdot 10^5$	—	44	39	35	33	30	24
$\bar{\epsilon}_{o,kr}^p \cdot 10^5$	—	10	7	5	4	3	2
$\bar{\epsilon}_{p,sr} \cdot 10^5$	—	48	43	38	36	33	26

Rys. 11.17. Parametry charakteryzujące plastyczną odkształcalność betonu; a) wyniki badań, b) proponowane wartości liczbowe.

Fig. 11.17. The parameters characterizing plastic deformability of concrete, a) results of studies, b) suggested numerical values.

### 11.10. Wielkości liczbowe parametrów charakteryzujących plastyczne odkształcenia betonu

Na rysunku 11.17a podano wielkość parametru  $\bar{\epsilon}_{p,kr}$  oszacowaną na podstawie badań i zaleceń DIN-1045. Na tym tle zaznaczono krzywą proponowaną przez autora. Przyjmując następnie za tab. 9.1 zależność między klasą betonu i wytrzymałością średnią  $R_c(28)$  podano na rys. 11.17b proponowane wielkości  $\bar{\epsilon}_{p,kr}$  w funkcji klasy betonu.

Precyzyjne oszacowanie stałej określającej wielkość plastycznych odkształceń objętościowych jest obecnie (co zaznaczono już wcześniej) trudne z uwagi na niewielką liczbę wiarygodnych badań. Na rysunku 11.4 oszacowano wielkość  $\bar{\epsilon}_{o,kr}^p$  na 0,00005 dla betonu o  $R_c = 31,3$  MPa. W oparciu o pracę Kotsovosa i Newmana [189] ustalono wartości tego parametru dla innych klas betonu.

Podsumowując, można stwierdzić, że wraz ze wzrostem klasy betonu maleje jego odkształcalność plastyczna.

## 12. UJĘCIE TEORETYCZNE LEPKICH ODKSZTAŁCEŃ BETONU NIEWYSYCHAJĄCEGO

### 12.1. Stale materiałowe określające lepkie właściwości betonu

#### 12.1.1. Wprowadzenie do zagadnienia

Na razie rozpatrzmy lepkie odkształcenia betonu izolowanego, nie podlegającego wysychaniu, czyli tzw. pełzanie podstawowe [143,251,291]. Parametrami charakteryzującymi lepkie cechy materiału są:

- miara odkształceń lepkich  $C_1[\tau, (t - \tau)]$  stanowiąca liniową część miary odkształceń plastyczno-lepkich (8.2) i (10.3) lub stosowana w literaturze zachodniej [95,96,228,291,226] tzw. charakterystyka pełzania  $P_1[\tau, (t - \tau)]$ . Między tymi stałymi zachodzi następująca zależność:

$$C_1[\tau, (t - \tau)] = \frac{P_1[\tau, (t - \tau)]}{E_b(\tau = 28d)}, \quad (12.1)$$

- współczynnik Poissona dla odkształceń lepkich  $\nu_1[\tau, (t - \tau)]$ .

#### 12.1.2. Miara odkształceń lepkich betonu izolowanego

W literaturze poświęconej reologii betonu [8-15,19,20,24-27,31,50,61,62,65,77,78,151-153,178,179,222,228,237,240,251,255,313,315,328,329,340] można znaleźć wiele różnych propozycji matematycznej konstrukcji miary odkształceń lepkich. Szczegółowej analizy tych propozycji dokonano np.

w monograficznych opracowaniach Aleksandrowskiego [8,10,20], rozpatrując zalety i wady każdej z nich.

Autor jest zdania [50], że wystarczającą dokładność zapewnia przyjęcie miary w postaci znanej z opracowań Masłowa [222] i Arutiuniana [19] i wykorzystaniu zależności (10.6):

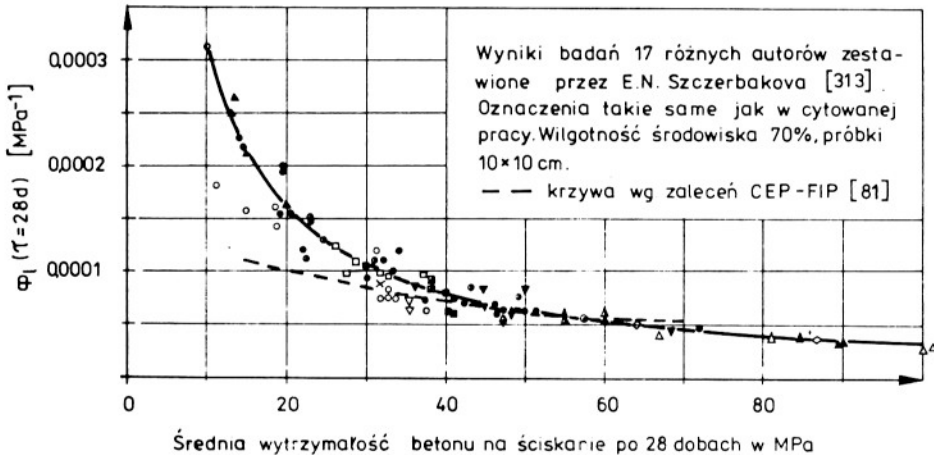
$$C_1[\tau, (t-\tau)] = \varphi_1(\tau) \cdot f_1(t-\tau), \quad (12.2)$$

$$f_1(t-\tau) = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-\gamma_i(t-\tau)}, \quad \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (12.3)$$

Zgodnie z (10.7) i (10.8)  $\varphi_1(\tau)$  jest równe

$$\varphi_1(\tau) = \frac{\overline{\varphi_1}}{U(\tau)}. \quad (12.4)$$

Parametry liczbowe występujące w (12.3) i (12.4)  $a_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $\overline{\varphi_1}$  oraz  $U(\tau)$  (wzór (4.9)) należy wyznaczać eksperymentalnie lub, w przypadku braku takich danych doświadczalnych, można parametry te przyjmować z tab. 12.1.



Rys. 12.1. Zależność miary odkształceń lepkich od klasy betonu.

Fig. 12.1. Measure of viscous strains versus the class of concrete.

Końcową wartość miary odkształceń lepkich betonu izolowanego podaną w tab. 12.1 wyznaczono wykorzystując wzór (12.1) na podstawie zaleceń CEB-FIP [81] i polskich przepisów normowych PN-75/B-06250 i PN-75/B-06263 oraz analizy wyników badań (np. rys. 12.1) podanych w opracowaniach różnych autorów [8-16, 50, 61, 62, 67, 69, 151-153, 178, 200-203, 210, 237-240, 250, 251, 263, 281, 290-291, 303, 304, 313-315, 322, 328-331]. Parametry funk-



T a b e l a 12.1

Stałe materiałowe charakteryzujące lepkie właściwości betonu

Klasa betonu		Oznaczenia	Jednostki	B 15	B 20	B 25	B 30	B 35	B 40	B 50
Końcowa wartość miary odkształceń lepkich betonu izolowanego	beton zwykły	$\bar{\Psi}_l$	$MP_a^{-1}$	$52 \cdot 10^{-5}$	$44 \cdot 10^{-5}$	$4,0 \cdot 10^{-5}$	$3,7 \cdot 10^{-5}$	$3,5 \cdot 10^{-5}$	$3,3 \cdot 10^{-5}$	$3,0 \cdot 10^{-5}$
	beton lekki			$10 \cdot 10^{-5}$	$8,0 \cdot 10^{-5}$	$6,9 \cdot 10^{-5}$	$6,2 \cdot 10^{-5}$	$5,5 \cdot 10^{-5}$	—	—
Parametry liczbowe występujące w funkcji opisującej narastanie odkształceń lepkich w czasie		$f_{l(t-\tau)}$	—	$f_{l(t-\tau)} = 1 - \sum_{i=1}^n a_i \cdot e^{-\delta_i (t-\tau)}$						
		$a_i$	—	$a_1 = 0,32$		$a_2 = 0,44$		$a_3 = 0,24$		
		$\delta_i$	doby <sup>-1</sup>	$\delta_1 = 1,0$		$\delta_2 = 0,007$		$\delta_3 = 0,0005$		
Współczynnik Poissona dla odkształceń lepkich		$\nu_l$	—	0,19	0,18	0,17	0,17	0,16	0,15	0,14
<p>Wartości <math>\bar{\Psi}_l</math> określono na podstawie zaleceń CEB-FIP [114] oraz wg PN-75/B-06250 i PN-75/B-06263. Rzeczywiste wartości <math>\bar{\Psi}_l</math> mogą się różnić od przyjętych o <math>\pm 15\%</math> w zależności od rodzaju użytego kruszywa [250, 251, 291]. Podane wartości dotyczą betonu o konsystencji gęstoplastycznej przy stosowaniu betonu o konsystencji wilgotnej należy podane wartości zmniejszać a przy konsystencji plastycznej zwiększać o 10% [291].</p>										

cji  $f_1(t-\tau)$  dobrano na podstawie analizy wieloletnich badań Troxella, Raphaela i Davisa [325].

### 12.1.3. Współczynnik Poissona dla odkształceń lepkich

Informacje na temat współczynnika Poissona dla odkształceń lepkich są dosyć skąpe i niepewne [10,30,66,143,165,164,166,250,252,312], sądzi się jednak (Neville [250]), że osiąga on niższe wartości niż współczynnik sprężystych deformacji poprzecznych. Dopuszczalne jest też założenie [10,20,251] o niezależności współczynnika Poissona odkształceń lepkich od wieku betonu i długości okresu działania obciążenia [143,166,250,251]. W tabeli 12.1 podano oszacowane na podstawie literatury wartości tego współczynnika.

### 12.2. Równanie konstytutywne dla odkształceń lepkich betonu izolowanego

Równanie to zapiszemy w następującej postaci:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^1(t) = & \sigma_{ij}(\tau_0) \left\{ C_1 [\tau_0, (t - \tau_0)] (1 + \nu_1) - \right. \\ & - \sigma_0(\tau_0) \beta C_1 [\tau_0, (t - \tau_0)] \nu_1 \delta_{ij} + \\ & + \int_{\tau_0}^t \left\{ \frac{\partial \sigma_{ij}(\tau)}{\partial \tau} \left\{ C_1 [\tau, (t - \tau)] (1 + \nu_1) \right\} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial \sigma_0(\tau)}{\partial \tau} \beta C_1 [\tau, (t - \tau)] \nu_1 \delta_{ij} \right\} d\tau. \end{aligned} \quad (12.5)$$

W przypadku jednoosiowego stanu naprężenia  $\sigma_{11} = \sigma_x \neq 0$ , a dla wszystkich  $i, j \neq 1$ ,  $\sigma_{ij} = 0$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^1(t) = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_1 \end{vmatrix} \left\{ \sigma_{11}(\tau_0) C_1 [\tau_0, (t - \tau_0)] + \right. \\ & + \int_{\tau_0}^t \frac{\partial \sigma_{11}(\tau)}{\partial \tau} C_1 [\tau, (t - \tau)] d\tau \left. \right\}. \end{aligned} \quad (12.6)$$

Jest to klasyczne równanie Masłowa [222], Arutiuniana [19], oparte na założeniu, że miara odkształceń lepkich nie zależy od rodzaju stanu naprężenia. Niektórzy badacze podważają to założenie [162,163,239,312], sugerując, że zdolność betonu do lepkiego odkształcania się maleje w

złożonych stanach naprężenia. Wydaje się, że rzecz polega na przeoczeniu faktu, iż współczynnik Poissona w przypadku odkształceń lepkich jest niższy niż dla odkształceń sprężystych  $\nu_1 < \nu_s$  [250]. Powoduje to, że przyjmując równość tych współczynników (przyjmując wartość większą) otrzymujemy zaniżoną wielkość miary pełzania w złożonych stanach naprężenia.

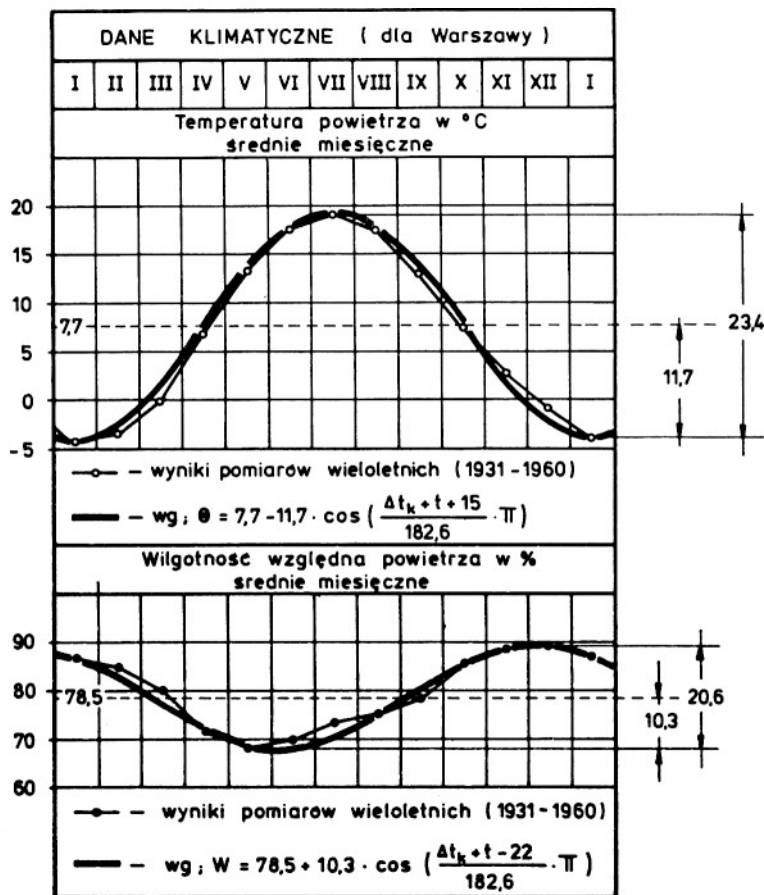
### 13. WARUNKI HIGROTHERMICZNE ŚRODOWISKA A ODKSZTAŁCALNOŚĆ BETONU

#### 13.1. Sprecyzowanie problemu

W dotychczasowych rozważaniach zajmowano się odkształcalnością betonu odizolowanego od otaczającego go środowiska. Ponieważ stanowi to poważne zawężenie problemu, w tym podrozdziale zostanie przeanalizowana odkształcalność betonu w warunkach wymiany wody z otaczającym go powietrzem, którego warunki higrotermiczne mogą zmieniać się w określonych dla naszego klimatu granicach - rys. 13.1 [188].

Temperatura konstrukcji jest nie tylko funkcją temperatury otaczającego ją powietrza, ale również innych czynników, takich jak nasłonecznienie i wiatr [112,172,199,204,261]. Na rysunkach 13.2 i 13.3 pokazano w jakich granicach może się zmieniać temperatura konstrukcji mostowych. Wydaje się, że dla warunków panujących na terytorium Polski można przyjąć, że temperatura mostowych konstrukcji betonowych może się zmieniać w granicach od  $-20^{\circ}\text{C}$  do  $+60^{\circ}\text{C}$ . Trzeba też liczyć się z okresowymi zmianami temperatury w poszczególnych punktach konstrukcji (nierównomiernym rozkładem pola temperatur) powodującymi nieraz w czasie cyklu dobowego znaczne dodatkowe naprężenia w elementach konstrukcji [172,204,261] - tab. 2.2.

Analiza nierównomiernego pola temperatur w konstrukcjach mostowych była przedmiotem szeregu prac, jak np. [112,172,204,261] i nie będzie tutaj rozpatrywana. Warto zwrócić natomiast uwagę na to, że zmiany temperatury konstrukcji mostowych (w rozważanych granicach) nie wpływają w większej mierze na wielkość odkształceń sprężysto-plastyczno-lepkich (rys. 13.4 i 13.5) [7,10,17,36,50,58,86,117,131,220,221,250,290,312] betonu. Szerzej ten problem analizowano w pracy autora [50]. Nie mogą być natomiast pomijane odkształcenia termiczne, które zostaną omówione w dalszej części rozdziału.



Rys. 13.1. Średnie temperatury miesięczne i średnie wilgotności względne w Polsce środkowej [188].

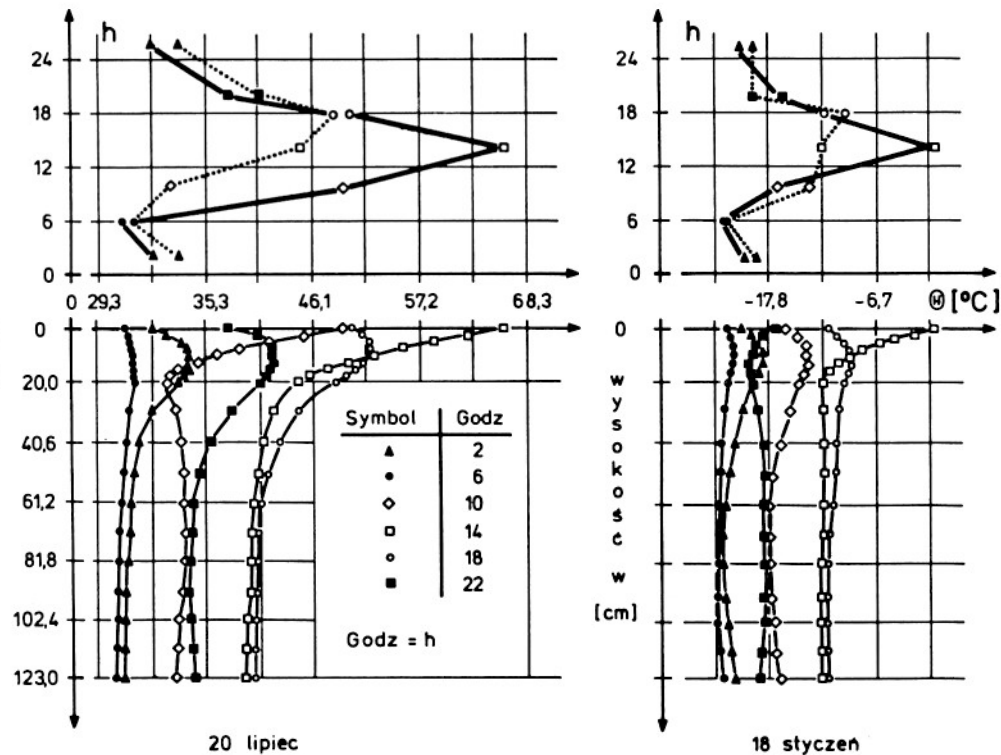
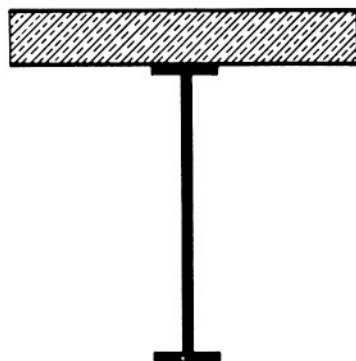
Fig. 13.1. Average monthly temperatures and mean relative humidity in Mid-Poland [188].

### 13.2. Woda w betonie

Ograniczono się tu do podania kilku podstawowych informacji, niezbędnych dla logicznej ciągłości przedstawionych wywodów. Obszerne omówienie tego problemu znajdzie czytelnik w monografiach Litzela [239], Aleksandrowskiego [10], Neville'a [250] czy Kasperkiewicza [171].

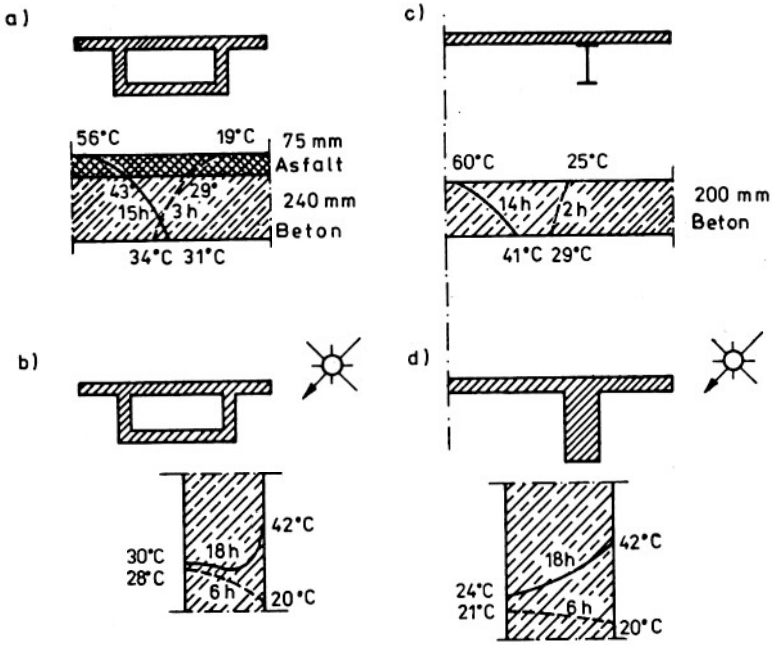
Względną ilość wody zawartej w betonie, w chwili jego zarobienia, określa tzw. współczynnik wodno-cementowy  $w/c$ . Po zakończeniu procesu wiązania wodę zawartą w betonie można podzielić na części zależne od form jej związania [239]:

Most zespolony bez nawierzchni  
 Stan Missouri, USA  
 Szerokosc geograficzna - 40° N

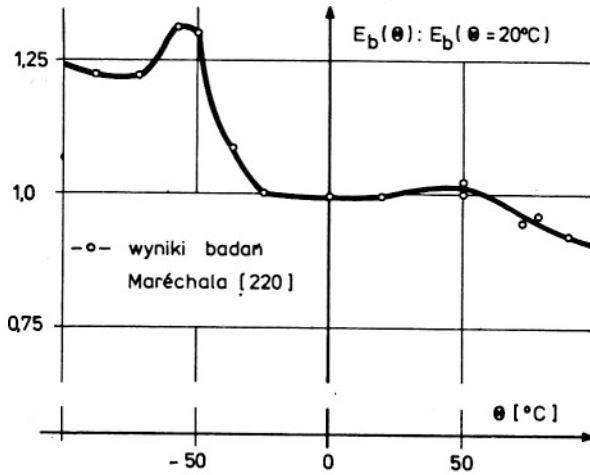


Rys. 13.2. Rozkład temperatury w moście zespolonym [112].

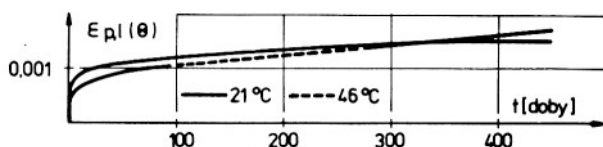
Fig. 13.2. Temperature distribution in composite bridge [112].



Rys. 13.3. Rozkład temperatury w wybranych punktach przęseł betonowych [204].  
 Fig. 13.3. Temperature distribution at some selected points of concrete spans [204].

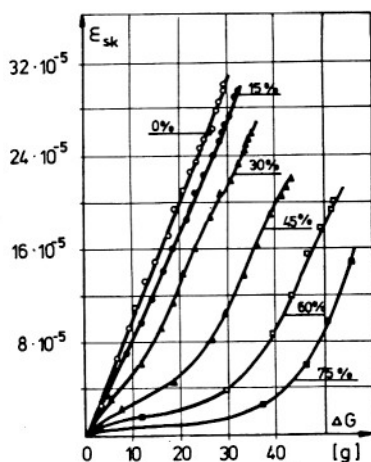


Rys. 13.4. Wpływ temperatury na zmianę modułu sprężystości betonu.  
 Fig. 13.4. The effect of temperature on the elastic modulus of concrete.



Rys. 13.5. Wpływ temperatury na wielkość odkształceń plastyczno-lepkich.

Fig. 13.5. The effect of temperature on visco-plastic deformations.



Rys. 13.6. Zależność między skurczem, a masą utraconej przez próbkę wody.

Fig. 13.6. The relationship between shrinkage of specimens and the mass of water lost by it.

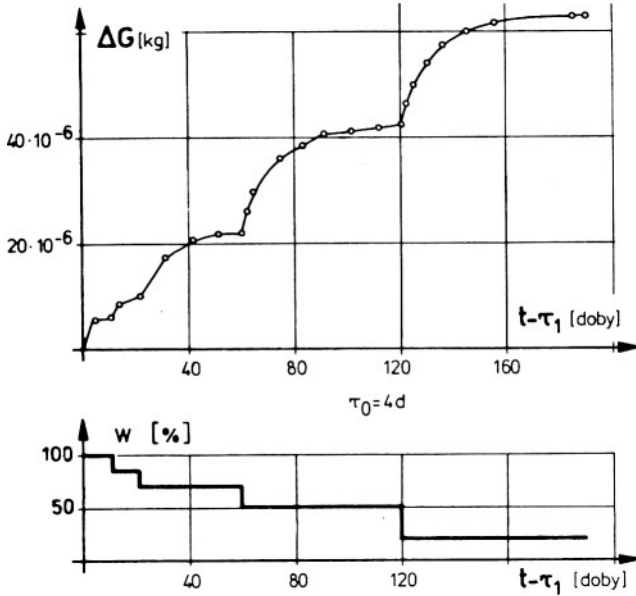
- część związaną chemicznie (stechiometrycznie),
- część związaną fizykochemicznie (strukturalnie i adsorpcyjnie),
- część związaną fizyko-mechanicznie (kapilarnie).

Woda chemicznie związana nie może być wymieniana z otoczeniem. Wymianie tej podlega pozostała niechemicznie związana woda, z tym, że dopiero usuwanie wody, związanej adsorpcyjnie wpływa na wielkość skurczu i pęcznienia betonu.

Przykładową zależność między skurczem i utratą wody z próbek (wykonanych z cementu i sproszkowanej krzemionki) pokazano na rys. 13.6. W czystych zaczynach wielkości te są wzajemnie proporcjonalne, ponieważ nie występuje tam woda kapilarna i usuwaniu ulega wyłącznie woda adsorpcyjna. Jednakże mieszanki, w których dodano sproszkowaną krzemionkę, zawierają pustki kapilarne nawet przy pełnej hydratacji zaczynu. Opróżnianie kapilar powoduje utratę wody bez skurczu, lecz po usunięciu wody kapilarnej następuje usuwanie wody adsorpcyjnej, co powoduje skurcz.

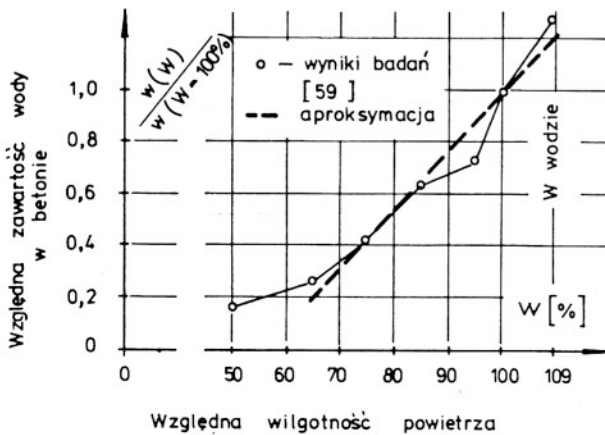
Na wielkość zmian względnej wilgotności adsorpcyjnej betonu wpływają następujące czynniki:

- warunki klimatyczne środowiska,
- wymiary rozpatrywanego elementu (tzw. grubość zastępcza),
- wielkość współczynnika wodno-cementowego,
- skład betonu,
- wiek betonu w chwili zmiany warunków higrometrycznych środowiska,



Rys. 13.7. Wyparowywanie wody z nieobciążonego betonu.

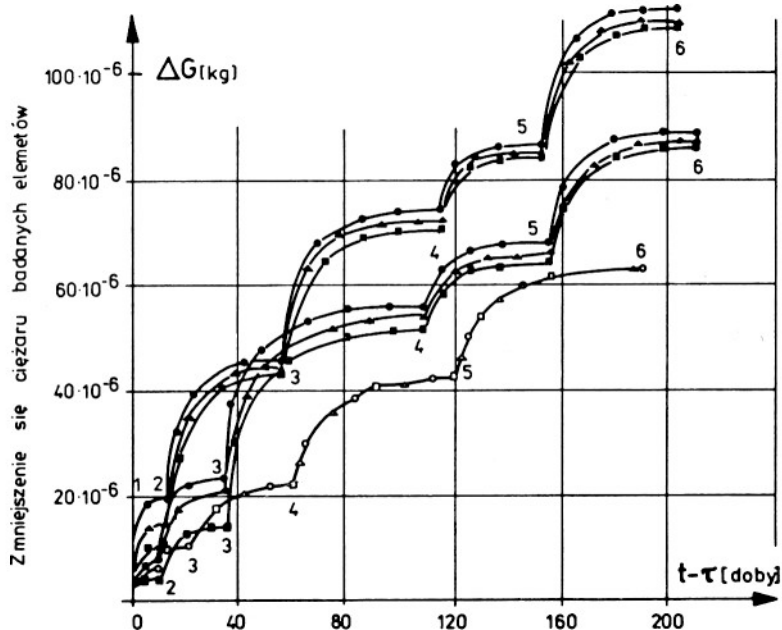
Fig. 13.7. The evaporation of water from nonloaded concrete.



Rys. 13.8. Zależność wilgotności względnej próbki betonowej od warunków jej przechowywania.

Fig. 13.8. The relationship between the relative humidity of a concrete specimen and the way of its storage.





Wilgotność względna w poszczególnych przedziałach czasowych jest równa:  
1-2 - 99%, 2-3 - 85%, 3-4 - 70%, 4-5 - 48%, 5-6 - 21%.

Stożek wyłączenia betonu w badanych elementach odpowiednio wynosi:

- ○ ○ -  $\eta = 0,75$
- ▲ ▲ ▲ -  $\eta = 0,40$
- ■ ■ -  $\eta = 0$

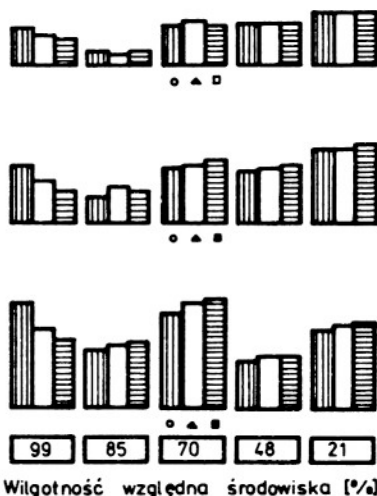
$$\frac{w}{c} = 0,24 - \square \circ \triangle$$

$$\frac{w}{c} = 0,34 - \bullet \circ \triangle$$

$$\frac{w}{c} = 0,44 - \blacktriangle \circ \triangle$$

Ubytek ciężaru badanych elementów

$10 \cdot 10^{-6} \text{ kg}$



Rys. 13.9. Wpływ obciążenia i warunków higrometrycznych środowiska na ubytek masy badanych próbek.

Fig. 13.9. The effect of loading and hygrometric conditions of the environment on the mass decrements of concrete specimens.

- długość okresu wysuszania lub nawilgacania betonu,
- wielkość i znak obciążenia oraz inne.

Tylko wpływ niektórych z wymienionych czynników został sprawdzony przez bezpośrednie badania eksperymentalne.

Wpływ wilgotności zewnętrznej środowiska na ilość wyparowanej z betonu lub adsorbowanej wody jest bezsporny - rys. 13.7 [231] i 13.8 [59]. Podnoszony przez różnych badaczy [10,238,239,240] wpływ obciążenia ściskającego na ilość wyparowanej z betonu wody (a tym samym na jego skurcz) nie został potwierdzony wynikami badań eksperymentalnych [231] - rys. 13.9, natomiast za udowodniony można uważać wpływ obciążeń rozciągających [6,7,10,50,239], których działanie przyspiesza wyparowywanie wody z betonu. Szczegółowo te zagadnienia omówiono w pracach autora [46,47,50]. Ubytek wody z betonu w dowolnej chwili  $t$  wyrazimy w sposób następujący:

$$\Delta g(t) = g(\tau_1) - g(t) = \frac{\Delta G(t)}{\gamma(\tau_1)}, \quad (13.1)$$

- gdzie:  $g(\tau_1)$  - względna początkowa (odpowiadająca momentowi zakończenia pielęgnacji  $\tau_1$ ) zawartość wody adsorpcyjnej w betonie,  
 $g(t)$  - aktualna względna adsorpcyjna wilgotność betonu,  
 $\Delta G(t)$  - masa wody adsorpcyjnej, która wyparowała z betonu w czasie  $t - \tau_1$ ,  
 $\gamma(\tau_1)$  - początkowa, odpowiadająca momentowi zakończenia pielęgnacji, masa betonu.

Dalej zakładamy, że względna ilość wody adsorpcyjnej, jaka może wyparować z betonu w warunkach zmiennej wilgotności jest określona przez wyrażenie:

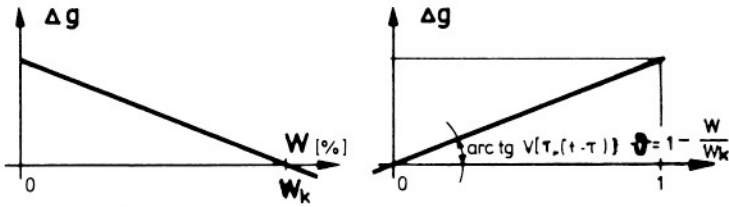
$$\Delta g(t) = \vartheta(\tau_1) V[\tau_1, (t - \tau_1)] + \int_{\tau_1}^t \frac{d\vartheta}{d\tau} V[\tau, (t - \tau)] d\tau, \quad (13.2)$$

gdzie

$$\vartheta(\tau) = 1 - \frac{W(\tau)}{W_k}, \quad (13.3)$$

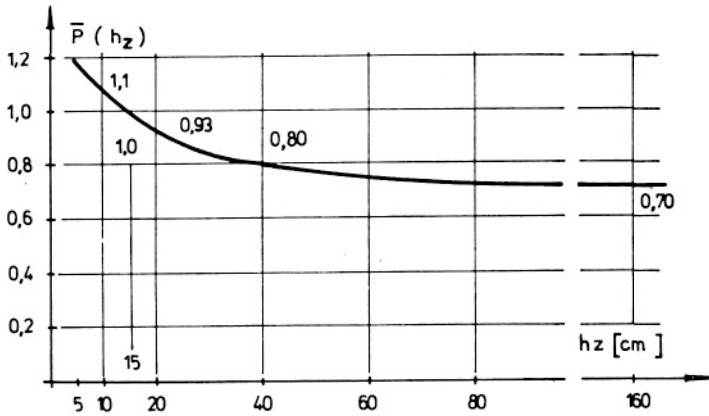
- $W(\tau)$  - względna wilgotność powietrza w funkcji czasu,  
 $W_k$  - wilgotność krytyczna, przy której nie występuje wymiana wody z otoczeniem. Według różnych badań [10,59,210,250,325] jest ona równa 94-100%.

Funkcja  $V[\tau, (t - \tau)]$  określa względną ilość wody, jaka może wyparować z betonu w czasie  $(t - \tau)$  w wyniku zmiany wilgotności względnej otaczającego środowiska (w chwili  $\tau$ ) z  $W_k$  na zerową - rys. 13.10



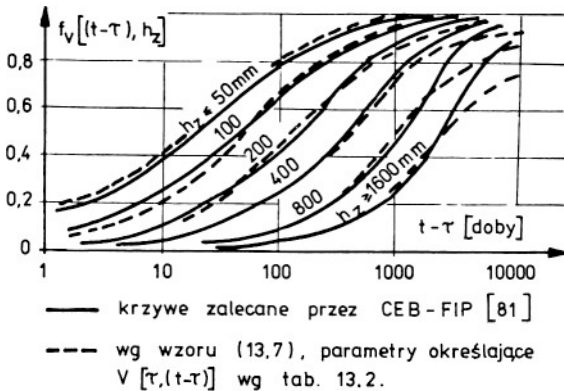
Rys. 13.10. Przyjęta zależność między wilgotnością względną środowiska, a względną ilością wymienionej z otoczeniem wody.

Fig. 13.10. The assumed relationship between the relative humidity of the environment and the relative amount of water exchanged with the environment.



Rys. 13.11. Parametr  $\bar{p}$  jako funkcja grubości zastępczej elementu betonowego.

Fig. 13.11. Parameter  $\bar{p}$  as the function of the equivalent thickness of a concrete element.



Rys. 13.12. Porównanie krzywych zalecanych przez CEB-FIP z wyznaczonymi według wzoru (13.7).

Fig. 13.12. The curves recommended by CEB-FIP compared with those determined from Eq. (13.7).

$$V[\tau, (t - \tau)] = p(\tau) f_v(t - \tau). \quad (13.4)$$

Zakładamy, że

$$p(\tau) = \frac{\bar{p}(h_z)}{U(\tau)}. \quad (13.5)$$

Parametr  $\bar{p}$  określa, jaka część wody adsorpcyjnej może wyparować z elementu o grubości zastępczej  $h_z$ , gdy  $U(\tau) = 1$ . Na rysunku 13.11 podano zależność tego parametru od grubości zastępczej elementu betonowego. Zależność tę przyjęto adaptując do naszego podejścia ujęcie zawarte w zaleceniach CEB-FIP [81]. Grubość zastępcza jest definiowana w pracach [81, 114, 291] następująco:

$$h_z = \lambda \frac{2F}{\Omega}, \quad (13.6)$$

$F$  - oznacza pole powierzchni przekroju elementu betonowego,  $\Omega$  tę część obwodu przekroju poprzecznego, która pozostaje w kontakcie ze środowiskiem zewnętrznym, a  $\lambda$  jest parametrem zależnym od warunków wysychania i dla mostów może być przyjmowany jako  $\lambda = 2$ . W tabeli 13.1 podano wzory [291] pozwalające na określenie grubości zastępczej dla dźwigarów o przekroju poprzecznym spotykanym w budownictwie mostowym.

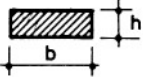
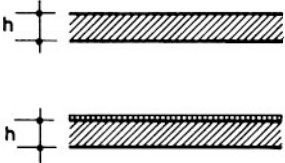
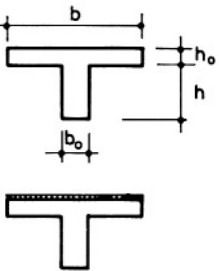
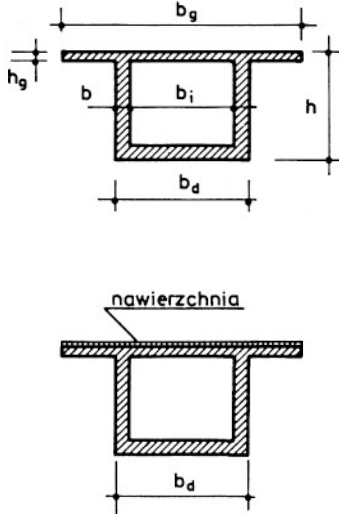
Funkcja  $f_v(t - \tau)$  opisuje prędkość wymiany wody z otoczeniem, która zależy od długości okresu wysuszania elementu  $(t - \tau)$  i jego grubości zastępczej. Rysunek 13.12 [81] przedstawia przebiegi tej funkcji w zależności od grubości zastępczej elementu betonowego.

$$f_v(t - \tau) = 1 - \sum_{i=1}^n s_i e^{-\left(\frac{10}{h_z}\right)^2 \xi_i (t - \tau)}, \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1 \quad (13.7)$$

Do wzoru tego  $h_z$  należy podstawić w cm.

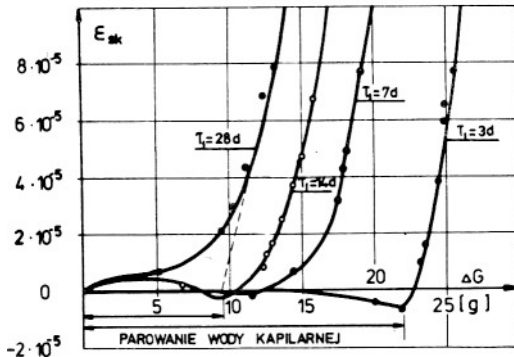
Trzeba tu zaznaczyć, że rozmieszczenie wilgoci w elementach betonowych w procesie wysychania nie jest równomierne [10, 17, 31, 58, 122, 171], więc wzór (13.1) określa średnią zmianę wilgotności całego elementu. Takie uproszczenie jest dopuszczalne tylko przy analizie konstrukcji prętowych lub cienkich płyt - dla konstrukcji masywnych trzeba wyznaczać dokładniej pola wilgotności, co można uczynić wykorzystując modele dyfuzji wilgoci podane w [10, 17, 171]. Ponadto ważność wzoru (13.1) zawęża się do procesów zachodzących w warunkach tzw. "wolnego powietrza" ( $100\% > W > 60\%$ ), w których rozpatrywane zjawisko przebiega w sposób zbliżony do liniowego i jest nieczułe na odpowiadające tym warunkom zmiany temperatury.

Wzory pozwalające wyznaczyć grubość zastępczą elementu lub konstrukcji

Rozpatrywane elementy	Szkic przekroju poprzecznego	Wzór na tzw. grubość zastępczą
Elementy prostokątne		$h_z = \lambda \frac{h \cdot b}{h + b}$
Szerokie płyty		<p>Płyta nieizolowana</p> $h_z = \lambda h$ <p>Płyta z nawierzchnią</p> $h_z = 2 \lambda h$
Belki dwuteowe		<p>Belka nieostonięta</p> $h_z = \lambda \frac{bh_o + hb_o - h_o b_o}{b + h}$ <p>Belka przykryta izolacją i nawierzchnią</p> $h_z = \lambda \frac{bh_o + hb_o - h_o b_o}{0,5b + h}$
Przekroje skrzynkowe		<p>Wnętrze słabo przewietrzane</p> $h_z = \lambda \cdot \frac{b_g \cdot h_g + b_d \cdot h_d + 2b \cdot h_i}{b_g + h + 0,5(b_i + h_i)}$ <p>Jak wyżej, lecz z izolacją górnej powierzchni</p> $h_z = \lambda \cdot \frac{b_g \cdot h_g + b_d \cdot h_d + 2b h_i}{0,5 b_g + h + 0,5(b_i + h_i)}$ <p>Wnętrze nie przewietrzane</p> $h_z = \lambda \cdot \frac{b_g \cdot h_g + b_d \cdot h_d + 2b h_i}{b_g + h}$ <p>Jak wyżej, lecz z izolacją górnej powierzchni</p> $h_z = \lambda \cdot \frac{b_g \cdot h + b_d \cdot h_d + 2b h_i}{0,5 b_g + h}$
Dla warunków wolnego powietrza można przyjmować $\lambda = 2$		

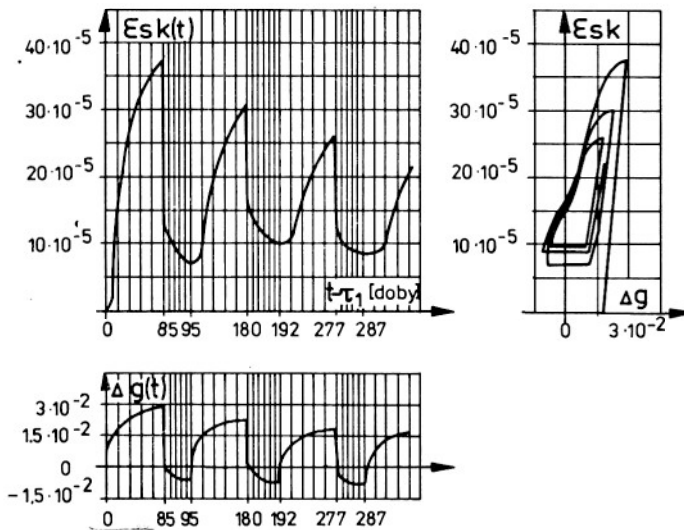
### 13.3. Związek między ilością wyparowanej lub wchłoniętej przez beton wody a jego odkształceniem skurczowym

Utrata przez beton wody adsorpcyjnej (w wyniku jej odparowywania - rys. 13.13) jest podstawową przyczyną powstawania opóźnionych odkształceń betonu, zwanych odkształceniami skurczowymi. Jest to znaczne uproszczenie problemu [50,250], gdyż oprócz skurczu związanego z wysychaniem betonu materiał ten ulega skurczowi powodowanemu zjawiskiem karbonizacji. Problem ten jest szerzej omówiony np. w pracy Neville'a [250].



Rys. 13.13. Zależność między skurczem betonu a ubytkiem wody z próbek betonowych o różnym okresie pielęgnacji [10].

Fig. 13.13. The relationship between the shrinkage of concrete and water lost by concrete specimens subject to different curing time [10].



Rys. 13.14. Zmiana względnej wilgotności wagowej betonu  $\Delta g$ , a wielkość odkształceń skurczowych [6].

Fig. 13.14. Change in relative humidity (by weight) of concrete  $\Delta g$ , vs. shrinkage deformations [6].

bonizacja przebiega w betonie w zasadzie przy powierzchni przekroju, a tym samym jej wpływ na wielkość skurczu jest ściśle związany z wielkością elementu betonowego. W odniesieniu do dużych elementów skurcz wywołany tym zjawiskiem może być pominięty.

Wykorzystując te ustalenia i dane zawarte na rys. 13.14 [10] (dane te potwierdzają inne liczne prace, jak [6,7,10,31,50,239,250]), zakładamy, że poszczególne przyrosty składowych tensora odkształceń skurczowych  $d\epsilon_{ij}^{sk}(t)$  są liniowo związane z względnymi ubytkami wody adsorpcyjnej  $d\Delta g(t)$ :

$$d\epsilon_{ij}^{sk}(t) = \delta_{ij} \chi(\tau) d\Delta g(t). \quad (13.8)$$

Powyższa propozycja jest pewną nowelizacją znanych wcześniej koncepcji Freyssineta [124] i L'Hermite'a [202,203]. W pracy autora [50] założono, że funkcja  $\chi(\tau) = \chi = \text{const}$ ; założenie to nie zostało potwierdzone wynikami badań (przyjmując funkcję  $\chi(\tau)$  w postaci parametru  $\chi$  przecenia się wpływ okresu pielęgnacji betonu na końcową wielkość odkształceń skurczowych betonu - tabela 13.2), dlatego w niniejszej pracy dokonano jego modyfikacji.

Funkcja  $\chi(\tau)$  może być określona tylko przy przyjęciu pewnych założeń dotyczących struktury betonu, a to dlatego, iż skurczowi zaczynu przeciwstawiają się ziarna kruszywa [4,5,71,86,202,210,241,250,263,305].

W niniejszej pracy rozpatrywaną funkcję określono wykorzystując model struktury betonu pokazany na rys. 9.1. Ścisłe rozwiązanie tego problemu (określenie  $\chi(\tau)$ ) wymagałoby analizy procesów zachodzących w betonie z pozycji mikro, z uwzględnieniem pola samorównoważących się naprężeń skurczowych wywołanego obecnością w zaczynie ziarn kruszywa, co jest bardzo trudne i niezbyt (z uwagi na brak wiarygodnych badań w tym zakresie) uzasadnione. Dlatego ograniczymy się tylko do przybliżonego oszacowania przebiegu tej funkcji, wiedząc, iż dla betonu, którego struktura odpowiada szeregowemu połączeniu obu faz (kruszywa i zaczynu), ma ona wartość stałą  $\overline{\epsilon}_{sk} = \chi$

$$\chi(\tau) = \overline{\epsilon}_{sk} \frac{U(\tau)}{A + (1-A)U(\tau)}, \quad (13.9)$$

gdzie  $A$  zgodnie z rys. 9.1 może zmieniać się od 0 do 1 i określa udział połączenia równoległego w strukturze betonu. Dla zaczynu możemy przyjąć, że  $A = 0$  (brak ziarn kruszywa ograniczających skurcz) i otrzymamy

$$\chi(\tau) = \overline{\epsilon}_{sk}. \quad (13.10)$$

$\overline{\epsilon}_{sk}$  jest końcową wielkością, do której zmierzają odkształcenia skurczowe betonu o zakończonym procesie hydratacji ( $U(\tau) = 1$ ).

Po scałkowaniu równania (13.8), pamiętając o tym, że skurcz ma charakter izotropowy, otrzymamy

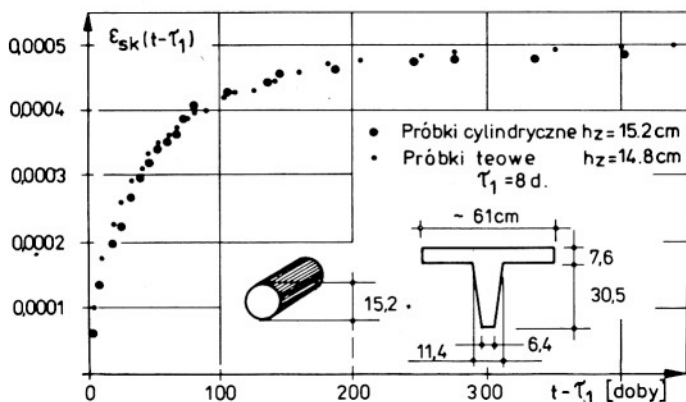
$$\epsilon_{ij}^{sk} = \delta_{ij} \left\{ \vartheta(\tau_1) \chi(\tau) V[\tau_1, (t - \tau_1)] + \int_{\tau_1}^t \frac{d\vartheta(\tau)}{d\tau} \chi(\tau) V[\tau, (t - \tau)] d\tau \right\}. \quad (13.11)$$

Powyższy wzór określa średnie wartości skurczowe w elementach betonowych przy założeniu równomiernego rozkładu wilgoci wewnątrz elementu.

Biorąc pod uwagę (13.4) i (13.5) oraz (13.9) zauważymy, że

$$\chi(\tau) V[\tau_1, (t - \tau_1)] = \overline{\epsilon}_{sk} \frac{\bar{p}(h_2)}{A + (1 - A)U(\tau)} f_v(t - \tau). \quad (13.12)$$

Z wzoru (13.12) wynika, iż szczególnie ważna jest pielęgnacja betonów o dużej ilości zaczynu (cementu - mała wartość  $A$ ), gdyż ich skurcz w młodym wieku będzie większy od skurczu betonu o mniejszej ilości zaczynu (duża wartość  $A$ ).



Rys. 13.15. Porównanie odkształceń skurczowych mierzonych na próbkach w różnym kształcie przekroju poprzecznego [156].

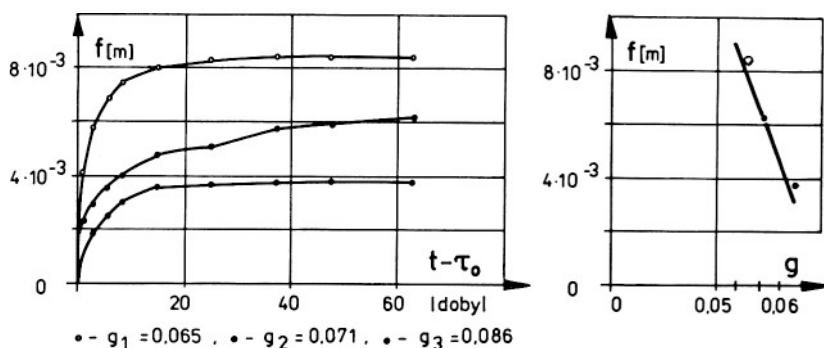
Fig. 13.15. Comparison of shrinkage deformations measured in specimens of different shapes of their cross-sections [156].

Częściową weryfikację słuszności przyjętych założeń stanowi rys. 13.15, na którym podano rezultaty badań Hansena i Mattocka [156], z których wynika, iż wielkość odkształceń skurczowych nie zależy od kształtu elementu betonowego, a tylko od jego grubości zastępczej.



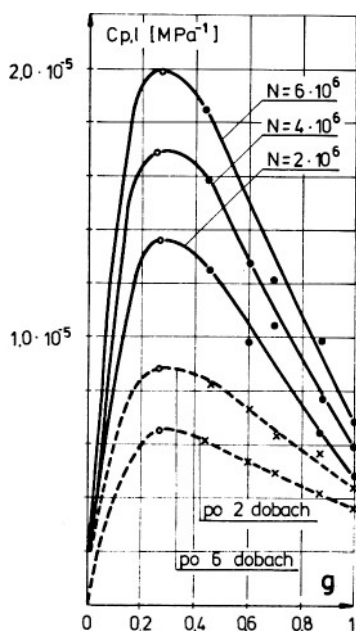
### 13.4. Odształcenia lepkie betonu o zmiennych warunkach higrometrycznych

Przyjmujemy, że o wielkości odształceń lepkich decyduje ilość zawartej w betonie wody (związanej adsorpcyjnie). Na rysunku 13.16 przedstawiono wyniki badań [201] przeprowadzone na próbkach o różnym stopniu ich zawilgocenia  $g$  (różnej wilgotności względnej betonu), który dzięki izolacji próbek był stały przez cały okres badań.



Rys. 13.16. Wpływ stopnia zawilgocenia betonu na wielkość przemieszczeń badanych belek [129].

Fig. 13.16. The effect of the degree of concrete humidity on the range of displacements of the beams tested [129].



Rys. 13.17. Zależność miary odształceń pełzania od stopnia nasycenia próbek wodą.

Fig. 13.17. The range of creep deformations of specimens tested vs their water saturation ratio.

Na podstawie analizy przedstawionych tu wyników badań (rys. 13.16 i rys. 13.17) można przyjąć, że odkształcenia lepkie betonu pozostają w liniowym związku z ilością wymienionej z otoczeniem wody adsorpcyjnej (założenie to jest ważne w granicach określonych poprzednio), a w konsekwencji (wzór (13.2)) wilgotnością względną środowiska.

Wykorzystując to stwierdzenie można odkształcenia lepkie betonu wywołane obciążeniem i jednoczesnym ubytkiem wody zapisać następująco:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{1,W} = & f[\sigma_{ij}(\tau_0), \Delta g(\tau_0)] \left\{ C_1[\tau_0, (t - \tau_0)] (1 + \nu_1) \right\} - \\ & - f[\beta \sigma_0(\tau_0), \Delta g(\tau_0)] C_1[\tau_0, (t - \tau_0)] \nu_1 \delta_{ij} + \\ & + \int_{\tau_0}^t \left\{ \frac{df[\sigma_{ij}(\tau), \Delta g(\tau)]}{d\tau} C_1[\tau, (t - \tau)] (1 + \nu_1) - \right. \\ & \left. - \frac{df[\beta \sigma_0(\tau), \Delta g(\tau)]}{d\tau} C_1[\tau, (t - \tau)] \nu_1 \delta_{ij} \right\} d\tau, \end{aligned} \quad (13.13)$$

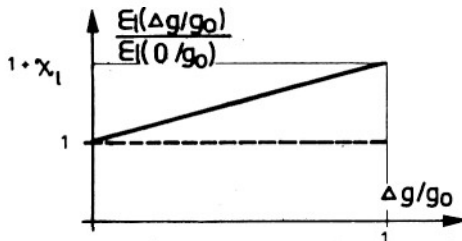
gdzie

$$f[\sigma_{ij}(\tau), \Delta g(\tau)] = \sigma_{ij}(\tau) \left[ 1 + \frac{\chi_1}{\epsilon_0} \Delta g(\tau) \right], \quad (13.14)$$

$$f[\beta \sigma_0(\tau), \Delta g(\tau)] = \beta \sigma_0(\tau) \left[ 1 + \frac{\chi_1}{\epsilon_0} \Delta g(\tau) \right].$$

Dla zagadnień jednoosiowych wzór (13.13) ma postać [50]:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ij}^{1,W}(t) = & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu_1 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu_1 \end{vmatrix} \cdot f[\sigma_{11}(\tau_0), \Delta g(\tau_0)] C_1[\tau_0, (t - \tau_0)] + \\ & + \int_{\tau_0}^t \frac{df[\sigma_{11}(\tau), \Delta g(\tau)]}{d\tau} C_1[\tau, (t - \tau)] d\tau. \end{aligned} \quad (13.15)$$



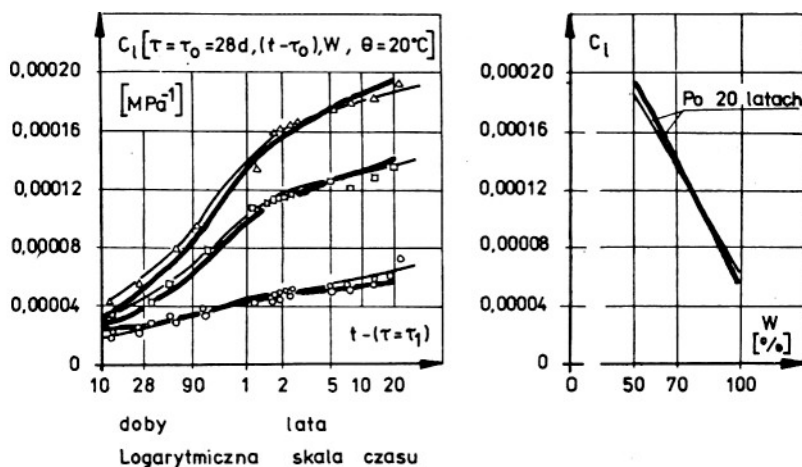
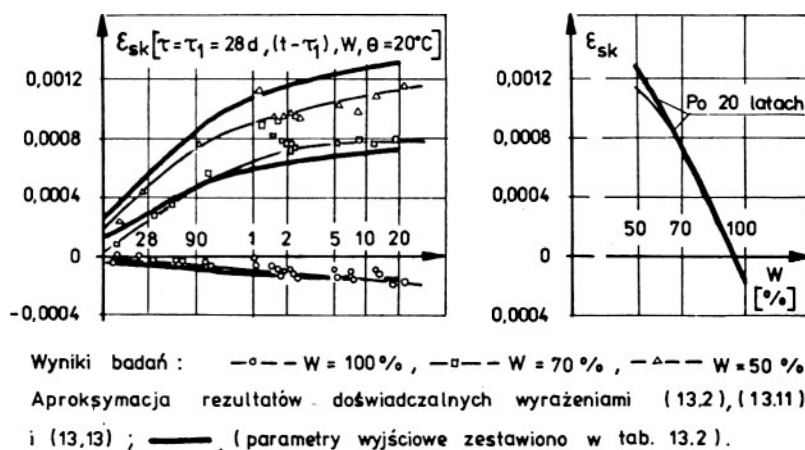
Rys. 13.18. Przyjęta hipotetycznie zależność odkształceń lepkich betonu od jego względnej wilgotności adsorpcyjnej.

Fig. 13.18. Hypothetical relationship between viscous deformations of concrete and its relative adsorption humidity.

Na rysunku 13.18 pokazano graficzną interpretację założeń, na których opierają się równania (13.13) i (13.15).

### 13.5. Weryfikacja konstytutywnych związków określających odkształcenia lepkie i skurczowe wysychającego betonu

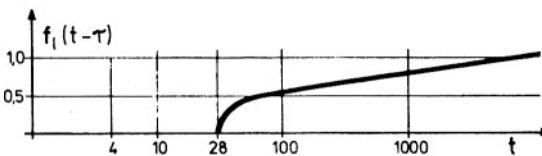
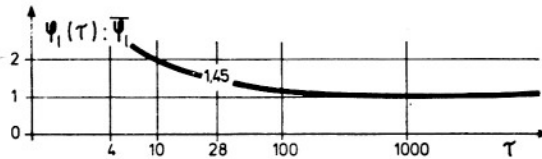
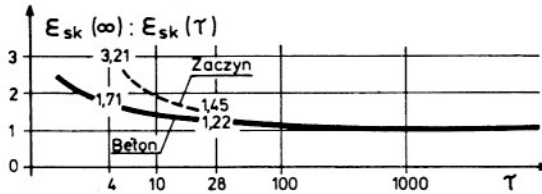
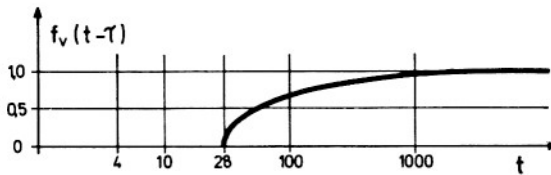
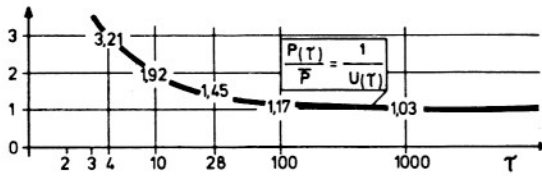
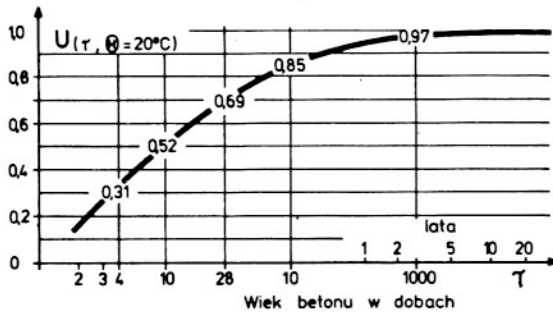
Przedstawiony w rozdziałach 13.2-13.4 model opisujący odkształcenia lepkie i skurczowe wysychającego betonu zweryfikujemy w oparciu o wyniki długoletnich badań doświadczalnych Troxela, Raphaela i Davisa [325].



Rys. 13.19. Weryfikacja zależności (13.11) i (13.13) w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych [325].

Fig. 13.19. Verification of Eqs. (13.12) and (13.13) based on the obtained experimental results [325].

Zestawienie funkcji materiałowych wykorzystywanych w weryfikacji równań (13.11) i (13.13)



$$U(\tau) = 1 - \sum_{i=1}^3 u_i \cdot e^{-\rho_i \cdot \tau}$$

$u_1 = 0,65 \quad \rho_1 = 0,1400$   
 $u_2 = 0,31 \quad \rho_2 = 0,0090$   
 $u_3 = 0,04 \quad \rho_3 = 0,0004$

Według pracy [54]

Probki użyte w badaniach [325] miały średnicę  $d = 10\text{cm}$ ,  $\lambda = 2$ ,  $h_2 = 10\text{cm}$   
 $P(h) = 1 / \text{rys.13.9/}$   
 $f_v = 1 - \sum_{i=1}^3 S_i \cdot e^{-\left(\frac{10}{h_2}\right)^2 \cdot S_i(t-\tau)}$   
 $S_1 = 0,4 \quad S_1 = 0,05$   
 $S_2 = 0,4 \quad S_2 = 0,01$   
 $S_3 = 0,2 \quad S_3 = 0,0005$

$$\chi_{(\tau)} = \bar{E}_{sk} \cdot \frac{U(\tau)}{A + (1-A)U(\tau)}$$

$\bar{E}_{sk} = 0,00227$   
 $A = 0,4; \quad \frac{\chi_1}{\chi_0} = 3,3$

$$\psi_{1(\tau)} = 1/U(\tau) \cdot \bar{\psi}_1$$

Dla betonu użytego w badaniach [325]  
 $\bar{\psi}_1 = 0,0000503 \text{ MPa}$   
 $f_i = 1 - \sum_{i=1}^3 a_i e^{-\alpha_i(t-\tau)}$   
 $a_1 = 0,320 \quad \alpha_1 = 1,0$   
 $a_2 = 0,440 \quad \alpha_2 = 0,0070$   
 $a_3 = 0,240 \quad \alpha_3 = 0,0005$

Badania te przeprowadzono na próbkach o średnicy 10 cm ( $h_z = 10$  cm), które do chwili rozpoczęcia badań ( $\tau = \tau_0 = \tau_1 = 28$  d) przechowywano w wodzie. Średnia wytrzymałość betonu w wieku 28 d była równa 20 MPa, co miało wpływ na to (rys. 12.1 [313]), iż pomierzone odkształcenia były prawie dwukrotnie większe od tych, które obserwuje się badając beton wyższej jakości.

Obliczenia przeprowadzono numerycznie [54], przyjmując, że proces przebiega przy nie zmieniającym się w czasie naprężeniu  $\sigma(\tau_0) = 1$  MPa. Dane wyjściowe wykorzystane w analizie podano w tab. 13.2.

Porównanie wyników badań i obliczeń (rys. 13.19) świadczy o tym, że proponowany model betonu aproksymuje rzeczywiste właściwości tego tworzywa z dostateczną dokładnością i może być wykorzystany do analizy ilościowej różnych zagadnień.

### 13.6. Wartości parametrów charakteryzujących odkształcalność wysychającego betonu

#### 13.6.1. Parametry determinujące proces wyparowywania z betonu wody adsorpcyjnej

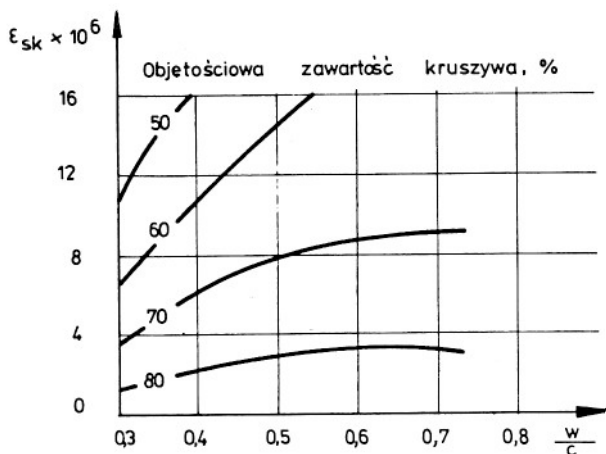
Badań pozwalających na określenie wprost parametrów charakteryzujących rozpatrywany proces brak. Pozostaje więc droga pośrednia polegająca na wykorzystaniu ustaleń dotyczących skurczu betonu, który w rozpatrywanych granicach ( $65\% < W < 100\%$ ) jest wprost proporcjonalny do masy wymienionej z otoczeniem wody adsorpcyjnej.

Do obliczeń praktycznych można przyjmować parametry występujące w funkcji  $f_v[(t - \tau), h_z]$  (13.7) według tab. 13.2. Tak przyjęta funkcja (13.7) jest w dużym stopniu zbieżna z zalecanym przez CEB-FIP [81] jej przebiegiem - rys. 13.12. Wartość parametru  $\bar{p}(h_z)$  należy określać według danych z rys. 13.11.

#### 13.6.2. Parametr określający końcową wielkość odkształceń skurczowych

Parametrem tym jest  $\bar{\epsilon}_{sk}$ , którego wielkość zależy zarówno od czynników strukturalnych, rodzaju poszczególnych materiałów, z których wykonano beton, jak i od związanych z rodzajem użytych materiałów ich fizyko-mechanicznych właściwości.

Problem ten został szeroko omówiony w licznych monografiach [10,86, 150,239,250,251,291,328] i opracowaniach [4-7,17,36,131,143,215,221, 305,325], jednak z uwagi na swoją złożoność nie został rozwiązany w sposób pozwalający na wyznaczenie końcowych odkształceń skurczowych w zależności od wymienionych uprzednio czynników.



Rys. 13.20. Wpływ stosunku wodno-cementowego i zawartości kruszywa na wielkość odkształceń skurczowych betonu [254].

Fig. 13.20. The effects of water-to-cement ratio and the content of aggregate on the range of shrinkage of concrete [254].

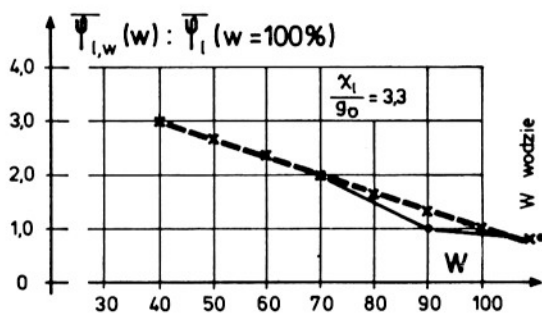
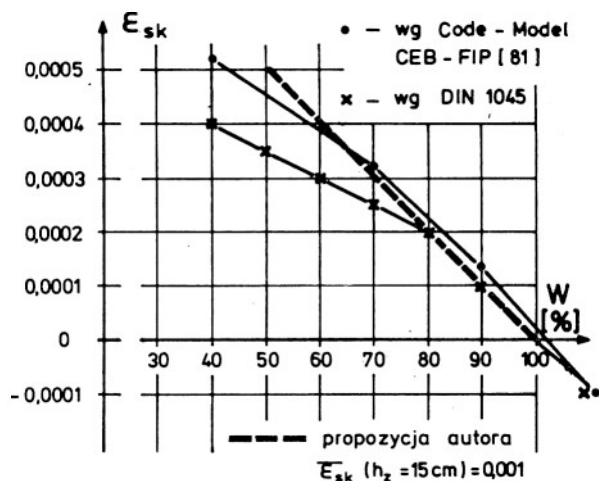
Do czynników strukturalnych wpływających na wielkość skurczu możemy zaliczyć:

- wielkość ziarn kruszywa użytego do betonu, co obrazują przykładowo wyniki badań Młodeckiego [241] - tab. 13.3,

T a b e l a 13.3

Wpływ konsystencji betonu i maksymalnej wielkości ziarn na wielkość odkształceń skurczowych

Konsystencja, symbol	Wielkość max. ziarn kruszywa, mm	Skurcz betonu $\epsilon_{sk} \times 10^5$
K-3	20	63
K-4		71
K-5		79
K-3	40	44
K-4		50
K-5		56
K-3	50	37
K-4		41
K-5		45



Rys. 13.21. Przyjęte związki (13.11) i (13.13) na tle zaleceń normowych.

Fig. 13.21. The assumed relationship (13.11) and (13.13) in the light of standard recommendations.

- wzajemne proporcje poszczególnych składników betonu - rys. 13.20 według Ödmana [253].

Rodzaj komponentów użytych do betonu odgrywa istotną rolę w kształtowaniu się odkształceń skurczowych [250,251], na które wpływają zarówno rodzaj kruszywa (badania Troxella, Raphaela i Davisa [325], jak i cementu, z tym, że najistotniejszą cechą kruszywa, decydującą o jego wpływie na końcową wielkość odkształceń skurczowych jest moduł sprężystości [23,81,250,291].

Podsumowując możemy stwierdzić, że wielkość odkształceń skurczowych wzrasta wraz z:

- wzrostem objętościowej zawartości zaczynu w betonie,
- wzrostem ilości wody zarobowej (wzrostem  $\omega_{wc}$ ),
- zmniejszaniem się maksymalnego wymiaru ziarn kruszywa, z którego wykonano beton,
- zmniejszaniem się modułu sprężystości kruszywa użytego do betonu.

Z powyższych stwierdzeń wynikają następujące uwagi o znaczeniu praktycznym:

- skurcz piaskobetonu (który nie powinien być używany do budowy mostów) będzie znacznie większy (o 50%) niż betonów żwirowych,
- skurcz betonów wykonanych na kruszywach tłuczniowych (granitowych czy bazaltowych) jest o 20% niższy od skurczu wykazywanego przez betony żwirowe,
- ze względu na wielkość skurczu i inne niekorzystne cechy (rozdz. 3.4) w mostownictwie nie powinny być stosowane betony o konsystencji wyższej niż plastyczna (K-3,  $\omega_{wc} \leq 0,45$ ).

W tabeli 13.4 podano przeciętne wartości parametru  $\bar{\epsilon}_{sk}$  w zależności od klasy betonu, rodzaju kruszywa użytego do betonu i konsystencji. Zaznaczmy, że nie ma jednoznacznej zależności między konsystencją betonu [57,71,133,187,193,250] a współczynnikiem wodno-cementowym  $\omega_{wc}$ . Dlatego podane w tabeli 13.4 odpowiadające sobie wartości należy traktować jako orientacyjne.

Na rysunku 13.21 porównano wielkości odkształceń skurczowych, jakie otrzymamy ze wzoru (13.11) dla betonów na kruszywie tłuczniowym B35-B40 i konsystencji K-2 z wielkościami zalecanymi przez CEB-FIP [81] i DIN 1045. Przy przyjęciu  $W_k = 100\%$  (wydaje się, że taką wartość należy przyjmować w obliczeniach praktycznych) otrzymujemy wielkości bardzo zbliżone do ustalonych przez międzynarodowe zalecenia.



T a b e l a 13.4

Średnie wartości parametru  $\bar{\epsilon}_{sk}$ , dla betonów wykonanych na cementach portlandzkich

Klasa betonu [MPa]			B 20	B 25	B 30	B 35	B 40	B 50
Beton zwykły na kru-szywie:	żwirowym	$\bar{\epsilon}_{sk}$	0,00150	0,00130	0,00125	—	—	—
	łuczniowym; /bazalt, granit/		—	—	0,00105	0,00100	0,00100	0,00095
Beton lekki			0,00190	0,00175	0,00160	0,00150	—	—

Zestawione wartości dotyczą betonu o konsystencji K-2 / gęstoplastycznej -  $\omega_{wc} = 0,38$  /. Przy stosowaniu konsystencji K-1 / wilgotnej -  $\omega_{wc} = 0,30$  / należy podane wartości zmniejszać o 10% [291], a przy konsystencji K-3 / plastycznej -  $\omega_{wc} = 0,45$  / zwiększać o 10%.

### 13.6.3. Parametr $\chi_1/\epsilon_0$

Na ogół nie mamy możliwości oddzielnego wyznaczenia  $\chi_1$  i  $\epsilon_0$ ; zresztą do naszych celów nie jest to konieczne, wystarczy bowiem znalezienie ilorazu poszukiwanych wielkości.

W pracy [54], wykorzystując badania [325], oszacowano wartość tego parametru na  $\chi_1/\epsilon_0 = 3,3$ .

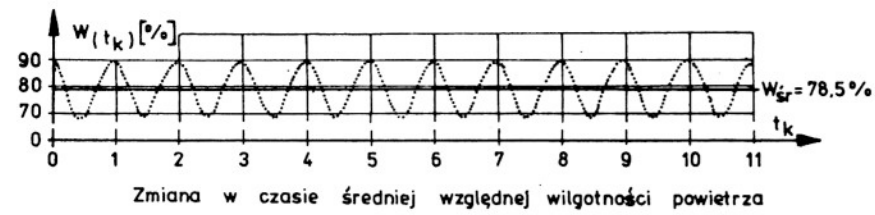
Okazuje się, że taką samą wartość otrzymamy analizując rozpatrywany proces lepkich odkształceń wysychającego betonu w oparciu o zalecenia CEB-FIP [81] i pracę [291].

W związku z powyższym możemy tę wartość rekomendować do obliczeń praktycznych dla wszystkich rodzajów betonu.

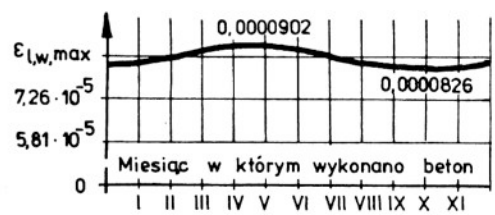
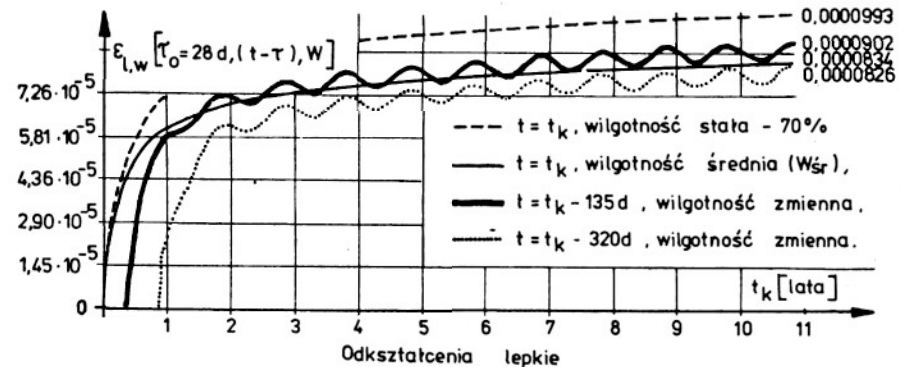
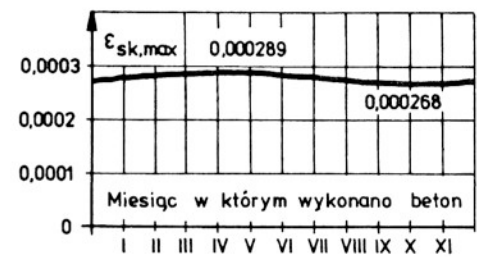
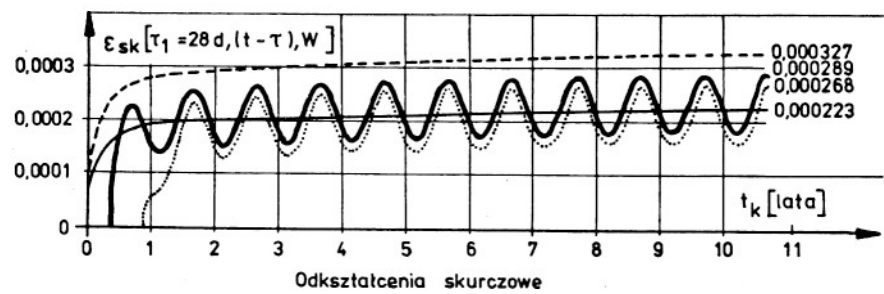
### 13.7. Wpływ pory roku, podczas której wykonano beton, na końcową wielkość odkształceń lepkich i skurczowych

Na niektóre aspekty zależności skurczu i pełzania betonu od zmieniających się cyklicznie warunków klimatycznych zwracali już uwagę Kajfasz [168], Neville [250] czy Ulickij [328], z tym, że ich rozważania miały raczej charakter jakościowy.

W rozdziale tym wykorzystamy przedstawiony model do analizy ilościowej wymienionego wyżej problemu, który ma pewne znaczenie praktyczne.



$t_k$  - czas kalendarzowy



Rys. 13.22. Wpływ pory roku podczas której wykonano beton na wielkość odształceń skurczowych i miarę pelzania.  
 Fig. 13.22. The effect of the season of the year during which concrete was prepared on its shrinkage and creep.

Rozpatrywany problem wpływu pory roku, podczas której wykonano beton, na końcową wielkość odkształceń skurczowych i lepkich przeanalizowano (wykorzystując ustalenia zawarte w pracy autora [54]) na przykładzie elementu betonowego o  $h_z = 10$  cm. Założono, że rozpatrywany element jest wykonany z betonu B40 na kruszywie tłuczniowym, którego konsystencja jest równa K-3. Na podstawie tab. 13.4 określamy, że  $\bar{\epsilon}_{sk} = 0,0011$ . Natomiast  $\bar{\varphi}_1 = 0,0000363 \text{ MPa}^{-1}$  (tab. 12.1) i  $\chi_1/\epsilon_0 = 3,3$ . Ponadto przyjęto, że element po wykonaniu podlega obróbce termicznej i po osiągnięciu dojrzałości 28-dniowej dalej przechowywany jest w warunkach tzw. "wolnego powietrza". Czyli wiek betonu w chwili obciążenia elementu (jednostkowym naprężeniem) i rozpoczęcia wysuszania jest równy 28 dni (jak np. dla prefabrykowanych belek sprężonych).

Za pracą [188] przyjęto funkcję wieloletnich zmian okresowych wilgotności względnej powietrza występujących w Polsce środkowej - rys. 13.1.

Wykazano [54] (rys. 13.22), że w zależności od pory roku, podczas której wykonano beton (element prefabrykowany) należy się spodziewać różnych wartości odkształceń skurczowych i miary pęcznienia. Wielkości te są zawsze wyższe od tych, jakie otrzymano przy przyjęciu wilgotności średniej  $w_{\text{sr}} = 78,5\%$ , a niższe od obliczonych dla wilgotności normowej 70%. Porównując natomiast wielkości odkształceń i miary pęcznienia dla elementów wykonanych zimą i latem - otrzymano dla tych ostatnich wielkości o około 8% wyższe.

### 13.8. Miara odkształceń lepkich i funkcja określająca wielkość skurczu betonu przechowywanego w stałych warunkach higrotermicznych środowiska

Wyznaczenie eksperymentalne wszystkich funkcji i parametrów wchodzących do równania (13.13) jest trudne i złożone. W niektórych szczególnych przypadkach można złagodzić te trudności, przyjmując prostszą matematycznie postać wymienionych w tytule funkcji, o takiej samej dokładności odwzorowania analizowanych zjawisk jak wzór (13.13). Przypadek taki zachodzi wtedy, kiedy warunki higrotermiczne środowiska są stałe, tzn. gdy  $\vartheta(\tau_1) = \vartheta(t) = \text{const}$  i  $\theta(\tau_1) = \theta(t) = \text{const}$ . W tym przypadku odkształcenia lepkie wywołane jednostkowym naprężeniem ( $\sigma(\tau) = 1 \text{ MPa}$ ) wyznaczamy ze wzoru:

$$\hat{C}_{1,w}[\tau, (t - \tau)] = \left[ 1 + \frac{\chi_1}{\epsilon_0} \Delta g(\tau) \right] C_1[\tau, (t - \tau)] + \frac{\chi_1}{\epsilon_0} \int_{\tau}^t \frac{d \Delta g(r)}{dr} C_1[r, (t - r)] dr. \quad (13.16)$$

Całkując wyrażenie pod całką przez części, wzór (13.16) po prostych przekształceniach przyjmie postać

$$\hat{C}_{1,w} [\tau, (t - \tau)] = C_1[\tau, (t - \tau)] - \frac{\chi_1}{\varepsilon_0} \int_{\tau}^t \Delta g(r) \frac{\partial}{\partial r} C_1[r, (t - r)] dr \quad (13.17)$$

Ponieważ funkcja  $\Delta g(\tau)$  w przedziale  $\langle \tau, t \rangle$  spełnia niezbędne warunki całkowalności, na mocy całkowego twierdzenia o wartości średniej możemy powiedzieć, że w przedziale  $\langle \tau, t \rangle$  istnieje także  $\hat{\tau}$  ( $\tau < \hat{\tau} < t$ ) dla którego zachodzi następująca zależność

$$\int_{\tau}^t \Delta g(r) \frac{\partial}{\partial r} C_1[r, (t-r)] dr = \Delta g(\hat{\tau}) C_1[\tau, (t - \tau)], \quad (13.18)$$

po wstawieniu której do (13.17) otrzymamy

$$\hat{C}_{1,w} [\tau, (t - \tau)] = \left[ 1 - \frac{\chi_1}{\varepsilon_0} \Delta g(\hat{\tau}) \right] C_1[\tau, (t - \tau)]. \quad (13.19)$$

Wyrażenie to uważamy za miarę odkształceń lepkich betonu przechowywanego w stałych warunkach higrotermicznych. Biorąc pod uwagę definicję  $C_1[\tau, (t - \tau)]$  podaną w (10.4) możemy napisać:

$$\hat{C}_{1,w} [\tau, (t - \tau)] = \frac{\hat{\varphi}_{1,w}}{U(\tau)} f_1(t - \tau), \quad (13.20)$$

gdzie

$$\hat{\varphi}_{1,w} = \bar{\varphi}_1 \left[ 1 - \frac{\chi_1}{\varepsilon_0} \Delta g(\hat{\tau}) \right].$$

Odształcenia skurczowe w przypadku ustalonych warunków ciepłno-wilgotnościowych wyznaczono z wzoru

$$\varepsilon_{sk}(t) = \hat{\varepsilon}_{sk} f_v(t - \tau_1), \quad (13.21)$$

gdzie przez  $\hat{\varepsilon}_{sk}$  oznaczono końcową wielkość odkształceń skurczowych

$$\hat{\varepsilon}_{sk} = \bar{\varepsilon}_{sk} \bar{p}(h_z) \vartheta(\tau_1). \quad (13.22)$$

Wyrażenia (13.21) i (13.22) można łatwo wyprowadzić, biorąc pod uwagę związki (13.11) i (13.12).

### 13.9. Odształcalność betonu w zmiennych warunkach termicznych

Jak zaznaczono poprzednio, analizę wymienionej wyżej zależności ograniczono do warunków tzw. "wolnego powietrza". Pewne światło na ten problem rzucają wyniki badań [250] przedstawione na rys. 13.5. Analiza innych, nie przytoczonych tu wyników badań [10,117,131,221,250,251,325] prowadzi do wniosku, że oddziaływanie termiczne środowiska odgrywa pewną rolę w kształtowaniu się stanu odształceń sprężysto-plastyczno-lepkich betonu, lecz dla rozważanego w niniejszej pracy przedziału zmian termicznych (rys. 13.2 i 13.3) rola tego czynnika jest mała. Możemy więc przyjąć, że wielkość odształceń sprężysto-plastyczno-lepkich betonu nie zależy od zmian temperatury zachodzących w rozważanych granicach.

Nie możemy natomiast pominąć odształceń termicznych związanych z rozszerzalnością cieplną materiału, które określone są wzorem

$$\epsilon_{ij}^{\theta}(t) = \delta_{ij} [\theta(t) - \theta(\tau_1)] \alpha_b, \quad (13.23)$$

gdzie:  $\alpha_b$  - współczynnik rozszerzalności termicznej,  
 $\theta(t)$  - temperatura betonu w rozpatrywanej chwili,  
 $\theta(\tau)$  - temperatura betonu na początku analizowanego okresu.

Ponieważ obecnie brak jest przekonujących danych eksperymentalnych, które wskazywałyby na zależność  $\alpha_b$  od wieku betonu, w niniejszym opracowaniu przyjęto, że parametr ten nie zależy od tego czynnika.

Wielkość współczynnika rozszerzalności termicznej betonu zmienia się w granicach 0,000008-0,000013 [250] w zależności od rodzaju kruszywa, sposobu pielęgnowania i zawilgocenia betonu.

W praktycznych obliczeniach konstrukcji mostowych można wartość tego parametru przyjmować z tab. 13.5.

T a b e l a 13.5

Wartości współczynnika rozszerzalności termicznej betonu przechowywanego w warunkach wolnego powietrza

Rodzaj betonu	Wartości współczynnika rozszerzalności cieplnej	
Beton żwirowy	0,000012	$\frac{1}{^{\circ}\text{C}}$
Beton na kruszywie tłuczniowym	0,000010	
Beton na kruszywie lekkim	0,000008	

## 14. RÓWNANIE KONSTITUTYWNE DLA BETONU

14.1. Podsumowanie dotychczasowych rozważań

W kolejnych rozdziałach 9, 10, 11, 12 i 13 zdefiniowaliśmy i przedstawiliśmy formuły pozwalające na wyznaczenie poszczególnych rodzajów odkształceń występujących w betonie, których suma (wzór (8.1)) jest odkształceniem całkowitym.

Równanie (8.1) możemy więc przedstawić w końcowej formie (14.1), która pokazuje, jakie czynniki wpływają na poszczególne rodzaje odkształceń

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^S(\sigma_{ij}) + \epsilon_{ij}^P[\sigma_{ij}, F(\sigma_{ij})] + \epsilon_{ij}^L(\sigma_{ij}, W) + \epsilon_{ij}^{sk}(W) + \epsilon_{ij}^{\theta}(\theta). \quad (14.1)$$

T a b e l a 14.1

Zestawienie numerów wzorów ujmujących odkształcenia betonu występujące w równaniu (14.1)

RODZAJ ODKSZTAŁCEŃ		Numer wzoru ujmującego te odkształcenia	Numer tabeli w której zestawiono stałe materiałowe
Odkształcenia sprężyste		(9,12)	tab. 9,1
Odkształcenia plastyczne	objętościowe	(11,2)	tab. z rys. 11.17
	postaciowe	(11,7)	tab. z rys. 11.17
Odkształcenia lepkie betonu	izolowanego	(12,5)	tab. 12,1
	wysychającego	(13,13)	tab. 12:1 i 13,2
Odkształcenia skurczowe		(13,11)	tab. 13,2 i 13,4
Odkształcenia termiczne		(13,23)	tab. 13,5

W tabeli 14.1 zestawiono numery wzorów, według których należy obliczać wielkość poszczególnych rodzajów odkształceń występujących w (14.1) i numery tabel, w których zestawiono występujące w tych wzorach stałe materiałowe.

## 14.2. Próba weryfikacji doświadczalnej równania konstytutywnego betonu

Jedynym kryterium oceny poprawności rozwiązań teoretycznych różnych zagadnień jest to, w jakim stopniu odwzorowują one przebieg opisywanych zjawisk lub, mówiąc inaczej - badania eksperymentalne stanowią podstawę do identyfikacji przyjętych modeli teoretycznych problemu.

Już w rozdziale 11.5 dokonano weryfikacji doświadczalnej równania konstytutywnego odkształceń plastycznych, a i inne człony równania (14.1) były również formułowane w oparciu o wszechstronne wyniki badań eksperymentalnych.

W niniejszym rozdziale skonfrontowano zmieniający się w czasie stan naprężenia panujący w niejednorodnych izostatycznych konstrukcjach betonowych, wyznaczony w oparciu o algorytm przedstawiony w pracach autora [43,50], z rezultatami badań eksperymentalnych analizowanych konstrukcji [47,50,87]. Wymienione badania są przydatne do weryfikacji przyjętego związku konstytutywnego i zastosowanej metody obliczeń z uwagi na dość wnikliwe określenie podstawowych cech tworzywa, gdyż tylko takie badania mogą stanowić podstawę do oceny rozwiązań teoretycznych.

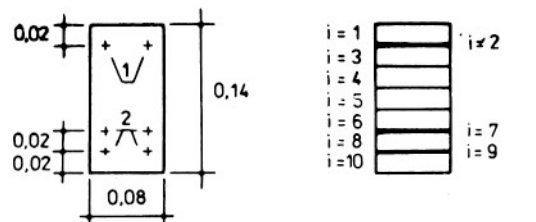
Wspomniany wyżej algorytm pozwala na analizę reologicznej redystrybucji stanu naprężenia w przekrojach niejednorodnych, niezarysowanych elementów betonowych. Oparty jest on na nieliniowym związku konstytutywnym betonu (8.1) i wykorzystuje metodę naprężenia początkowego. Szczegóły znajdzie czytelnik w pracach autora [43,50].

Na rysunkach 14.1 i 14.2 przedstawiono wyniki badań Cincadze i Pawleniszwili [87] dotyczące reologicznych strat siły sprężającej w środkowym przekroju belek sprężonych z keramzytobetonu, natomiast w tab. 14.2 zestawiono wyniki badań podstawowych keramzytobetonu i wyznaczone na ich podstawie wartości parametrów występujących w związku konstytutywnym.

Na rysunkach tych oprócz wyników badań podano rezultaty obliczeń autora (wg [50]) i innych autorów [265]. Zgodność wyników obliczeń i badań wydaje się być zadowalająca.

Na rysunku 14.3 podano wykresy naprężeń normalnych, obliczone przez autora [50], w rozpatrywanych przekrojach belek w charakterystycznych chwilach ich pracy. Natomiast na rys. 14.4 porównano wyniki obliczeń (dla belki z rys. 14.1) uzyskane według teorii liniowej i nieliniowej (przy pominięciu członu ujmującego odkształcenia plastyczne), wykazując, że teorie liniowe przeceniają efektywność sprężenia dźwigarów strunobetonowych.

Na rysunkach 14.5-14.7 przedstawiono rezultaty badań dźwigarów zespolonych typu żelbet-stal uzyskane przez autora.



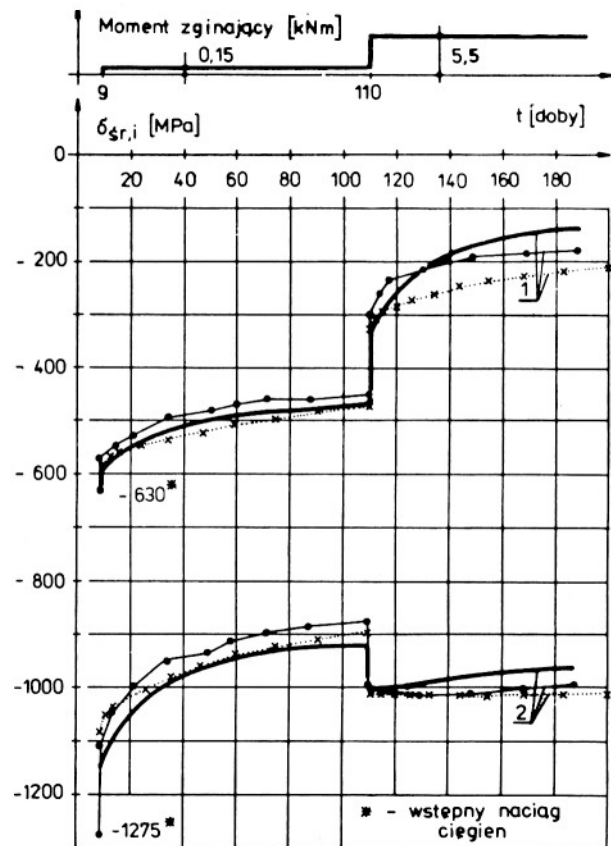
Rzeczywisty przekrój  
poprzeczny analizowanych  
belek sprężonych  
+ - ciąga sprężające  
ϕ 0,005 m

Przekrój zastępczy  
przyjęty do teoretycznej  
analizy problemu

Charakterystyka geometryczna poszczególnych warstw

$h_1 = 0,019755 \text{ m}$	$h_6 = 0,019755 \text{ m}$	$b_i = 0,08$
$h_2 = 0,000490 \text{ m}$	$h_7 = 0,000490 \text{ m}$	$i = 1,2,3,\dots,10$
$h_3 = 0,019755 \text{ m}$	$h_8 = 0,019755 \text{ m}$	
$h_4 = 0,02 \text{ m}$	$h_9 = 0,000490 \text{ m}$	
$h_5 = 0,02 \text{ m}$	$h_{10} = 0,019755 \text{ m}$	

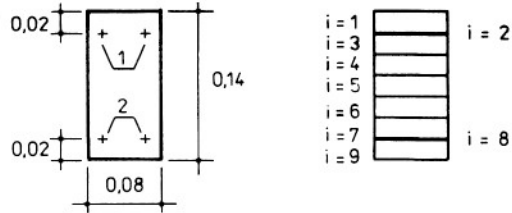
Oznaczenia jak na rys 14.2



Rys. 14.1. Zmiana stanu naprężenia w zbrojeniu belki sprężonej, wywołana reologicznymi zjawiskami zachodzącymi w betonie.

Fig. 14.1. The change in the state of stress in the reinforcement of a prestressed beam caused by rheologic phenomena occurring in concrete.





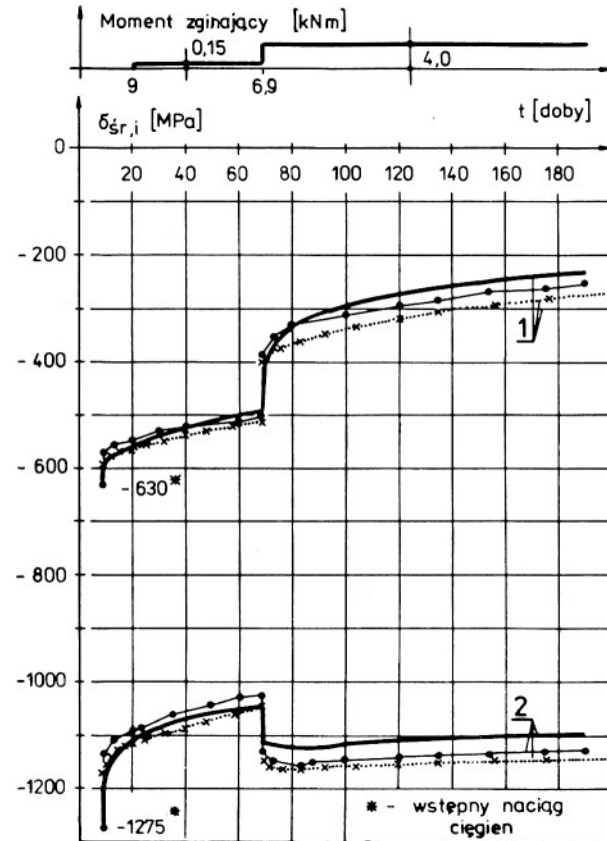
Rzeczywisty przekrój  
poprzeczny analizowanych  
belek sprężonych  
+- cięgna sprężające  
 $\phi$  0,005 m

Przekrój zastępczy  
przyjęty do teoretycznej  
analizy problemu

Charakterystyka geometryczna poszczególnych  
warstw

$h_1 = 0,019755$ m	$h_6 = 0,02$ m	$b_i = 0,08$ m
$h_2 = 0,000490$ m	$h_7 = 0,019755$ m	$i = 1,2,3,\dots,9$
$h_3 = 0,019755$ m	$h_8 = 0,000490$ m	
$h_4 = 0,02$ m	$h_9 = 0,019755$ m	
$h_5 = 0,02$ m		

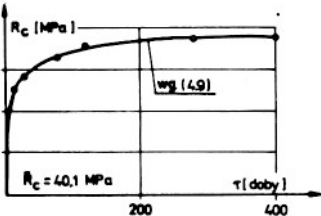
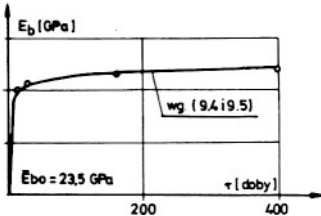
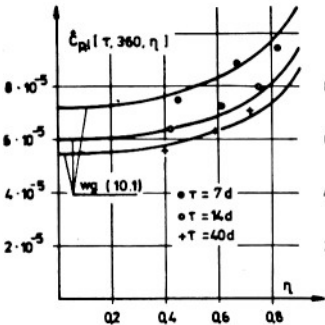
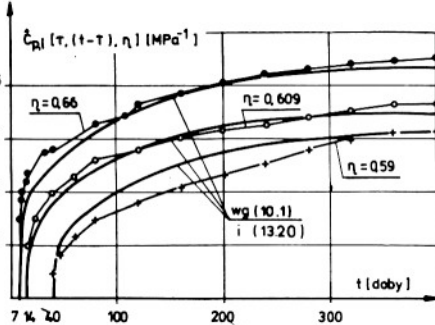
- wyniki badań eksperymentalnych [87]
- rezultaty obliczeń uzyskanych metodą podaną w [265] w oparciu o liniową teorię sprężycie pełzającego ciała,
- ..... - wg autora



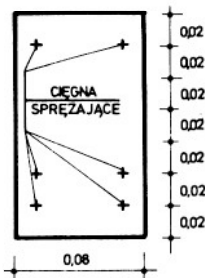
Rys. 14.2. Zmiana stanu naprężenia w zbrojeniu belki sprężonej, wywołana reologicznymi zjawiskami zachodzącymi w betonie.

Fig. 14.2. The change in the state of stress in the reinforcement of a prestressed beam caused by rheologic phenomena occurring in concrete.

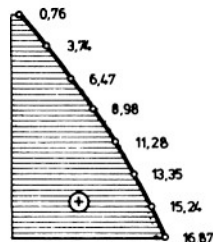
Wyniki badań betonu  
użytego w badaniach Cincadze i Pawleniszewi [87]

DANE WYJŚCIOWE DO TEORETYCZNEJ ANALIZY WPŁYWU ZJAWISK REOLOGICZNYCH NA UKSZTAŁTOWANIE SIĘ STANU NAPRĘŻEŃ W KERAMZYTOBETONOWYCH BIEŁKACH SPRĘŻONYCH. OPRACOWANO NA PODSTAWIE BADAŃ OPUBLIKOWANYCH W [87]	
Zmiennosc pryzmowej wytrzymałości i doraźnego modułu sprężystości betonu w czasie	
	
Bezwymiarowa funkcja starzenia betonu	
$U_{tr} = 1 - 0.730 \cdot e^{-0.240\tau} - 0.270 \cdot e^{-0.008\tau}$	
Plastyczno - lepkie właściwości betonu	
	
Parametry wchodzące do równań: (12.2), (12.3), (13.20), (11,28)	
$\hat{\phi}_1 = 0,0000440 \text{ [MPa}^{-1}]$ $\hat{\epsilon}_{p,sk} = 0,0006115$	$\alpha_1 = 0,20$ $\alpha_2 = 0,80$
	$\gamma_1 = 0,400$ $\gamma_2 = 0,012$
Odkształcenia skurczowe $\hat{\epsilon}_{sk}(t) = 0,00065 \cdot [1 - e^{-0,01(t-9)}]$ za [87]	
Moduł sprężystości ciągnienia sprężających $E_a = 200 \text{ GPa}$	

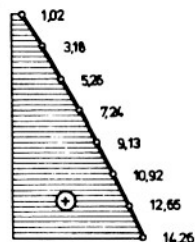
Przekrój sprężony  
dane do obliczeń  
jak na rys. 14.1.



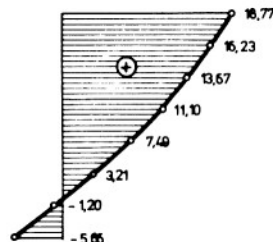
$t=9d$   
Stan naprężenia  
po sprężeniu  
belki



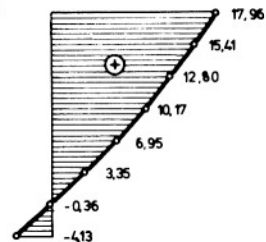
$t=110d$   
Stan naprężenia  
w belce nieobciążonej



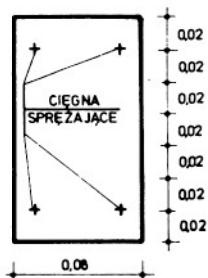
$t=110d$   
Stan naprężenia  
w przekroju po do-  
datkowym obciążeniu



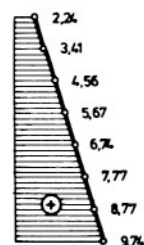
$t=200d$   
Stan naprężenia  
po 200 dobach



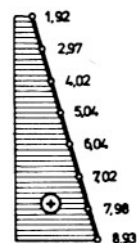
Przekrój sprężony  
dane do obliczeń  
jak na rys. 14.2.



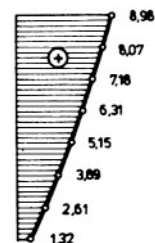
$t=9d$   
Stan naprężenia  
po sprężeniu  
belki



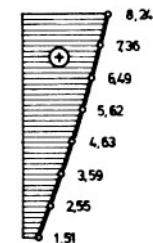
$t=69d$   
Stan naprężenia  
w belce  
nieobciążonej



$t=69d$   
Stan naprężenia  
w przekroju po  
dodatowym obciążeniu



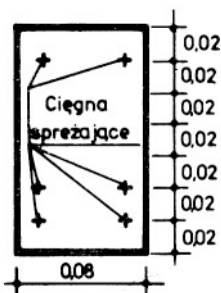
$t=200d$   
Stan naprężenia  
po 200 dobach



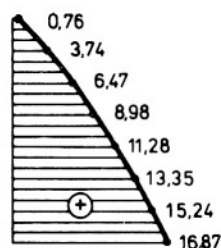
Rys. 14.3. Ukształtowanie się stanu naprężenia w strunobetonowych belkach sprężonych w procesie zachodzących zjawisk reologicznych.

Fig. 14.3. The formation of state of stress in prestressed pre-tensioned concrete beams as the function of rheologic phenomena.

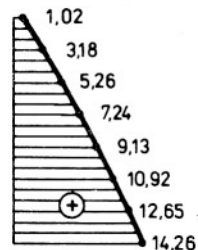
Wyniki obliczeń według teorii nieliniowej.



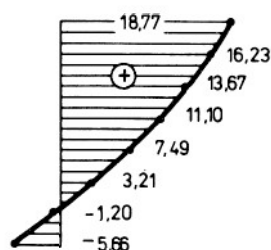
$t = 9$  d  
Stan naprężenia po sprężeniu belki.



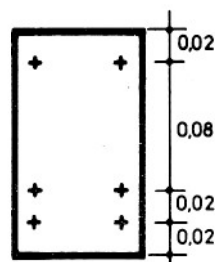
$t = 110$  d  
Stan naprężenia przed obciążeniem.



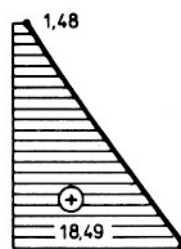
$t = 110$  d  
Stan naprężenia po obciążeniu - rys. 14.1.



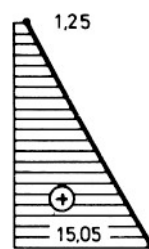
Wyniki obliczeń według teorii liniowej.



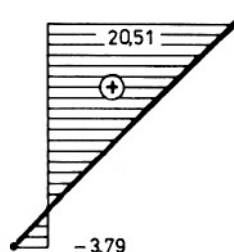
$t = 9$  d  
Stan naprężenia po sprężeniu belki.



$t = 110$  d  
Stan naprężenia przed obciążeniem.



$t = 110$  d  
Stan naprężenia po obciążeniu - rys. 14.1.

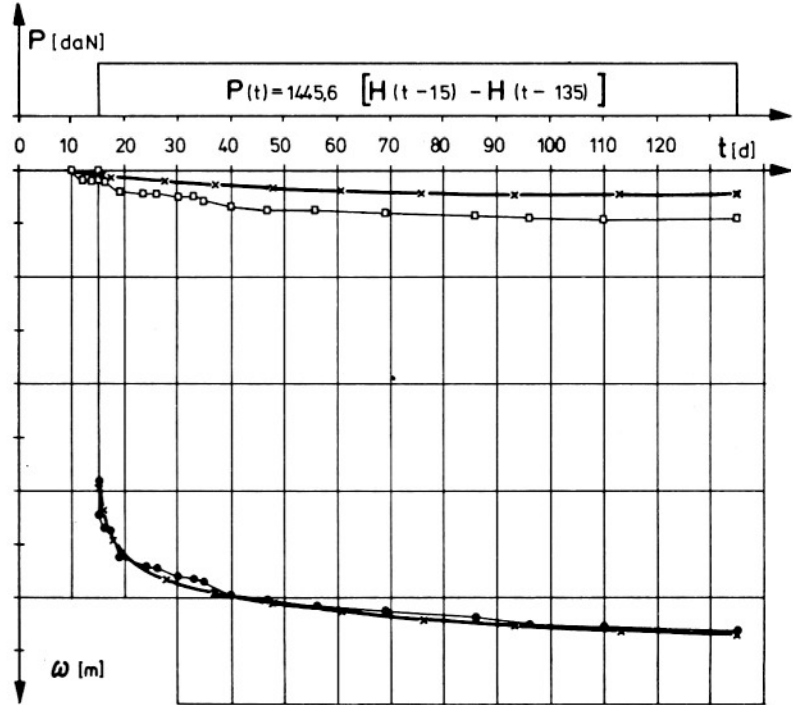
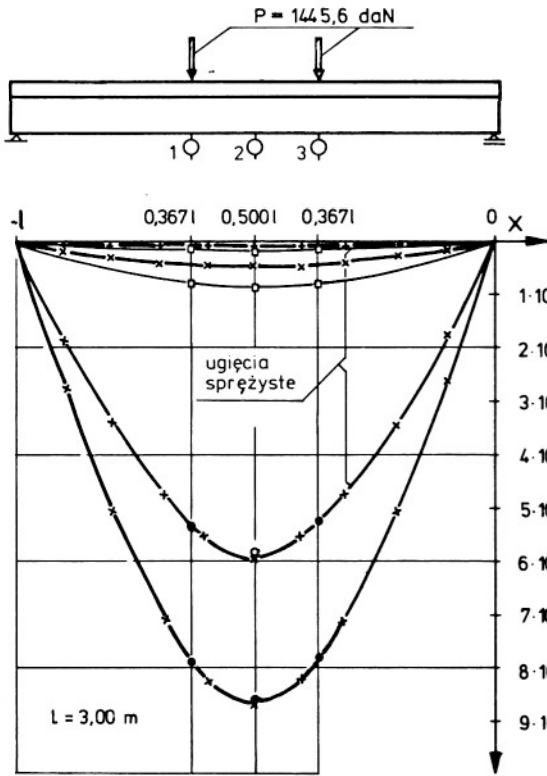


Rys. 14.4. Porównanie wyników uzyskanych według nieliniowego i liniowego modelu betonu.

Fig. 14.4. The comparison of the results obtained from non-linear and linear models of concrete.

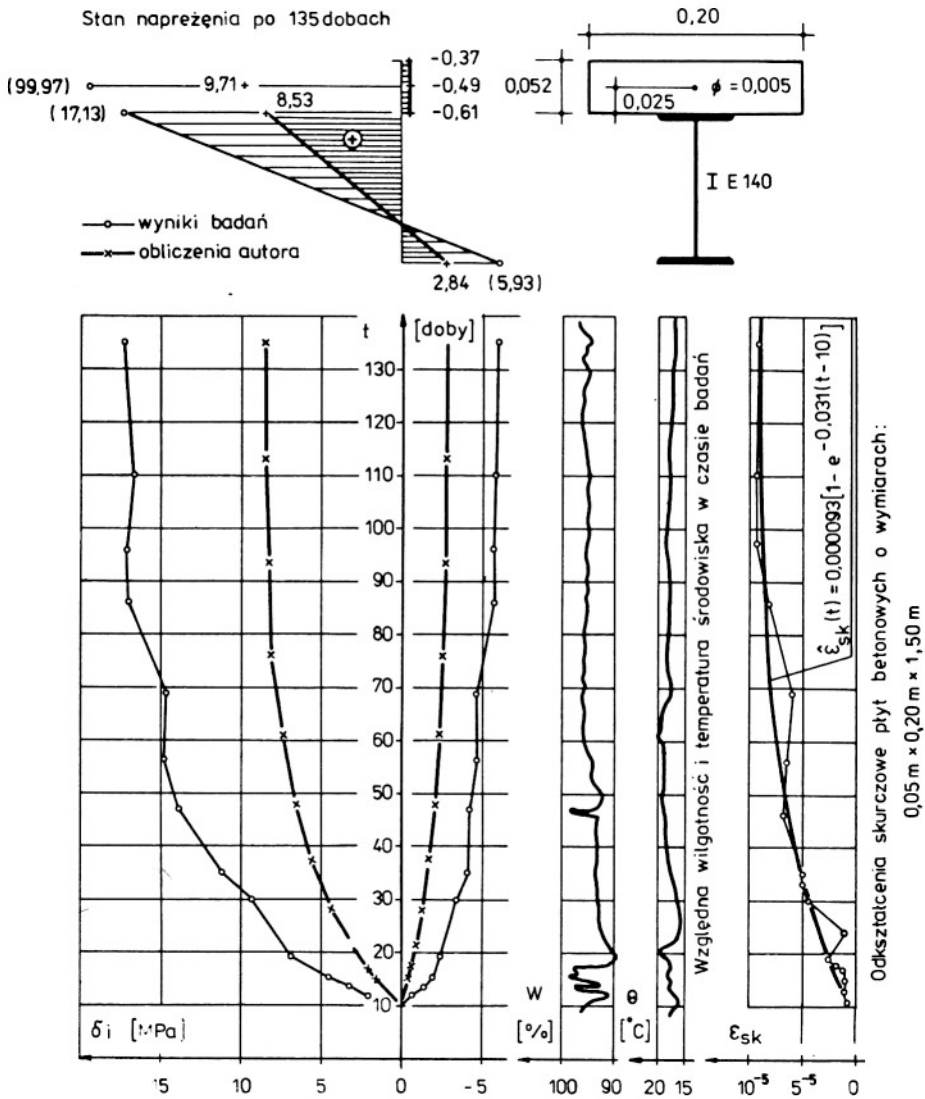
Badania te szeroko opisano w pracach [47,50] i w związku z tym w niniejszej pracy ograniczamy się tylko do podania wybranych wyników i wynikających z przytoczonych badań wniosków. Wyniki badań podano na tle analitycznych rozwiązań problemu redystrybucji naprężeń w przekrojach zespolonych [43,50]. Dane wyjściowe określające fizykomechaniczne właściwości materiałów, tworzących rozpatrywany przekrój zespolony, zestawiono w tab. 14.3.

Zaznaczmy, że z uwagi na stosunkowo krótki okres badań funkcje  $U(\tau)$ ,  $f_1(t - \tau)$ ,  $f_v(t - \tau)$  przyjęto w postaci uproszczonej, ograniczając liczbę wyrazów w szeregach aproksymujących te funkcje do dwóch [50].



—•— wyniki obliczeń autora  
 □ - dźwigary nieobciążone , ● - dźwigary obciążone .

Rys. 14.5. Ugięcia dźwigarów zespolonych [50].  
 Fig. 14.5. Deflections of composite girders [50].

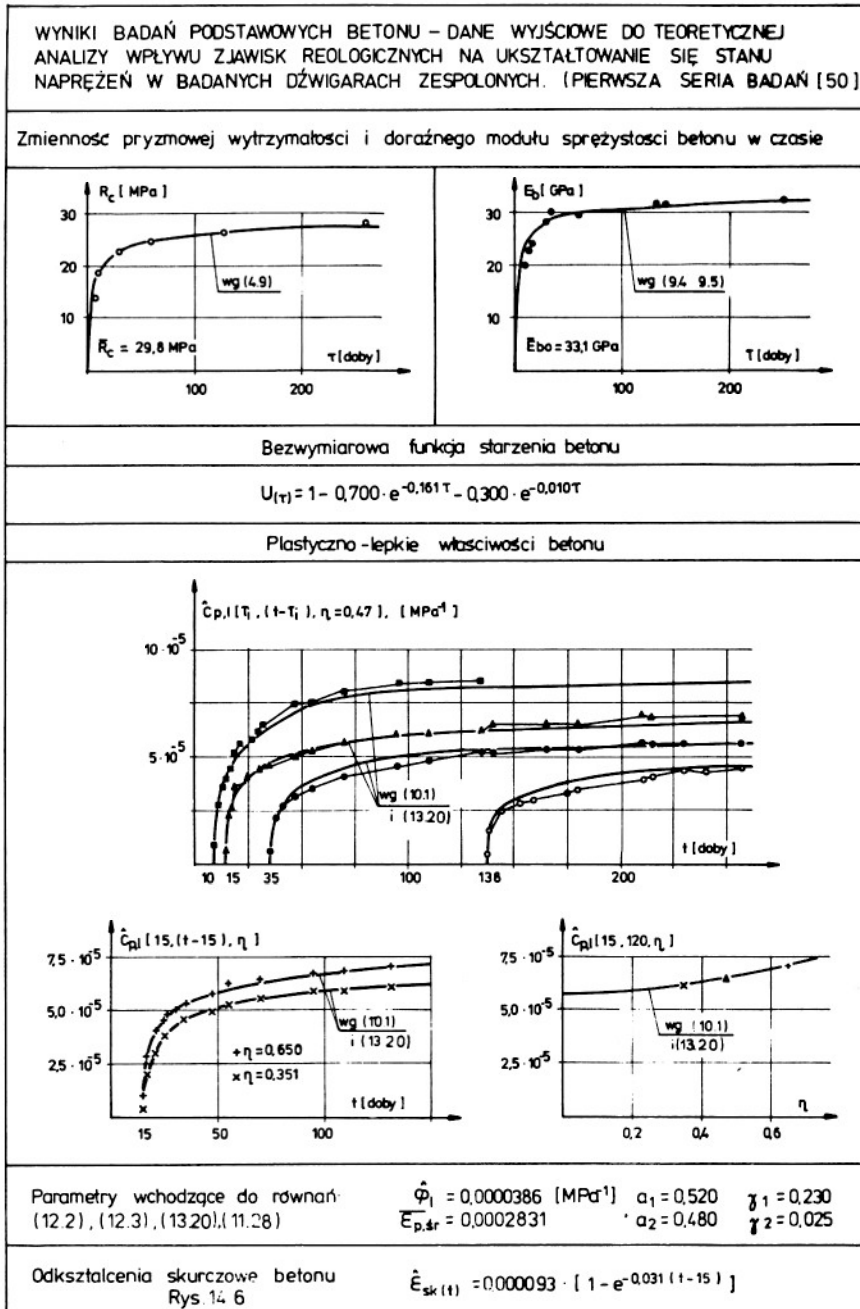


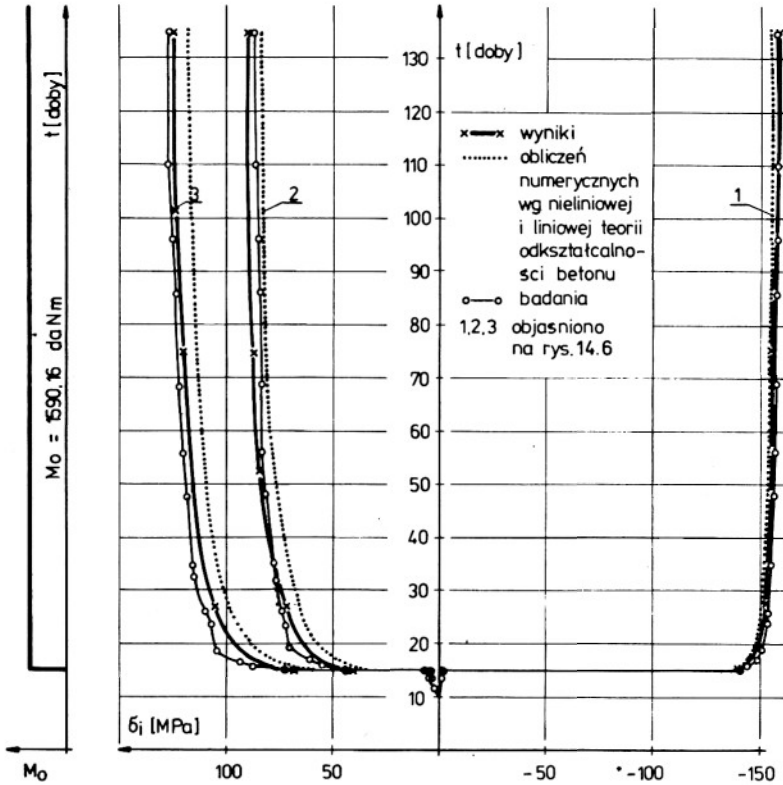
Rys. 14.6. Wpływ skurczu betonu na ukształtowanie się stanu naprężenia w elemencie stalowym dźwigare zespólonego.

Fig. 14.6. The effect of concrete shrinkage on the formation of state of stress in the steel element of a composite girder.

Tabela 14.3

Wyniki badań betonu użytego w badaniach autora [50]





Rys. 14.7. Stan naprężenia w obciążonym dźwigarze zespolonym jako funkcja zjawisk reologicznych.

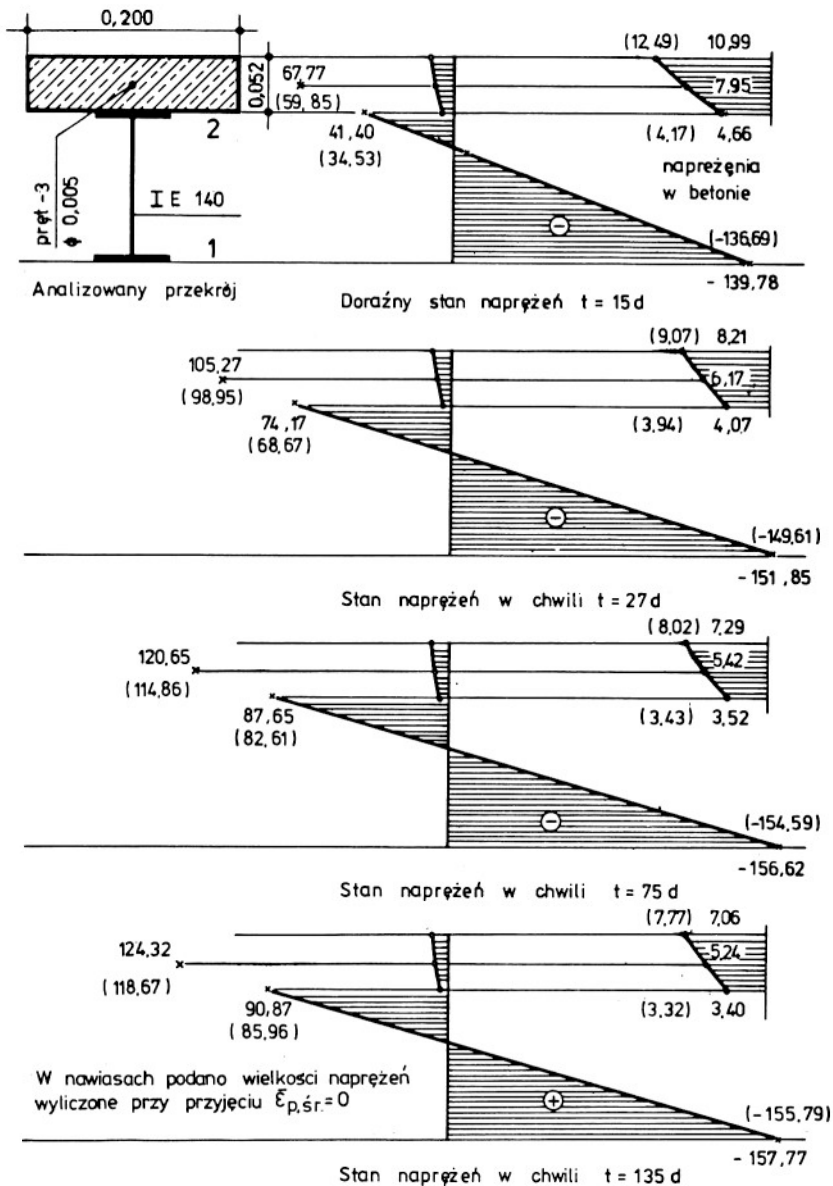
Fig. 14.7. The state of stress in a loaded composite girder as the function of rheologic phenomena.

Na rysunku 14.8' podano wyznaczony według algorytmu z pracy [50], zmieniający się w czasie stan naprężeń w przekroju środkowym analizowanego dźwigara zespolonego.

Analiza przedstawionych rezultatów (badań i obliczeń) pozwala stwierdzić, że:

- dostateczna zgodność odwzorowania zjawiska w zakresie przemieszczeń i naprężeń istnieje tylko w przypadku, gdy w rozpatrywanej konstrukcji panuje ściskający stan naprężenia (belki obciążone),
- w przypadku, gdy część betonowa dźwigara jest rozciągana (belki nieobciążone), obliczony stan naprężenia i przemieszczenia jest o około 50% niższy od pomierzonego.





Rys. 14.8. Zmiany stanu naprężenia w dźwigarze zespolonym poddanym długotrwałemu obciążeniu.

Fig. 14.8. Changes in state of stress in a composite girders subject to a long term.

Taki stan rzeczy należy tłumaczyć zwiększonym skurczem, jaki występuje w rozciąganych elementach betonowych. Na zjawisko to zwracano uwagę w podrozdziale 13.1.

Podsumowując przeprowadzone w tym podrozdziale rozważania, należy stwierdzić, że:

- przytoczone porównania pozwoliły na stosunkowo szeroką weryfikację proponowanego związku konstytutywnego w zakresie jednoosiowych stanów naprężenia,

- weryfikacja ta (szerszy jej zakres zawiera praca autora [50]) pozwala na przyjęcie stwierdzenia, iż proponowany związek (14.1) dostatecznie dokładnie odwzorowuje właściwości betonu. Może więc być on wykorzystany do rozwiązywania różnych problemów występujących w projektowaniu konstrukcji betonowych.

#### 14.3. Uwagi praktyczne o stosowaniu wyprowadzonego równania konstytutywnego w analizie betonowych konstrukcji mostowych

Z punktu widzenia obliczeń praktycznych jako zasadniczy jawi się problem: czy zawsze niezbędne jest korzystanie z pełnego równania konstytutywnego betonu?

Jak wiemy, dźwigary mostowe (płytkowe, płytowo-belkowe czy skrzynkowe) mają zwykle jeden wymiar znacznie mniejszy od dwóch pozostałych, w związku z czym można przyjąć, że w konstrukcjach tych wystarczy ograniczyć się do rozpatrywania płaskiego stanu naprężenia. Przestrzemy stan naprężenia występuje lokalnie, np. w obrębie zakotwień kabli czy obszarów podporowych.

W obliczeniach mostów będziemy zwykle mogli pominąć plastyczne odkształcenia objętościowe, które osiągają znaczną wielkość tylko w stanie trójosiowego ściskania.

Podobnie w analizie wielkości odkształceń zależnych od czynników higrotermicznych możemy na ogół zadowolić się wielkościami wyliczonymi dla średniej temperatury i wilgotności.

Podsumowując zaznaczymy, że przyjęcie mniej lub bardziej rozbudowanego modelu betonu jest uzależnione od rodzaju problemu, który mamy rozwiązać.

## 15. WYBRANE PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ WYPROWADZONEGO RÓWNIANIA KONSTYTUTYWNEGO

### 15.1. Efektywność sprężania belek strunobetonowych w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu

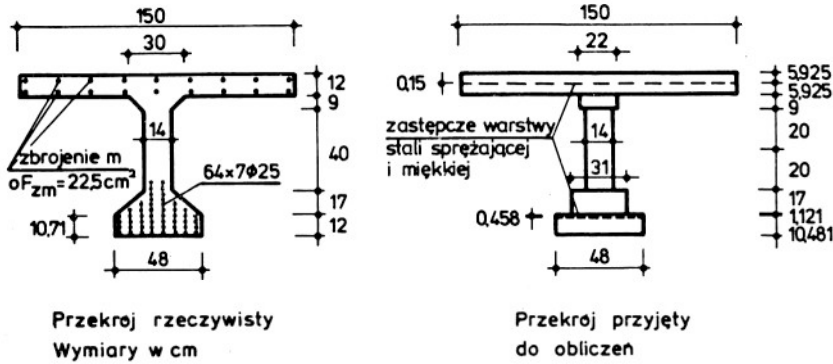
Problem efektywności sprężania szczegółowo analizowano w pracy autora [53], z której wystarczy tu przytoczyć niektóre wyniki analizy i wnioski.

Problem analizowany jest w oparciu o wzmiankowany już algorytm z [43,50] dla zastępczego przekroju idealizującego przekrój rzeczywisty. Na rysunku 15.1 przedstawiono wyniki przeprowadzonej analizy wpływu czynników nieliniowych na ukształtowanie się stanu naprężenia w typowym dźwigarze mostowym (stan naprężenia określono, biorąc pod uwagę wszystkie parametry charakteryzujące beton i historię obciążenia). Ponadto przyjęto, że dźwigar wykonany jest z betonu o  $B = 40$  MPa, a pozostałe nie określone tu parametry są identyczne z założonymi w pracy [44]. Wyniki obliczeń wykazują, że nieliniowe cechy betonu wpływają na zwiększenie strat siły sprężającej, a tym samym na efektywność sprężania przekroju. Spadek naprężeń na dolnej krawędzi dźwigara dla stanu początkowego dochodzi do 7,7%, a dla stanu bezużytkowego 7,0% w stosunku do rozwiązania liniowego; sprężanie betonu o dojrzałości 28-dniowej. Te same różnice przy sprężaniu belki z betonu o dojrzałości 21-dniowej są wyraźnie wyższe i odpowiednio wynoszą 11,0% i 10,1%.

Na rysunku 15.2 analizowano wpływ kolejności zwalniania strun na ukształtowanie się stanu naprężenia w przekroju belki strunobetonowej, wskazując, że czynnik ten może znacznie wpływać na efektywność sprężania belek strunobetonowych. Analizy tej dokonano przyjmując, że charakterystyka geometryczna dźwigara i cechy tworzywa, z jakiego został wykonany, jest identyczna z przyjętymi na rys. 14.1. Trzeba zaznaczyć, że poprawna technologia strunobetonu wymaga jednoczesnego powolnego zwalniania cięgien (co jest zwykle stosowane) i dlatego celem niniejszej analizy jest zwrócenie uwagi na konsekwencje nieprzestrzegania (co u nas niestety często ma miejsce) rygorów technologicznych.

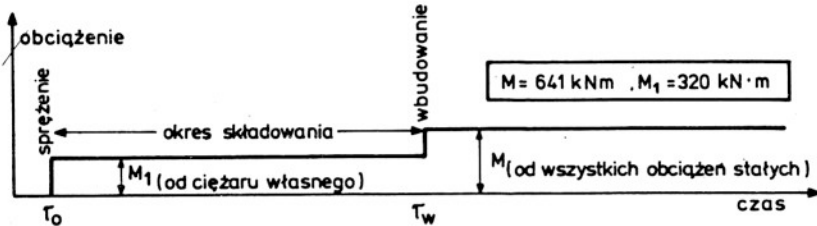
Podsumowując wyniki przedstawionych badań, należy stwierdzić, że:

- efektywność sprężania belek strunobetonowych jest nieco niższa od przyjmowanej w tradycyjnych obliczeniach,
- może ona obniżyć się do niebezpiecznego poziomu na skutek lekceważenia reżimu technologicznego (sprężania betonu o niewystarczającej dojrzałości, niejednoczesnego zwalniania strun, niewłaściwego składowania [44] itp.).

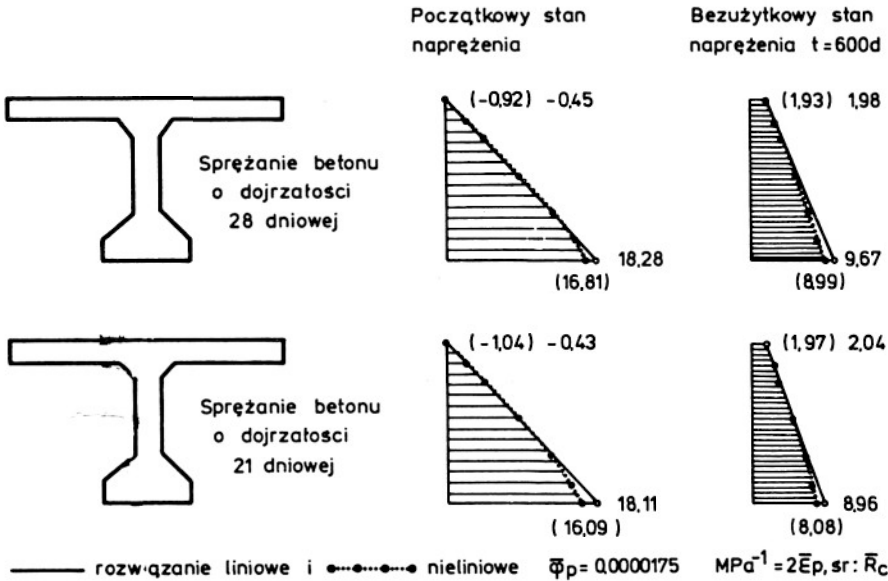


Przekroj rzeczywisty  
Wymiary w cm

Przekroj przyjęty do obliczeń

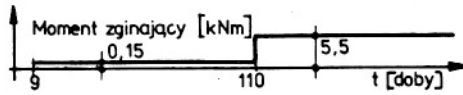


Schemat obciążeń przyjęty do obliczeń

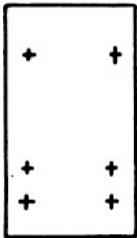


Rys. 15.1. Efektywność sprężenia dźwigarów strunobetonowych w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu.

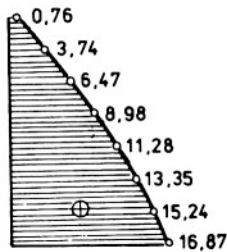
Fig. 15.1. The prestressing efficiency the pre-tensioned concrete girders in the light of the non-linear theory of concrete deformability.



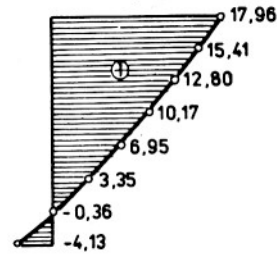
Przekrój  
strunobetonowy



t = 9 d  
Stan naprężenia  
po sprężeniu  
belki

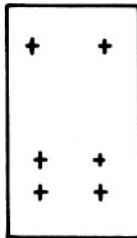


t = 200 d  
Stan naprężenia  
po 200 dobach

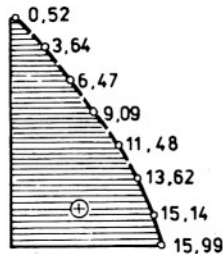


Stan naprężenia wyznaczony przy założeniu jednoczesnego  
zwolnienia strun.

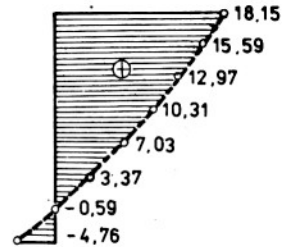
Przekrój  
strunobetonowy



t = 9 d  
Stan naprężenia  
po sprężeniu  
belki



t = 200 d  
Stan naprężenia  
po 200 dobach



Stan naprężenia wyznaczony przy założeniu, że pierwsze zostaną  
zwolnione ciągnia dolne.

Rys. 15.2. Wpływ kolejności zwalniania strun na efektywność sprężania belki strunobetonowej.

Fig. 15.2. The effect of the order of releasing the strands on the prestressing efficiency of the pre-tensioned concrete beam.

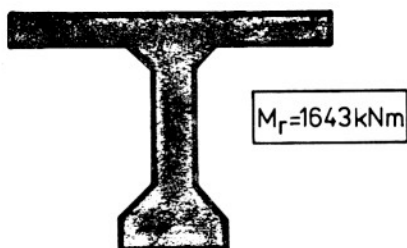
### 15.2. Odporność na zarysowanie konstrukcji sprężonych w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu

Zgodnie z PN-66/B-03320 przyjęto, że zarysowanie konstrukcji sprężonej następuje wówczas, gdy naprężenia w rozciągającym włóknie przekroju osiągną poziom  $1,7 R_{T}$ .

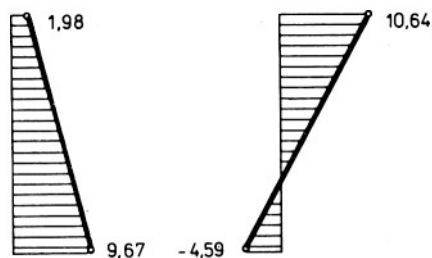
Jest to warunek zarysowania odmienny od zaproponowanego w rozdziale 16, ale jego przyjęcie umożliwia ocenę normowego ujęcia problemu zarysowania.

Dla przekrojów pokazanych na rys. 15.3 (przekrój identyczny z pokazanym na rys. 15.1) obliczono według teorii liniowej i nieliniowej wielkość momentu powodującego zarysowanie. W pracy autora [52] omówiono szerzej ten problem, analizując również przekroje prostokątne.

Analizowany przekrój sprężony; szczegółowe wymiary podano na rys. 15.1.

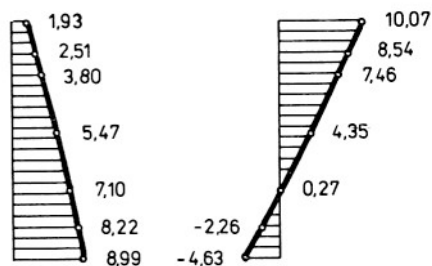
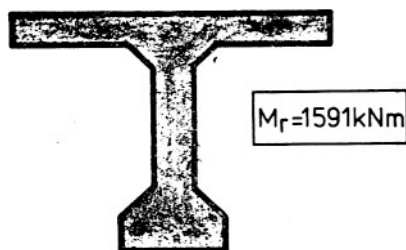


Bezżytkowy stan naprężenia



Stan naprężenia powodujący zarysowanie przekroju wg. PN-66/B-03320

Według liniowej teorii odkształcalności betonu.



Według nieliniowej teorii odkształcalności betonu  $\bar{\sigma}_p = 0,0000175 \text{ MPa}^1 = 2\bar{\epsilon}_p \cdot \bar{R}_c$

Rys. 15.3. Wielkość momentu powodującego zarysowanie belki strunobetonowej w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu.

Fig. 15.3. The value of the moment causing the cracking of a prestressed concrete beam in the light of the non-linear theory of concrete deformability.

Na podstawie przedstawionych wyników obliczeń można przyjąć, że:

- efektywność sprężenia konstrukcji betonowych jest nieco niższa niż to wynika z tradycyjnych (liniowych) obliczeń,
- wielkość momentu powodującego zarysowanie obliczona według teorii nieliniowej jest niższa od otrzymanej drogą liniowej analizy od 3,2% (warunki średnie) do 8% (beton lekki wcześniej sprężany).

Podsumowując należy stwierdzić, że wpływ pomijanych zwykle nieliniowych odkształceń betonu na analizowane tu procesy będzie dla przeciętnych konstrukcji niewielki (ale zawsze niekorzystny), może natomiast okazać się istotny w przypadku stosowania niższych klas betonu (np. B-30) i wcześniejszego sprężania konstrukcji.

### 15.3. Praca mostowych dźwigarów z betonu sprężonego w warunkach obciążeń ponadnormatywnych

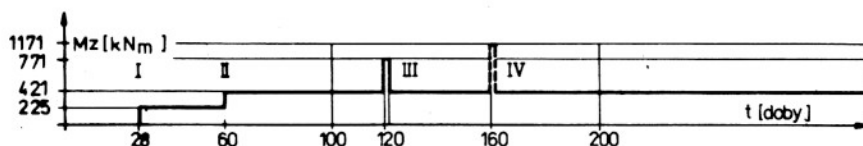
W ostatnich latach coraz częściej pojawia się pytanie, jakie skutki, mogące wpływać na trwałość i bezpieczeństwo konstrukcji, wywołują obciążenia o wielkości ponadnormatywnej. Obciążenia ponadnormatywne [38] powodują stosunkowo wysoki stopień wyłączenia, sięgający często 60-75% wytrzymałości materiałów konstrukcji. W związku z tym poprawny opis procesów zachodzących w analizowanych budowlach inżynierskich można uzyskać przy zastosowaniu nieliniowych związków konstytutywnych.

Szczegółowe omówienie tego problemu zawiera praca [38], z której zaczerpnięto prezentowane na rys. 15.4 wyniki. Na rysunku tym pokazano zmiany średnich naprężeń w cięgnach sprężających i zbrojeniu miękkim dźwigara sprężonego, a także stan naprężenia panujący w betonie w wybranych momentach budowy i eksploatacji konstrukcji. Podane wyniki dotyczą dwóch różnych możliwości użytkowania obiektu.

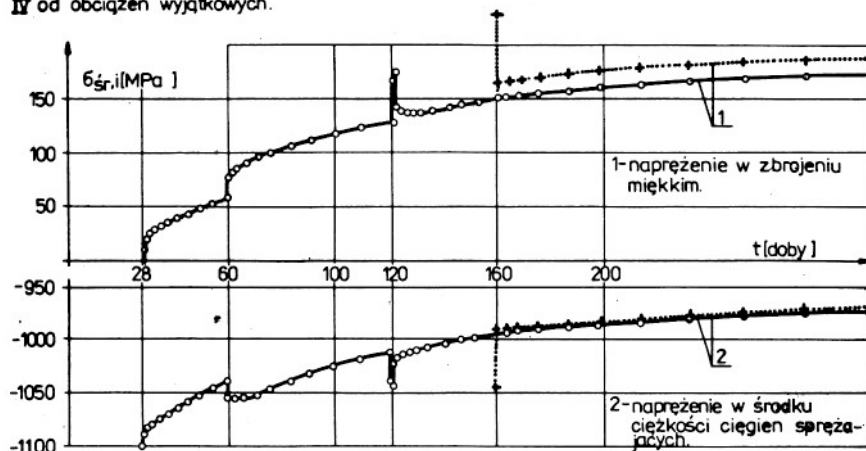
Analiza przedstawionych wyników prowadzi do wniosku, że ponadnormatywne obciążenie (większe od spotykanego w normalnej eksploatacji obiektu) powoduje trwałą zmianę (redystrybucję) naprężeń w przekroju belki. Zmiana ta przebiega w kierunku zmniejszenia bezpieczeństwa budowli. Podobne efekty występują w konstrukcjach zespolonych, np. [50,233].

### 15.4. Inne możliwości zastosowań

Rozwiązywanie innych ważnych zagadnień z zakresu betonowych konstrukcji mostowych wymaga pogłębionej analizy szeregu problemów dotyczących modelowania konstrukcji zbrojonych, takich jak:

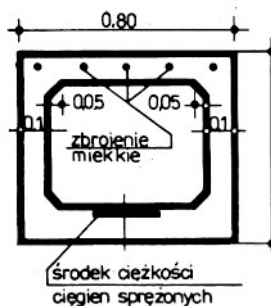


Przyrost momentu gnącego w analizowanym przekroju belki w procesie eksploatacji I od ciężaru własnego prefabrykatu, II od obciążeń statycznych, III od obciążeń użytkowych, IV od obciążeń wyjątkowych.

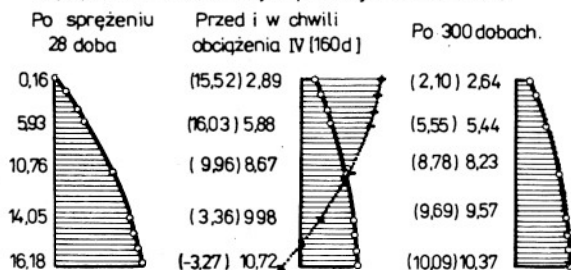


Zmiana w czasie średnich naprężeń w prętach zbrojenia miękkiego "1" i cięgnach w przypadku normalnej eksploatacji (—○—○—) i gdy wystąpi obciążenie IV (—◆—◆—).

Rozpatrywany przekrój sprężony



Naprężenia w analizowanym przekroju belki [MPa]



W nawiasach podano wielkości naprężeń dla przypadku gdy w przekroju wystąpił moment od obciążenia IV

Rys. 15.4. Wpływ przeciążenia belki sprężonej na występujący w niej stan naprężenia.

Fig. 15.4. The effect of overloading of a prestressed beam on its state of stress.



- współpraca zbrojenia i betonu przy różnych poziomach wyteżenia obu materiałów,
- redystrybucja naprężeń w elementach zarysowanych,
- rola rys w przypadku obciążeń działających prostopadle do nich i innych.

Wymienionymi problemami zajmują się badacze pracujący w mechanice konstrukcji betonowych [18,28,33,64,75,83,88,91,101-103,113,146,170,181,186,216,225,226,256,262,271,285,292,302,317,344,347,351].

## 16. PRAWO PĘKANIA BETONU

### 16.1. Sprecyzowanie problemu

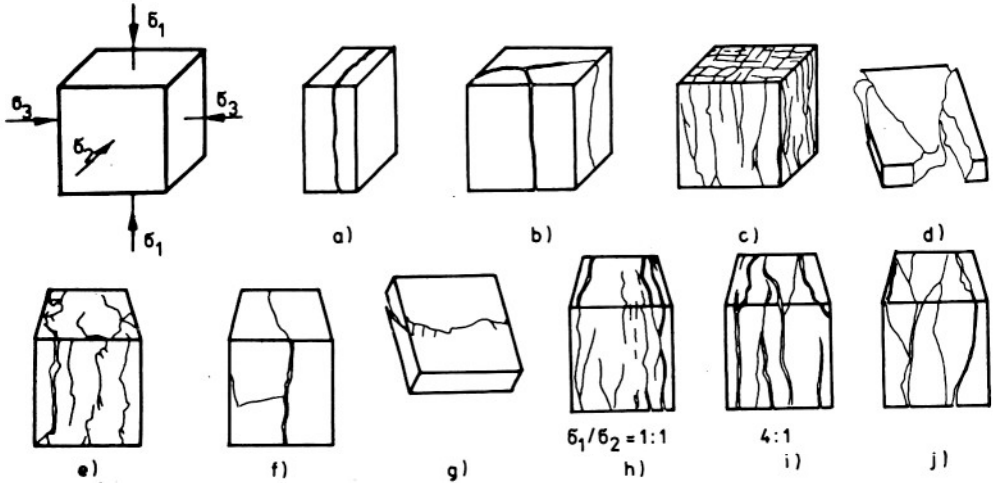
Zaproponowane równanie konstytutywne (14.1) pomija podstawowy fakt stwierdzany w doświadczalnych badaniach betonu, a mianowicie jego kruche pękanie.

Aby uwzględnić tę cechę, musimy na plastyczne odkształcenia postaciowe, będące efektem propagacji defektów w materiale, nałożyć ograniczenie w postaci prawa pękania. Oznacza to, że tylko te odkształcenia czynimy odpowiedzialnymi za pękanie betonu.

### 16.2. Pękanie betonu w prostych i złożonych stanach naprężenia w świetle badań eksperymentalnych

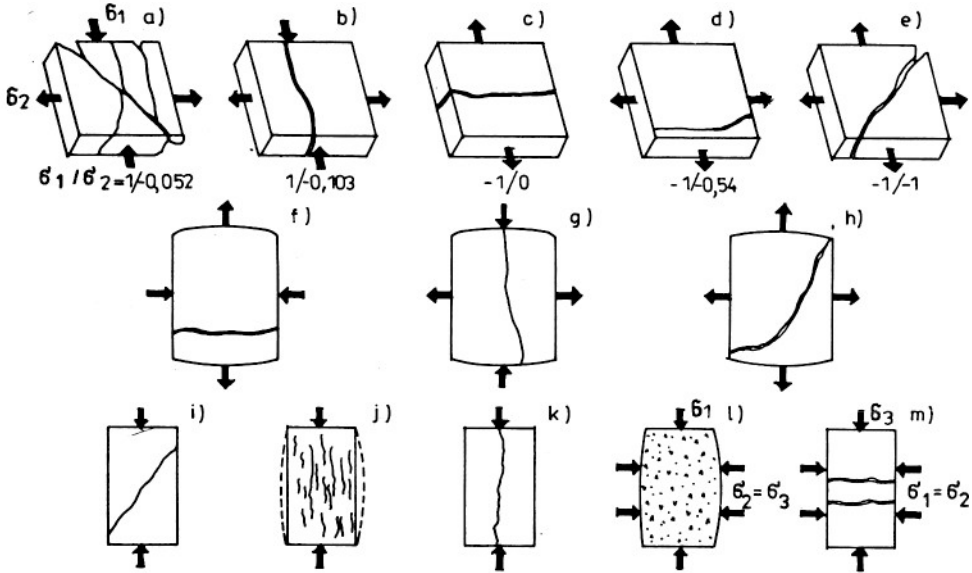
W podrozdziale tym analizowane będą postaci zniszczenia próbek betonowych w warunkach różnorodnych stanów naprężenia. Na dwóch kolejnych rysunkach 16.1 i 16.2 pokazano charakterystyczne spękania próbek betonowych powodujące utratę zdolności do dalszego przenoszenia obciążeń. Szczegółowo w oparciu o szerokie rozeznanie literaturowe problem ten przeanalizował Patas w [264]. Wnioski wpływające z tej analizy są następujące:

- a) w stanie prostego ściskania zniszczenie następuje na skutek powstania spękań w płaszczyznach równoległych do kierunku obciążenia - rys. 16.1a,b,c,d,e,f,
- b) w stanie prostego rozciągania pęknięcie pojawia się w płaszczyźnie prostopadłej do kierunku rozciągania - rys. 16.2.c i rys. 4.4,
- c) w stanie płaskiego ściskania spękania pojawiają się w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny obciążenia próbek - rys. 16.1h,i,j,
- d) w stanie płaskiego lub przestrzennego ściskania z rozciąganiem lub nierównomiernego rozciągania, pęknięcie powstaje zawsze prostopadle do kierunku działania maksymalnego rozciągania - rys. 16.2a,b,d,f,g,



Próbki a,b,c,d,e,f - zostały zniszczone w stanie jednoosiowego ściskania:  
 $\sigma_1 = R_c$  ,  $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ .  
 Próbki g,h,i,j - zostały zniszczone w stanie dwukierunkowego ściskania:  
 $\sigma_1 > 0$  ,  $\sigma_2 > 0$  ,  $\sigma_3 > 0$

Rys. 16.1. Układy spękań w próbkach poddanych jedno i dwuosłowemu ściskaniu [264].  
 Fig. 16.1. The configuration of cracks in specimens subject to uni-and-biaxial compressions [264].



Rys. 16.2. Postacie zniszczenia próbek badanych w złożonych stanach naprężenia [264].  
 Fig. 16.2. Types of damage observed in specimens tested in complex states of stress [264].

e) w stanie równomiernego płaskiego lub przestrzennego rozciągania pęknięcie może być skierowane pod pewnym kątem do głównych kierunków rozciągań - rys. 16.2e,h,

f) dla przestrzennego nierównomiernego ściskania może wystąpić miażdżenie całej próbki - rys. 16.2 l.

Uogólniając wymienione wyżej wnioski możemy wyróżnić dwa typy zniszczenia betonu:

- zniszczenie typu rozdzielczego (pęknięcie) występujące wówczas, gdy stan naprężenia charakteryzuje się małym stosunkiem niezmienników stanu naprężenia ( $3 \sigma_0 / \sigma_1$ ). W literaturze [83] ten typ zniszczenia nosi nazwę zarysowania,

- zniszczenie przez zmiażdżenie występujące wówczas, gdy wszystkie naprężenia główne  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 > 0$  (ściskające), a stosunek niezmienników stanu naprężenia  $3 \sigma_0 / \sigma_1$  jest duży, co oznacza, że zniszczenie to występuje w stanach naprężenia zbliżonych do stanu aksjatorowego. Przy takim zniszczeniu następuje całkowita utrata zdolności betonu do przeniesienia jakichkolwiek obciążeń.

W niniejszej pracy będziemy zajmować się tylko pierwszym typem zniszczenia, gdyż drugi typ może mieć praktyczne znaczenie tylko w przypadku betonów niskiej klasy  $B < 20$  MPa (porowatych), które wykluczaliśmy z naszych rozważań.

### 16.3. Prawo pęknięcia betonu w ujęciu autora

Analizując kierunki pęknięć próbek zniszczonych w różnych stanach naprężenia łatwo skojarzymy fakt, iż pęknięcia te występują zawsze w płaszczyznach prostopadłych do kierunku, w jakim wystąpiło minimalne główne postaciowe odkształcenie plastyczne (maksymalne wydłużenie plastyczne)  $e_3^p = e_{p,min}$ . Pokazano to na rys. 16.3.

Spostrzeżenie to możemy zapisać w postaci następującego warunku (16.1), który będziemy nazywać prawem pęknięcia

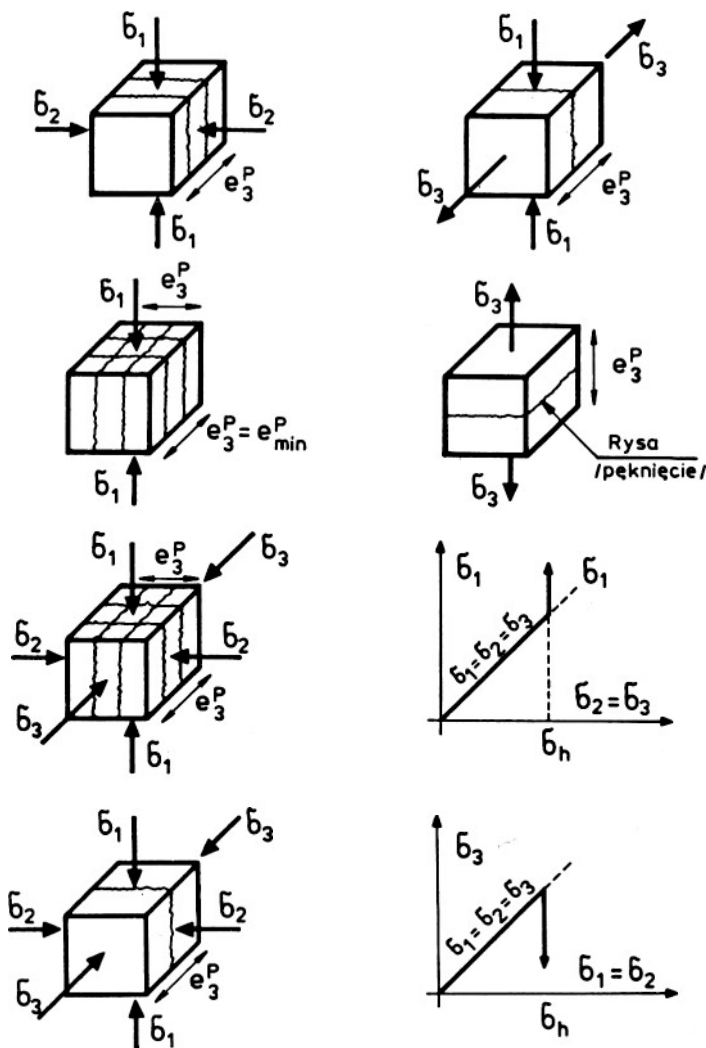
$$e_{p,min} = e_3 > e_{p,gr}(\sigma_{i,gr}), \quad (16.1)$$

gdzie  $e_{p,gr}(\sigma_{i,gr})$  jest granicznym wydłużeniem postaciowym, po przekroczeniu którego następuje utrata ciągłości materiału. Wydłużenie to jest funkcją drogi obciążenia, którą określa punkt  $\sigma_{i,gr}$  leżący na granicznej powierzchni wytrzymałości, do którego zmierza rozpatrywany stan naprężenia.

Przyjmujemy, że funkcja  $e_{p,gr}(\sigma_{i,gr})$  ma taką samą postać, jak funkcja określająca zdolność betonu do plastycznej zmiany postaci określona w rozdziale 11 - (11.12)

$$e_{p,gr}(\sigma_{i,gr}) = \hat{e}_{p,gr} \left( \frac{\sigma_{i,gr}}{R_c} \right)^3. \quad (16.2)$$

Parametr występujący we wzorze (16.2)  $\hat{e}_{p,gr}$  jest granicznym postaciowym wydłużeniem plastycznym, jakie występuje przy pękaniu betonu przy prostym ścisaniu.



Rys. 16.3. Kierunki występowania  $e_3^P$  i kierunki spękań powstające w próbkach poddanych różnym obciążeniom.

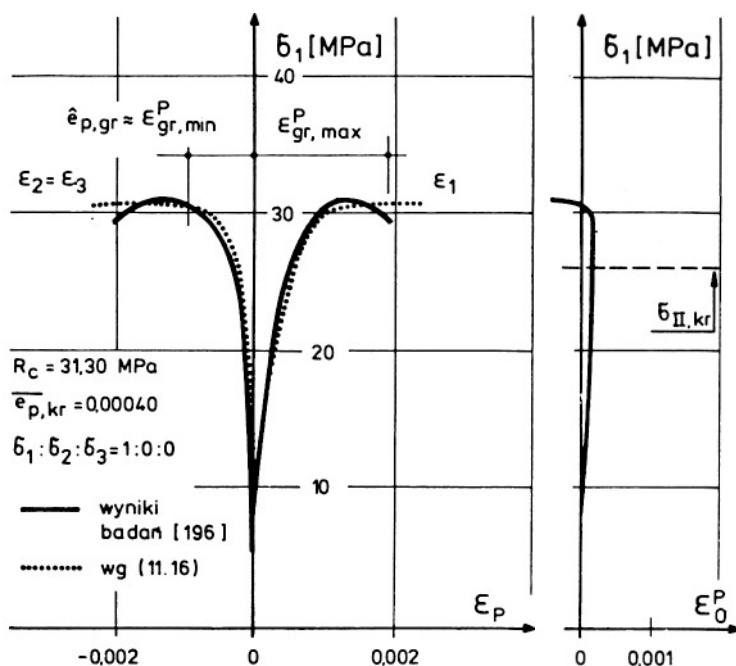
Fig. 16.3. The directions of  $e_3^P$  and the directions of cracks observed in specimens subject to different loads.

#### 16.4. Graniczne postaciowe wydłużenie plastyczne przy prostym ścisnieniu i rozciąganiu

Zdefiniowanie tego odkształcenia jest sprawą prostą, natomiast wskazanie jego wartości w procesie pomiaru doświadczalnego nastęrcza już pewnych trudności. Wynikają one z tego, iż:

- graniczne odkształcenia próbki są wielkością umowną (różni badacze różnie je definiują),
- zależą one w dużym stopniu od zastosowanej techniki badań (czy wymuszamy przyrost naprężeń, czy odkształceń) [81,119,125,140,165,193,232,249].

Na rysunku 16.4 pokazano, jak narastają odkształcenia plastyczne w próbce poddanej osiowemu ścisnieniu. Przypomnijmy (rozd. 7), że pęknięcie nie występuje nagle, a jest procesem rozwijającym się wraz ze wzrostem stopnia wyteżenia próbki. Po przekroczeniu poziomu  $\eta_{kr,II}$  próbka wykazuje gwałtowny przyrost objętości,



Rys. 16.4. Próba zdefiniowania parametru  $\hat{\epsilon}_{p,gr}$ .

Fig. 16.4. An attempt of defining the parameter  $\hat{\epsilon}_{p,gr}$ .

co jest spowodowane rozwojem mikrouszkodzeń (rys. 7.4) i prowadzi do znacznych wydłużeń poprzecznych - rys. 16.4.

Trudno, zmierzone wielkości  $e_2^p = e_3^p$ , traktować jako rzeczywiste odkształcenia plastyczne z uwagi na wcześniejszą utratę ciągłości materiału w kierunku poprzecznym. W chwili pęknięcia można przyjąć, że ciągłość ta występuje jeszcze w kierunku zgodnym z kierunkiem ściskania i zdefiniować  $\hat{e}_{p,gr}$ , zgodnie z założeniami dotyczącymi postaciowych odkształceń plastycznych jako

$$\hat{e}_{p,gr} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{gr,max}^p \quad (16.3)$$

We wzorze tym  $\varepsilon_{gr,max}^p$  jest plastycznym skróceniem próbki (rys. 16.4) przy prostym ściskaniu.

T a b e l a 16.1

Parametry określające graniczne, postaciowe wydłużenia betonu

Klasa betonu	MPa	B 20	B 25	B 30	B 35	B 40	B 50
$\hat{e}_{p,gr} \cdot 10^5$	-	110	97,5	87,5	82,5	75	60

W tabeli 16.1 podano wartości parametrów  $\hat{e}_{p,gr}$  oszacowane na podstawie DIN-1045.

Dla osiowego rozciągania  $\sigma_{i,gr} = |R_r|$ , a  $\sigma_{i,gr}/R_c = |k_r|$ , więc

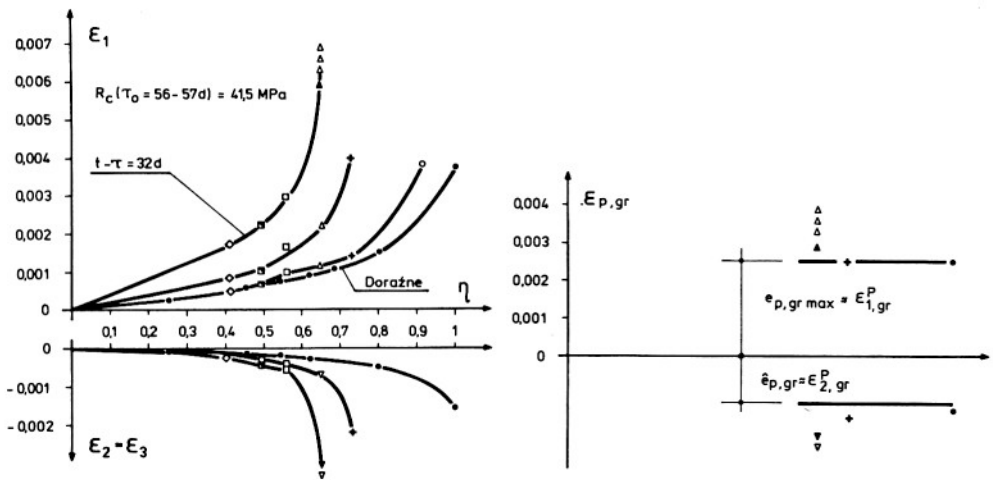
$$e_{p,gr}(\sigma_{i,gr} = R_r) = \hat{e}_{p,gr} |k_r|^3 \quad (16.4)$$

Z wzoru (16.4) wynika, że graniczne postaciowe odkształcenia betonu przy prostym rozciąganiu wynoszą około  $0,0005 \hat{e}_{p,gr}$ .

#### 16.5. Weryfikacja przyjętego prawa pęknięcia w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych

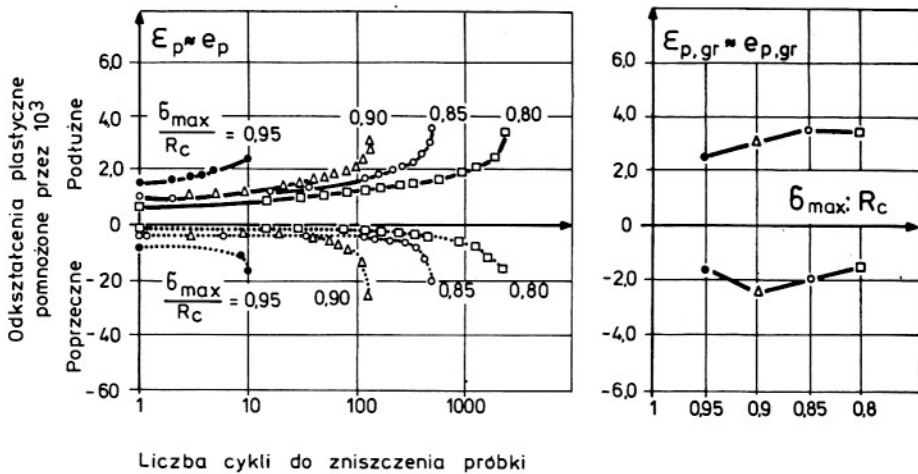
Z rozważań przedstawionych w poprzednim podrozdziale wynika, że weryfikacja przyjętego prawa pęknięcia może mieć jedynie charakter jakościowy.

Na rysunku 16.5 przedstawiono wyniki badań wytrzymałości betonu w warunkach długotrwałego osiowego ściskania (badania zespołu RUSCHA [289, 290]). W górnej części rysunku podano odkształcenia całkowite (podłużne i poprzeczne), a na dolnym graniczne plastyczne odkształcenia postaciowe w chwili poprzedzającej zniszczenie. Od wartości granicznych wynikających z równania (16.1) odbiega tylko próbka, która uległa zniszczeniu



Rys. 16.5. Weryfikacja przyjętego prawa pęknięcia w oparciu o badania zespołu Rüsch'a [290].

Fig. 16.5. Verification of the assumed rule of cracking based on the results obtained by the Rüsch's team [290].



Liczba cykli do zniszczenia próbki

Rys. 16.6. Odkształcenia plastyczne betonu wywołane cyklicznym jednoosiowym obciążeniem utrzymywanym aż do zniszczenia próbki [22].

Fig. 16.6. Plastic strain of concrete caused by a cyclic uniaxial load acting till the specimen is broken [22].

po 32 dobach od chwili obciążenia. Jeżeli jednak uznamy, że z chwilą, gdy następuje lawinowy wzrost odkształceń (zaciemnione trójkąty na wykresach), próbka jest już zniszczona, to także ten wynik możemy uznać za zgodny z przyjętymi założeniami.

Na kolejnym rysunku 16.6 pokazano wyniki przyrostu odkształceń plastycznych w próbkach poddanych cyklicznemu jednoosiowemu odkształceniu ściskającemu - badania Awada i Hilsdorfa [22]. Z analizy przytoczonych rezultatów wynika wniosek, że pęknięcie (niszczenie) tak obciążonych próbek występuje wówczas, gdy postaciowe wydłużenia plastyczne osiągną wartość graniczną. Jest to ważne stwierdzenie pozwalające na ujęcie w warunku (16.1) również problemów związanych z pęknięciami zmęczeniowymi betonu.

## 16.6. Pęknięcie betonu przy obciążeniach cyklicznie zmiennych

### 16.6.1. Wprowadzenie

Ta ważna dla mostownictwa problematyka nie będzie w niniejszej pracy omawiana szczegółowo z uwagi na to, że równolegle są opracowywane w kraju dwie rozprawy (Furtaka [128] i Maliszkieвича [219]) poświęcone wyłącznie tym zagadnieniom.

W rozdziale tym autor szkicowo pokaże, jak to zagadnienie mieści się w ramach przedstawionej teorii.

Zakładamy, że przyjęty warunek ciągłości materiału (16.1) jest również ważny dla obciążeń zmiennych, to znaczy, że pęknięcie materiału nastąpi tuż po przekroczeniu granicznych dla danej drogi obciążenia wartości postaciowych odkształceń plastycznych. Oznacza to więc, że obciążenie cykliczne będzie wpływać tylko na odkształcenie występujące po lewej stronie równania (16.1).

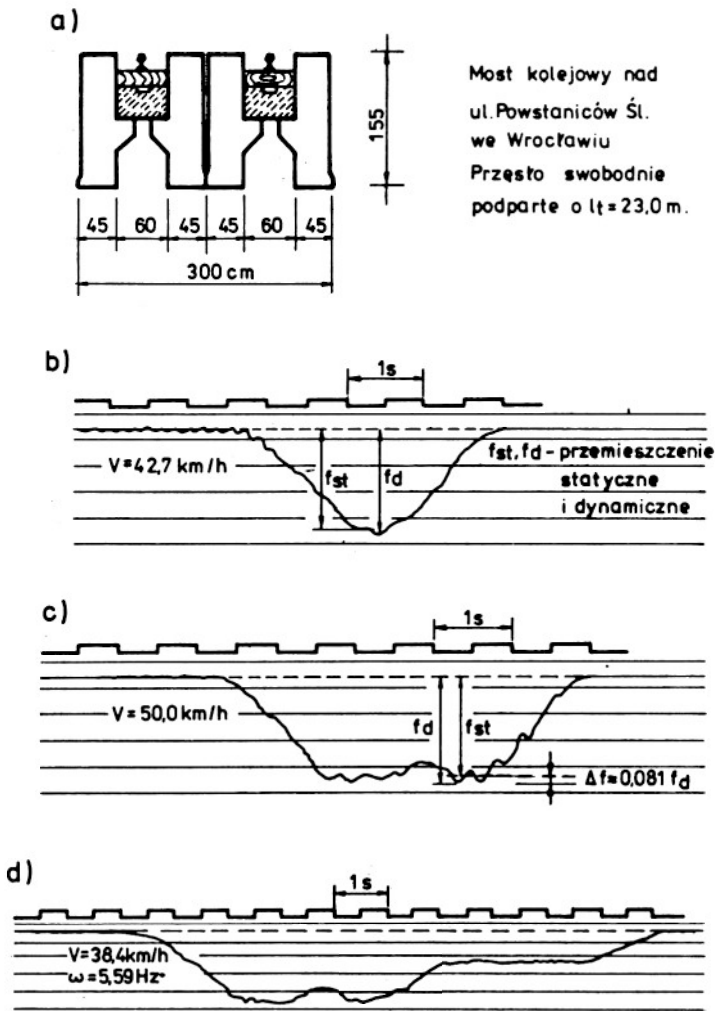
### 16.6.2. Obciążenia zmienne mostów

Zmienne obciążenia użytkowe wywołują różnego rodzaju cykle naprężeń w poszczególnych elementach mostu. I tak, elementy krótkie są narażone na to, że w okresie eksploatacji poddane zostaną większej liczbie cykli obciążenia, a dłuższe mniejszej.

Nie analizując szerzej tego problemu, zauważmy (rys. 16.7), że dla mostów betonowych istotne jest samo działanie obciążenia zmiennego, którego przejazd (dla dźwigarów głównych) stanowi jeden cykl obciążenia. Efekty dynamiczne są tu pomijalne.

Zauważmy dalej, że większość badań betonu pod obciążeniem zmiennym dotyczy przypadku pokazanego na rys. 16.8a, gdy np. w konstrukcjach sprężonych występują zmiany naprężeń pokazane na rys. 16.8b, co obrazuje złożoność problemu i poważne luki w eksperymentalnym rozpoznaniu zagadnienia.





Wyniki badań dynamicznych mostu kolejowego: a) przekrój poprzeczny przęsła, b), c), d) przemieszczenia środka rozpiętości przęsła wywołane przejazdem: lokomotywy, 2 lokomotyw, 2 lokomotyw i wagonów.

Rys. 16.7. Przesunięcie środka ciężkości przęsła mostu kolejowego pod obciążeniem rzeczywistym [73].

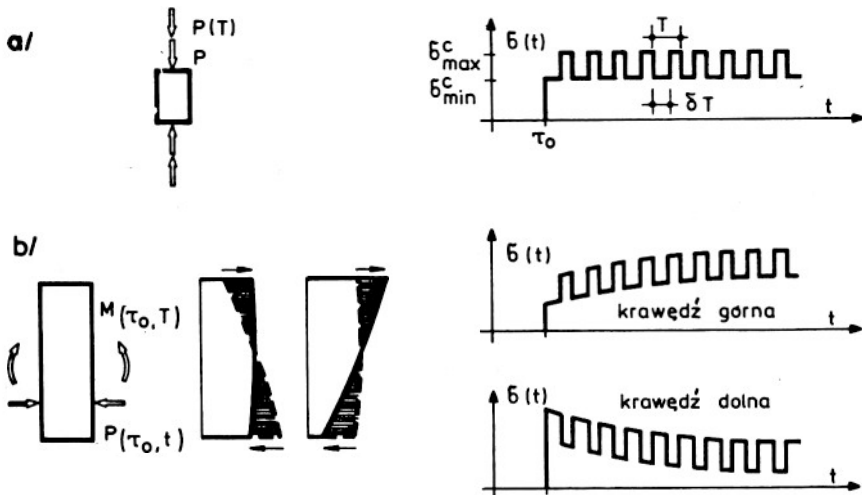
Fig. 16.7. The displacement of the centre of gravity of the railway bridge span subject to the real load [73].

## 16.6.3. Odształcenia betonu pod obciążeniem cyklicznym

Problem ten był analizowany w wielu pracach różnych autorów, jak np. [22,24-27,50,153,175,235], gdzie zauważono, że odształcenia całkowite betonu poddanego obciążeniom cyklicznym są większe od odształceń wywołanych przez obciążenie stałe tej samej wielkości - np. badania Gwozdiewa [153] (rys. 16.9). Różnica ta jest dodatkowym postaciowym odształceniem plastycznym [182], co oznacza, że obciążenia tego typu potęgują procesy destrukcyjne struktury betonu (potwierdzają to badania emisji akustycznej [219]).

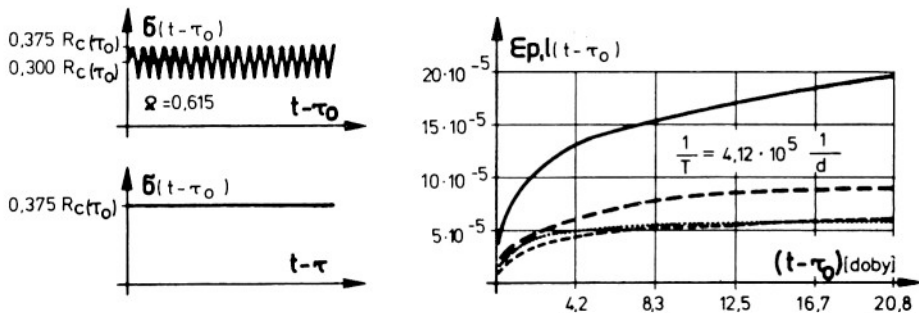
Wynika z tego, że powodowane kolejnymi cyklami obciążenia przyrosty postaciowych odształceń plastycznych będą funkcją postępującej propagacji mikrodefektów i mogą być ujęte w ramach różnych koncepcji opisu tego problemu, jak np. Parisa [265], Irwina [161] czy Wnuka [345,346] lub w ramach tzw. teorii kumulacji uszkodzeń [127,229,246,311]. Musimy jednak zaznaczyć, że problem propagacji uszkodzeń w złożonych stanach naprężenia nie jest jeszcze opracowany w stopniu zadowalającym (nie tylko dla betonu) [3,22,92,213] i wymaga dalszych badań.

Dyskusja różnych propozycji ujęcia problemu propagacji defektów przekracza ramy niniejszej pracy. Podamy tu tylko proste podejście fenomenologiczne pozwalające na analizę procesu w jednoosiowym stanie naprężenia.



Rys. 16.8. Zmiany naprężeń wywołane obciążeniem cyklicznym: a) w próbkach, b) rzeczywistych konstrukcjach,

Fig. 16.8. Changes in stress caused by cyclic load: a) in specimens, b) in real structures.



Odształcenia niesprężyste betonu wywołane działaniem obciążenia cyklicznego (—,.....) i stałego (---,----)  
 --- } odkształcenia całkowite      ..... } część odwracalna odkształceń całkowitych

Rys. 16.9. Porównanie odkształceń betonu poddanego obciążeniom cyklicznym i stałym [153].

Fig. 16.9. The comparison of strains in concrete subject to cyclic and dead loads.

Jednoosiowe obciążenie cykliczne charakteryzują następujące parametry:

$\sigma_{\max}^c$  i  $\sigma_{\min}^c$  - maksymalne i minimalne naprężenia cyklu,

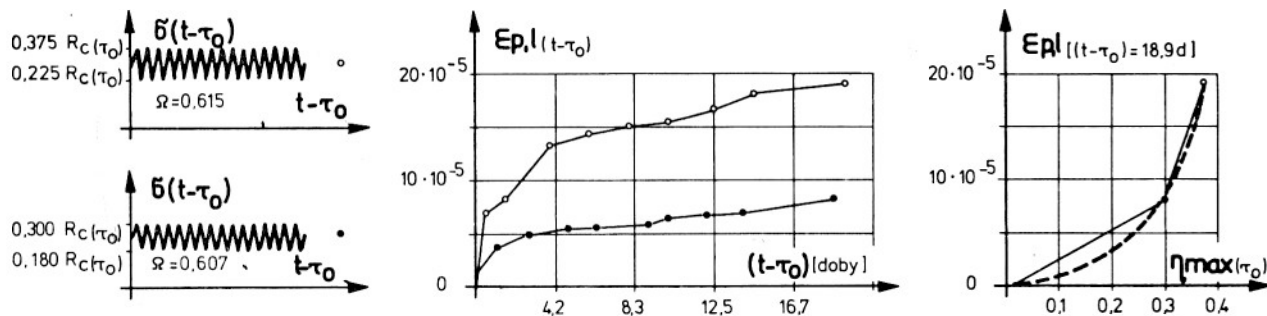
$T$  - okres cyklu,

$R = \sigma_{\max}^c / \sigma_{\min}^c$  - współczynnik charakteryzujący amplitudę cyklu.

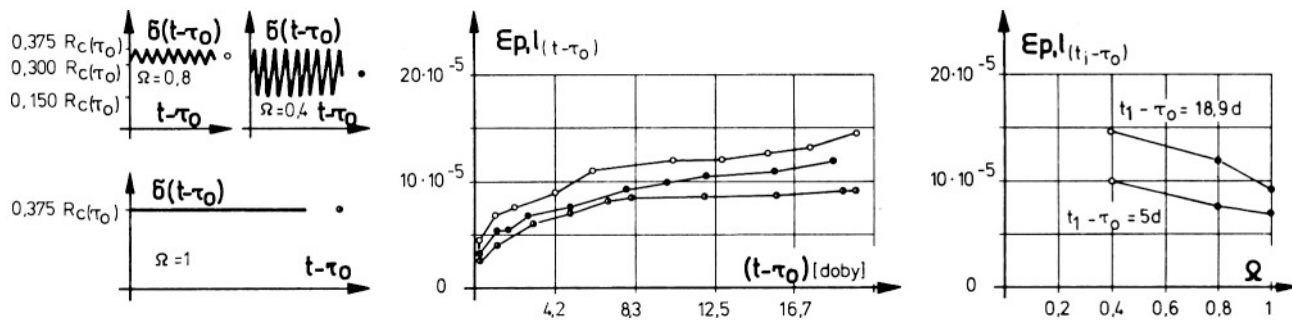
W pracy autora [182] zaproponowano następujący wzór, pozwalający określić interesujące nas odkształcenia, zbudowany w oparciu o wyniki badań Gwozdiewa (rys. 16.10) i ustalenia Berga [34-35]:

$$e_{ij}(t) = \bar{e}_{p,kr} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} \left| \ln \left\{ 1 - [\eta_{\max}(t)]^2 \right\} \right| \left[ 1 + \frac{\kappa}{T} (1 - R) f_1(NT - \tau_0) \right], \quad (16.5)$$

gdzie  $N$  oznacza liczbę cykli, a  $\kappa$  jest parametrem fenomenologicznym.



Zależność plastyczno-lepkich odkształceń betonu wywołanych cyklicznym obciążeniem zmiennym o stałym współczynniku amplitudy naprężeń ( $\Omega$ ) od wielkości maksymalnego stopnia wyężenia betonu w chwili jego obciążania.



Zależność plastyczno-lepkich odkształceń betonu wywołanych cyklicznym obciążeniem zmiennym o stałym maksymalnym stopniu wyężenia betonu od współczynnika amplitudy naprężeń ( $\Omega$ ).

Rys. 16.10. Wyniki badań eksperymentalnych Gwozdiewa [153].

Fig. 16.10. The results of experimental studies obtained by Gwozdiew [153].

## 17. UWAGI KOŃCOWE

Przeprowadzona weryfikacja i przytoczone przykłady zastosowań sugerują, iż przedstawiony model może być wykorzystany do analizy stanu naprężenia i deformacji mostów, a także innych konstrukcji betonowych. Pozwala on na uwzględnienie w obliczeniach nieliniowości fizycznej materiału, wpływu czynników zewnętrznych (temperatury i wilgotności względnej powietrza) i cykliczności obciążenia. Podane stałe i funkcje materiałowe dotyczące przeciętnych warunków wytwarzania betonu mogą być wykorzystane jako dane wyjściowe w obliczeniach o znaczeniu aplikacyjnym.

Analizując zaproponowany model od strony merytorycznej można stwierdzić, że nie wszystkie założenia znalazły wyczerpujące uzasadnienie w wynikach badań eksperymentalnych. Chodzi tu np. o zachowanie się betonu w warunkach obciążeń działających kolejno wzdłuż różnych kierunków (tzw. założenie o kierunkowości uszkodzenia) i zjawisko regeneracji. Problemy te zdaniem autora wymagają dalszych badań i dopiero ich wyniki pozwolą na uściślenie proponowanego opisu teoretycznego.

Z zagadnień ważnych dla mostownictwa pominięto problem zachowania się betonu pod wpływem obciążeń uderzeniowych, ponieważ omówiony on jest szeroko w monografii Radomskiego [284].

Nie ustosunkowano się również do ważnego i rozwijanego obecnie intensywnie kierunku rozwoju mechaniki betonu opartego na podejściu probabilistycznym - praca Bażanta [32] czy Onysyka [257-259]. Ten kierunek badań ma duże perspektywy i zdaniem autora wpłynie zdecydowanie na dalszy rozwój mechaniki betonu i konstrukcji betonowych.

## LITERATURA

1. Abeles P.W., Borowski J., The resistance prestressed concrete members to dynamic loading. Paper presented at the Seventh International Congress of the FIP, May - June 1974 New York. London, The Concrete Society 1974.
2. Abeles P.W., Kuna R., Prestress losses due to the effect of shrinkage and creep on non tensioned steel, ACI J., January 1973, s. 1143-1152
3. ACI Committee 215; Considerations for design of concrete structures subjected to fatigue loading, Journal of the ACI, March 1974, s. 97-120.
4. Achverdov I.N., Mechanizm usadki i polzučesti betona v svete sovremiennykh predstavlenij reologii i fizyki tverdogo tela, Beton i Železobeton, 10, 1970, s. 21-23.
5. Achverdov I.N., Smolskij A.E., Skočeljas V.V., Modelirovanije naprjaženogo sostojanija betona i železobetona, Nauka i tehnika, Mińsk 1973.
6. Aleksandrovskij S.V., O gisterezie deformacij usadki i nabuchanija betona pri jeho popereimiennykh vysušivanijach i uvlažnienijach, Beton i Železobeton, 9, 1958, s. 31-33.
7. Aleksandrovskij S.V., Nekotoryje osobiennosti usadki betona, Beton i Železobeton, 4, 1958, s. 25-27.
8. Aleksandrovskij S.V., O nasledstvennykh funkcijach teorii polzučesti starejšego betona. Polzučest stroitelnykh materialov i konstrukcij, Strojizdat, Moskva 1964, s. 135-156.
9. Aleksandrovskij S.V., O raznovidnostjach sovremennoj teorii polzučesti betona i nasledstvennykh funkcijach, figurujuščich v ich uravnienijach. Polzučest stroitelnykh materialov i konstrukcij, Strojizdat, Moskva 1964, s. 115-133.
10. Aleksandrovskij S.V., Raščet betonnykh i železobetonnykh konstrukcij na temperaturnyje i vlažnostnyje vozdejstvija (s učetom polzučesti), Strojizdat, Moskva 1973.
11. Aleksandrovskij S.V., Ob odnoj interesnoj forme uravnienij teorii uprugó - polzučesti betona, Polzučest i usadka betona, Vtoroje Vsesojuz. Sovesčanije Erevan, Strojizdat, Moskva 1974.
12. Aleksandrovskij S.V., Vasilev P.I., Ekperimentalnyje issledovanija polzučesti betona, Polzučest betona i železobetonnykh konstrukcij, Strojizdat, Moskva 1976, s. 97-152.
13. Aleksandrovskij S.V., Popkova O.M., O koefficiente poperečnoj deformacii betona pri dlitelnom dejstvi nagruzki, Polzučest i usadka betona, CINIC, Moskva 1969.
14. Aleksandrovskij S.V., Kolesnikov N.A., Nieliniejnaja polzučest betona pri stupenčato izmjenjajuščichsja naprjaženijach, Beton i Železobeton, 61, 1971, s. 24-27.
15. Aleksandrovskij S.V., Popkova O.M., Nieliniejnije deformacii polzučesti starejšego betona pri složnykh režimach zagruženija, Beton i Železobeton, 1, 1970, s. 27-32.
16. Aleksandrovskij S.V., Solomonov V.V., Zavisimost deformacii polzučesti starejšego betona ot načalnogo urovnija naprjaženij. Mežotraslevyje voprosy stroitelstva. Otečetvennyj opyt, vyp. 6, Strojizdat, Moskva 1972.
17. Andruszewicz S., Le Quang Bau, Teoria przewożenia wilgoci w zastosowaniu do mostów betonowych, Zeszyty Nauk. Pol. Gdańskie nr 231, Bud. Łąd., z. XXVII, Gdańsk 1975.

18. Argyris J.H., Warnke E.P., Willam K.I., Berechnungen von Temperatur - und Feuchtefeldern in Massivbauten nach der Methode der Finiten Elemente, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton nr 278, Verlag W. Ernst und Sohn, Berlin 1977.
19. Arutiunian N.Ch., Nekotoryje voprosy teorii polzučesti, Gostechteoretizdat, Moskva 1952.
20. Arutiunian N.Ch., Aleksandrovskij S.V., Sovremennoje sostojanije razvitja teorii polzučesti betona. Polzučest i usadka betona i železobetonnych konstrukcij. Strojizdat, Moskva 1976, s. 5-96.
21. Atallah R., Brachet M., Darpas G., Contribution à l'estimation des pertes de précontrainte et des déformations différées des structures en béton précontraint, VII Congrès de la FIP New York - Mai 1974, Paris, Ministère de l'aménagement du territoire, de l'équipement et des transports, 1974.
22. Awad M.E., Hilsdorf H.K., Strength and deformation characteristics of plain concrete subjected to high repeated and sustained loads, Fatigue of concrete, Publication SP-41, ACI, Detroit 1974.
23. Bachman H., Versuche an teilweise vorgespannten Leichtbetonbalken unter Dauerlast, FIP Kongress, New York, Mai 1974. Zurich, Eidgenössische Technische Hochschule 1974.
24. Barašikov A.Ja., Polzučest betona pri vynuždennych cikličeskich deformatsijach, Beton i Železobeton, 12, 1967, s. 28-30.
25. Barašikov A.Ja., Rasčet železobetonnych konstrukcij na dejstvije dlitelnyh peremiennyh nagruzok, Budivielnik, Kijev 1977.
26. Barašikov A.Ja., Vlijanije režima zagruženija na dlitelnyje deformatsii železobetonnych konstrukcij. Konf. nauk., KILiW PAN i KN PZITB, Kraków - Krynica 1975, Ref. uczešt. zagr. Pol. Krak., Kraków 1975.
27. Barašikov A.Ja., Čepleva A.N., Ob odnom sposobie opredelenija dlitelnyh naprjaženij i deformatsij pri peremiennyh nagruzkach, Soprotivlenije mater. i teor. sooruž., nr 29, Budivielnik, Kijev 1976, s. 53-57.
28. Baryła A., Sobocińska E., Teoria płyt żelbetowych z rysami, Studia z zakresu inżynierii nr 22, PWN, Warszawa-Lódź 1983.
29. Bascul A., Formation des microfissures. Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, nr 398, Octobre 1981, s. 7-22.
30. Bauer J., Szcześniak J., Reologiczne równania stanu dla betonowego elementu tarczowego obciążonego dwukierunkowo, VII Sympozjon poświęcony reologii, PTMTS, Wrocław 1978, s. 37-52.
31. Bažant Z., Constitutive equation for concrete creep and shrinkage based on thermodynamics of multiphase systems, Materiaux et Constructions vol. 3, 1970, nr 13, s. 3-25.
32. Bažant Z., P., Probabilistic problems in prediction of creep and shrinkage effects in structures, Fourth International Conference on Applications of Statistics and Probability in Solid and Structural Engineering, Florence, Pitagora Ed., 1983, s. 325-356.
33. Bell J.C., Elms D.G., A finite element approach to postelastic slab behavior, Cracking deflection and ultimate load of concrete slab system, ACI, SP-30, 1971.
34. Berg O.Ja., Fizičeskije osnovy teorii pročnosti betona i železobetona Strojizdat, Moskva 1961.
35. Berg O.Ja., Chromec Ju.N., Vlijanije dlitel'nogo zagruženija na pročnost i deformativnyje svojstva betona, Issledovanija pročnosti i dolgovečnosti betona transportnyh sooruženij, Trudy CNIIS, vyp. 6, Moskva 1966.

36. Bernhardt C.J., Creep and shrinkage of concrete, *Materiaux et Constructions*, vol. 2, nr 8, 1969, s. 145-148.
37. Bić P.M., O zavisimosti proćnosti betona na sźatie ot formy obrazca, *Beton i Źelezobeton*, 3, 1963, s. 36-38.
38. Bień J., Biliszczuk J., Mostowe dźwigary z betonu sprężonego w warunkach obciāżeń nienormatywnych, *Drogownictwo* nr 9, 1979, s. 261-265.
39. Bieniek K., Przesła mostowe jednodźwigarowe z jazdā dołem, *Raporty Inst. Inż. Łād. PWr*, Seria PRE nr 21/83, Wrocław 1983.
40. Biliński T., Stan naprężen w Źelbetowo-sprężonych przekrojach zespolonych w procesie zachodzących zjawisk reologicznych, *Rozprawy* nr 48, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1972.
41. Biliński T., Wpływ wieku betonu prefabrykatu na stan naprężenia w przekroju zespolonym Źelbetowo-sprężonym. *Inż. i Bud.* 2, 1975, s. 80-83.
42. Biliszczuk J. Zjawisko starzenia betonu w świetle teorii i badań doświadczalnych, *Problemy badawcze w inżynierii łądowej*. *Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Łądowej Politechniki Wrocławskiej* nr 26, Konferencje 8, Wrocław 1978, s. 15-24.
43. Biliszczuk J., Numeryczna analiza reologicznej redystrybucji stanu naprężen w niejednorodnych konstrukcjach betonowych, IV Konferencja: *Metody komputerowe w mechanice konstrukcji*, t. 1 Referaty ogólne, Koszalin 1979, s. 261-265.
44. Biliszczuk J., Onysyk J., Wpływ warunków składowania dźwigarów sprężonych na bezużytkowy stan naprężenia, *Inżynieria i Budownictwo* nr 9, 1979, s. 353-355.
45. Biliszczuk J., Wpływ cyklicznego działania obciāżeń zmiennych na betonowe sprężone i zespolone dźwigary mostowe, *Drogi Kolejowe* nr 1, 1980, s. 30-32.
46. Biliszczuk J., Odształcalność wysychającego betonu, VIII Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1981, s. 121-126.
47. Biliszczuk J., Pewna koncepcja zastosowania kompozytów betonowych w racjonalnym ukształtowaniu przekrojów sprężonych, Konferencja naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Wrocław-Krynica 1980, Referaty t. III, *Budownictwo betonowe* s. 11-18.
48. Biliszczuk J., Machelski C., Onysyk J., Koncepcja ukształtowania mostów drogowych większych rozpiętości. *Drogownictwo* nr 11, 1980, s. 340-342.
49. Biliszczuk J., Beitrag zur Frage der zeitlichen Änderung der Betoneigenschaften, *Beton-und Stahlbetonbau* nr 6, 1981, s. 133-136.
50. Biliszczuk J., Reologiczna redystrybucja stanu naprężenia w niejednorodnych, izostatycznych konstrukcjach betonowych. *Studia z zakresu inżynierii* nr 21, PWN, Warszawa - Łódź 1982.
51. Biliszczuk J., W sprawie wyteżenia betonu w mostach betonowych, II Konferencja: *Bezpieczeństwo Budowli Mostowych*, Wrocław wrzesień 1982, *Wyd.PWr.*, Wrocław 1982, s. 25-32.
52. Biliszczuk J., Kmita J., Odporność na zarysowanie konstrukcji sprężonych w świetle nieliniowej teorii odształcalności betonu, II Konferencja: *Bezpieczeństwo Budowli Mostowych*, *Pr. Nauk. Inst. Inż. Łād.* nr 29, Konferencje 10, *Wyd. PWr.*, Wrocław 1982, s. 33-40.
53. Biliszczuk J., Efektywność sprężania belek struno-betonowych w świetle nieliniowej teorii odształcalności betonu, *Mechanika konstrukcji betonowych*, *Prace Nauk. Inst. Bud. Pwr.*, nr 40, *Konf. nr 9*, *Wyd. Pwr.*, Wrocław 1983, s. 167-172.



54. Biliszczuk J., Machelski Cz., Wpływ pory roku, podczas której wykonano beton, na końcową wielkość odkształceń skurczowych i miary peźzania. *Mechanika konstrukcji betonowych*, Prace Nauk. Instyt. Bud. PWr., nr 40, Konf. nr 9, Wyd. Pwr., Wrocław 1983, s. 33-40.
55. Biliszczuk J., Maliszkieicz P., Mosty betonowe o konstrukcji podwieszanej, *Drogownictwo*, nr 3, 1983.
56. Biliszczuk J., Maliszkieicz P., Analiza ciągłych ustrojów mostowych z prefabrykowanych belek sprężonych. *Drogownictwo*, nr 4, 1980, s. 117-122.
57. Bleśik N.P., *Strukturno-mechaniczeskije swojstva i reologja betonnoj smesi i pressvakuumbetona*, Izd. Nauka i technika, Mińsk 1977.
58. Bogucka J., Kinetyka pola wilgoci w betonie, *Materiały XXVII Konf. Nauk. KILiW i KN PZITB*, Krynica 1981, t. 4, *Materiały budowlane, Fizyka budowli*, Wyd. ITB, Warszawa 1981, s. 35-41.
59. Bogucka J., Modyfikacja wilgotnościowa wytrzymałości na ściskanie betonu keramzytowego. *Materiały XXIX Konf. Nauk. KILiW i KN PZITB*, Krynica 1983, t. 3, cz. 4, *Materiały budowlane i fizyka budowli*, Wyd. Pol. Pozn. Poznań 1983, s. 17-22.
60. Boltzmann L., *Zur Theorie der elastischen Nachwirkung*, Wiener Bericht, 10, 1874.
61. Bondarenko V.M., *Niekotoryje voprosy nelineinnoj teorii żelezobetona*, Izd. Chark. Gas. Univ., Charkov 1968.
62. Bondarenko V.M., Bondarenko C.B., *Inżeniernyje metody nelineinnoj teorii żelezobetona*, Strojizdat, Moskva 1982.
63. Borcz A., Jankowiak R., *O modelu reologicznym betonu*, XV Konf. Nauk. KIPAN i KN PZITB, Krynica 1969, P. Warsz., Warszawa 1969.
64. Borcz A., *Teoria konstrukcji żelbetowych*, skrypt Pwr., cz. I, Wyd. Pwr, Wrocław 1973.
65. Borcz A., *Fenomenologiczny model reologiczny betonu*, *Mechanika konstrukcji betonowych*, Prace Nauk. Instyt. Bud. PWr nr 40, Konf. nr 9, Wyd. Pwr, Wrocław 1983, s. 7-13.
66. Brandt A.M., *Odkształcalność betonu w świetle pomiarów sześciu składowych stanu odkształcenia*, *Studia z zakresu budownictwa* nr 6, Arkady, Warszawa 1968.
67. Brandt A.M., Thiel K., *Odkształcenia powolne betonu*. *Rozpr. Inż.* nr 3/1960.
68. Brakel J., *Wybrane zagadnienia budownictwa mostowego*, Instytut Inżynierii Ładowej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 14/78.
69. Brooks J., Neville A., *Predicting long-term creep and shrinkage from short-term test*. *Mag. of Concrete Research* 1978 nr 103 vol. 30, s. 51-61.
70. Budestškij R.I., *Uproščennyje modelnyje ocenki pročnosti i deformativnych charakteristik zernistych materialov*, *Beton i Żelezobeton*, vyp. 6, Mecnijereba, Tbilisi 1974, s.58-67.
71. Bukowski Br., *Technologia betonu*, *Budownictwo betonowe*, t. 1, Arkady, Warszawa 1963.
72. Bussemann R., *Kriechberechnung von Verbundträgern unter Benutzung von zwei Kriechfasern*, *Der Bauing*, 1959, 11.
73. Burski Z., Kamiński L., Kmita J., *Badanie pręseł prefabrykowanego wiaduktu kolejowego*, *Kształtowanie i badania betonowych mostów kolejowych*, Prace Nauk. Inst. Inż. Łąd. PWr. nr 3, *Studia i Materiały* nr 3, Wrocław 1970.

74. Burzyński W., Teoretyczne podstawy hipotez wyciężenia, Przegląd Techniczny, Warszawa 1929.
75. Buyukozturk O., Nonlinear analysis of reinforced concrete structures, Computers and Structures, vol. 7, nr 1, February 1977, Pergamon Press 1977.
76. Buyukozturk O., Nilson A.H., Slate F.O., Stress-strain response and fracture of a concrete model in biaxial loading, ACI J., 8, 1971.
77. Bychawski Z., Odkształcenia opóźnione w betonie, Arch. Inż. Łąd., 1-2, 1956, s. 185-202.
78. Bychawski Z., Resolving kernel of the Volterra equation in the case of the generalized creep function, Arch. Mech. Stos., 9, 2, 1957, s. 247-257.
79. Calgaro J.A., Le Clech J.C., Construction d'un pont sur la rivière de L'Est à la Réunion, Annales des Pont et Chaussées, nr 21, 1<sup>er</sup> Trimestre 1982, s. 39-42.
80. Chaikes S., Ponts, routes surélevées et viaducs en béton précontraint armé, Annales des Travaux Publics de Belgique, nr 4, 1973/1974.
81. CEB-FIP, Code modele CEB-FIP pour le structures en béton, Bulletin d'information, nr 124-125, F-Avril 1978.
82. Chen A.C.T., Chen W.F., Constitutive relations for concrete, J. EMD, ASCE 101 (EM 4), Aug. 1975 i Dec. 1975.
83. Chen W.F., Suzuki H., Constitutive models for concrete, Computers and Structures v. 12, Number 1, July 1980, s. 23-32.
84. Chwaściński B., Jerzy Grycz - budowniczy mostów dorzecza górnej Wisły, Drogownictwo nr 11, 1983, s. 323-327 i nr 12, 1983, s. 354-356.
85. Chambaud R., Contribution à l'étude des lois de résistance dans les liants hydrauliques, mortiers et bétons, Ed. Eyrolles, Paris, 1946.
86. Cilosani Z.N., Usadka i polzučest betona, Mecnijereba, Tbilisi 1979.
87. Cincadze L.D., Pavlenišvili G.D., Eksperimentalnyje issledovanija izmenenij usilij v armature predvaritelno naprjažennych keramzito-betonnych balok, Beton i Železobeton, vyp. 8, Mecnijereba, Tbilisi 1976, s. 71-83.
88. Cope R.J., Non-linear analysis of slab assemblages using numerical integration, Nonlinear behaviour of reinforced concrete spatial structures, vol 1, Werner - Verlag, Dusseldorf, 1978, s. 89-100.
89. Czrżan Czrżun-Jao, Issledovanije javlenij i relaksacii v betone i železobetone, Rabota na st. Kand. Nauk., Kijev 1958.
90. Dantu P., Étude des contraintes dans les milieux hétérogènes, Applications au béton, Ann. ITBTP nr 121, 1, 1958, s. 53-77.
91. Darwin D., Pecknold D.A., Analysis of cyclic loading of plane R/C structures. Computers and Structures, vol. 7, no 1, February 1977, s. 137-147.
92. Deja J., Kuźnicka B., Oświłcimski W., O możliwościach oceny stanu granicznego materiałów w płaskim stanie naprężeń zmęczeniowych, Prace Nauk. Inst. Materiał. i Mech. Tech. Pwr nr 42, Monografie 14, Wyd. Pwr, Wrocław 1980.
93. Desov A.E., Krasilnikov K.G., Cilosani Z.N., Nekotoryje voprosy teorii usadki betona, Polzučest i usadka betona i železobetonnych konstrukcij, Strojizdat, Moskva 1976, s. 211-255.
94. Dhir R.H., Sangha M., Development and propagation of microcracks in plain concrete, Matériaux et Constructions, nr 37, 1974, s. 17-23.

95. Dichinger F., Untersuchungen über die Knicksicherheit, die elastische Verformung und das Kriechen des Betons bei Bogenbrücken, Der Bauing., 33-34, 1937, s. 487-520, 35-36, 1937, s. 539-553, 39-40, s. 595-621.
96. Dichinger F., Elastische und plastische Verformungen der Eisenbetontragwerke und insbesondere der Bogenbrücken, Der Bauing, 1930, 21-22, s. 286-294, 1939, 31-32, s. 426-437, 1939, 47-48, s. 563-572.
97. Dolidze I.I., Kvicaridze O.I., Pavlenišvili G.D., Eksperimentalno-teoretičeskije issledovanija nelinejnogo pereraspredelenija usilij v staleželezobetonnyh izgibajemyh elementach, Beton i Železobeton, vyp. 6, Mecnijereba, Tbilisi 1974, s. 88-104.
98. Dolidze I.I., Pavlenišvili G.D., Metodika opredelenija dlitel'nogo naprjaženno-deformirovannogo sostojanija predvaritel'no naprjažennyh železobetonnyh konstrukcij, nachodjaščichsja v uslovijach povyšenoj temperaturno-vlažnostnoj sredy s učetom usadki i polzučesti betona, Beton i Železobeton, vyp. 8, Mecnijereba, Tbilisi 1976, s. 63-70.
99. Drewnowski S., Betonowe konstrukcje mostowe sprężono-rozprężone, Studia z zakresu inżynierii nr 17, PWN, Warszawa-Łódź, 1978.
100. Duddeck H., Griebenow G., Schaper G., Material and time dependent nonlinear behaviour of cracked reinforced concrete slabs, Nonlinear behaviour of reinforced concrete spatial structures, vol. 1, Werner-Verlag, Düsseldorf 1978, s. 101-113.
101. Dyduch K., Losses and delayed strains in prestressed partly reinforced concrete, Technical contributions to the VII Congress of the FIP, New York 1974, Institute for Building Technics, Polish member group of the FIP, Warszawa, Instytut Techniki Budowlanej, 1974, s. 93-105.
102. Dyduch K., Straty reologiczne siły sprężającej i naprężenia efektywne w betonie w zbrojonych belkach kablobetonowych, XXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1974, P. Krak., Kraków 1974, s. 57-73.
103. Dyduch K., Reologiczne straty naprężenia i zarysowanie elementów zbrojonych częściowo sprężonych, Zesz. Nauk. P. Krak., Bud. Łąd. nr 42, Kraków 1976.
104. Dziendziel A., Niektóre problemy pełzania betonu w świetle doświadczeń, Praca doktorska, Wrocław 1964.
105. Eiger A., Feinzeiment, Tonindustriezeitung, nr 42-44, 1932.
106. Eiger A., Fizyczne podstawy wytrzymałości zapraw i betonów, Materiały II Zjazdu Polskich Inż. Bud., 1936.
107. Eimer C., Reologiczne teoria wytrzymałości i jej zastosowanie do betonu, Rozpr. Inż. 11, 4, 1963, s. 567-588.
108. Eimer C., O efektywnych naprężeniach w betonie, Arch. Inż. Łąd. 13, 4, 1967, s. 664-671.
109. Eimer C., Wytrzymałość reologiczna betonu w świetle hipotezy uszkodzenia. Arch. Inż. Łąd. 1971. 17, 1. s. 15-31.
110. Eimer C., Theoretical approach to rheologic strength of prestressed elements, AIL, t. XII, z. 2, 1966, s. 131-139.
111. Eimer C., Teoretyczne obliczanie fazowych stałych sprężystości betonu, AIL, t. XIII, z. 4, 1967, s. 673-677.
112. Emanuel J. H., Hulsey J.L., Temperature distributions in composite bridges, Journal of the Structural Division, January, 1978, s. 65-78.
113. Epstein M., Murray D.W., A biaxial constitutive law for concrete incorporated in bosor 5 code, Computers and Structures, vol. 9, nr 1, July 1978, s. 57-63.

114. Europejski Komitet Betonu - CEB. Międzynarodowe zalecenia obliczania i wykonywania konstrukcji z betonu, Arkady, Warszawa 1973.
115. Evans R.H., Kong F.K., Estimation of creep of concrete in R.C. and P.C. design, Civil Engineering and Public Works Review, May 1966, s. 593-596.
116. Faessel P., Teyssandier J.P., Virlogeux M., Conception et construction du pont d'Ottmarsheim, Annales de l'Institut Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, nr 391, 1981, s. 1-36.
117. Fahmi H.M., Bresler B., Polivka M., Prediction of creep of concrete at variable temperatures, Journal of the ACI, October 1973, s. 709-713.
118. Fedorenko M.M., Ivanov Ju.A., Golyšev A.B., Vlijanije dlitelnych processov na naprjažennoje sostojanije izgibajemych elementov marok 400-800, Beton i Żelezobeton, 3, 1967, s. 36-38.
119. Flaga K., Wytrzymałość na rozciąganie betonu poddanego obróbce termicznej, XXVII Konferencja Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1981, t. 4, Materiały budowlane, fizyka budowli, Wyd. ITB, Warszawa 1981, s. 91-98.
120. Flaga K., Energetyczne podstawy wzrostu wytrzymałości betonu tężejącego w warunkach obróbki termicznej, Zeszyty Nauk. Politech. Krak. nr 3, Wyd. Politech. Krak., Kraków 1971.
121. Flaga K., Furtak K., Wpływ rodzaju kruszywa na poziomy naprężeń krytycznych w betonie ściskanym, AIL, t. 27, z. 4, 1981, s. 653-666.
122. Flaga K., Wilczyński T., Odkształcenia skurczowe w pryzmatycznych elementach betonowych obciążonych niejednorodnym polem wilgoci, Wybrane prace z zakresu inżynierii lądowej, PAN, Oddział w Krakowie, Komisja Budownictwa, Politechnika Krakowska, Kraków 1982.
123. Folga A., Grycz J., O wyznaczaniu parametrów do ustalania wyteżeń w tworzywach betonowych na podstawie hipotezy A. Caquot, II Konferencja: Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wrocław, wrzesień 1982, Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1982, s. 163-170.
124. Freyssinet E., Une révolution dans techniques du béton, Paris 1939.
125. Fouré B., Résistance du béton sous contrainte soutenue, La technique française du béton précontraint, IX Congrès International de la FIP, Stockholm 1982, Dragages et Travaux Publics, s. 277-384.
126. Fouré B., Ghabrial N.S.K., Comportement du béton en compression et cisaillement combinés, La technique française du béton précontraint, IXe Congrès International de la FIP, Stockholm 1982, Dragages et Travaux Publics, s. 368-373.
127. Furtak K., Wytrzymałość zmęczeniowa betonu w mostach żelbetowych, [w:] II Konferencja: Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Pr. Nauk. Inst. Inż. Łąd. Nr 29, Konferencja 10, Wrocław 1982.
128. Furtak K., Nośność przekrojów normalnych w zginanych elementach żelbetowych poddanych obciążeniom zmiennym ze szczególnym uwzględnieniem obiektów mostowych, Zeszyty Nauk. Polit. Krak., Kraków 1985 (w druku).
129. Gaede K., Versuche über die Festigkeit und die Verformung von Beton bei Druck-Schwellbeanspruchung. Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, nr 144, Verlag Ernst u. Sohn, Berlin 1962.
130. Galustov K.Z., O nelinejnosti deformacij polzučesti betona, Beton i Żelezobeton, 10, 1971, s. 36-39.
131. Gambla W.L., Creep of concrete in variable environments, Journal of the Structural Division, vol. 108, Oct., 1982, s. 2211-2222.

132. Gerstle K.H., Simple formulation of biaxial concrete behavior, *ACI Journal*, Preceedings v. 78, nr 1, January - February 1981, s. 62-68.
133. Gerwick B.C.Ir, Construction of prestressed concrete structures (tłumaczenie rosyjskie), *Strojizdat*, Moskva 1978.
134. Glücklich J., The effect of microcracking on time - dependent deformations and the long-term strength of concrete. *Cement and Conc. Ass.*, London 1968.
135. Głomb J., Wytrzymałość i odkształcalność betonu przy ściskaniu dwukierunkowym, *AIL*, t. 4, nr 1, 1958.
136. Głomb J., Badanie wytrzymałości betonu w konstrukcjach płytowych, *AIL*, t. 10, nr 3, 1964.
137. Głomb J., Technologia budowy mostów betonowych, *WKŁ*, Warszawa 1982.
138. Głomb J., Jędrzejek S., Rozwój mostów betonowych. Zagadnienia budowy współczesnych mostów betonowych, *WKŁ* Warszawa 1982, s. 7-36.
139. Głomb J., Jędrzejek S., Badania nad zakresem stosowania betonu lekkiego w sprężonych mostach drogowych, *Konf. Nauk. KILiW PAŃ i KN PZITB*, Krynica 1981, t. II. *Konstrukcje Betonowe*, ITB, Warszawa-Krynica 1981, s. 65-70.
140. Godycki-Ćwirko T., *Mechanika betonu*, Arkady, Warszawa 1982.
141. Godycki-Ćwirko T., O wydłużalności granicznej betonów zbrojonych, *Inż. Bud.*, nr 1, 1959.
142. Godycki-Ćwirko T., *Ścinanie w żelbecie*, Arkady, Warszawa 1978.
143. Gopalakrishnan K.S., Neville A.M., Chali A., A hypothesis on mechanism of creep of concrete with reference to multiaxial compression, *Journal of the ACI*, January, 1970, s. 29-35.
144. Graf O., *Versuche über das Verhalten vom Zementmörtel in heissem Wasser*. Deutscher Ausschuss für Eisenbeton, 1930.
145. Griffith A.A., The phenomena of rupture and flow of solids, *Phys. Transact. Roy. Soc. Lond.*, vol. 221, 1921, s. 163-168.
146. Grootenboer H.J., Leijten S.F.C.H., Blaauwendraad J., Numerical models for reinforced concrete structures in plane stress, *Concrete mechanics*, part C, Heron, Vol. 26(1981) No 1c.
147. Grover H.J., An observation concerning the cycle ratio in comulative damage, *Symposium on Fatigue of Aircraft Structures*, American Society of Testing Materials, Special Technical Publication, nr 274, 1960.
148. Grudziński F., *Procesy cieplne w technologii betonów*, PWN, Warszawa 1976.
149. Grundtner S., *Der Bundesstrassen-Brückenbau in Österreich*, *Österreichische Ingenieur-Zeitschrift*, nr 8, August 1980, s. 308-329.
150. Guyon Y., *Constructions en béton précontraint*, Editions Eyrolles, Paris 1968.
151. Gvozdev A.A., Nekotoryje osobiennosti deformirovanija betona i teoria polzučesti, *Polzučest stroitelnych materialov i konstrukcij*, *Strojizdat*, Moskva 1964, s.172-177.
152. Gvozdev A.A., Jašin A.V., Galustov K.Z., O nekotorych otstuplenijach ot principa naloženija i teoria polzučesti betona, *Beton i Żelezobeton*, 8, 1967, s. 23-27.
153. Gvozdev A.A., Karandovskij Ju., N., Belobroy I.K., O deformacijach betona pri dejstvii mnogokratno povtorjajuščichsja nagruzok. *Vozdejstvije statičeskich, dinamičeskich i mnogokratno povtorjajuščichsja nagruzok na beton i elementy żelezobetonnych konstrukcij*, *Strojizdat*, Moskva 1972, s. 4-23.

154. Hansen H. J. inni, Compressive strength of concrete - cube or cylinder ?, RILEM Bul. nr 17, Paris, Dec. 1962, s. 23-30.
155. Hansen T.C., Influence of aggregate and voids on modulus of elasticity of concrete, cement mortar, cement past, ACI J., 62, 2, 1965.
156. Hansen T.C., Mattock A.H., Influence of size and shape of member on the shrinkage and creep of concrete, Journal of the ACI, February, 1966, s. 267-290.
157. Higginson E.C., Wallace G.B., Ore E.L., Effect of maximum size of aggregate on compressive strength of mass concrete, Symp. on Mass Concrete, ACI, Sp. Public., nr 6, 1963, s. 219-256.
158. Hsu T.C., Slate F.O., Sturman G.M., Microcracking of plain concrete and the shape stress-strain curve, Journal of the ACI, vol 60, nr 2, Feb. 1963.
159. Hull D., Introduction to dislocation, Pergamon Press, London 1975, (tłumaczenie polskie, PWN, Warszawa 1982).
160. Hummel A., Der Beton, ABC, Berlin 1948.
161. Irvin G.R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing a plate, Journal of Appl. Mechanics, vol. 24, 1957, s. 361-364.
162. Jankowski J., Mosty w Polsce i mostowcy polscy, Z.N. im. Ossolińskich, Wrocław 1973.
163. Jasman S., Rheological deformations of concrete plate elements Building Science, vol. 2, 1967, s. 13-19.
164. Jasman S., Szcześniak J., Miara peźzania dla betonowych tarcz obciążonych dwukierunkowo, VII Sympozjon poświęcony reologii, PTMTS, Wrocław 1978, s. 125-133.
165. Johnston C.D., Sidwell E.H., Testing concrete in tension and in compression, Mag. of Concrete Research, vol. 20, nr 65, December 1968, s. 221-228.
166. Jordann I.J., Illston J.M., A creep rig for testing concrete under multiaxial compressive stress, Mag. of Concrete Research vol. 20, nr 65, December 1968, s. 235-239.
167. Kajfasz S., Efekt cykliczności rocznej w pomiarach skurczu pęcznienia i peźzania betonu, Konstrukcje betonowe, XXV Jubileuszowa Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1979, Wydawnictwo PWR., Wrocław 1979, s. 173-179.
168. Karapetjan K.S., Vlijanije mnogokratno povtornej szimajuscej nagruzki na pročnost, deformativnost i polzučest betona v zavisimosti of čisła ciklov nagruženija, Problemy polzučesti i usadki betona, Sb. naučnych trudov, 77, CNIIS, Moskva 1974, s. 86-93.
169. Karanfilov T.S., Vlijanije nektorych faktorov na deformacji betona pri mnogokratnych povtorenijach nagruzki, Dinamika gidrotehničeskich sooruženij. Trudy Pjatogo Vsesčezjnogo Sovescanija BHIIG, Moskva 1972.
170. Karpenko H.R., Teoria deformirovanija zelezobetona s treščinami, Strojizdat, Moskva 1976.
171. Kasperkiewicz J., Dyfuzja wilgoci i deformacje skurczowe w betonie. Studia z zakresu inżynierii nr 11, PWN, Warszawa 1972.
172. Kehlebeck F., Einfluss der Sonnenstrahlung bei Brückenbauwerken, Werner Verlag, Düsseldorf 1975.
173. Kisiel I., Model M/V jako uniwersalny model reologiczny materiałów budowlanych, Zesz. Nauk. Wrocł. 139, Bud. 33, Wrocław 1966, s. 51-57.

174. Kisiel I., *Reologia w budownictwie*, Arkady Warszawa 1967.
175. Kirillov A.P., *Vynoslivost gidrotechniceskogo železobetona*, Energija, Moskva 1978.
176. Klisiński M., Mróz Z., *Model konstytutywny betonu z uwzględnieniem plastyczności oraz degradacji sprężystej*. *Mechanika konstrukcji betonowych*, Prace Nauk. Inst. Bud. PWr. nr 40, Konf. nr 9, Wyd. PWr Wrocław 1983, s. 21-26.
177. Kluz T., Eyman K., *Projektowanie betonów*, B.A., Warszawa 1954.
178. Kłapoć M., *Nieliniowe pełzanie betonu [w:] III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Referaty t. I, PTMTS Wrocław 1966*, s. 147-155.
179. Kłapoć M., *Szybkość narastania odkształceń spowodowanych pełzaniem betonu*, III Sesja Nauk. Wydz. Bud. Łąd. Wrocł. PWN, Wrocław 1968, s. 297-304.
180. Kmita J., *Most drogowy sprężony kablami z lin*, *Inż. i Bud.*, 12, 1960.
181. Kmita J., Bień J., Machelski Cz., *Eine effective Methode zur Spannungsanalyse*, 11th Congress IABSE - Final Report, Vienna 1980, s. 627-630.
182. Kmita J., Biliszczuk J., *Some problems of the construction of theoretical models of reinforced concrete*, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol. III, nr 24, 1981, s. 75-100.
183. Kmita J., Biliszczuk J., Onysyk J., *Probabilistic analysis of stresses in prestressed concrete structures*, *Research on prestressed concrete on Poland. Technical contribution to the Ninth International Congress of the FIP, Stockholm - June 6 - 10, 1982*, Wyd. Pol. Krak., Kraków 1982, s. 4-15.
184. Kmita J., *Mosty betonowe, cz. I, Zasady wymiarowania*, WKŁ, Warszawa 1984.
185. Kmita J., *Mosty Betonowe, cz. II, Podstawy kształtowania*, WKŁ, Warszawa 1984.
186. *Kochertalbrücke Geislinger, Statik und Konstruktion*, *Materiały informacyjne firmy "Wayss und Freytag"*, Frankfurt/Main 1974.
187. Kopyciński B., Florek A., Jamróży Z., *Beton zwykły*, Arkady, Warszawa 1978.
188. Kosiba A., *Wstęp do klimatologii Polski*, PWN, Wrocław 1952.
189. Kotsivos M.D., Newman J.R., *A mathematical description of the deformational behaviour of concrete under complex loading*, *Magazine of Concrete Research*, vol. 31, nr 107, June 1979, s. 77-90.
190. Kowalczyk R., Dilger W., *Odształcalność betonu zbrojonego i niezbrojonego*, *Prace IPPT*, 44, 1971.
191. Krzemiński J., *Współczesne poglądy na mechanizm zniszczenia*, *Rozp. Inż.*, 20, 3, 1972, s. 303-318.
192. Kuczyński W., *Wpływ kruszywa grubego na wytrzymałość betonu*, *AIL*, 4, 2, 1958, s. 181-209.
193. Kuczyński W., *Technologia betonu*, *Budownictwo betonowe*, t.1, cz. 2, Arkady, Warszawa 1972.
194. Kudrjavcer A.A., *Fredvaritelno - naprjażennyj keramzitobeton Strojjzdat*, Moskva 1974.
195. Kulygin Yu. S., *Ob osobennostjach deformirovanija betona pri mnogokrotno povtorjajuščichsja szimajuščich nagruzkach, Dlitelnyje deformativnyje processy v betonnych i železobetonnych konstrukcjach Strojjzdat*, Moskva 1970.

196. Kupfer H.B. i zespól, Versuche zum Verhalten von Beton unter mehrachsiger Beanspruchung, TUM, Institut für Bauingenieurwesen III, Lehrstuhl für Massivbau, Mai, München 1976.
197. Kupfer H.B., Hilsdorf H.K., Rüsck H., Behavior of concrete under biaxial stresses, Journal ACI, Proceedings vol. 66, nr 8, Aug. 1969, s. 655-666.
198. Kupfer H.B., Das nicht-lineare Verhalten des Betons bei zweiachsiger Beanspruchung, Beton- und Stahlbetonbau nr 11, 1973, s. 269-274.
199. Kurasova C.P., Sravnitel'naja ocenka konstrukcij iz keramzito i tjaželogo betona, rabotajuščich v odinakovych uslovijach. Trudy sojuzdornii, vyp. 31, Transport, Moskva, 1969, s.4-38.
200. Kvicařidze O.I., Keklidze M.M., Issledovanie vlijanija kratkovremennogo i dlitel'nogo vozdejstvija predelno vlažnoj sredy različnoj temperatury na pročnostnyje i reologičeskije svojstva starejuščego betona, Beton i Železobeton, vyp. 8, Mecnijereba, Tbilisi 1974, s. 68-81.
201. Kvicařidze O.I., Grigolasvili B.M., O vzaimosvjazi mežu polzučestju i vlažnostju betona, Beton i Železobeton, vyp. 8, Mienijereba, Tbilisi 1976, s. 84-93.
202. L'Hermite R., Le retrait des ciments, mortiers et bétons, Labor. du Bat. et des Trav. Publ., Paris, 1947.
203. L'Hermite R., Idées actuelles sur la technologie du béton, Documentation Technique du Bâtiment et des Travaux Publics, Paris, 1955.
204. Leonhardt F., Kolbe G., Peter J., Temperaturunterschiede gefährden Spannbetonbrücke. Beton- und Stahlbetonbau, 7, 1965, s. 247-251.
205. Leonhardt F., Lippoth W., Folgerungen aus Schaden an Spannbetonbrücken, Beton- und Stahlbetonbau, 10, 1970, s. 317-320.
206. Leonhardt F., Risschäden an Betonbrücken - Ursachen und Abhilfe, Beton- und Stahlbetonbau, 2, 1979, s. 36-44.
207. Leonhardt F., Podstawy budowy mostów betonowych (tłumaczenie z niemieckiego), WKŁ, Warszawa 1982.
208. Lewicki B., Nośność konstrukcji betonowych w przypadku technicznego obciążenia osiowego, Studia z zakresu budownictwa nr 3, PWN, Warszawa 1960.
209. Lino M., Modèle de béton microfissuré. Seminaire - Modèle de comportement du béton fissuré. Ecole Polytechnique, Palaiseau 1979.
210. Lorman W.R., The theory of concrete creep. Proc. ASTM, 40, s. 1082-1102, 1940.
211. Lusche M., The fracture mechanism of ordinary and lightweight concrete under uniaxial compression. Konf.: Właściwości mechaniczne i struktura kompozytów betonowych, Jabłonna, PAN-Osolineum, 1974.
212. Łukas P.A., Osnovy nelinejnoj stroitelnoj mechaniki, Strojizdat, Moskva 1978.
213. Macha E., Modele matematyczne trwałości zmęczeniowej materiałów w warunkach losowego złożonego stanu naprężenia, Prac. Nauk. Inst. Mater. i Mech. Tech. Pwr. nr 41, Monografie 13, Wrocław 1979.
214. Madatjan S.A., Assessment of stress losses in high tensile reinforcing steel due to relaxation. Papers presented at the VII International Congress of the FIP New York, May 26, June 1, 1974.
215. Madsen H.O., Bažant Z.P., Uncertainty analysis of creep and shrinkage effects in concrete structures. ACI Journal, Proceedings v. 80, nr 2, February, 1983, s. 116-127.



216. Machelski Cz, Węgrzyniak M., Analiza statyczna prefabrykowanych przęseł skrzynkowych, Drogownictwo nr 6/1979, s. 182-185.
217. Maj M., Trochanowski A., Metoda obliczania żelbetowych płyt z rysami. Mechanika konstrukcji betonowych, Prace Inst. Bud. PWr, nr 40, Konf. 9, Wyd. PWr, Wrocław 1983, s. 207-211.
218. Malinin N.N., Rżysko J., Mechanika materiałów, PWN, Warszawa 1981.
219. Maliszkievicz P., Wpływ obciążeń powtarzalnych na właściwości fizyko-wytrzymałościowe betonu. [w:]Raport Instytutu Inżynierii Ładowej, PWr (w opracowaniu).
220. Maréchal J-C., Variations in the modulus of elasticity and Poisson's ratio with temperature. ACI Seminar on Concrete for Nuclear Reactors, West Berlin, Oct. 1970, s. 5.
221. Maréchal J-C., Le fluage du béton en fonction de la température, Matériaux et Constructions, vol. 2, nr 8, 1969, s. 111-115.
222. Maslov G.N., Termičeskoje naprjažennoje sostojanije betonnych masivov pri učete polzucesti betona, NIIG, Leningrad 1941.
223. Mathivat J., Construction par encorbellement des pont en béton precontraint, Éditions Eyrolles, Paris 1979.
224. Mattock A.H., Precast - prestressed concrete bridges, 5, Creep and shrinkage studies. Chicago, Portland Cement Association, May 1961, Bulletin D-36.
225. Maurer G., Non - linear analysis of prestressed single-cell concrete box girders, Nonlinear behaviour of reinforced concrete spatial Structures, vol. II, Werner-Verlag, Dusseldorf 1978, s. 47-56.
226. Mazars J., Evolution de la microfissuration dans le béton: formation de fissures, Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, nr 398, October 1981, s. 23-32.
227. McHenry D., Karni J., Strength of concrete under combined tensile and compressive stresses, Journal ACI, 54, April 1958, s. 820-840.
228. McHenry D., A new aspect of creep in concrete and its application to design. Proceedings, American Society for Testing and Materials, nr 43, 1943, s. 1069-1084.
229. Miner M.A., Cumulative damage in fatigue, Trans. of ASME, vol. 67, 1945, Journal App. Mech. vol. 12, nr 3, Sept. 1945.
230. Menn C., Ganterbrucke. Vorgespannter Beton der Schweiz. Zum. 9. FIP-Kongress 1982, s. 54-57.
331. Mekvabišvili S.K. i inni, O vlijanii sžimajuščej nagruzki na intensivnost isparenija vlagi iz cementnogo kamnia, Beton i Železobeton, vyp. 8, Miecnižereba, Tbilisi 1976, s. 5-19.
232. Mianowski K.M., Zarysowanie rozciąganych elementów betonowych ze zbrojeniem rozproszonym, PWN, Warszawa 1976.
233. Mierżajew P.T., Vlijanije režima dlitelnogo nagruženija na progiby prednaprjažennych sborno-monolitnych karamzitobetonnych elementov. Stroitelnyje konstrukcii osnovanija i fundamenty, Vys. škola Kijev 1974.
234. Mirinov S.A., i drugije, Zimnoje betonirovanije i teplovaja obrabotka betona, Strojizdat, Moskva 1975.
235. Misztal S., Współczynnik odkształcalności betonu przy długotrwałych obciążeniach wibracyjnych, ZN WSI w Zielonej Górze nr 40, Budownictwo nr 7, Zielona Góra, 1976, s. 61-80.
236. Misztal S., Współczynnik wibropełzania betonu, ZN WSI w Zielonej Górze, nr 40, Budownictwo nr 7, Zielona Góra, 1976, s. 49-59.

237. Mitzel A., Funkcje pełzania i skurczu betonu, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Referaty, tom 1, Wrocław 1966.
238. Mitzel A., Współczynnik odkształcalności betonu jako funkcja dwóch zmiennych, III Sesja Naukowa Wydziału Budownictwa Lądowego Politechniki Wrocławskiej, PWN, Wrocław 1968.
239. Mitzel A., Reologia betonu, Arkady, Warszawa 1972.
240. Mitzel A., Kłapoc M., O superpozycji odkształceń skurczu i pełzania, III Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Referaty tom 1, Wrocław 1966, s. 157-163.
241. Młodecki J., Skurcz betonu, Przegląd Bud. nr 9, 1970.
242. Mohamedbhai G.T.G., Taylor R., The long-term behaviour of one-way spanning slabs under variable loading, Proc. of Inst. Civ. Eng. vol. 57, mart. 1974, s. 67-82.
243. Morau P., Placidi M., Virlogeux M., Meylan and Illhof pedestrian bridges design and erection, Eleventh Congress, Vienne, September 1-5, 1980, IABSE, Contributions of the French Group, English translations, s. 51-57.
244. Morsch E., Der Spannbetenträger, K. Wittwer, Stuttgart 1943.
245. Mróz Z., Mathematical models of inelastic concrete behaviour, Symposium on Inelasticity and Non-Linearity in Structural Concrete, Univ. of Waterloo Press., Study nr 8, 1973.
246. Murakami S., Ohno N., A continuum theory of creep and creep damage, Creep in Structures, Springer - Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981, s. 422-443.
247. Murzewski J., Stochastically non-homogeneous bodies, Symp. IUTAM, Pergamon Press, Warszawa 1958,
248. Nadai A., Theory of flow and fracture of solids, McGraw-Hill Book Co., New York 1950.
249. Nelissen L.J.M., Biaxial testing of normal concrete. Heron, vol. 18, nr 1, 1972, Technological University, Delft.
250. Neville A.M., Properties of concrete, Pitman Publishing, London 1973 (tłumaczenie polskie, Arkady, Warszawa 1977).
251. Neville A.M., Creep of concrete; plain reinforced and prestressed, Amsterdam, North-Holland, Publishing Co. 1970.
252. Newman J.B., Newman K., The cracking and failure of concrete under combined stresses and its implications for structural design. International Symposium RILEM, Cannes, 4-6, October 1972.
253. Ödman S.T.A., Effects of variations in volume surface area exposed to drying, and composition of concrete on shrinkage, RILEM/CEMBUREAU Int. Colloquium on the Shrinkage of Hydraulic Concretes, 1, s. 20, Madrid 1968.
254. Olszak W., Współczynnik w/c w teorii i praktyce, AIL, t. VII, z. 3, 1961, s. 347-360.
255. Olszak W., i inni, Teoria konstrukcji sprężonych, PWN, Warszawa 1961.
256. Okada K., Kobayashi K., Some problems in the design of composite beam, Journal of Japan Prestressed Concrete Engineering Association 5, Vol. 16 extra number, 1974.
257. Onysyk J., Początkowy stan naprężenia mostowego dźwigara sprężonego w świetle losowych parametrów wejściowych w II Konferencja, Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Prace Nauk. Inst. Inż. Łąd. P.Wr. nr 29, Konf. 10, Wyd. P.Wr, Wrocław 1982, s. 305-316.
258. Onysyk J., Random simulation of stresses in prestressed concrete girders, Modelling, Simulation end Control, B, AMSE Press, vol 1, nr 2, 1984, s. 37-41.

259. Onysyk J., Redistribution process of stresses in concrete structures with random parametres, *Modelling, Simulation and Control*, B, AMSE, Press, vol. 1, nr 3, 1984, s. 51-57.
260. Palotas L., Angenäherte Berechnung der Langzeitkennwerte des Beton auf Grund der Kurzzeitversuchsdaten, XX Jubileuszowa Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB 1974, Referaty uczestników zagranicznych, Krynica-Kraków, 1974, s. 9-20.
261. Paluch M., Sygula S., Radoń J., Wpływ promieniowania słonecznego i temperatury powietrza na rozkład naprężeń w betonowych mostach skrzynkowych, *Budownictwo betonowe*, XXVIII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Krynica, Wyd. Pol. Warszawskiej, Warszawa 1982, 2. s. 121-130.
262. Pande G. N., Owen D.R.J., Zienkiewicz O.C., Overlay models in time-dependent non-linear material analysis. *Computers and Structures*, vol. 7, nr 6, 1977, s. 435-443.
263. Paprocki A., Talbierski J., Czajewska H., Badania porównawcze zachowania się różnego rodzaju kruszyw w betonie, ITB, Warszawa 1969.
264. Patas P., Własności betonu w złożonych stanach naprężenia, *Studia z zakresu inżynierii* nr 20, PWN, Warszawa-Lódź 1981.
265. Paris P.C., Sih G.C., Stress analysis of cracks, *Fracture Toughness Testing and Its Applications*, Am. Soc. for Testing and Materials, Special Technical Publication 381, p. 30, 1965.
266. Pavlenišvili G.D., Dolidze A.D., Rasčet sborno-monolitnych predvaritielno-naprjazhennykh zhelezobetonnykh konstruktsiy s uchetom nelinejnykh dlitelnykh processov po raznym teorijam polzuchesti i nekotorym ich modifikacjam, *Beton i Zhelezobeton wyp. 5*, Mecnijereba, Tbilisi 1972, s. 96-104.
267. Pełczyński P., Zagadnienia wytężenia i pęknięcia materiałów. Wydawnictwo Politechniki Warszawskiej, Warszawa 1971.
268. Pfeil W., Twelve years monitoring of a long span prestressed concrete bridge, *Concrete International*, nr 8, August 1981, s. 79-84.
269. Piasta J., *Technologia betonów z kruszyw łamanych*, Arkady, Warszawa 1974.
270. Piasta J., Zależność wytrzymałości betonu od właściwości kruszyw (skały), *Mechanika konstrukcji betonowych*, Prace Inst. Bud. Wzr. nr 40, Konf 9, Wyd. PWr., Wrocław 1983, s. 51-58.
271. Piechnik S., Szarliński J., Stan naprężenia w tarczy niejednorodnej z uwzględnieniem pełzania na przykładzie zapory betonowej, XXII Konferencja Naukowa KILiW PAN i KN PZITB, Referaty, tom 1, TK Krynica 1976.
272. Piechnik S., Pachla H., The continuous field of damage and its influence on the creep process in concrete under tensile loading. *Creep in Structures*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1981, s. 202-219.
273. Pinglot M., Ponsa G., Contribution à l'étude du beton partiellement précontraint. *Congrès de la FIP*, New York 1974.
274. Podolny W., Jr., The evolution of concrete cable-stayed bridges, *Concrete International*, nr 8, August 1981, s. 32-34.
275. Popkova O.M., Eksperimentalnoje issledovanije nelinejnoj polzuchesti betona pri szatii. Dlitelnyje deformativnyje processy v betonnykh i zhelezobetonnykh konstrukcjach. *Strojizdat*, Moskva, 1970, s. 23-27.
276. Powers T.C., Causes and control of volume change. *J. Portl. Cem. Assoc.*, Research and Development Laboratories Jan., 1, nr 1, 1959, s. 29-39.

277. Powers T.C., i inni, Permeability of portland cement paste, Journal of the ACI, vol. 51, Nov. 1954, s. 285-298.
278. Predvaritelno naprjažennyj żelezobeton v USA, Strojizdat, Moskva 1974.
279. Predvaritelno naprjažennyj żelezobeton (po materialam 6 Meždunarod. Kong. FIP, Praga 1970) Strojizdat, Moskva 1973.
280. Predvaritelno naprjažennyj żelezobeton (po materialam 7 Kongressa FIP, London 1978) Strojizdat, Moskva 1983.
281. Price W.H., Factors influencing concrete strength, Journal of the ACI, vol. 47, Feb. 1951, s. 417-432.
282. Projekt wiaduktu nad dolną Amblève na autostradzie A-27 (Verviers - Prüm), Belgia, Le Buredu d'Études "Franki", Liege 1980.
283. Rabotnov Yu.N., Creep problems of structural members, North-Holland, Amsterdam 1969.
284. Radomski W., Badania betonu pod obciążeniami uderzeniowymi, Studia z zakresu inżynierii nr 18, PWN, Warszawa-Lódź 1978.
285. Reynouard J.M., Lemaire M., Pera J., Cubaud J.C., Une méthode pas à pas de calcul d'une structure en béton soumise à un état biaxial de contrainte, XX Jubileuszowa Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB Krynica 1974, Referaty uczestników zagranicznych, 1974, s. 21-35.
286. Richard P., Pont de Bubiyan au Koweit, La technique française du béton précontraint, IX<sup>e</sup> Congres International de la FIP, Dragages et Travaux Publics, Stockholm 1982, s. 144-146.
287. Robinson S.R., Methods of detecting the formation and propagation of microcracks in concrete. Proceedings of the International Conference - The structure of concrete, London 1965.
288. Reimann H., Kritische Spannungszustände des Betons bei mehrachsiger, ruhender Kurzzeitbelastung, D.A. für Stb, H. 175, 1965.
289. Rüsç R., Researches toward a general flexurel theory for structural concrete, J. ACI, VII, 1960.
290. Rüsç H. i inni, Festigkeit und Verformung von unbewehrtem Beton unter konstanter Dauerlast, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton nr 198, Verlag Wilhelm Ernst und Sohn, Berlin 1968.
291. Rüsç H., Jungwirth D., Stahlbeton, Spannbeton, Berücksichtigung der Einflüsse von Kriechen und Schwinden auf das Verhalten der Tragwerke, Werner, Verlag, Dusseldorf 1976.
292. Ryan D.M. i inni, Thick walled multiple opening reinforced concrete conduits. Civil Engineering Studies, Structural research series No. 390. University of Illinois, Urbana, Illinois, December 1972.
293. Rybak M., Zagrozenie zmęczeniem betonowych konstrukcji mostowych w warunkach eksploatacji, II Konferencja: Bezpieczeństwo Budowli Mostowych, Wyd. PWR., Wrocław 1982, s. 333-344.
294. Rybak M., Utrzymanie i trwałość mostów betonowych, Drog. nr 6, 1982, s. 65-76.
295. Reinhard W., Einfluss von einachsigen Vorbelastungen auf die Festigkeit von Beton. Diplomarbeit nr 116, im Vertiefungsfach Massivbau, eingereicht an der TUM, am Lehrstuhl und Institut für Massivbau, im Eigenverlag, München, 1974.
296. Rybiński M., Analiza doraźnych odkształceń betonu w zależności od jego wieku w chwili obciążenia, VIII Sympozjon PTMTS poświęcony reologii, Wrocław 1981, s. 139-144.
297. Rzyżyński A., Stany graniczne użytkowania mostów betonowych, Rozprawy nr 108, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1980.

298. Ržanicyn A.R., Teorija polzučesti, Strojizdat, Moskva 1968.
299. Samovič I., Sostavljenje proporcij cementnyh rastvorov i betonov, Inženernyj Žurnal, 7-9, 1980.
300. Sawczuk A., Izbicki R.J., Podstawy mechaniki ośrodków plastycznych, Wyd. Pwr. Wrocław 1984,
301. Schickert G., Formfaktoren der Betondruckfestigkeit, Bautechnik, nr 2, 1981, s. 52-57.
302. Schnobrich W.C., Behaviour of reinforced concrete structures predicted by the finite element method. Computers and Structures, vol. 7, nr 3, June 1977, s. 365-376.
303. Seregin I.N., Polzučest betona w dorožno-mostovych sooruzenijach, Transport, Moskva 1965.
304. Sinno R., Furr H.L., Hyperboic functions for prestress loss and camber, J. Struct. Div. ASCE, April 1970, s. 803-821.
305. Sizow W.N. i inni, Technologia prefabrykatów betonowych i żelbetowych, Arkady, Warszawa 1975.
306. Sendecyj G.P., Mechanics of composite materials, Academic Press, New York - London 1974.
307. Stojadinovic I., Sarm S., Le pont en ars de Krk en Yougoslawie, Annales de l'Institut Technique du Beatiment et des Travaux Publics, nr 393, Avril 1981.
308. Stricklin J.A., Haisler W.E., Formulations an solution procedures for nonlinear structural analysis, Computers and Structures, vol. 7, nr 1, February 1977, s. 125-136.
309. Stupnicki W., Wytrzymałość betonu otrzymana w badaniach walców  $\varnothing 15/30$  i  $\varnothing 16/16$ , XXIX Konferencja Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1983, t. 3, cz. IV, Materiały budowlane i fizyka budowli, Wyd. Politech. Poznańskiej, Poznań 1983, s. 145-150.
310. Suwalski L., Teoria betonu i żelbetu, Warszawa, Arkady 1964.
311. Szala J., Weryfikacja doświadczalna liniowej i uogólnionej hipotezy kumulacji uszkodzeń zmęczeniowych, IX Sympozjum badań doświadczalnych w mechanice ciała stałego, Wyd. PW, Warszawa 1980, s. 337-340.
312. Szczęśniak J., Odkształcalność betonowych elementów tarczowych podanych dwukierunkowemu obciążeniu długotrwałemu, VII Sympozjon poświęcony reologii, PTMTS, Wrocław 1978, s. 316-333.
313. Ščerbakov E.N., Razvitije praktičeskich metodov učeta polzučesti i usadki betona pri projektirovanii żelezobetonnyh konstrukcij, Beton i Żelezobeton, 8, 1968, s. 19-29.
314. Ščerbakov E.N., Approksimacija i prognozirowanije krivyh polzučesti betona pri postojannyh naprjaženijach szatija, Problemy polzučesti i usadki betona, Moskva, CNIIS Mintransstroja ZSRR 1974, s. 68-78.
315. Ščelkunov V.G., Svitlyk A.Ju., Eksperimentalno-teoretičeskije issledovanija polzučesti betona pri szatii Stroitelstvo i Architektura, 11, Novosibirsk 1975, s. 11-14.
316. Szczygieł J., Mosty z betonu zbrojonego i sprężonego, WKŁ, Warszawa 1978.
317. Szechiński M., Ugięcia belek żelbetowych obciążonych długotrwałe, VIII Sympozjon poświęcony reologii, PTMTS, Wrocław 1981, s. 145-150.
318. Szulczyński T., Zależność między naprężeniami i odkształceniami betonu, AIL, t.20, z. 4, 1974, s. 629-633.
319. Sulman Z.P., Kovalev Ja. N., Zalcgendlar E.A., Reofizika konglomeratnych materialov, Nauka i Technika, Mińsk 1978.

320. Tatar J., O stanie badań dotyczących betonów keramzytowych, *Mechanika konstrukcji betonowych*, Prace Instyt. Bud. PWr. nr 40, Konf. nr 9, Wyd. PWr, Wrocław 1983, s. 69-76.
321. Takhar S.S., Jordaan I.J., Gamble B.R., *Fatigue of concrete under lateral confining pressure*, *Fatigue of concrete*, Publication SP-41, ACI, Detroit 1974, s. 59-70.
322. Thiel K., *Odkształcenia reologiczne betonu w świetle badań na mostach sprężonych statycznie wyznaczalnych*, IOMB, Warszawa 1964.
323. Talbot O., *cytat za [71]*.
324. Tomkowiak K., *Wytrzymałość betonu jako funkcja intensywności wibracji, stosunku cementowo-wodnego i punktu płaskowego*, *Rozprawy nr 39*, Wyd. Pol. Poznańskiej, Poznań 1969.
325. Troxell G.F., Raphael J.W., Davis R.E., *Long-time creep and shrinkage tests of plain reinforced concrete*, *Proc. ASTM* 1958, s. 1101-1120.
326. Trost H., Zerna W., *Rheologische Beschreibungen des Werkstoffes Beton*, *Beton- und Stahlbetonbau*, nr 7/1967.
327. Tsilosani Z.N., Kvitsaridze O.I., *On nature of interrelation between the character of long-term deformations of plain and prestressed reinforced concrete and the temperature-humidity regims of the medium*, FIP, USSR, member group, New York, May 26 - June 1, 1974, Moscow 1974.
328. Ulickij I.I., *Teorja i rasčet żelazobetonnych konstrukcij s učetom dlitelnych processov*, *Budivelnik*, Kijew 1967.
329. Ulickij I.I., *Teorja rasčeta i konstruirovanija żelazobetonnych konstrukcij. Naprjażennoje sostojanije i deformacii betonnych i żelazobetonnych elementov i konstrukcij s učetom dlitelnych processov*. *Naučno-Techničeskoje Obsčestvo Stritelnoj Promyšlennosti ZSRR*, Moskva 1958.
330. U.S. Bureau of Reclamation. *Creep of Glen Canyon Dam foundation rock cores under sustained load*. *Concrete Laboratory, Report nr C-948*. Denver-Colorado 1960.
331. U.S. Bureau of Reclamation, *Laboratory tests of rock cores from the foundation of Shilkman Dam-Taiwan*. *Concrete Laboratory Report no C-966*, Denver-Colorado 1961.
332. U.S. Bureau of Reclamation, *Investigation into the effect of water-cement ratio on the freezing-thawing resistance of non-air and air-entrained concrete*, *Concrete Laboratory Report no C-810*, Denver-Colorado 1955.
333. Walker S., Bloem D.L., *Variations in portland cement*, *Proc. ASTM*, 58, 1958, s. 1009-32.
334. Wasilev P.I., Strachov D.A., *Rasčet żelazobetonnych sterżnevych konstrukcij s učetom polzučesti*, *Beton i Żelazobeton*, 1, 1975, s. 23-25.
335. Wasutyński Z., *Mosty*, *Budownictwo betonowe*, t. XIV, cz. 1, Arkady, Warszawa 1967.
336. Virlogeux M., *Idées nouvelles pour la construction de ponts in béton léger*, *Congress IABSE, Tokio 1976, Final Report*, s. 423-428.
337. Voelmy A., *High concrete quality in cold weather*, *RILEM, Symposium, Kopenhaga 1956*.
338. Whitney C., *Plain and reinforced concrete arches*, *Journ. ACI*. 1932.
339. Williams M.L., *Structural analysis of viscoelastic materials*, *AIAA Journal*, May 1964.

340. Wiśniewski Z., Funkcje pełzania i skurczu w teoriach i normach konstrukcji z betonu, Zeszyty Nauk. Politechniki Szczecińskiej, nr 65, Szczecin 1964.
341. Wöhler A., Über die Festigkeitsversuche mit Eisen und Stahl, Bauw., Ig. XX, Berlin 1970.
342. Wolff M., Mosty z betonu sprężonego budowane metodą wspornikową, Inżynieria i Budownictwo, nr 8/9, 1975.
343. Wolff M., Mosty miejskie Polski północnej, osiągnięcia, ich ocena i kierunki rozwojowe, XVII Konferencja KN PZITB i KTLiW PAN, Krynica 1971, t. 3.
344. Wołowicki W., Problemy obliczania mostów żelbetowych na quasistatyczne obciążenia wyjątkowe, Rozprawy nr 100, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań 1979.
345. Wnuk M.P., Podstawy mechaniki pękania, Wyd. Akademii Górniczo-Hutniczej, Kraków 1977.
346. Wnuk M.P., Zniszczenie pełzające w ośrodkach sprężysto-lepkoplastycznych, Rozp. Inż., t. 18, z. 2, s. 227-349.
347. Wydra W., Wpływ procesów długotrwałych na ugięcia elementów struno-betonowych o zmiennej sztywności, Raporty Instytutu Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Seria PRE nr 100, 1979.
348. Zellner W., Svensson H., Zur Entwicklung der Schrägkabelbrücken aus Beton. Spannbetonbau in der Bundesrepublik Deutschland 1978-1982, Materiały IX Kongresu FIP w Sztokholmie, czerwiec 1982, s. 81-89.
349. Zgoła B., Stefański A., Przyspieszenie dojrzewania betonu rezystancyjnym elektronogrzewem, PWN, Warszawa-Poznań 1980.
350. Zichner T., Temperaturunterschied infolge Witterungseinfluss und Beheizung von massiven Brücken, Heft 212 der Reihe Forschung Strassenbau und Strassenverkehrstechnik, BMV, Bonn, Kirschbaumverlag Bonn, 1977.
351. Zienkiewicz O.C., Metoda elementów skończonych (tłum. z ang.) Arkady, Warszawa 1972.

CONCRETE - A MATERIAL FOR BRIDGE BUILDING

The work presents fundamental problems concerning the mechanics of concrete and the theoretical model of this material in particular. The main problems, which should be dealt with while constructing a suggested model of concrete to be applied in the analysis of states of stress and deformations observed in concrete bridges, were based on the global assessment of the state of the art and the possible developmental trends in building of such bridges.

The model of concrete, which permits us to predict the behaviour of this material under various loads and external environment effects, is made up by:

- surface of limit state effort (yield surface) defined in space of stresses as  $F(\sigma_{ij})$ ,

- constitutive equation relating strain tensor ( $\epsilon_{ij}$ ) to time-dependent stress tensor ( $\sigma_{ij}$ ) and to hygro-thermal factors characterizing the surrounding environment ( $W$  and  $\theta$  - relative humidity of air and temperature, respectively).

This relation is correlated with the yield surface  $F(\sigma_{ij}) = 0$ . For small deformations (and only such are studied in this work) the constitutive equation can be represented by a sum of different types of strains:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^s(\sigma_{ij}) + \epsilon_{ij}^p[F(\sigma_{ij}), \sigma_{ij}] + \epsilon_{ij}^l(\sigma_{ij}, W) + \epsilon_{ij}^{sk}(W) + \epsilon_{ij}(\theta) \quad (14.1)$$

where the consecutive superscripts denote: elastic strain, plastic strain, viscous strain, shrinkage and thermal strain. These strains were defined and the methods of their experimental determination presented. In equation (14.1) ageing of the material is taken into account

- the rule of the material cracking was defined in the space of strains as

$$e_{p,min} > e_{p,gr} \quad (16.1)$$

which means that cracking occurs when the minimum plastic nondilatational strains (elongation -  $e_{p,min}$ ) reach the limit value of  $e_{p,gr}$ . This quantity is the function of loading path.



The presented model was verified experimentally showing good compatibility with theoretical expectations.

Examples of applications are given.

Verified by Ruta Czaplińska

### БЕТОН - МАТЕРИАЛ ДЛЯ ПОСТРОЙКИ МОСТОВ

Настоящая работа затрагивает вопрос механики бетона, а особенно теоретическую модель этого материала. Исходя из общей оценки актуального положения и перспективы строительства бетонных мостов, определяются главные проблемы, какие должна учесть предлагаемая модель бетона, создаваемая с целью применить её для анализа напряженного состояния и деформаций, выступающих в этих конструкциях.

Модель бетона, позволяющая предугадать поведение этого материала в разных условиях нагрузки и воздействия внешней среды, создаёт:

- предельную поверхность прочности (поверхность пластичности), определённую в пространстве напряжений, как  $F(\sigma_{ij}) = 0$ ,
- реологическое уравнение состояния, связывающее тензор деформации ( $\epsilon_{ij}$ ) с изменяющимися во времени тензором напряжений ( $\sigma_{ij}$ ) и гидротермическими факторами, характеризующими внешнюю среду ( $w$  и  $\theta$  - относительную влажность воздуха и температуру).

Состояние это связано пластичной поверхностью  $F(\sigma_{ij}) = 0$ . Для меньших деформаций (только такие рассматриваются в настоящей работе) реологическое уравнение состояния можно показать как сумму разных видов деформаций

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^s(\sigma_{ij}) + \epsilon_{ij}^p[F(\sigma_{ij}), \sigma_{ij}] + \epsilon_{ij}^l(\sigma_{ij}, w) + \epsilon_{ij}^{sk}(w) + \epsilon_{ij}(\theta) \quad (I4.I)$$

в которых верхние показатели очерёдно обозначают упругие, пластичные, вязкие, усадочные и термические деформации. В работе эти деформации определены и поданы способы их установления путём исследований. Состояние (I4.I) учитывает старение материала. Критерий явления трещин определяется в пространстве деформаций, как

$$e_{p, \min} > e_{p, gr} \quad (I6.I)$$

что обозначает, что трещины появляются тогда, когда минимальные видимые пластичные деформации (удлинение  $-e_{p, \min}$ ) достигают предельной величины  $e_{p, gr}$ . Величина эта является функцией способа нагрузки.

Представленную модель проверено на базе результатов экспериментальных исследований, показывая удовлетворяющее соответствие с ними теоретических результатов и исследований. Даны также примеры применений.

## SPIS RZECZY

1. Wstęp . . . . .	4
1.1. Przedmiot pracy . . . . .	4
1.2. Cel i zakres pracy . . . . .	6
1.3. Podstawowe oznaczenia . . . . .	7
2. Zarys problematyki mostów betonowych . . . . .	9
2.1. Historia, stan aktualny i perspektywy rozwoju mostów betonowych . . . . .	9
2.2. Cechy współczesnych mostów betonowych . . . . .	20
2.3. Problemy mechaniki mostów betonowych . . . . .	21
2.3.1. Wprowadzenie . . . . .	21
2.3.2. Obciążenia i oddziaływania w mostach betonowych . . . . .	21
2.3.3. Wpływ technologii na rozkład sił wewnętrznych i wyte- żenie konstrukcji . . . . .	26
2.3.4. Wyteżenie betonu w mostach betonowych . . . . .	26
2.3.5. Podsumowanie . . . . .	30
3. Struktura betonu . . . . .	31
3.1. Informacje podstawowe . . . . .	31
3.2. Składniki podstawowe betonu i ich wpływ na jego strukturę . . . . .	31
3.3. Proces wiązania betonu - hydratacja cementu . . . . .	36
3.4. Wpływ struktury betonu na jego właściwości . . . . .	39
4. Doraźna wytrzymałość betonu w prostych stanach naprężenia . . . . .	41
4.1. Wytrzymałość betonu przy prostym ściskaniu . . . . .	41
4.1.1. Badanie wytrzymałości betonu na ściskanie . . . . .	41
4.1.2. Czynniki determinujące doraźną wytrzymałość betonu na ściskanie w jednoosiowym stanie naprężenia . . . . .	46
4.1.3. Wytrzymałość betonu na ściskanie jako funkcja jego wie- ku . . . . .	54
4.2. Wytrzymałość betonu przy prostym rozciąganiu . . . . .	61
4.2.1. Badanie wytrzymałości betonu na rozciąganie . . . . .	61
4.2.2. Czynniki wpływające na wytrzymałość betonu przy rozcią- ganiu . . . . .	62
4.2.3. Wpływ wieku betonu na jego wytrzymałość przy rozciąga- niu . . . . .	63
5. Doraźna wytrzymałość betonu w złożonych stanach naprężenia . . . . .	66
5.1. Badania wytrzymałości betonu w złożonych stanach napręże- nia . . . . .	66
5.2. Wytrzymałość betonu w płaskim stanie naprężenia . . . . .	66
5.3. Wytrzymałość betonu w przestrzennym stanie naprężenia . . . . .	69
6. Graniczny stan wyteżenia betonu . . . . .	72
6.1. Definicje i podstawowe założenia . . . . .	72

6.1.1. Kilka informacji o tensorze naprężeń . . . . .	72
6.1.2. Niezmienniki tensora i dewiatora naprężeń . . . . .	73
6.1.3. Naprężenie oktaedryczne i intensywność naprężeń . . . . .	74
6.1.4. Założenia wykorzystywane w dalszych rozważaniach . . . . .	74
6.2. Aktualny stan opracowania teorii wyężenia betonu . . . . .	74
6.2.1. Wprowadzenie . . . . .	74
6.2.2. Kryteria fizyczne jakie powinien spełniać warunek granicznego wyężenia betonu . . . . .	75
6.2.3. Klasyczne teorie wytrzymałościowe . . . . .	77
6.2.4. Współczesne teorie wytrzymałościowe . . . . .	78
6.2.5. Powierzchnia graniczna w warunkach obciążeń doraźnych.	79
7. Stopień wyężenia betonu . . . . .	85
7.1. Stopień wyężenia betonu przy obciążeniu doraźnym . . . . .	85
7.1.1. Stopień wyężenia betonu przy doraźnym obciążeniu prostym . . . . .	85
7.1.2. Stopień wyężenia betonu przy doraźnym obciążeniu złożonym narastającym wzdłuż drogi leżącej na płaszczyźnie . . . . .	86
7.1.3. Stopień wyężenia betonu w warunkach dowolnej drogi obciążenia doraźnego . . . . .	89
7.2. Procesy destrukcyjne zachodzące w betonie przy obciążeniach doraźnych . . . . .	89
7.2.1. Ogólne naświetlenie problemu . . . . .	89
7.2.2. Krytyczne poziomy wyężenia betonu . . . . .	91
7.3. Zachodzące w czasie zmiany zakresu destrukcji betonu . . . . .	93
7.3.1. Sprecyzowanie problemu . . . . .	93
7.3.2. Zjawisko regeneracji . . . . .	93
7.3.3. Propagacja uszkodzeń przy niezmiennym w czasie tensorze naprężenia . . . . .	95
7.4. Wpływ wcześniejszego obciążenia betonu na późniejszą jego wytrzymałość . . . . .	95
8. Wprowadzenie do zagadnień związanych z odkształcalnością betonu . . . . .	98
8.1. Problemy analizy stanu odkształcenia . . . . .	98
8.2. Założenia wykorzystywane w analizie stanu odkształcenia . . . . .	100
8.3. Analiza niektórych aspektów odkształcalności betonu . . . . .	101
8.3.1. Klasyfikacja odkształceń . . . . .	101
8.3.2. Odkształcalność betonu a destrukcja jego struktury . . . . .	101
8.3.3. Odkształcenia doraźne i opóźnione . . . . .	105
8.3.4. Nieodwracalność odkształceń betonu . . . . .	107
8.4. Niektóre ustalenia dotyczące struktury związku konstytutywnego betonu . . . . .	110
9. Odkształcenia sprężyste betonu . . . . .	111
9.1. Pojęcia podstawowe . . . . .	111
9.2. Zależność stałych materiałowych opisujących sprężyste cechy betonu od jego wieku . . . . .	111
9.2.1. Moduł sprężystości jako funkcja wieku betonu . . . . .	111
9.2.2. Współczynnik Poissona dla odkształceń sprężystych . . . . .	115
9.3. Wartości liczbowe modułu sprężystości i współczynnika Poissona dla odkształceń sprężystych . . . . .	116

9.4. Równanie konstytutywne dla odkształceń sprężystych betonu . . . . .	118
10. Odkształcenia plastyczno-lepkie a wiek betonu w chwili obciążenia . . . . .	118
10.1. Miara plastyczno-lepkich odkształceń betonu . . . . .	118
10.2. Weryfikacja doświadczalna przedstawionych zależności teoretycznych . . . . .	121
10.3. Sposób zastosowania wyprowadzonych zależności do wyznaczenia zmieniających się w czasie cech mechanicznych betonu . . . . .	121
11. Odkształcenia plastyczne betonu w ujęciu teoretycznym . . . . .	125
11.1. Przyjęte założenia odnośnie do odkształcalności plastycznej betonu . . . . .	125
11.1.1. Tensor odkształceń plastycznych betonu w świetle badań eksperymentalnych . . . . .	125
11.1.2. Założenia wykorzystane przy formułowaniu równania konstytutywnego odkształceń plastycznych betonu . . . . .	125
11.2. Równanie konstytutywne dla plastycznych odkształceń objętościowych betonu . . . . .	129
11.3. Równanie konstytutywne dla plastycznych odkształceń postaciowych . . . . .	131
11.3.1. Sformułowanie ogólne . . . . .	131
11.3.2. Plastyczne odkształcenie postaciowe w przypadku dowolnego obciążenia doraźnego . . . . .	133
11.3.3. Postaciowe odkształcenie plastyczne w przypadku doraźnego obciążenia prostego . . . . .	133
11.3.4. Funkcja określająca postaciową odkształcalność betonu . . . . .	134
11.4. Ogólna postać równania konstytutywnego dla odkształceń plastycznych w warunkach obciążeń doraźnych . . . . .	135
11.5. Maksymalny stopień wyężenia betonu poddanego działaniu obciążenia prostego będącego funkcją czasu . . . . .	136
11.6. Maksymalny stopień wyężenia betonu poddanego działaniu statycznego obciążenia zewnętrznego . . . . .	138
11.6.1. Uszkodzenie jako funkcja kierunku obciążenia . . . . .	138
11.6.2. Problem oceny maksymalnego wyężenia betonu w warunkach dowolnych zmian kierunku obciążania . . . . .	139
11.7. Weryfikacja doświadczalna równania konstytutywnego odkształceń plastycznych . . . . .	141
11.8. Możliwości uproszczeń równania konstytutywnego odkształceń plastycznych . . . . .	144
11.9. Obliczanie odkształceń plastycznych dla wybranych dróg wzrostu obciążenia doraźnego według równania uproszczonego . . . . .	145
11.9.1. Proste ściskanie . . . . .	145
11.9.2. Odkształcenia plastyczne przy rozciąganiu osiowym poprzedzonym ściśnięciem wzdłuż tej samej osi . . . . .	146
11.9.3. Odkształcenia plastyczne przy ścisnaniu przebiegającym kolejno wzdłuż dwóch prostopadłych kierunków . . . . .	147
11.9.4. Uwagi na temat obliczania odkształceń plastycznych w warunkach dowolnych przebiegów obciążenia doraźnego . . . . .	146

11.10. Wielkości liczbowe parametrów charakteryzujących plastyczne odkształcenia betonu . . . . .	149
12. Ujęcie teoretyczne lepkich odkształceń betonu niewysychającego . . . . .	149
12.1. Stałe materiałowe określające lepkie właściwości betonu	149
12.1.1. Wprowadzenie do zagadnienia . . . . .	149
12.1.2. Miara odkształceń lepkich betonu izolowanego . . . . .	149
12.1.3. Współczynnik Poissona dla odkształceń lepkich . . . . .	152
12.2. Równanie konstytutywne dla odkształceń lepkich betonu izolowanego . . . . .	152
13. Warunki higrotermiczne środowiska a odkształcalność betonu .	153
13.1. Sprecyzowanie problemu . . . . .	153
13.2. Woda w betonie . . . . .	154
13.3. Związek między ilością wyparowanej lub wchłoniętej przez beton wody a jego odkształceniem skurczowym . . . . .	164
13.4. Odkształcenia lepkie betonu o zmiennych warunkach higrotermicznych . . . . .	167
13.5. Weryfikacja konstytutywnych związków określających odkształcenia lepkie i skurczowe wysychającego betonu . . . . .	169
13.6. Wartości parametrów charakteryzujących odkształcalność wysychającego betonu . . . . .	171
13.6.1. Parametry determinujące proces wyparowywania z betonu wody adsorpcyjnej . . . . .	171
13.6.2. Parametr określający końcową wielkość odkształceń skurczowych . . . . .	171
13.6.3. Parametr $\chi_1/\epsilon_0$ . . . . .	175
13.7. Wpływ pory roku, podczas której wykonano beton, na końcową wielkość odkształceń lepkich i skurczowych . . . . .	175
13.8. Miara odkształceń lepkich i funkcja określająca wielkość skurczu betonu przechowywanego w stałych warunkach higrotermicznych środowiska . . . . .	177
13.9. Odkształcalność betonu w zmiennych warunkach termicznych	179
14. Równanie konstytutywne dla betonu . . . . .	180
14.1. Podsumowanie dotychczasowych rozważań . . . . .	180
14.2. Próba weryfikacji doświadczalnej równania konstytutywnego betonu . . . . .	181
14.3. Uwagi praktyczne o zastosowaniu wyprowadzonego równania konstytutywnego w analizie betonowych konstrukcji mostowych . . . . .	192
15. Wybrane przykłady zastosowań wyprowadzonego równania konstytutywnego . . . . .	193
15.1. Efektywność sprężania belek strunobetonowych w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu . . . . .	193
15.2. Odporność na zarysowanie konstrukcji sprężonych w świetle nieliniowej teorii odkształcalności betonu . . . . .	196
15.3. Praca mostowych dźwigarów z betonu sprężonego w warunkach obciążeń ponadnormatywnych . . . . .	197
15.4. Inne możliwości zastosowań . . . . .	197

16. Prawo pękania betonu . . . . .	199
16.1. Sprecyzowanie problemu . . . . .	199
16.2. Pęknięcie betonu w prostych i złożonych stanach naprężenia w świetle badań eksperymentalnych . . . . .	199
16.3. Prawo pękania betonu w ujęciu autora . . . . .	201
16.4. Graniczne postaciowe wydłużenie plastyczne przy prostym ścisaniu i rozciąganiu . . . . .	203
16.5. Weryfikacja przyjętego prawa pęknięcia w oparciu o wyniki badań eksperymentalnych . . . . .	204
16.6. Pęknięcie betonu przy obciążeniach cyklicznie zmiennych . . . . .	206
16.6.1. Wprowadzenie . . . . .	206
16.6.2. Obciążenie zmienne mostów . . . . .	206
16.6.3. Odkształcenia betonu pod obciążeniem cyklicznym . . . . .	208
17. Uwagi końcowe . . . . .	211
Literatura . . . . .	212



## CONTENTS

1. Introduction . . . . .	4
2. Generals concerning the problems of concrete bridges . . .	9
3. The structure of concrete . . . . .	31
4. Initial strength of concrete in simple states of stress .	41
5. Initial strength of concrete in complex states of stress .	66
6. Limit state of effort of concrete . . . . .	72
7. The degree of effort of concrete . . . . .	85
8. Introduction to the problems concerning deformability of concrete . . . . .	98
9. Elastic strains of concrete . . . . .	111
10. Visco-plastic strains vs. the age of concrete at the loading moment . . . . .	118
11. Plastic strains of concrete - theoretical approach . . . .	125
12. Viscous strains of isolated concrete - theoretical approach . . . . .	149
13. Hygrothermal conditions of the environment and their effects on concrete deformability . . . . .	153
14. Constitutive relation adopted for concrete . . . . .	180
15. Examples of the application of the derived constitutive relation . . . . .	193
16. The rule of concrete cracking . . . . .	199
17. Conclusions . . . . .	211
18. References . . . . .	212





PRACE NAUKOWE INSTYTUTU INŻYNIERII LĄDOWEJ  
(wydane w latach 1979—1985)

Nr 23, Monografie nr 6, J. Langer, W. Mironowicz, M. Klasztorny, <i>Analiza dynamiczna fundamentów blokowych pod maszyny nie-udarowe</i> , Wrocław 1978	21,—
Nr 24, Konferencje nr 7, <i>Drogi szynowe — zagadnienia badawczo-konstrukcyjne i eksploatacyjne</i> , Wrocław 1978	37,—
Nr 25, Monografie nr 7, A. Sawczuk, <i>Wprowadzenie do mechaniki konstrukcji plastycznych</i> , Wrocław 1978	34,—
Nr 26, Konferencje nr 8, <i>Problemy badawcze w inżynierii lądowej</i> , Wrocław 1978	34,—
Nr 27, Monografie nr 8, S. Mazur, <i>Wybrane zagadnienia nośności nawierzchni kolejowej</i> , Wrocław 1983	176,—
Nr 28, Konferencje nr 9, <i>Metody komputerowe w mechanice konstrukcji</i> , Wrocław 1981	173,—
Nr 29, Konferencje nr 10, <i>Bezpieczeństwo budowli mostowych</i> , Wrocław 1982	245,—
Nr 30, Monografie nr 9, V. Komkov, <i>The critical points theory and the variational principles in continuous mechanics of solids</i> , Wrocław 1985	210,—
Nr 31, Konferencje nr 11, <i>Infrastruktura podziemna miast</i> , Wrocław 1985	250,—

Cena zł 170,—

Subscription should be sent (at any time of the year) to:

„Ars Polona”

Krakowskie Przedmieście 7, 00-068 Warszawa

or OR PAN, 00-901 Warszawa, PKiN, POLAND

Bank account number: NBP, VIII OM Nr 1550-6-81574 Warszawa/Poland

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej  
ma stałe na składzie Księgarnia Wr 49  
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław  
oraz Wojewódzka Księgarnia Techniczna  
ul. Świdnicka 8, 50-067 Wrocław

ISSN 0324-9727