Na prawach rękopisu

INSTYTUT MATEMATYKI
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Komunikat Nr 063

MIARY GAUSSOWSKIE I ZASADA NIEZMIENNICZOŚCI W PRZESTRZENIACH LINIOWYCH

/praca doktorska/

Inglot Tadeusz

Słowa kluczowe: miara gaussowska,mierzalna przestrzeń liniowa, prawo zerojedynkowe, przestrzeń lokalnie pseudowypukła, zasada niezmienniczości

Wrocław 1976

Mgr Tadeusz Inglot
Instytut Matematyki
Politechniki Wrocławskiej
50-370 Wrocław, pl. Grunwaldzki 7a
tel. 25-26

Komunikat wpłynął we wrześniu 1976

1. WSTĘP.

Klasyczny rachunek prawdopodobieństwa bada rozkłady na prostej i w przestrzeniach skończenie wymiarowych. Naturalnym uogólnieniem jest przejście do nieskończenie wymiarowych przestrzeni liniowych. Dla ośrodkowych przestrzeni Hilberta, a nawet dla ośrodkowych przestrzeni Banacha, zasadniczy trzon teorii prawdopodobieństwa jest już zbudowany. Szczególnie dużą rolę w tej teorii grają rozkłady gaussowskie. Praca niniejsza jest próbą uogólnienia niektórych ważnych własności rozkładów gaussowskich na przypadek mierzalnych przestrzeni liniowych. Stało się to możliwe dzięki algebraicznej definicji miary gaussowskiej podanej przez X. Fernique'a [10].

Praca składa się z dwóch części. W pierwszej, rozważania koncentrują się wokół dwóch własności miar gaussowskich: praw zero-jedynkowych /paragraf 2/ i całkowalności funkcjonałów subaddytywnych względem miar gaussowskich /paragraf 3/. Wyniki te nie wyczerpują bogactwa zagadnień dotyczących miar gaussowskich, lecz dają nowe spojrzenie na teorię tych miar i pozwalają na rezygnację z aparatu dualności, powszechnie wykorzystywanego w dotychczasowej teorii. Dlatego niektóre wyniki nie są sformułowane w najogólniejszej wersji, jak można by oczekiwać.

W części drugiej, jako przykład zastosowania wyników części pierwszej, dowodzi się zasadę niezmienniczości w przestrzeniach lokalnie pseudowypukłych, nie posiadających na ogół niezerowych ciągłych funkcjonałów liniowych. Uogólnia to wcześniejszy rezultat J. Kuelbsa [22] dla przestrzeni Banacha.

II. MIARY GAUSSOWSKIE NA MIERZALNYCH PRZESTRZENIACH LINIOWYCH.

1. Definicje, uwagi wstępne.

Teoria prawdopodobieństwa w przestrzeniach liniowych rozwinęła się głównie dla klasy przestrzeni Banacha, gdzie aparat analityczny jest dostatecznie bogaty. Od kilku lat pojawiły się jednak próby rozważenia ogólniejszych przestrzeni. Okazało się, że wiele ważnych twierdzeń jest prawdziwych w znacznie szerszej klasie przestrzeni niż przestrzenie Banacha /np. [3], [4], [8], [10], [11], [16], [33], [34], [35]/. Coraz częściej próbuje się rozważać i wyodrębniać te własności miar probabilistycznych, które mają charakter algebraiczno-miarowy, a nie topologiczny. W szczególności, własności miar gaussowskich nie są na ogół związane z własnościami geometrycznymi przestrzeni unormowanych. Do badania takich własności wygodnie jest używać pojęcia mierzalnej przestrzeni liniowej /[7], [10], [11]/. Opierając się na tym pojęciu zdefiniujemy miarę gaussowską i pokażemy kilka jej własności.

W całym obecnym rozdziale E będzie oznaczać rzeczywistą przestrzeń liniową, a $\mathcal{E}$ σ-ciało jej podzbiorów.

Jeśli dodawanie jest mierzalne /jako odwzorowanie $E \times E$ w E, gdzie w $E \times E$ bierzemy σ-ciało produktowe $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$ / oraz mnożenie przez skalar jest mierzalne /jako odwzorowanie $E \times R$ w E, gdzie na prostej bierzemy σ-ciało zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a/, to para $(E, \mathcal{E})$ nazywa się mierzalną przestrzenią liniową /MVS/ /R.M.Dudley, M.Kanter [7]/.

Łatwo zauważyć, że metryczne ośrodkowe przestrzenie liniowe są MVS, jeśli za $\mathcal{E}$ weźmie się σ-ciało zbiorów borelowskich. Dokładniej mówiąc, wystarczy, aby E była przestrzenią liniowo-topologiczną i miała własność Lindelöfa, przy tym samym $\mathcal{E}$.

Inny, ważny przykład stanowi przestrzeń $D[0,1]$ funkcji rzeczywistych na odcinku $[0,1]$ prawostronnie ciągłych i bez nieciągłości drugiego rodzaju. Przestrzeń ta z topologią J_1 Skorochoda jest przestrzenią polską, ale nie jest liniowo-topologiczną / P.Billingsley [2] str.123, problem 3 /. Jest ona jednak MVS ze zbiorami borelowskimi jako $\mathcal{E}$. Wynika to z następujących faktów / ich dowody i dalsze szczegóły dotyczące przestrzeni $D[0,1]$ są zawarte np. w książce [2]/. Rzuty jednowymiarowe, to znaczy odwzorowania $\pi_t: D[0,1] \longrightarrow R$ takie, że $\pi_t(x)=x(t)$, są funkcjami borelowskimi, choć na ogół nieciągłymi. Ponadto rodzina $\{\pi_t\}_{t\in[0,1]}$ generuje σ-ciało zbiorów borelowskich w $D[0,1]$ /por. [2] Th.14.5/. Mierzalność dodawania wynika z powyższych faktów oraz z przemienności, dla każdego $t\in[0,1]$, następującego diagramu:

$$\begin{array}{ccc} D\times D & \xrightarrow{+} & D \\ \downarrow{\scriptstyle(\pi_t,\,\pi_t)} & & \downarrow{\scriptstyle\pi_t} \\ R\times R & \xrightarrow{+} & R\,. \end{array}$$

Nietrudno zauważyć, że mnożenie przez skalar jest ciągłe, a więc mierzalne. Podobnie można pokazać, że przestrzeń $D[0,\infty)$ z odpowiednio rozszerzoną topologią J_1 /np. T.Lindvall [24]/ jest też MVS. Przykłady powyższe są ważne dlatego, że przestrzenie te są naturalnymi przestrzeniami realizacji dużej klasy procesów stochastycznych.

W następujących poniżej definicjach za element losowy uważa się mierzalne odwzorowanie z pewnej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathfrak{S}, P)$ w mierzalną przestrzeń liniową $(E, \mathcal{E})$.

(1.1) Definicja /X.Fernique [10]/.

Element losowy X na $(E, \mathcal{E})$ nazywa się symetrycznym elementem gaussowskim, jeśli dla dowolnego "obrotu" $T: E\times E \to E\times E$, $T(x,y)=(sx-ty, tx+sy)$, gdzie $s^2+t^2=1$, oraz dla dowolnych X_1, X_2, niezależnych elementów losowych o tym samym rozkładzie co X, jeśli $(Y_1, Y_2)=T(X_1, X_2)$, to Y_1 i Y_2 są niezależne i mają ten sam rozkład co X. Inaczej mówiąc, dla każdego "obrotu" T rozkład μ elementu losowego X spełnia równość

$$(\mu\times\mu)T^{-1}=\mu\times\mu\,,$$

gdzie $\mu\times\mu$ oznacza produkt miary μ przez siebie.

Następna definicja ma sens także w przypadku, gdy E jest grupą.

(1.2) Definicja /L.Corvin [5]/.

Element losowy X na $(E, \mathcal{E})$ nazywa się symetrycznym elementem gaussowskim, jeśli dla dowolnych X_1, X_2, niezależnych elementów losowych o tym samym rozkładzie co X, elementy losowe $Y_1=X_1+X_2$ i $Y_2=X_1-X_2$ są niezależne i mają ten sam rozkład.

(1.3) Definicja /R.M.Dudley, M.Kanter [7]/.

Element losowy X na $(E, \mathcal{E})$ nazywa się symetrycznym elementem gaussowskim, jeśli ma rozkład ściśle stabilny z wykładnikiem 2, to znaczy dla dowolnych $A>0$ i $B>0$ oraz X_1, X_2, niezależnych elementów losowych o tym samym rozkładzie co X, element losowy

$$\frac{AX_1+BX_2}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

ma ten sam rozkład co X.

Niech F będzie pewną rodziną funkcjonałów liniowych na E i niech $\sigma(F)$ oznacza σ-ciało podzbiorów E generowane przez rodzinę F, to jest najmniejsze σ-ciało, przy którym wszystkie funkcjonały z F są mierzalne. W [7] zostało pokazane, że każda para $(E, \sigma(F))$ jest MVS.

(1.4) Definicja.

Niech F będzie pewną przestrzenią wektorową funkcjonałów liniowych na przestrzeni liniowej E. Element losowy X na $(E, \sigma(F))$ nazywa się symetrycznym elementem gaussowskim, jeśli dla każdego $f \in F$, $f(X)$ jest zmienną losową gaussowską o średniej zero.

Łatwo zauważyć, że definicja (1.1) jest mocniejsza zarówno od definicji (1.2) jak też (1.3). Poniższe Twierdzenie jest znane, jednakże podajemy jego dowód, gdyż jest nieskomplikowany, a autor nie zna opublikowanej pracy zawierającej go.

(1.5) Twierdzenie.

Jeśli $(E, \mathcal{E})$ jest MVS taką, że $\mathcal{E} = \sigma(F)$, gdzie F jest pewną przestrzenią wektorową funkcjonałów liniowych na E, to definicje (1.1)-(1.4) są równoważne.

Dowód.

Równoważność (1.3) i (1.4) została pokazana przez Dudleya i Kantera w [7]. Pozostają więc do udowodnienia dwa fakty:

(i) jeśli X jest elementem gaussowskim w sensie definicji (1.2) to jest także w sensie definicji (1.4),

(ii) jeśli X jest elementem gaussowskim w sensie definicji (1.4), to jest także w sensie definicji (1.1).

ad (i). Niech X_1, X_2 będą niezależnymi elementami losowymi mającymi ten sam rozkład co X. Wówczas, z założenia, X_1+X_2 oraz X_1-X_2 są niezależnymi elementami losowymi o tym samym rozkładzie. Wobec tego, dla dowolnego $f \in F$, $f(X_1)$ i $f(X_2)$ są niezależnymi zmiennymi losowymi o tym samym rozkładzie co $f(X)$ oraz zmienne losowe $f(X_1+X_2)=f(X_1)+f(X_2)$ i $f(X_1-X_2)=$ $=f(X_1)-f(X_2)$ są niezależne. Stąd i ze znanej charakteryzacji rozkładów gaussowskich na prostej /W.Feller [9] str.79,wniosek/ wynika, że $f(X_1)$ i $f(X_2)$ są gaussowskimi zmiennymi losowymi. Mają one średnią zero, bo ich suma i różnica mają ten sam rozkład.

ad (ii). Niech dla każdego $f \in F$, $f(X)$ ma rozkład gaussowski symetryczny, niech X_1, X_2 będą niezależnymi elementami losowymi o tym samym rozkładzie co X i $Y_1=sX_1-tX_2$, $Y_2=tX_1+sX_2$, gdzie $s^2+t^2=1$, s,t ustalone. Wówczas dla dowolnego $f \in F$, zmienne losowe $f(Y_1)$ i $f(Y_2)$ mają ten sam rozkład co $f(X)$ /na podstawie charakteryzacji rozkładów gaussowskich na prostej [9] i faktu, że $f(X_1)$ i $f(X_2)$ są niezależne i o tym samym rozkładzie/. Stąd i z własności wielowymiarowych funkcji charakterystycznych wynika już równość rozkładów wektorów losowych $(f_1(Y_1), f_2(Y_1), \ldots, f_n(Y_1))$ i $(f_1(Y_2), f_2(Y_2), \ldots, f_n(Y_2))$ dla dowolnych $n \geq 1$ i $f_1, \ldots, f_n \in F$. Z definicji $\sigma(F)$ daje to równość rozkładów Y_1 i Y_2.

Pozostaje do wykazania niezależność Y_1 i Y_2. W tym celu wystarczy pokazać, że wektory $(f_1(Y_1), \ldots, f_n(Y_1))$ i $(g_1(Y_2), \ldots, g_n(Y_2))$ są niezależne dla dowolnych $n \geq 1$ oraz $f_1, \ldots, f_n, g_1, \ldots, g_n \in F$. Ponieważ X_1, X_2 są niezależne, to $(f_1(X_1), \ldots, f_n(X_1), g_1(X_1), \ldots, g_n(X_1))$ i $(f_1(X_2), \ldots, f_n(X_2), g_1(X_2), \ldots, g_n(X_2))$ są niezależnymi wektorami gaussowskimi. Gaussowski jest zatem wektor

$$\left(f_1(X_1),\ldots,f_n(X_1),g_1(X_1),\ldots,g_n(X_1),f_1(X_2),\ldots f_n(X_2),g_1(X_2),\ldots,g_n(X_2)\right).$$

Niech $Q: R^{4n} \longrightarrow R^{2n}$ będzie odwzorowaniem określonym następująco:

$$Q\left(x_1,\ldots,x_n,x_{n+1},\ldots,x_{2n},x_{2n+1},\ldots,x_{3n},x_{3n+1},\ldots,x_{4n}\right)=$$
$$=\left(sx_1-tx_{2n+1},\ldots,sx_n-tx_{3n},tx_{n+1}+sx_{3n+1},\ldots,tx_{2n}+sx_{4n}\right).$$

Wtedy

$$\left(Q\left(f_1(X_1),\ldots,g_n(X_1),f_1(X_2),\ldots,g_n(X_2)\right)=\right.$$
$$=\left(f_1(Y_1),\ldots,f_n(Y_1),g_1(Y_2),\ldots,g_n(Y_2)\right).$$

Ponieważ Q jest odwzorowaniem liniowym, to obraz wektora gaussowskiego jest także wektorem gaussowskim. Wystarczy zatem sprawdzić, że $f_i(Y_1)$ i $g_j(Y_2)$ są nieskorelowane dla wszystkich $i,j=1,2,\ldots,n$. To natomiast wynika z następującej równości:

$$E\, f_i(Y_1)\, g_j(Y_2) = E\left(sf_i(X_1)-tf_i(X_2)\right)\left(tg_j(X_2+sg_j(X_2)\right) =$$
$$= st\left(Ef_i(X_1)\, g_j(X_1) - Ef_i(X_2)\, g_j(X_2)\right) +$$
$$+ s^2 Ef_i(X_1)\, g_j(X_2) - t^2 Ef_i(X_2)\, g_j(X_1) = 0.$$

∎

(1.6) Uwaga.

Twierdzenie (1.5) nie obejmuje wszystkich przypadków, w których można wykazać równoważność definicji (1.1) i (1.2). T. Byczkowski /[3] i [4]/ pokazał, że pomiędzy elementami losowymi w $L_p(T,\mathcal{A},m)$, $0 \leq p < 1$, gdzie $(T,\mathcal{A},m)$ jest przestrzenią miarową z miarą bezatomową taką, że $L_p(T,\mathcal{A},m)$ jest ośrodkowa, i procesami mierzalnymi na T istnieje odpowiedniość wzajemnie jednoznaczna taka, że elementowi gaussowskiemu w sensie definicji (1.1) lub (1.2) odpowiada proces gaussowski o realizacjach w $L_p(T)$ oraz procesowi gaussowskiemu odpowiada element gaussowski w sensie definicji (1.1). To daje już równoważność definicji (1.1) i (1.2).

W przypadku liniowych przestrzeni metrycznych może być użyta jeszcze inna definicja elementu gaussowskiego.

(1.7) Definicja.

Niech E będzie ośrodkową metryczną przestrzenią liniową, a $\mathcal{E}$ σ-ciałem zbiorów borelowskich. Element losowy X na $(E, \mathcal{E})$ nazywa się symetrycznym elementem gaussowskim, jeśli ma następującą reprezentację:

$$X(\omega) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \xi_n(\omega) ,$$

gdzie $a_n \in E$ dla $n=1,2,\dots$, a $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie $N(0,1)$, przy czym szereg jest zbieżny z prawdopodobieństwem 1 i w metryce przestrzeni E.

Znany jest fakt, że dla ośrodkowych przestrzeni Banacha każdy symetryczny element gaussowski ma powyższą reprezentację szeregową. Interesujące zatem byłoby zbadanie związku pomiędzy tą definicją, a pozostałymi dla szerszej klasy przestrzeni.

Dotychczasowe definicje dotyczyły symetrycznych elementów gaussowskich. Można rozważać niesymetryczne elementy gaussowskie jako przesunięcia o wektor stały elementów symetrycznych. Bardziej naturalna jest jednak definicja następująca:

(1.8) Definicja.

Element losowy X na $(E, \mathcal{E})$ nazywa się elementem gaussowskim, jeśli dla niezależnych elementów losowych X_1, X_2 o tym samym rozkładzie co X, $X_1 - X_2$ jest symetrycznym elementem gaussowskim.

Jeśli $\mathcal{E} = \mathcal{B}(F)$, gdzie F jest przestrzenią wektorową funkcjonałów liniowych na E, to każdy element gaussowski jest przesunięciem o wektor stały symetrycznego elementu gaussowskiego. Podobnie jest w przypadku przestrzeni $L_p(T, \mathcal{A}, m)$, $0 \leq p < 1$ /Uwaga (1.6)/.

W dalszych rozdziałach rozważane będą tylko symetryczne elementy /miary/ gaussowskie, przy czym słowo symetryczne będzie często opuszczane. Język elementów losowych i miar będzie używany zamiennie ze względu na jasność sformułowań lub wygodę w zapisie.

2. Prawa 0-1 dla miar gaussowskich.

Niech μ będzie miarą probabilistyczną na MVS $(E, \mathcal{E})$. Mówimy, że dla miary μ zachodzi prawo 0-1, jeśli dla każdej podgrupy $G \subset E$ mierzalnej w uzupełnieniu $\mathcal{E}$ względem μ, jest $\mu(G)=0$ lub $\mu(G)=1$.

własności

Badania tej poszły w dwóch kierunkach: twierdzenia dla miar gaussowskich i stabilnych w różnych klasach przestrzeni /przestrzenie Banacha, lokalnie wypukłe przestrzenie Frechete'a [1], [4], [19], [21], [25], [27] oraz mierzalne przestrzenie liniowe [7], [11]/ oraz twierdzenia dla miar niegaussoeskich [20], [35]. Wdrugiej grupie twierdzeń istotne dla otrzymania prawa 0-1 jest skorzystanie z prawa 0-1 Kołmogorowa, co nakłada ograniczenia zarówno na przestrzeń jak i na miarę /np. w przestrzeni R^∞ miary produktowe/. Natomiast w przypadku miar gaussowskich czy stabilnych własność tą otrzymuje się niezależnie od prawa 0-1 Kołmogorowa. Poza tym twierdzenia 0-1 dla miar gaussowskich rozszerzają się natychmiast na każdą miarę probabilistyczną absolutnie ciągłą względem pewnej miary gaussowskiej. Pomimo bogatej literatury wydaje się, że zagadnienie praw 0-1 nie zostało w pełni rozwiązane. Poniżej podajemy twierdzenia 0-1 dla miar gaussowskich na MVS. Metoda dowodu twierdzenia (2.2) jest podobna do metody użytej przez X.Fernique'a w [11]. Bardziej szczegółowa analiza znanych praw 0-1 jest zawarta w pracy autora [17].

Twierdzenie poprzedzimy prostym lematem.

<u>(2.1) Lemat</u>.

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$. Wówczas dla każdego $A\subset E\times E$ i każdego "obrotu" T jest $(\mu\times\mu)_{*}(A)=(\mu\times\mu)_{*}(TA)$ oraz $(\mu\times\mu)^{*}(A)=(\mu\times\mu)^{*}(TA)$, gdzie ν_{*}, ν^{*} oznaczają odpowiednio miarę wewnętrzną i zewnętrzną utworzoną dla miary ν.

<u>Dowód</u>.

Dowód dla miary wewnętrznej wynika z następujących równości:

$$(\mu\times\mu)_{*}(TA)=\sup\left\{(\mu\times\mu)(B): B\subset TA,\ B\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\right\}=$$
$$=\sup\left\{(\mu\times\mu)(TC): C\subset A,\ C\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\right\}=$$
$$=\sup\left\{(\mu\times\mu)(C): C\subset A,\ C\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}\right\}=(\mu\times\mu)_{*}(A).$$

Analogiczne równości można napisać dla miary zewnętrznej.

∎

<u>(2.2) Twierdzenie</u>.

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$ i niech M będzie wymierną podprzestrzenią liniową /tzn. podgrupą zamkniętą na mnożenie przez liczby wymierne/. Wówczas $\mu^*(M)=1$ lub $\mu_*(M)=0$, gdzie μ^* i μ_* oznaczają odpowiednio zewnętrzną i wewnętrzną miarę utworzoną dla μ.

Dowód.

Niech $M\subset E$, $M\neq E$, będzie ustaloną wymierną podprzestrzenią liniową. Będziemy rozważać zbiór $M^c\times M\subset E\times E$, gdzie $M^c=E\setminus M$, i jego obrazy przez "obroty" $T=T_{s,t}$, s,t wymierne i dodatnie.

1°. $A_T = T(M^c\times M)\subset M^c\times M^c$.

Istotnie, gdyby $(x,y)\in A_T$ i $x\in M$, to istniałyby $z_1\in M^c$ i $z_2\in M$ takie, że $x=sz_1-tz_2$, skąd $z_1=\frac{1}{s}x+\frac{t}{s}z_2\in M$, bo M jest wymierną podprzestrzenią liniową, a to jest niemożliwe. Podobnie pokazuje się, że $y\in M^c$.

2°. Przekroje pionowe zbioru A_T są postaci
$A_T^x=\{y:(x,y)\in A_T\}=\frac{t}{s}x+M$, gdy $x\in M^c$ i $A_T^x=\emptyset$, gdy $x\in M$.

Jeśli $x\in M^c$ i $y\in A_T^x$, to istnieją $z_1\in M^c$ i $z_2\in M$ takie, że $x=sz_1-tz_2$ i $y=tz_1+sz_2$. Stąd $y=\frac{t}{s}x+\frac{1}{s}z_2\in\frac{t}{s}x+M$, czyli $A_T^x\subset\frac{t}{s}x+M$. Na odwrót, jeśli $y=\frac{t}{s}x+z$, gdzie $z\in M$, to $z_1=\frac{1}{s}x+tz\in M^c$, $z_2=sz\in M$ i $T(z_1,z_2)=(x,y)$, czyli $(x,y)\subset A_T$.

3°. Jeśli T_1,T_2 są dwoma różnymi "obrotami", to
$A_{T_1}\cap A_{T_2}=\emptyset$.

Wystarczy sprawdzić, że $A_{T_1}^x\cap A_{T_2}^x=\emptyset$ dla $x\in M^c$. Przypuśćmy, że tak nie jest. Wtedy dla pewnego $x\in M^c$ istnieją $z,u\in M$ takie, że

$$\frac{s_1}{t_1}x+z=\frac{s_2}{t_2}x+u\in A_{T_1}^x\cap A_{T_2}^x.$$

Stąd

$$\left(\frac{s_1}{t_1} - \frac{s_2}{t_2}\right)x = (u - z) \in M.$$

Ponieważ $\frac{s_1}{t_1} \neq \frac{s_2}{t_2}$, oznacza to, że $x \in M$, wbrew założeniu, że $x \in M^c$.

4^0. Niech $\{T_n\}$ będzie ciągiem nieskończonym różnych "obrotów" /taki ciąg istnieje, bo jest nieskończenie wiele trójkątów pitagorejskich pierwotnych, W.Sierpiński [31]/. Wówczas zbiory A_{T_n} są parami rozłączne na podstawie 3^0. Korzystając z lematu (2.1) można napisać

$$1 \geqslant (\mu\times\mu)_*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{T_n}\right) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\mu\times\mu)_*(A_{T_n}) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} (\mu\times\mu)_*(M^c \times M).$$

Stąd $(\mu\times\mu)_*(M^c\times M) = 0$ i w konsekwencji /P.Halmos [15], str. 150, (9)/

$$0 = (\mu\times\mu)_*(M^c\times M) = \mu_*(M^c)\,\mu_*(M) =$$
$$= \left(1 - \mu^*(M)\right)\mu_*(M).$$

Twierdzenie jest więc udowodnione.

∎

W dowodzie istotnie wykorzystuje się fakt, że M jest zamknięta na mnożenie przez wszystkie liczby wymierne. Rozumowanie powyższe nie daje się więc zastosować dla dowolnych podgrup. Aby otrzymać prawo 0-1 dla podgrup pokażemy je najpierw dla struktur bardziej specjalnych wzorując się na pomyśle Kallianpura [21].

Modułem nad podpierścieniem Q_p / $Q_p \subset Q$/ ciała liczb wymiernych, gdzie Q_p oznacza zbiór liczb wymiernych o mianownikach względnie pierwszych z liczbą pierwszą p, nazywamy podgrupę zamkniętą na mnożenie przez liczby z Q_p.

Jeśli G jest dowolną podgrupą przestrzeni liniowej E, to $G_p = \bigcup_{n\in I_p} \frac{1}{n} G$, gdzie I_p jest zbiorem liczb naturalnych względnie pierwszych z liczbą pierwszą p, jest modułem nad Q_p. Ponadto $G = \bigcap_p G_p$, gdzie przekrój jest brany po wszystkich liczbach pierwszych $p \geqslant 2$ /dowody tych faktów można znaleźć w pracy Kallianpura [21]/.

Najpierw zatem udowodnimy prawo 0-1 dla modułów nad Q_p dla dowolnego p. Twierdzenie poprzedzimy kilkoma lematami.

(2.3) Lemat.

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$, a K modułem nad Q_p, $K \subset E$. Wtedy albo $\mu^*(\frac{1}{p}K) = 1$, albo $\mu_*(K) \leqslant \frac{1}{2}$.

Dowód.

Niech T oznacza "obrót" o parametrach $s = \frac{2p}{p^2+1}$, $t = \frac{p^2-1}{p^2+1}$. Pokażemy, że

$$T\left(K \times (\tfrac{1}{p}K)^c\right) \subset \left((\tfrac{1}{p}K)^c \times K^c\right).$$

Istotnie, gdyby dla pewnego $(x,y) \in T\left(K \times (\frac{1}{p}K)^c\right)$ było $x \in \frac{1}{p}K$, to istniałyby $z_1 \in K$ i $z_2 \notin \frac{1}{p}K$ takie, że

$$x = \frac{2p}{p^2+1} z_1 - \frac{p^2-1}{p^2+1} z_2.$$

Stąd

$$z_2 = \frac{2p}{p^2-1} z_1 - \frac{p^2+1}{p^2-1} x \in \frac{1}{p} K,$$

co jest niemożliwe. Podobnie, gdyby $y \in K$, to równość

$$y = \frac{p^2-1}{p^2+1} z_1 + \frac{2p}{p^2+1} z_2$$

dawałaby

$$z_2 = \frac{p^2+1}{2p} y - \frac{p^2-1}{2p} z_1 \in \frac{1}{p} K,$$

co również jest niemożliwe. Z udowodnionej inkluzji wynika nierówność

$$\mu_*(K) \ \mu_*\left(\left(\frac{1}{p}K\right)^c\right) \leqslant \mu_*(K^c) \ \mu_*\left(\left(\frac{1}{p}K\right)^c\right).$$

Stąd albo $\mu^*(\frac{1}{p}K) = 1$, albo $\mu_*(K) + \mu^*(K) \leqslant 1$ i to kończy dowód.

∎

<u>(2.4) Lemat.</u>

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$, a K $\mathcal{E}$ - mierzalnym modułem nad Q_p. Jeśli $\mu(K) > 0$, to istnieje taka liczba naturalna n, że $\mu(\frac{1}{p^n} K) = 1$.

<u>Dowód.</u>

Ponieważ dla każdego n, zbiór $\frac{1}{p^n} K$ jest modułem nad Q_p, więc na podstawie lematu (2.3) przy ustalonym n, albo $\mu\left(\frac{1}{p^{n+1}} K\right) = 1$, albo $\mu\left(\frac{1}{p^n} K\right) \leqslant \frac{1}{2}$. Jeśli $\mu\left(\frac{1}{p^n} K\right) < 1$ dla wszystkich n, to $\mu\left(\frac{1}{p^n} K\right) \leqslant \frac{1}{2}$ dla wszystkich n. Z drugiej strony, zbiory $\frac{1}{p^n} K$ tworzą ciąg wstępujący i $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n} K$ jest wymierną podprzestrzenią liniową. Wobec tego $\mu\left(\frac{1}{p^n} K\right) \longrightarrow \mu(M)$, gdy $n \to \infty$. Ale z założenia $\mu(M) \geqslant \mu(K) > 0$, więc na podstawie twierdzenia (2.2) jest $\mu(M) = 1$. To daje sprzeczność.

∎

<u>(2.5) Lemat.</u>

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$, a M $\mathcal{E}$ - mierzalną wymierną podprzestrzenią liniową taką, że $\mu(M)=1$. Jeśli $t\in[0,1]$ niewymierne, a $s=\sqrt{1-t^2}$ wymierne, to $\mu(M\cap tM)=1$.

<u>Dowód.</u>

Niech $T=T_{s,t}$, gdzie t niewymierne, a s wymierne i niech $A_T=T(M\times M)$. Postępując tak samo jak w dowodzie punktu 2^0 twierdzenia 2.2 otrzymujemy

$$A_T^x=\{y\in E:\ (x,y)\in A_T\}\subset \frac{-sx+M}{t}\ .$$

Ponieważ $\mu(M)=1$, to $(\mu\times\mu)(M\times M\cap A_T)=1$. Z twierdzenia Fubiniego

$$1=\mu\{x\in M:\ \mu(M\cap A_T^x)=1\}\leqslant$$

$$\leqslant\mu\{x\in M:\ \mu(M\cap \tfrac{1}{t}M)=1\}.$$

Stąd $\mu(M\cap\frac{1}{t}M)=1$. Ponieważ t^2 jest wymierne, to $M\cap\frac{1}{t}M=t^2(M\cap\frac{1}{t}M)=M\cap tM$ i to kończy dowód.

$\blacksquare$

<u>(2.6) Twierdzenie.</u>

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$. Jeśli K jest $\mathcal{E}$ - mierzalnym modułem nad Q_p /Q_p jest zbiorem liczb wymiernych o mianownikach względnie pierwszych z liczbą pierwszą p/, to $\mu(K)=0$ lub 1. Jeśli $\mu(K)=1$ i $p\geqslant 3$, to istnieje wymierna podprzestrzeń liniowa $M_0\subset K$ taka, że $\mu(M_0)=1$.

Dowód.

Wybierzmy dla $p \geqslant 3$ liczby naturalne $a > b > 0$ takie, że $a+b = p$. Niech T będzie "obrotem" o parametrach $s = \frac{a-b}{p}$, $t = \frac{2\sqrt{ab}}{p}$ dla $p \geqslant 3$ i $s = \frac{1}{2}$, $t = \frac{\sqrt{3}}{2}$ dla $p=2$.

Przyjmijmy oznaczenia: $v = tp$, $H = K \cap vK$, $K_n = \frac{1}{p^n} K$; $H_n = \frac{1}{p^n} H$, $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$.

Załóżmy, że $\mu(K) > 0$. Ponieważ M jest wymierną podprzestrzenią liniową, to na podstawie twierdzenia (2.2) jest $\mu(M) = 1$. Stąd i z lematu (2.5) $\mu(M \cap tM) = \mu(M \cap vM) = 1$. Zbiór H jest modułem nad Q_p oraz

$$M \cap vM = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^n}(K \cap vK) = \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n .$$

Z lematu (2.4) istnieje więc takie n naturalne, że $\mu(H_n) = 1$.

Pokażemy, że stąd już wynika $\mu(H_{n-1}) = 1$. Niech $B_T = T(H_n \times H_n)$. Dla $x \in H_n$

$$B_T^x = \{y : (x,y) \in B_T\} = \frac{t}{s} x + \frac{1}{s} H_n = \frac{t}{s} x + H_{n-1}.$$

Istotnie, jeśli $y \in B_T^x$, to istnieją $z_1, z_2 \in H_n$ takie, że $x = sz_1 - tz_2$ i $y = tz_1 + sz_2$. Stąd $y = \frac{t}{s} x + \frac{1}{s} z_2 \in \frac{t}{s} x + \frac{1}{s} H_n$. Na odwrót, jeśli $y = \frac{t}{s} x + \frac{1}{s} z$, gdzie $z \in H_n$, to przyjmując $z_1 = \frac{1}{s} x + \frac{t}{s} z$, $z_2 = z$, jest $z_1, z_2 \in H_n$ i $T(z_1, z_2) = (x, y)$.

Oznaczmy przez $\{x_\alpha\}_{\alpha \in A}$ zbiór reprezentantów warstw H_n względem H_{n-1}. Wtedy $H_n = \bigcup_{\alpha \in A}(x_\alpha + H_{n-1})$. Nietrudno zauważyć, że dla $x \in x_\alpha + H_{n-1}$ jest $B_T^x = \frac{t}{s} x_\alpha + H_{n-1} \subset H_n$.

Fakt ten można zapisać następująco

$$B_T \cap (H_n \times H_n) = \bigcup_{\alpha \in A} (x_\alpha + H_{n-1}) \times \left(\frac{t}{s} x_\alpha + H_{n-1}\right).$$

Ponieważ $(\mu \times \mu)\big(B_T \cap (H_n \times H_n)\big) = 1$, to z twierdzenia Fubiniego wynika istnienie $\alpha_0 \in A$ takiego, że $\mu(x_{\alpha_0} + H_{n-1}) = 1$ i $x_{\alpha_0} + H_{n-1} = \frac{t}{s} x_{\alpha_0} + H_{n-1}$.

Dalsza część dowodu przebiega nieco inaczej dla $p \geqslant 3$ i $p = 2$.

Przypadek $p \geqslant 3$. Z symetrii miary μ wynika, że $\mu(-x_{\alpha_0} + H_{n-1}) = 1$. Gdyby $x_{\alpha_0} \notin H_{n-1}$, to warstwy $(-x_{\alpha_0} + H_{n-1})$ i $(x_{\alpha_0} + H_{n-1})$ byłyby różne i o mierze 1, a to jest niemożliwe. Więc musi być $x_{\alpha_0} \in H_{n-1}$, czyli $\mu(H_{n-1}) = 1$. Postępując dalej indukcyjnie otrzymujemy $\mu(K) \geqslant \mu(H) = 1$ oraz $\mu(p^n H) = 1$ dla $n \geqslant 1$. $M_0 = \bigcap_{n \geqslant 0} p^n H$ jest wymierną podprzestrzenią liniową i $\mu(M_0) = \lim_{n \to \infty} \mu(p^n H) = 1$. Ponadto $M_0 \subset H \subset K$. To kończy dowód dla $p \geqslant 3$.

Przypadek $p = 2$. Przypuśćmy, że $x_{\alpha_0} \notin H_{n-1}$. Ponieważ $x_{\alpha_0} \in H_n \subset K_n$, to możliwe są dwa przypadki: $x_{\alpha_0} \in K_{n-1}$ lub $x_{\alpha_0} \notin K_{n-1}$. Gdyby $x_{\alpha_0} \notin K_{n-1}$, to warstwa $x_{\alpha_0} + K_{n-1}$ byłaby różna od K_{n-1} oraz z inkluzji $x_{\alpha_0} + K_{n-1} \supset x_{\alpha_0} + H_{n-1}$ byłoby $\mu(x_{\alpha_0} + K_{n-1}) = 1$, co jest niemożliwe z założenia $\mu(K) > 0$. A więc $x_{\alpha_0} \in K_{n-1}$. Wobec tego z definicji H_{n-1} $x_{\alpha_0} \notin \sqrt{3}\, K_{n-1}$. Z drugiej strony $\sqrt{3}\, x_{\alpha_0} - x_{\alpha_0} \in H_{n-1} \subset K_{n-1}$, bo warstwy wyznaczone przez x_{α_0} i $\sqrt{3}\, x_{\alpha_0}$ są jednakowe. Stąd $\sqrt{3}\, x_{\alpha_0} \in K_{n-1}$, to znaczy $x_{\alpha_0} \in \sqrt{3}\, K_{n-1}$, co daje sprzeczność. A więc $x_{\alpha_0} \in H_{n-1}$ i $\mu(H_{n-1}) = 1$. Postępując dalej indukcyjnie otrzymujemy $\mu(K) \geqslant \mu(H) = 1$. Twierdzenie jest więc dowiedzione.

(2.7) Twierdzenie.

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$. Jeśli G jest $\mathcal{E}$- mierzalną podgrupą E, to $\mu(G)=0$ lub $\mu(G)=1$.

Dowód.

Opierając się na konstrukcji Kallianpura [21], wspomnianej wyżej, G można przedstawić w postaci $G=\bigcap_{p\in\Pi} G_p$, gdzie Π jest zbiorem liczb pierwszych, a G_p są $\mathcal{E}$- mierzalnymi modułami nad Q_p. Teza wynika więc bezpośrednio z twierdzenia (2.6).

∎

Podpółgrupy prostej rzeczywistej mogą mieć miarę gaussowską dodatnią różną od 1. Na ogół więc dla miar gaussowskich prawo 0-1 dla podpółgrup nie zachodzi. Jednakże podpółgrupy nie mogą mieć dowolnej miary. J. Zinn [35] pokazał, że miara podpółgrupy nie może przybierać wartości z przedziału $(\frac{1}{2},1)$, o ile dla podgrup zachodzi prawo zero-jedynkowe.

(2.8) Twierdzenie /J. Zinn [35]/.

Niech μ będzie borelowską miarą probabilistyczną na grupie topologicznej X, spełniającą warunki / $\mathcal{B}(X)$ oznacza σ-ciało zbiorów borelowskich /:

(1) μ jest symetryczna, tzn. $\forall A\in\mathcal{B}(X)\ \mu(A)=\mu(A^{-1})$;

(2) jeśli G jest podgrupą mierzalną w uzupełnieniu $\mathcal{B}(X)$ względem μ, to $\mu(G)=0$ lub $\mu(G)=1$.

Wtedy dla dowolnej podpółgrupy $S\subset X$, mierzalnej w uzupełnieniu $\mathcal{B}(X)$ względem μ, jest $\mu(S)=1$ lub $\mu(S)\leqslant\frac{1}{2}$.

Dla pewnej klasy podpółgrup tezę można wzmocnić.

Podpółgrupa S grupy /algebraicznej/ G jest maksymalna, jeśli jest właściwa i każda podpółgrupa istotnie zawierająca S jest całą grupą G, tj. dla dowolnego $x \in S$ półgrupa generowana przez x i S jest całą grupą G.

(2.9) Twierdzenie.

Niech μ będzie borelowską miarą probabilistyczną na grupie topologicznej X spełniającą warunki (1) i (2) z twierdzenia (2.8). Wtedy dla dowolnej podpółgrupy normalnej S, maksymalnej w pewnej podgrupie $G \subset X$, mierzalnej w uzupełnieniu $\mathcal{B}(X)$ względem μ, jest $\mu(S) = 0$, $\mu(S) = \frac{1}{2}$ lub $\mu(S) = 1$.

Dowód.

Jeśli S jest grupą, to teza oczywista z założenia (2). Niech więc $S \neq S^{-1}$. Wystarczy pokazać, że $G = S \cup S^{-1}$. Wtedy bowiem $\mu(G) \leqslant \mu(S^{-1}) + \mu(S) = 2\mu(S)$, skąd $\mu(S) \geqslant \frac{1}{2}\mu(G)$. Fakt ten łącznie z twierdzeniem (2.8) daje już tezę.

Ponieważ $S^{-1} \cup S$ zawiera S istotnie i S maksymalna, to wystarczy pokazać, że $S^{-1} \cup S$ jest półgrupą. Niech więc $x, y \in S^{-1} \cup S$. Jeśli $x, y \in S$ lub $x, y \in S^{-1}$, to oczywiście $xy \in S^{-1} \cup S$. Niech $x \in S$, a $y \in S^{-1} \setminus S$. Przypuśćmy, że $xy \notin S^{-1} \cup S$. Z jednej strony $xy \notin S^{-1}$ czyli $(xy)^{-1} \notin S$, więc z lematu (2.1) z pracy [12] istnieje $n_o > 1$ takie, że $(xy)^{n_o} \in S$. Z drugiej strony $xy \notin S$, więc $G = \{(xy)^n s : n \geqslant 0,\ s \in S\}$. Zatem istnieją $n \geqslant 1$ i $s \in S$ takie, że $(xy)^n s = y$. Stąd $(xy)^n = ys^{-1} \in S^{-1} \setminus S$. Ostatecznie

$$(xy)^{n(n_o-1)} \in S^{-1}$$

oraz

$$(xy)^{-n_o n} \in S^{-1}.$$

Pomnożenie tych elementów daje $(xy)^{-n} \in S^{-1}$, co jest sprzeczne z faktem, że $(xy)^{n} \in S^{-1} \setminus S$. Przypadek $x \in S^{-1} \setminus S$ i $y \in S$ dowodzi się tak samo.

∎

(2.10)Uwaga.

W twierdzeniach (2.8) i (2.9) nie korzysta się z ciągłości działań grupowych, lecz z ich mierzalności. Można więc zamiast grupy topologicznej rozważać grupę mierzalną $(X,\mathcal{F})$, to znaczy taką, że działania grupowe są mierzalne względem σ-ciała $\mathcal{F}$.

(2.11)Wniosek.

Jeśli μ jest miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$ i S jest $\mathcal{E}$- mierzalną podpółgrupą E, maksymalną w pewnej podgrupie $G \subset E$, to $\mu(S) = 0$, $\mu(S) = \frac{1}{2}$ lub $\mu(S) = 1$.

Dalsze twierdzenia tego paragrafu nie dotyczą bezpośrednio praw 0-1. Korzysta się w nich jednak z praw 0-1 oraz dowodzi się ich podobnie.

W ośrodkowej przestrzeni Banacha B każdej mierze gaussowskiej μ odpowiada, jednoznacznie wyznaczona, podprzestrzeń $H_\mu \subset B$, mająca strukturę przestrzeni Hilberta tak, że norma hilbertowska jest mocniejsza niż norma przestrzeni B. Ponadto μ jest σ- addytywnym rozszerzeniem kanonicznej /cylindrycznej/ miary gaussowskiej na H_μ /np. L.Gross [13], H.Sato [29]/. Przestrzeń H_μ jest wyznaczona przez operator kowariancji miary μ jako tzw. reprodukujące jądro hilbertowskie. Wiadomo również, że $H_\mu = \{x \in B : \mu * \delta_x \sim \mu\}$, gdzie δ_x jest miarą probabilistyczną skupioną w punkcie x i "$\sim$" oznacza równoważność miar /L. Gross [14], I.E.Segal [30]/ oraz, że $\mu^*(H_\mu)=0$, jeśli B jest nieskończenie wymiarowa /R. Le Page [25]/. Ostatnio J. Zinn [35] pokazał, że H_μ jest przekrojem wszystkich podgrup mierzalnych o μ-mierze dodatniej.

Niektóre z własności przestrzeni H_μ przenoszą się także na przypadek miar gaussowskich na MVS.

(2.12) Lemat.

Jeśli ν jest miarą probabilistyczną na MVS $(E,\mathcal{E})$ i $H_\nu=\{x\in E:\ \nu*\delta_x\sim\nu\}$, to $H_{\nu\times\nu}=H_\nu\times H_\nu$.

Dowód.

Inkluzja $H_{\nu\times\nu}\subset H_\nu\times H_\nu$ jest oczywista. Jeśli bowiem $(x,y)\in H_{\nu\times\nu}$ i $A\in\mathcal{E}$, to

$$0=\nu(A)=(\nu\times\nu)(A\times E)\Longleftrightarrow(\nu\times\nu)\big(A\times E+(x,y)\big)=$$

$$=(\nu\times\nu)\big((A+x)\times E\big)=\nu(A+x)=0\ ,$$

a to oznacza, że $x\in H_\nu$. Podobnie pokazuje się, że $y\in H_\nu$.

Dla dowodu inkluzji przeciwnej niech $W\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$ i $(x_0,y_0)\in H_\nu\times H_\nu$. Wtedy

$$(1)\qquad [W+(x_0,y_0)]_x=\{y:\ (x,y)\in W+(x_0,y_0)\}=$$

$$=y_0+W_{x-x_0}\ .$$

Z twierdzenia Fubiniego wynika, że

$$(2)\qquad (\nu\times\nu)\big(W+(x_0,y_0)\big)=0\Longleftrightarrow\nu\{x:\ \nu([W+(x_0,y_0)]_x)>0\}=0$$

oraz, że

$$(3)\qquad (\nu\times\nu)(W)=0\Longleftrightarrow\nu\{x:\ \nu(W_x)>0\}=$$

$$=\nu\{(x-x_0):\ \nu(W_{x-x_0})>0\}=0\ .$$

Korzystając z (1) i z faktu, że $\nu(W_x)=0 \iff \nu(W_x+y_0)=0$ dla każdego $x\in E$ otrzymujemy

(4) $$\nu\{x:\ \nu([W+(x_0,y_0)]_x>0\}=\nu\{x:\ \nu(W_{x-x_0})>0\}\ .$$

Połączenie wzorów (2),(3),(4) wraz z założeniem $x_0\in H_\nu$ daje $(x_0,y_0)\in H_{\nu\times\nu}$ i to kończy dowód.

∎

<u>(2.13)Twierdzenie.</u>

Jeśli μ jest miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$, to zbiór $H_\mu=\{x\in E:\ \mu*\delta_x\sim\mu\}$ jest podprzestrzenią liniową E.

<u>Dowód.</u>

Wystarczy pokazać, że H_μ jest zamknięta na mnożenie przez skalar, gdyż dla dowolnej miary ν, H_ν jest grupą.

Niech $x\in H_\mu$ i $W\in\mathcal{E}\times\mathcal{E}$. Dla każdego "obrotu" T zachodzą związki

$$T\big(T^{-1}(W)+(x,0)\big)=W+T(x,0)=W+(sx,tx)\ .$$

Z definicji miary gaussowskiej i lematu (2.12) wynika, że

$$0=(\mu\times\mu)\big(W+(sx,tx)\big)=(\mu\times\mu)\big(T^{-1}(W)+(x,0)\big)\iff$$

$$\iff(\mu\times\mu)\big(T^{-1}(W)\big)=(\mu\times\mu)(W)=0\ .$$

Oznacza to, że jeśli $x\in H_\mu$, $s^2+t^2=1$, to $(sx,tx)\in H_{\mu\times\mu}=H_\mu\times H_\mu$. A więc, gdy $x\in H_\mu$, to $sx\in H_\mu$ dla każdego $s\in[0,1]$. To kończy dowód.

∎

<u>(2.14)Twierdzenie.</u>

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$ i niech zbiór H_μ będzie zdefiniowany jak w twierdzeniu

(2.13). Jeśli M jest wymierną podprzestrzenią liniową i $\mu_+(M) > 0$ / μ_+ miara wewnętrzna utworzona dla μ/, to $M \supset H_\mu$.

Dowód.

Przypuśćmy, że istnieje $x \in H_\mu$ takie, że $x \notin M$. Ponieważ $T\big((M+x)\times M\big) \subset T(M^c \times M)$, to dla różnych "obrotów" T zbiory $T\big((M+x)\times M\big)$ są parami rozłączne /dowód jak w punkcie 3^o twierdzenia (2.2)/. Biorąc ciąg $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ różnych "obrotów" takich, że $s_n, t_n > 0$ i wymierne, otrzymujemy

$$1 \geqslant (\mu\times\mu)_+\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} T_n\big((M+x)\times M\big)\Big) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=1}^{\infty} (\mu\times\mu)_+\Big(T_n\big((M+x)\times M\big)\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_+(M+x)\mu_+(M).$$

Ponieważ z założenia $\mu_+(M) > 0$ i $x \in H_\mu$, to $\mu_+(M+x) > 0$, co daje sprzeczność.

∎

(2.15) Wniosek.

Jeśli μ oraz H_μ są takie jak w twierdzeniu (2.14) i K jest $\mathcal{E}$- mierzalnym modułem nad Q_p, $p \geqslant 3$, takim, że $\mu(K) > 0$, to $K \supset H_\mu$.

Jest to natychmiastowa konsekwencja twierdzenia (2.6) i twierdzenia (2.14).

3. Całkowalność funkcjonałów subaddytywnych względem miar gaussowskich.

Całkowalność funkcji $\exp(a\|x\|^2)$, gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę mierzalną, względem miar gaussowskich przy odpowiednio dobranym $a>0$ jest bardzo ważną i często wykorzystywaną własnością tych miar /np. centralne twierdzenie graniczne [34], zasada niezmienniczości [22], charakteryzacja miar gaussowskich [33] i [34]/. Dowód tej własności w przypadku miar gaussowskich na przestrzeniach Banacha został przeprowadzony niezależnie przez trzech autorów i to różnymi metodami, X.Fernique [10], H.J.Landau i L.A.Shepp [23], A.V.Skorohod [32]. Dowód Fernique'a jest elementarny i krótki. Używając tej samej techniki udowodnimy pewne wzmocnienie tego twierdzenia, obejmujące chyba wszystkie znane wyniki z tego zakresu.

Niech $(E,\mathcal{E})$ będzie MVS. Przez $\mathcal{K}$ oznaczać będziemy klasę funkcjonałów nieujemnych, mierzalnych na $(E,\mathcal{E})$ spełniających warunki:

(i) $\forall\, x,y \in E \qquad f(x+y) \leqslant f(x)+f(y)$,

(ii) $\exists\, \frac{1}{\sqrt{2}} \leqslant c \leqslant 1 \quad \forall\, x \in E \qquad f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) \leqslant c\, f(x)$.

(3.1) Uwaga.

Jeśli warunek (ii) jest spełniony dla pewnego $c>0$, to z warunku (i) łatwo wynika, że $c \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ograniczenie z góry do $c \leqslant 1$ nie jest istotne, gdyż, jak się okaże poniżej, zawsze można przyjąć $c = 1$, a z uwagi na twierdzenie (3.2) należy wybierać najmniejsze możliwe wartości c.

(3.2) Twierdzenie.

Jeśli μ jest miarą gaussowską na MVS $(E, \mathcal{E})$ i $f \in \mathcal{K}$, to istnieje $\varepsilon = \varepsilon_f > 0$ takie, że

$$\int_E \exp\left(\varepsilon (f(x))^{\frac{1}{\log_2 2c}}\right) \mu(dx) < \infty .$$

Dowód.

Wygodniej jest przeprowadzić dowód w języku elementów losowych. Niech ξ będzie gaussowskim elementem losowym na $(\Omega, \mathcal{G}, P)$ o wartościach w E i o rozkładzie μ. Jeśli $f(\xi)$ jest ograniczoną zmienną losową, to teza jest oczywista. Załóżmy więc, że dla każdego $s \in R$ $P\{f(\xi) > s\} > 0$. Na podstawie definicji miary gaussowskiej jeśli ξ_1, ξ_2 są niezależnymi elementami losowymi o rozkładzie μ, to

$$\frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}} , \quad \frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}$$

są niezależnymi elementami losowymi o rozkładzie μ. Wykorzystując fakt, że dla zmiennych losowych X, Y o tym samym rozkładzie

$$P\left(X^{-1}(A) \cap X^{-1}(B)\right) = P\left(X^{-1}(A \cap B)\right) =$$
$$= P\left(Y^{-1}(A \cap B)\right) = P\left(Y^{-1}(A) \cap Y^{-1}(B)\right),$$

można napisać

$$P\{f(\xi) \leq s, \ f(-\xi) \leq s\} \ P\{f(\xi) > t\} =$$
$$= P\left\{f\left(\frac{\xi_1 - \xi_2}{\sqrt{2}}\right) \leq s, \ f\left(\frac{\xi_2 - \xi_1}{\sqrt{2}}\right) \leq s, \ f\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{\sqrt{2}}\right) > t\right\} \leq$$
$$P\left\{f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2}}\right) - f\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{2}}\right) \leq s, \ f\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{2}}\right) - f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2}}\right) \leq s, \ f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2}}\right) + f\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{2}}\right) > t\right\} \leq$$

$$P\left\{f\left(\frac{\xi_1}{\sqrt{2}}\right)>\frac{t-s}{2}\ ,\ f\left(\frac{\xi_2}{\sqrt{2}}\right)>\frac{t-s}{2}\right\}=$$

$$=\left(P\left\{f\left(\frac{\xi}{\sqrt{2}}\right)>\left(\frac{t-s}{2}\right)\right\}\right)^2\leqslant\left(P\left\{f(\xi)>\frac{t-s}{2c}\right\}\right)^2 .$$

Dalsza część dowodu jest w zasadzie powtórzeniem rozumowania X. Fernique'a z [10].

Niech $s>0$ będzie taką liczbą, że $P\{f(\xi)\leqslant s\ ,\ f(-\xi)\leqslant s\}>\frac{1}{2}$. Przyjmijmy oznaczenia: $t_0=s$, $t_{n+1}=s+2ct_n$ dla $n\geqslant 0$, oraz

$$x_n=\frac{P\{f(\xi)>t_n\}}{P\{f(\xi)\leqslant s\ ,\ f(-\xi)\leqslant s\}} .$$

Z udowodnionej wyżej nierówności otrzymuje się natychmiast $x_{n+1}\leqslant x_n^2$, skąd

$$x_n\leqslant x_0^{2^n}=\exp\left(2^n\ln x_0\right) .$$

Ponieważ

$$t_n=\frac{1-(2c)^{n+1}}{1-2c}\,s ,$$

to ostatnią nierówność można przepisać w postaci

$$P\left\{f(\xi)>\frac{1-(2c)^{n+1}}{1-2c}\,s\right\}\leqslant h\exp\left(-2^n\ln\frac{h}{P\{f(\xi)>s\}}\right).$$

gdzie $h=P\{f(\xi)\leqslant s\ ,\ f(-\xi)\leqslant s\}$. Stąd dla dowolnego $u\geqslant s$

$$P\{f(\xi)>u\}\leqslant h\exp\left(-\left(\frac{u}{10s}\right)^{\frac{1}{\log_2 2c}}\ln\frac{h}{P\{f(\xi)>s\}}\right).$$

Teza jest zatem spełniona dla ε spełniających nierówność

$$\varepsilon<\left(\frac{1}{10s}\right)^{\frac{1}{\log_2 2c}}\ln\frac{h}{P\{f(\xi)>s\}} .$$

∎

Z twierdzenia powyższego jako wnioski wynikają wszystkie znane twierdzenia.

(3.3) Wniosek /X.Fernique [10]/.

Jeśli f jest pseudonormą mierzalną na MVS $(E,\mathcal{E})$ i μ jest miarą gaussowską na $\mathcal{E}$, to istnieje takie $\varepsilon > 0$, że

$$\int_E \exp\left(\varepsilon (f(x))^2\right) \mu(dx) < \infty .$$

(3.4) Wniosek /W.I.Tarieladze, A.Weron [33] Th.2/.

Niech $E = l_{(p_n)}$, $0 < p_n \leq 1$ dla $n \geq 1$, i niech będzie miarą gaussowską na E. Wtedy dla każdego $N > 0$

$$\int_E \|x\|^N \mu(dx) < \infty .$$

Wniosek powyższy uogólnia wcześniejsze rezultaty N.N.Vakhanii [34] dla przestrzeni s wszystkich ciągów rzeczywistych.

(3.5) Wniosek /T.Inglot, A.Weron [18]/.

Jeśli f jest F-pseudonormą mierzalną na MVS $(E,\mathcal{E})$ i μ jest miarą gaussowską na $\mathcal{E}$, to istnieje $\frac{1}{\sqrt{2}} \leq c \leq 1$ oraz $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\int_E \exp\left(\varepsilon (f(x))^{\frac{1}{\log_2 2c}}\right) \mu(dx) < \infty .$$

Dowód.

Warunek (i) jest spełniony w sposób oczywisty. Gdyby f nie spełniała warunku (ii) dla żadnego $c \in \left[\frac{1}{\sqrt{2}}, 1\right]$, to niech f_1 będzie F-pseudonormą zdefiniowaną wzorem $f_1(x) = \sup\{f(ax) : |a| \leq 1\}$. Wtedy $f(x) \leq f_1(x)$ dla wszystkich x, obie F-pseudonormy są równoważne /generują tą samą topologię w E/ oraz f_1 spełnia warunek (ii) z $c=1$.

gdyż

$$f_1\left(\frac{1}{\sqrt{2}}x\right) = \sup\left\{f\left(\frac{a}{\sqrt{2}}x\right) : |a| \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{f(ax) : |a| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\right\} = \sup\left\{f(ax) : |a| \leqslant 1\right\} =$$

$$= f_1(x) .$$

Z twierdzenia (3.2) wynika, że teza naszego wniosku zachodzi dla f_1 przy $c=1$. A więc tym bardziej zachodzi dla mniejszego funkcjonału f.

∎

(3.6) Wniosek.

Jeśli f jest mierzalnym funkcjonałem liniowym na MVS $(E,\mathcal{E})$ i μ jest miarą gaussowską na $\mathcal{E}$, to istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\int_E \exp\left(\varepsilon (f(x))^2\right) \mu(dx) < \infty .$$

Wniosek ten jest oczywisty, gdyż μf^{-1} jest miarą gaussowską na prostej. Wynika on także z twierdzenia (3.2), ponieważ funkcjonał $|f| \in \mathcal{K}$ przy czym $c = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

(3.7) Wniosek.

Niech μ będzie miarą gaussowską na MVS $(E,\mathcal{E})$. Niech f będzie funkcjonałem subaddytywnym, mierzalnym na $(E,\mathcal{E})$ i takim, że dla μ-prawie wszystkich x $f(ax)$ jako funkcja argumentu rzeczywistego a jest borelowska. Wtedy istnieje $\varepsilon > 0$ takie, że

$$\int_E \exp\left(\varepsilon f(x)\right) \mu(dx) < \infty .$$

Dowód.

Niech f_1 będzie funkcjonałem określonym następująco:

$$f_1(x) = \sup\{f(ax) : 0 \leqslant a \leqslant 1\} .$$

Z założenia o f łatwo wynika, że $f_1(x) < \infty$ dla μ-prawie wszystkich x. Ponadto $f_1(x) \geqslant f(x)$ oraz $f_1 \in \mathcal{K}$ przy $c = 1$ /sprawdzenie tego jest analogiczne jak w dowodzie wniosku (3.5)/. Wobec tego teza naszego wniosku zachodzi dla f_1, a więc tym bardziej dla f.

∎

III. ZASADA NIEZMIENNICZOŚCI W PRZESTRZENIACH LOKALNIE PSEUDOWYPUKŁYCH.

Centralne twierdzenie graniczne Lindeberga - Levy'ego zachodzi, jak wiadomo, dla klasy rozkładów o skończonym drugim momencie. W trakcie badań nad twierdzeniami granicznymi związanymi z sumami niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie okazało się, że otrzymywane rozkłady graniczne są jednakowe dla klasy rozkładów o skończonym drugim momencie. Wystarczy więc obliczyć rozkład graniczny dla najprostszego rozkładu z tej klasy /np. dla rozkładu dwupunktowego/. Metodę otrzymywania tą drogą rozkładów i twierdzeń granicznych nazwano zasadą niezmienniczości. Zasadzie tej można nadać postać tzw. funkcyjnego centralnego twierdzenia granicznego/ A.N.Kołmogorow, J.W.Prohorow/. Dzięki takiemu sformułowaniu wyjaśnia się wspomniana stałość rozkładów granicznych przez bezpośrednie związanie z twierdzeniem Lindeberga - Levy'ego. Przytoczymy to twierdzenie w klasycznej postaci /dowód i przykłady zastosowań można znaleźć w książce P.Billingsley'a [2]/.

Niech $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem zmiennych losowych, $S_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n$, $n \geq 1$, $S_0 = 0$, i niech $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów losowych w przestrzeni $C[0,1]$ określonym następująco:

$$(*) \qquad X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{n}}\Big(S_{[nt]}(\omega) + (nt-[nt])\,\xi_{[nt]+1}(\omega)\Big),$$

gdzie $\sigma > 0$. Realizacje tak określonych elementów losowych są łamanymi o wierzchołkach $\left(\frac{i}{n}, \frac{S_i(\omega)}{\sigma\sqrt{n}}\right)$, $i=1,2,\ldots,n$.

(4.1) Twierdzenie /[2].Th.10.1/.

Niech $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie takich, że $E\xi_1 = 0$ i $E\xi_1^2 = \sigma^2 < \infty$. Wówczas ciąg elementów losowych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ danych wzorem (*) jest zbieżny według rozkładu w $C[0,1]$ do elementu losowego Wienera W to znaczy takiego, że $W(t)$ ma rozkład $N(0,\sqrt{t})$ dla każdego $t \in [0,1]$ oraz proces stochastyczny $W(t,\omega)$ ma niezależne przyrosty.

Ponieważ realizacje X_n są łamanymi, to funkcjonały od X_n są zmiennymi losowymi zależnymi tylko od sum S_n . Przez nakładanie funkcjonałów ciągłych możemy więc otrzymać z twierdzenia (4.1) różne twierdzenia graniczne dotyczące sum S_n , w których rozkład graniczny jest stały dla klasy rozkładów o skończonej wariancji.

Twierdzenie powyższe było uogólniane w różnych kierunkach. Jednym z nich jest rozważanie ciągu elementów losowych w metrycznej przestrzeni liniowej E zamiast ciągu zmiennych losowych. J.Kuelbs [22] brał jako przestrzeń E ośrodkową przestrzeń Banacha. Wówczas łamane X_n były elementami losowymi w przestrzeni $C_E[0,1]$ tj. przestrzeni funkcji ciągłych na $[0,1]$ o wartościach w E z normą $\|x\| = \sup\{\|x(t)\|_E : 0 \leq t \leq 1\}$. Odpowiednik twierdzenia (4.1) brzmi wtedy następująco:

Jeśli $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest ciągiem niezależnych elementów losowych o jednakowym rozkładzie i średniej zero w ośrodkowej przestrzeni Banacha E spełniającym centralne twierdzenie graniczne /tzn. ciąg $(\xi_1 + \ldots + \xi_n)/\sqrt{n}$ jest zbieżny według rozkładu do pewnego gaussowskiego elementu losowego γ /, to ciąg $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ dany wzorem

$$(**) \qquad X_n(t,\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} S_{[nt]}(\omega) + \frac{1}{\sqrt{n}} (nt - [nt]) \xi_{[nt]+1}(\omega) ,$$

$t \in [0,1]$, $\omega \in \Omega$, jest zbieżny według rozkładu w $C_E[0,1]$ do elementu losowego Wienera W_γ generowanego przez γ /tzn. takiego, że $W_\gamma(t)$ ma taki sam rozkład jak $\sqrt{t}\,\gamma$ /.

Pokażemy, że rezultat Kuelbsa można rozszerzyć na pewne przestrzenie niebanachowskie, dokładniej na przestrzenie lokalnie pseudowypukłe. Twierdzenie, które poniżej udowodnimy, jest wspólnym wynikiem autora i A. Werona [18]. Najpierw podamy niezbędne definicje i fakty dotyczące wspomnianych przestrzeni.

Niech E będzie liniową przestrzenią metryczną. Zbiór $A \subset E$ jest gwiaździsty, jeśli $tA \subset A$ dla wszystkich $0 \leq t \leq 1$. Modułem wypukłości zbioru gwiaździstego A nazywamy liczbę $c(A) = \inf\{s > 0 : A + A \subset sA\}$. Przestrzeń E nazywa się lokalnie pseudowypukłą, jeśli w E istnieje baza otoczeń zera złożona ze zbiorów pseudowypukłych to znaczy mających skończone moduły wypukłości.

Przestrzenie lokalnie pseudowypukłe mają określoną strukturę geometryczną. Mamy bowiem następujące twierdzenie:

<u>(4.2) Twierdzenie</u> /[28], Th. III.1.3/.

Niech E będzie przestrzenią lokalnie pseudowypukłą. Wówczas istnieje ciąg $\{\|\cdot\|_k\}_{k=1}^{\infty}$ p_k-jednorodnych F-pseudonorm, $0 < p_k \leq 1$, /tzn. $\|tx\|_k = |t|^{p_k} \|x\|_k$ / generujących topologię E .

Inaczej mówiąc, w przestrzeni lokalnie pseudowypukłej można zawsze wprowadzić, równoważną wyjściowej metryce, F-normę

$$(***) \qquad \|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|x\|_k}{1+\|x\|_k},$$

gdzie $\{\|\cdot\|_k\}$ ciąg F-pseudonorm z twierdzenia (4.2).

Wszystkie przestrzenie lokalnie ograniczone są lokalnie pseudowypukłe /przestrzeń jest lokalnie ograniczona, jeśli ma ograniczone otoczenie zera; zbiór jest ograniczony, jeśli dla dowolnego otoczenia zera U istnieje stała a taka, że zawiera się on w zbiorze aU /. Przestrzenie lokalnie ograniczone są metryzowane przez normę p-jednorodną, $0<p\leqslant 1$, na przykład przestrzenie L_p, l_p dla $0<p<1$. Przestrzenie lokalnie wypukłe są lokalnie pseudowypukłe. Przykładami przestrzeni nie będących lokalnie pseudowypukłymi są przestrzenie L_0 funkcji mierzalnych na pewnej przestrzeni miarowej z miarą bezatomową oraz przestrzenie $l_{(p_i)}$ ciągów rzeczywistych takich, że $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^{p_i} < \infty$, przy czym $0<p_i\leqslant 1$ oraz $\lim_{i\to\infty} p_i = 0$ /S. Rolewicz [28]/.

Niech E będzie przestrzenią lokalnie pseudowypukłą i niech $C_E[0,1]$ oznacza przestrzeń funkcji ciągłych na $[0,1]$ o wartościach w E z metryką

$$\varrho(x,y) = \sup\{\|x(t)-y(t)\|_E : 0\leqslant t\leqslant 1\},$$

gdzie $\|\cdot\|_E$ dana jest wzorem $(***)$. Jeśli γ jest gaussowskim elementem losowym w E, to mówimy, że element losowy Wienera W_γ w $C_E[0,1]$ jest generowany przez γ, jeśli dla każdego $t\in[0,1]$ $W_\gamma(t)$ ma taki sam rozkład jak $\sqrt{t}\,\gamma$ oraz proces $W_\gamma(t)$ ma niezależne przyrosty. Niech $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ będzie ciągiem elementów losowych w E.

Mówimy, że ciąg łamanych $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ w $C_E[0,1]$ danych wzorem $(**)$ spełnia zasadę niezmienniczości, jeśli $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ jest zbieżny według rozkładu w $C_E[0,1]$ do elementu losowego Wienera W_γ generowanego przez pewien element gaussowski γ na E.

<u>(4.3) Twierdzenie</u>.

Niech E będzie ośrodkową, lokalnie pseudowypukłą, zupełną, metryczną przestrzenią liniową. Jeśli ciąg $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ niezależnych elementów losowych w E o jednakowym rozkładzie spełnia centralne twierdzenie graniczne /to znaczy $(\xi_1+\ldots+\xi_n)/\sqrt{n}$ jest zbieżny według rozkładu do gaussowskiego elementu losowego γ w E/, to $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ spełnia zasadę niezmienniczości dla elementu losowego Wienera W_γ generowanego przez γ.

Najpierw udowodnimy prosty lemat.

<u>(4.4) Lemat</u>.

Jeśli $\xi_1,\ldots,\xi_n$ są niezależnymi elementami losowymi w F-przestrzeni $(E,\|\cdot\|)$ takimi, że

$$\max_{1\leq i\leq n} P\Big\{\Big\|\sum_{k=i}^{n}\xi_k\Big\|\geq t\Big\}\leq 1-\delta ,$$

gdzie $0<\delta\leq 1$, to

$$P\Big\{\max_{1\leq i\leq n}\|S_i\|>2t\Big\}\leq\frac{1}{\delta}P\{\|S_n\|>t\},$$

gdzie $S_i=\xi_1+\ldots+\xi_i$.

<u>Dowód</u>.

Oznaczmy $A_k=\{\|S_1\|\leq 2t,\ldots,\|S_{k-1}\|\leq 2t,\|S_k\|>2t\}$ i $B_k=\{\|S_n-S_k\|\leq t\}$. Wówczas A_k i B_k są niezależne dla $k=1,2,\ldots,n$ oraz A_k parami rozłączne i takie, że

$A_1 \cup \ldots \cup A_n = \left\{ \max \left\{ \|S_i\| : 1 \leqslant i \leqslant n \right\} > 2t \right\}$. Zauważmy, że $A_k \cap B_k \subset \left\{ \|S_n\| > t \right\}$ dla $k=1,2,\ldots,n$. Wobec tego mamy

$$P\left\{\|S_n\| > t\right\} \geqslant P\Big(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cap B_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k \cap B_k) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} P(A_k)P(B_k) \geqslant \delta \sum_{k=1}^{n} P(A_k) =$$

$$= \delta P\left\{ \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|S_i\| > 2t \right\},$$

co kończy dowód lematu.

∎

Dowód twierdzenia (4.3).

Możemy założyć, że metryka w E dana jest przez normę $(***)$, gdyż w przeciwnym wypadku metryka ta i wyjściowa są równoważne oraz z twierdzenia V. Klee /[28] Th.I.4.3/ zupełność w metryce wyjściowej implikuje zupełność normy $(***)$.

Dowód oprzemy na znanym kryterium słabej zbieżności w przestrzeniach $C_E[0,1]$. Mianowicie, ciąg elementów losowych X_n jest zbieżny według rozkładu do elementu losowego X, jeśli skończenie wymiarowe rozkłady X_n są zbieżne według rozkładu do odpowiednich skończenie wymiarowych rozkładów X oraz jest spełniony warunek

(1) $$\forall \varepsilon,\eta > 0 \ \exists\, 0 < \delta < 1 \ \exists\, n_0 \geqslant 1 \ \forall n \geqslant n_0$$

$$P\left\{ \sup_{|t-s|\leqslant\delta} \|X_n(t) - X_n(s)\| \geqslant \varepsilon \right\} \leqslant \eta \, .$$

gdzie $\|\cdot\|$ oznacza normę $(***)$ w E. Dowód tego kryterium można znaleźć w pracy J. Kuelbsa [22], a także w książce K. Parthasarathy'ego /[26] str.49 /.

1^o. Zbieżność rozkładów jednowymiarowych jest oczywista z założenia i faktu, że $\frac{[ns]}{n} \longrightarrow s$. Niech $0 \leqslant t_1 < t_2 \leqslant 1$. Pokażemy, że $\left(X_n(t_1), X_n(t_2)\right)$ jest zbieżny według rozkładu do $\left(W_\gamma(t_1), W_\gamma(t_2)\right)$. Korzystając z twierdzenia 4.1 w [2] wystarczy pokazać zbieżność ciągu

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_1]} \xi_i, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_2]} \xi_i \right)$$

do tej samej granicy, gdyż

$$\left(X_n(t_1) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_1]} \xi_i, X_n(t_2) - \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_2]} \xi_i\right) \xrightarrow{P} 0.$$

Ponieważ ξ_i są niezależne, to centralne twierdzenie graniczne dla ciągu $\{\xi_i\}$ daje

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_1]} \xi_i, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=[nt_1]+1}^{[nt_2]} \xi_i \right) \xrightarrow{D} \left(\sqrt{t_1}\,\gamma_1, \sqrt{t_2-t_1}\,\gamma_2\right),$$

gdzie γ_1, γ_2 są niezależnymi elementami losowymi o tym samym rozkładzie co γ, a $\xrightarrow{D}$ oznacza zbieżność według rozkładu. Biorąc ciągłe odwzorowanie $h: E^2 \rightarrow E^2$ takie, że $h(x,y) = (x, x+y)$ dostajemy

$$\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_1]} \xi_i, \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{[nt_2]} \xi_i \right) \xrightarrow{D} h\left(\sqrt{t_1}\,\gamma_1, \sqrt{t_2-t_1}\,\gamma_2\right).$$

Z własności rozkładów gaussowskich i definicji W_γ wynika, że $h\left(\sqrt{t_1}\,\gamma_1, \sqrt{t_2-t_1}\,\gamma_2\right)$ i $\left(W_\gamma(t_1), W_\gamma(t_2)\right)$ mają ten sam rozkład. Podobnie pokazuje się zbieżność rozkładów wielowymiarowych.

2^o. Postępując dokładnie jak w dowodzie twierdzenia 8.3 w [2] dowód warunku (1) sprowadzamy do dowodu następującego warunku:

(2) $\forall \varepsilon,\eta>0 \quad \exists\, 0<\delta<1 \quad \exists\, n_o \geq 1 \quad \forall n \geq n_o \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1$

$$\frac{1}{\delta} P\left\{\sup_{t-\delta \leq s \leq t} \|X_n(t)-X_n(s)\| \geq \varepsilon\right\} \leq \eta \ .$$

Aby pokazać (2) zauważmy najpierw, że dla $t \geq s$

$$X_n(t)-X_n(s)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+2}^{[nt]} \xi_i + \frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}\xi_{[nt]+1} +$$

$$+\frac{1-ns+[ns]}{\sqrt{n}}\xi_{[ns]+1} = \frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+2}^{[nt]+1}\xi_i +$$

$$+\frac{1-ns+[ns]}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]}\xi_i + \frac{ns-nt+[nt]-[ns]}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+2}^{[nt]}\xi_i .$$

Stąd i z monotoniczności normy (***) dostajemy

$$\|X_n(t)-X_n(s)\| \leq \Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+2}^{[nt]+1}\xi_i\Big\| + \Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+1}^{[nt]}\xi_i\Big\| +$$

$$+\Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=[ns]+2}^{[nt]}\xi_i\Big\| .$$

Ponieważ ξ_i są niezależne i o tym samym rozkładzie, to, wobec powyższego, warunek (2) można zastąpić następującym

(3) $\forall \varepsilon,\eta>0 \quad \exists\, 0<\delta<1 \quad \exists\, n_o \geq 1 \quad \forall n \geq n_o \quad \forall\, 0 \leq t \leq 1$

$$\frac{1}{\delta} P\left\{\sup_{t-\delta \leq s \leq t} \Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[nt]-[ns]}\xi_i\Big\| \geq \varepsilon\right\} \leq \eta \ .$$

Nierówność $[nt]-[ns] \leq [n\delta]+1$ pozwala przepisać ten warunek w prostszej postaci

(4) $\forall \varepsilon,\eta>0 \quad \exists\, 0<\delta<1 \quad \exists\, n_o \geq 1 \quad \forall n \geq n_o$

$$\frac{1}{\delta} P\left\{\max_{0 \leq k \leq [n\delta]+1} \Big\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}\xi_i\Big\| \geq \varepsilon\right\} \leq \eta \ .$$

Dla kolejnego przekształcenia warunku (4) zastosujemy lemat (4.4). Sprawdzimy najpierw warunek występujący w założeniu lematu. Istotnie dobierając dostatecznie małe δ, a n_0 tak, aby $n_0\delta \geq 1$ mamy dla $n \geq n_0$

$$\max_{0\leq k\leq[n\delta]+1} P\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right\|\geq\varepsilon\right\}\leq$$

$$\sup_{k\geq 0} P\left\{\left\|\sqrt{2\delta}\,\frac{1}{\sqrt{k}}\sum_{i=1}^{k}\xi_i\right\|\geq\varepsilon\right\} \leq \frac{1}{2}.$$

gdyż ciąg $(\xi_1+\ldots+\xi_k)/\sqrt{k}$ jest z założenia ciasny.

Zatem z lematu (4.4) warunek (4) będzie spełniony, jeśli

(5) $$\forall \varepsilon,\eta>0 \quad \exists\, 0<\delta<1 \quad \exists n_0 \geq \frac{1}{\delta} \quad \forall n\geq n_0$$

$$\frac{1}{\delta} P\left\{\left\|\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{[n\delta]+1}\xi_i\right\|\geq\varepsilon\right\} =$$

$$\frac{1}{\delta} P\left\{\left\|\sqrt{2\delta}\,\frac{1}{\sqrt{[n\delta]+1}}\sum_{i=1}^{[n\delta]+1}\xi_i\right\|\geq\varepsilon\right\} \leq \eta \quad .$$

Ponieważ $(\xi_1+\ldots+\xi_n)/\sqrt{n} \xrightarrow{D} \gamma$, więc pomijając conajwyżej przeliczalną ilość liczb $\varepsilon > 0$ dostajemy z ciągłości normy

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left\|\sqrt{2\delta}\,\frac{1}{\sqrt{[n\delta]+1}}\sum_{i=1}^{[n\delta]+1}\xi_i\right\|\geq\varepsilon\right\} = P\left\{\left\|\sqrt{2\delta}\,\gamma\right\|\geq\varepsilon\right\} .$$

Wobec tego wystarczy sprawdzić warunek

(6) $$\forall \varepsilon,\eta>0 \quad \exists\, 0<\delta<1 \quad \frac{1}{\delta} P\left\{\left\|\sqrt{\delta}\,\gamma\right\|\geq\varepsilon\right\}\leq\eta \quad .$$

Korzystając z postaci normy można napisać

$$P\{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\| \geqslant \varepsilon\} = P\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k}{1+\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k} \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k}{1+\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k} + \frac{1}{2^{k_0}} \geqslant \varepsilon\right\} \leqslant$$

$$\leqslant P\left\{\sum_{k=1}^{k_0} \frac{1}{2^k} \frac{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k}{1+\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k} \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} P\left\{\frac{1}{2^k} \frac{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k}{1+\|\sqrt{\delta}\,\gamma\|_k} \geqslant \frac{\varepsilon}{2k_0}\right\} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} P\left\{\|\gamma\|_k \geqslant \frac{\varepsilon\, 2^{k-1}}{k_0\,(\sqrt{\delta})^{p_k}}\right\} .$$

gdzie $k_0 = \left[\log_2 \frac{1}{\varepsilon}\right] + 2$. Z nierówności Czebyszewa i wniosku (3.5) wynika, że

$$\frac{1}{\delta} P\{\|\sqrt{\delta}\,\gamma\| \geqslant \varepsilon\} \leqslant \sum_{k=1}^{k_0} E \exp(\alpha_k \|\gamma\|_k) \frac{1}{\delta} \exp\left(-\frac{\varepsilon\, 2^{k-1}}{k_0} \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{p_k}{2}}\right),$$

gdzie $\alpha_k > 0$ są stałymi występującymi w tezie wniosku (3.5). Gdy $\delta \longrightarrow 0$, to prawa strona ostatniej nierówności zmierza do zera. To kończy dowód warunku (6), a zarazem twierdzenia (4.3).

(4.5) Uwaga.

Ostatnio T. Byczkowski [3] udowodnił zasadę niezmienniczości dla elementów losowych o wartościach w grupie polskiej. Udowodnił on także, że spełnienie zasady niezmienniczości w ośrodkowej przestrzeni Frecheta'a jest równoważne spełnieniu warunku (6) występującego w dowodzie ostatniego twierdzenia.

SPIS LITERATURY.

[1] C.R.Baker, Zero-one laws for Gaussian measures on Banach space, Trans. Amer. Math. Soc. 186 /1973/, 291-308.

[2] P.Billingsley, Convergence of probability measures, J.Wiley, New York, 1968.

[3] T.Byczkowski, The invariance principle for group-valued random variables, Studia Math. 56 /1975/, 97-108.

[4] T.Byczkowski, Gaussian measures on L_p spaces $0 \leq p < \infty$, Studia Math. 59 /1976/, w druku.

[5] L.Corvin, Generalized Gaussian measure and functional equation I, J. Funct. Anal. 5 /1970/, 481-505.

[6] R.M.Dudley, The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes, J. Funct. Anal. 1 /1967/, 290-330.

[7] R.M.Dudley, M.Kantor, Zero-one laws for stable measures, Proc. Amer. Math. Soc. 45 /1974/, 245-252.

[8] J.Feldman, Equivalence and perpendicularity of Gaussian processes, Pacific J. Math. 8 /1958/, 699-708.

[9] W.Feller, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa II, PWN, Warszawa, 1969.

[10] X.Fernique, Intégrabilité des vecteurs gaussiens, C.R. 270 /1970/, 1698-1699.

[11] X.Fernique, Regularite des trjectoires des fonctions aleatoires gaussiennes, Ecole D'ete calcul des probabilites, S^t Flour. 1974.

[12] S.Gładysz, Maximale untersemigruppen und konvexität in gruppen, Coll. Math. 9 /1962/, 213-221.

[13] L.Gross, Abstract Wiener Measure and Infinite Dimensional Potential Theory, Lecture Notes in Math.140 /1970/.

[14] L.Gross, Potential Theory on Hilbert space, J. Funct. Anal. 1 /1967/, 123-181.

[15] P.R.Halmos, Measure Theory, Van Nostrand, New York, 1951.

[16] W.E.Holm, Gaussian random elements in certain linear metric spaces, 1975, preprint.

[17] T. Inglot, Kilka uwag o prawach zero-jedynkowych dla miar gaussowskich, 1975, raport.

[18] T.Inglot, A.Weron, On Gaussian random elements in some non-Banach spaces, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 22 /1974/, 1039-1043.

[19] N.C.Jain, A zero-one law for Gaussian processes, Proc. Amer. Math. Soc. 29 /1971/, 585-587.

[20] B.Jamison, S.Orey, Subgroups of sequences and paths, Proc. Amer. Math. Soc. 24 /1970/, 739-744.

[21] G.Kallianpur, Zero-one laws for Gaussian processes, Trans. Amer. Math. Soc. 149 /1970/, 199-211.

[22] J.Kuelbs, The invariance principle for Banach space valued random variables, J.Mult.Anal. 3 /1973/,161-172.

[23] H.J.Landau, L.A.Shepp, On the supremum of a Gaussian process, Sankhya, Ser A, 32 /1970/, 369-378.

[24] T.Lindvall, Weak convergence of probability measures and random functions in the function space D[0,∞), J. Appl. Prob. 10 /1973/, 109-121.

[25] R.Le Page, Subgroups of paths and reproducing kernels, Ann. Prob. 1 /1973/, 345-347.

[26] K.R.Parthasarathy, Probability measures on metric spaces, New York - London, Academic Press, 1967.

[27] B.S.Rajput, Gaussian measures on L_p spaces $1 \leq p < \infty$, J. Mult. Anal. 2 /1972/, 382-403.

[28] S.Rolewicz, Metric linear spaces, PWN, Warsaw, 1972.

[29] H.Sato, Abstract Wiener measure and Gaussian measures on Banach spaces, Nagoya Math. J. 36/1969/, 65-81.

[30] I.E.Segal, Distribution in Hilbert space and canonical systems of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 86/1958/, 12-41.

[31] W.Sierpiński, Trójkąty pitagorejskie, PWN, Warszawa, 1954.

[32] A.V.Skorohod, Uwagi o miarach gaussowskich w przestrzeniach Banacha, Teor. Wier. i primien. 15/1970/, 519-520 /w j. rosyjskim/.

[33] S.A.Tarieladze, A.Weron, Gaussian random elements with values in the sequence spaces $l_{(p_n)}$, $0 < p_n \leq 1$, Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys. 22/1974/, 1053-1056.

[34] N.N.Vakhania, Miary probabilistyczne w przestrzeniach liniowych, Tbilisi, 1971 /w j. rosyjskim/.

[35] J.Zinn, Zero-one laws for non-Gaussian measures, Proc. Amer. Math. Soc. 44/1974/, 179-185.

Lista odbiorców

1. Dział Wydawnictw i Biblioteka Gł.	1 egz.
2. Zleceniodawca	10 egz.
3. Autor	3 egz.
4. Biblioteka I-18	1 egz.
	Razem 15 egz.

	N	1 2 3 4 5 6 7 8 D N P R T T A N	9 1 1 2 6		
	Rozpocz. pr. 0 1 7 5	Zakończ. pr. 0 6 7 6	Opubl. pr.	Instytut I 1 8	Nr tematu
Nr zlecenia	Nr archiwalny I 1 8 / K - 0 6 3 / 7 6 *				
Symbol UKD 519.21	Rachunek prawdopodo- podobieństwa		76:Inst.Matem. PWr MNSzWT pol		

Opis bibliograficzny

Inglot Tadeusz

Miary gaussowskie i zasada niezmienniczości w przestrzeniach liniowych.

Komunikaty Inst.Mat. PWr 1976 Nr 063
46 s. Bibliogr. 35 poz. /maszyn.powiel/

Charakter pracy: podstawowa
Materiały odpłatne A

Rozpowszechnienie na praw. ręk.

S.95.

Analiza dokumentacyjna In the paper we investigate some
<D properties of Gaussian measures on measurable linear spaces. First we obtain zero-one law for such measures /this means that Gaussian measure of every measurable subgroup is zero or one/. Next we prove that for measurable subadditive function f on measurable linear space E which is Borel measurable with respect to scalar multiplication the function exp(ε f(x)) on E is integrable with respect to Gaussian measure for sufficiently small $\varepsilon>0$. These results were earlier known for Gaussion measures on Banach spaces. Our approach basing on papers of X. Fernique, R.M. Dudley and M. Kanter shows that these properties do not depend on geometric structure of the space.

Praca poświęcona jest badaniu niektórych własności miar gaussowskich na mierzalnych przestrzeniach liniowych. Najpierw otrzymuje się prawo zerojedynkowe dla tych miar /tzn, że miara gaussowska mierzalnej podgrupy jest zero lub jeden/. Następnie dowodzi się, że dla mierzalnego subaddytywnego funkcjonału f na mierzalne przestrzeni liniowej E, który jest borelowski ze względu na mnożenie przez skalar, funkcja exp (ε f(x)) na E jest całkowalna względem miary gaussowskiej dla dostatecznie małego $\varepsilon > 0$. Wyniki te były znane wcześniej dla miar gaussowskich na przestrzeniach Banacha. Metody użyte w pracy, opierające się na artykułach X. Femique'a, R.M. Dudleya i M. Kontera pokazują, że te własności nie zależą od geometrycznej struktury rozważanych przestrzeni.

Imię i Nazwisko autora analizy

Inglot Tadeusz

Słowa kluczowe

<S Miara gaussowska, mierzalna przestrzeń liniowa, prawo zerojedynkowe, przestrzeń lokalnie pseudowypukła, zasada niezmienniczości

**0480*00* ________

<A ________ *B ________ *C ________ *D ________

*E ________ *F ________ *G ________ *H ________ <--

Tylko PRL	CINTE	APW	Podpis red.	Podpis asyst. d/s badań.	Potwierdzenie przyjęcia poprawki.	Potwierdzenie przyjęcia karty w Oddziale Dokumentacji.
NIE	TAK	TAK				
Wpisać TAK lub NIE						