

2114724/1

Na prawach rękopisu

INSTYTUT INŻYNIERII LĄDOWEJ
POLITECHNIKI WROCŁAWSKIEJ

Raport nr 1/79 - PRE 3

ANALIZA STATYCZNA PRZESEŁ
MOSTOWYCH METODĄ
PRYZMATYCZNYCH ELEMENTÓW
SKOŃCZONYCH

Jan Bien

Praca doktorska

Promotor: prof. dr hab. inż. Jan Kmita

Słowa kluczowe: przęsła mostowe, pryzmatyczne elementy skończone, trójwymiarowa analiza naprężeń

Wrocław 1979

79071208008

Mgr inż. Jan Bień
Instytut Inżynierii Lądowej
Politechniki Wrocławskiej
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27
bud. H-3, p.104, tel. 20-23-56
50 - 370 Wrocław

Komunikat

wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych
Instytutu Inżynierii Lądowej w styczniu 1979.

SPIS RZECZY

	STR.
1. WSTĘP	5
1.1. Wprowadzenie	5
1.2. Cel pracy	6
1.3. Zakres pracy	6
2. ZASTOSOWANIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ANALIZY STATYCZNEJ PRZESEŁ MOSTOWYCH	8
2.1. Uwagi wstępne	8
2.2. Stosowane sposoby dyskretyzacji	10
2.3. Rozwiązania półanalityczne	15
3. PRYZMATYCZNE ELEMENTY SKOŃCZONE	18
3.1. Uwagi ogólne	18
3.2. Oznaczenia	19
3.3. Sposób dyskretyzacji konstrukcji	21
3.3.1. Podstawowe założenia	21
3.3.2. Funkcja przemieszczeń dla elementu prostego	23
3.3.3. Funkcja przemieszczeń dla elementu zakrzywionego	29
3.4. Macierz sztywności elementu prostego	30
3.5. Macierz sztywności elementu zakrzywionego	39
3.6. Macierz sztywności konstrukcji	43
3.7. Obciążenia	46
3.7.1. Przęsło prostokątne	46
3.7.2. Przęsło zakrzywione w planie	55
3.8. Odkształcalne podpory pośrednie	58
4. PROGRAMY DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH	62
4.1. Uwagi wstępne	62
4.2. Sposób organizacji obliczeń	64
4.3. Dane wejściowe i postać wyników	71
4.4. Schemat blokowy	75
5. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH	79
5.1. Uwagi ogólne	79
5.2. Ocena zbieżności i dokładności rozwiązania	80
5.2.1. Prosta belka pryzmatyczna	80
5.2.2. Belka zakrzywiona w planie	87
5.2.3. Belka z odkształcalną podporą pośrednią	91
5.2.4. Płyta o stałej grubości	93

5.3.	Porównanie z wynikami badań modelowych	99
5.3.1.	Cel badań	99
5.3.2.	Materiał modeli	99
5.3.3.	Aparatura pomiarowa	102
5.3.4.	Opis modeli i obciążeń	102
5.3.5.	Wyniki teoretyczne i doświadczalne	105
5.4.	Inne przykłady zastosowań	116
5.4.1.	Przęsło o przekroju skrzyńkowym	116
5.4.2.	Porównanie przemieszczeń i naprężeń w przęśle prostokątnym i zakrzywionym	122
5.4.3.	Dźwigar dwuprzęsłowy	133
6.	MOŻLIWOŚCI UPROSZCZENIA ROZWIĄZANIA	140
6.1.	Uwagi ogólne	140
6.2.	Jednoczesne zastosowanie elementów dwu- i trójwymiarowych	141
6.2.1.	Dyskretny model konstrukcji	141
6.2.2.	Macierz sztywności konstrukcji	144
6.3.	Rozwiązanie dwuetapowe	146
7.	UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE	155
	LITERATURA	158

1. WSTĘP

1.1. Wprowadzenie

Dążenie do racjonalnego wykorzystania materiałów konstrukcyjnych oraz konieczność dokładnej oceny bezpieczeństwa konstrukcji inżynierskich wymaga stosowania coraz ściślej-
szych metod analitycznych, uwzględniających wszystkie cha-
rakteryistyczne cechy pracy przęseł mostowych. Konstrukcje
mostowe są w rzeczywistości tworam i trójwymiarowymi, ale tak
ściśła ich analiza napotyka na znaczne trudności rachunkowe.
W praktyce trójwymiarowe elementy konstrukcji zastępowane są
wyidealizowanymi schematami statycznymi, prętowymi lub powierz-
chniowymi, w zależności od proporcji pomiędzy poszczególnymi
wymiarami elementu. Rzeczywista geometria elementu charaktery-
zowana jest w sposób przybliżony przez odpowiednie parametry,
a w trakcie obliczeń operuje się z reguły integralnymi wiel-
kościami statycznymi.

Rozwiązania oparte na uproszczonych modelach obliczenio-
wych nie pozwalają na ogół na analizę efektów lokalnych w
postaci np. koncentracji naprężeń w otoczeniu punktów przyło-
żenia obciążeń skupionych, w miejscach połączeń elementów itp.
Uzyskanie pełniejszego obrazu tych zjawisk, oprócz ważnych wa-
lorów poznawczych, może mieć istotne znaczenie praktyczne,
szczególnie w świetle obserwowanej tendencji do zwiększania
obciążeń użytkowych o charakterze skupionym /nacisk kół pojaz-
dów/, przy jednoczesnym dążeniu do minimalizacji zużycia ma-
teriałów. Znaczne zaburzenia lokalne powstają także w pobli-
żu miejsc podparcia konstrukcji, zakotwień cięgien sprężają-
cych itp.

Przedmiotem niniejszej pracy jest metoda dyskretnej trój-
wymiarowej analizy pryzmatycznych przęseł mostowych, umożli-
wiająca uwzględnianie efektów lokalnych przy możliwie wiernym
odwzorowaniu geometrii konstrukcji. Przez określenie "przęsło
pryzmatyczne" rozumie się konstrukcję o przekroju poprzecznym
niezmiennym na długości.

Zastosowany sposób dyskretyzacji zagadnienia oraz szeroko
wykorzystanie maszyn cyfrowych pozwalają na opracowanie
sposobu obliczeń przydatnego nie tylko do celów poznawczych,
ale i do praktyki projektowej.

1.2. Cel pracy

Celem pracy jest uściślenie metody oceny stanu przemieszczeń, odkształceń i naprężeń w konstrukcjach pryzmatycznych ze szczególnym uwzględnieniem dźwigarów typu mostowego.

Postawiony cel postanowiono osiągnąć formułując metodę opartą na koncepcji elementów skończonych, a umożliwiającą dyskretną trójwymiarową analizę konstrukcji.

Podstawową tezę pracy można ująć następująco: analiza trójwymiarowa pozwala na bardziej wnikliwą ocenę pracy przęseł mostowych w porównaniu z innymi stosowanymi obecnie metodami, a przedstawione w pracy rozwiązanie teoretyczne oraz opracowane na jego podstawie programy na EMC stanowią efektywne narzędzie analizy szerokiej klasy dźwigarów typu mostowego.

1.3. Zakres pracy

W zakres pracy wchodzi następujące zagadnienia:

- 1/ przeprowadzenie syntetycznej oceny istniejącego stanu zastosowań metody elementów skończonych do analizy statycznej przęseł mostowych;
- 2/ opracowanie efektywnego algorytmu pozwalającego na trójwymiarową analizę konstrukcji;
- 3/ przygotowanie i uruchomienie programów do obliczeń numerycznych;
- 4/ wykonanie obliczeń wybranych typów konstrukcji;
- 5/ przeprowadzenie badań modelowych wybranych typów przęseł przy różnych rodzajach i schematach obciążenia;
- 6/ weryfikacja zastosowanego sposobu obliczeń przez porównanie z rozwiązaniami uzyskanymi innymi metodami oraz przez porównanie z wynikami badań doświadczalnych;
- 7/ przedstawienie ogólnych wniosków o charakterze poznawczym i praktycznym.

- 7 -

Zakres zastosowań przedstawionego w pracy sposobu obliczeń obejmuje konstrukcje:

- o dowolnej geometrii przekroju poprzecznego,
- prostokątne i zakrzywione w planie,
- jednoprzęsłowe swobodnie podparte na obu końcach oraz posiadające dodatkowe podpory pośrednie,
- jednorodne lub zespolone z różnych materiałów.

2. ZASTOSOWANIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DO ANALIZY STATYCZNEJ PRZESEŁ MOSTOWYCH

2.1. Uwagi ogólne

Metoda elementów skończonych uważana jest obecnie za najbardziej ogólną i uniwersalną metodę analizy przeseł mostowych. Właściwy dobór typu elementu i sposobu dyskretyzacji pozwala na przyjęcie modelu obliczeniowego dokładnie odpowiadającego rzeczywistej konstrukcji. Skomplikowane warunki brzegowe czy złożona geometria nie stanowią tu istotnego utrudnienia.

Do dyskretyzacji przeseł mostowych używane są obecnie najczęściej elementy jedno- i dwuwymiarowe. Najpełniejszy opis konstrukcji otrzymuje się przy zastosowaniu elementów trójwymiarowych o stosunkowo dużej liczbie stopni swobody. Należy przypuszczać, że stosowanie elementów tego typu będzie się upowszechniać wraz z rozwojem techniki obliczeniowej [46], [71]. Ze względu na znaczny koszt obliczeń w przypadku uwzględnienia wielu stopni swobody, szczególnie uzasadnione wydaje się poszukiwanie sposobów pozwalających na zmniejszenie pracy rachunkowej przy zachowaniu dokładności wyników.

Należy pamiętać także o innych metodach obliczeń, nie dorównujących ogólnością metodzie elementów skończonych, ale posiadających swoje zalety. Metody te mogą okazać się w pełni konkurencyjne, szczególnie w przypadku prostszych konstrukcji. Zastosowanie ich jest jednak przeważnie ograniczone do określonej klasy przeseł.

Orientacyjne zakresy zastosowań wybranych metod analizy statycznej przeseł mostowych podano w tab. 2.1.

Tabela 2.1.

Zakres zastosowań wybranych metod analizy statycznej

Schemat obliczeniowy / Typ przęsła	Ruszt prętowy	Płyta ortotropowa	Tarczownica	Klasyczne elementy skończone	Pasma skończone	Pryzmatyczne elementy skończone
Przekrój poprzeczny:						
- płytowy	+	+		+	+	+
- płytowo - belkowy	+	+		+	*	+
- skrzynkowy	*	*	+	+	+	+
- dowolny				+		+
Warunki podparcia:						
- swobodnie podparte na obu końcach	+	+	+	+	+	+
- swobodnie podparte + podpory pośrednie	+	+	+	+	+	+
- dowolne	+			+		
Ukształtowanie w planie:						
- prostokątne	+	+	+	+	+	+
- ukośne	+	*		+	+	+
- zakrzywione	+	+	+	+	+	+
- dowolne	+			+		

* - ograniczone możliwości zastosowań

2.2. Stosowane sposoby dyskretyzacji pręseł

W metodzie elementów skończonych analizowaną konstrukcję dzieli się na małe elementy, określa warunki równowagi każdego elementu, a następnie łączy się je w jedną całość. Poszczególne elementy połączone są ze sobą w skończonej liczbie punktów zwanych węzłami. Proces łączenia prowadzi do dużych układów równań liniowych, w których niewiadomymi są wielkości parametrów w węzłach. Analiza oparta jest najczęściej na metodzie przemieszczeń i wtedy jako parametry przyjmuje się składowe przemieszczenia węzłów. Szczegółowy opis metody oraz analizę możliwości jej zastosowań zawierają m. in. prace [43], [71], [79], [100], [107], [118], [149].

W zagadnieniach teorii sprężystości omawiana metoda interpretowana jest zazwyczaj jako proces poszukiwania minimum całkowitej energii potencjalnej przy założonej siatce przemieszczeń [102], [106]. Postępowanie takie jest analogiczne do metody Rayleigha - Ritza [111], a różnica polega na sposobie określania przemieszczeń. W metodzie Ritza funkcje opisujące przemieszczenia muszą spełniać warunki brzegowe całego problemu, co praktycznie ogranicza jej zastosowanie do obszarów o prostych kształtach geometrycznych.

W metodzie elementów skończonych przy doborze funkcji bazowych /funkcji kształtu/ nie jest potrzebna znajomość geometrii całego układu ani jego warunków brzegowych, gdyż każdy parametr wpływa tylko na elementy połączone w danym węźle, a więc ograniczenia geometryczne dotyczą jedynie kształtu elementów. Istotną różnicą z punktu widzenia zastosowania maszyn cyfrowych jest także fakt, że w metodzie elementów skończonych macierz współczynników ogólnego układu równań jest pasmowa, natomiast w metodzie Ritza macierz współczynników jest z reguły pełna.

Nieco odmienny sposób sformułowania istoty metody elementów skończonych przedstawiono w pracach [73], [149], wychodząc z równań różniczkowych opisujących analizowane zagadnienia. Powiązania metody elementów skończonych z metodą różnic skończonych, zaprezentowano w [64], [144].

Omawiana metoda prowadzi do rozwiązań przybliżonych, gdyż stan wyteżenia elementu określany jest na podstawie skończonej liczby parametrów, podczas gdy w rzeczywistości jest

ich nieskończenie wiele. Dokładność rozwiązania zależy przede wszystkim od dwóch czynników:

- zastosowanego typu elementów,
- sposobu podziału na elementy.

Typ elementu charakteryzowany jest przez jego kształt geometryczny oraz przyjęte funkcje kształtu, które określają stan przemieszczeń wewnątrz elementu na podstawie wartości parametrów węzłowych. Przy doborze funkcji kształtu należy spełnić następujące warunki [8], [71], [149]:

- 1/ liniowa niezależność funkcji kształtu,
- 2/ zgodność na granicy elementów,
- 3/ zupełność, tj. wymaganie, aby istniała możliwość opisu zarówno ruchu ciała jako bryły sztywnej, jak i stałych odkształceń,
- 4/ różniczkowalność.

Zagadnienia związane ze zbieżnością i dokładnością metody analizowane były szeroko w pracach [50], [55], [83], [102], [112], [136]. Istotny wpływ na dokładność ma przyjęta siatka podziału na elementy.

Ogólnie można powiedzieć, że dokładność wzrasta z zagęszczeniem siatki, ale duże znaczenie ma jednocześnie sposób podziału [15], [23], [155].

Szerokie zastosowanie metody elementów skończonych do obliczania konstrukcji mostowych zapoczątkowały prace Zienkiewicza i Cheunga [31], [150], [151], dotyczące przęseł płytowych. Przęsła tego typu idealizowane są zazwyczaj za pomocą płaskich elementów, których węzły leżą na powierzchni środkowej płyty. W obliczeniach stosowano z powodzeniem wiele różnych typów elementów zginanych:

- elementy trójkątne [12], [31], [69], [113], [117],
- prostokątne [16], [69], [71], [95], [113], [117], [150],
- czworoboczne [34], [53], [72],
- o zarysie krzywoliniowym [48], [92], [93], [94], [115].

W elementach typu płytowego każdemu węzłowi przypisuje się zazwyczaj 3 stopnie swobody, odpowiadające pionowemu przemieszczaniu oraz kątom obrotu w 2 kierunkach. Opracowano także elementy o większej liczbie stopni swobody w węźle, gwarantujące ciągłość wyższych pochodnych funkcji ugięcia. Praktyczne zastosowanie znalazły elementy prostokątne o 4 stopniach swobody [124] oraz trójkątne o 6 i 7 parametrach w węźle [7], [13].

Dużą uniwersalnością wyróżniają się tzw. elementy izoparametryczne [48], [93], [94], [99], w których geometrię i stan odkształcenia elementu określa się za pomocą tych samych funkcji kształtu oraz w oparciu o te same węzły. Elementy izoparametryczne są preferowane, gdyż można dla nich łatwiej spełnić kryterium związane z ruchem ciała jako bryły sztywnej oraz kryterium stałych odkształceń niż dla elementów subparametrycznych czy superparametrycznych [8], [149]. W pracy [48] wykazano również, że elementy izoparametryczne zapewniają większą dokładność rozwiązania w porównaniu z podziałem na elementy np. trójkątne, przy tej samej ogólnej liczbie stopni swobody.

Opisany sposób idealizacji pręseł płytowych próbowano rozszerzyć także na konstrukcje płytowo-belkowe. W pracach [31], [150] zaproponowano połączenie płaskich trójkątnych i prostokątnych elementów płytowych z elementami belkowymi, których węzły leżą w płaszczyźnie środkowej płyty. Umożliwia to uwzględnianie wpływu żeber symetrycznych względem powierzchni środkowej. Rozwiązania dla przypadku niewielkiego mimośrodu między osią ciężkości belki a płaszczyzną środkową płyty przedstawiono w [41], [125], określając odkształcenia belki na podstawie przemieszczeń płyty. Przy takim podejściu w elementach płytowych muszą być uwzględniane także efekty tarczowe wywołane siłami działającymi w płaszczyźnie elementu. W każdym węźle należy przyjąć minimum 5 parametrów: 3 składowe przemieszczeń i 2 kąty obrotu.

Przęsła o przekroju skrzyńkowym idealizuje się przeważnie w sposób przybliżony za pomocą elementów dwuwymiarowych uwzględniających efekty zgięciowe i tarczowe. W każdym węźle występuje najczęściej 5 lub 6 parametrów /3 składowe przemieszczeń liniowych i 2 lub 3 przemieszczenia kątowe/. Idealizacja taka pozwala na zmniejszenie ogólnej liczby stopni swobody,

a więc i czasu obliczeń, w porównaniu z pełną analizą trójwymiarową. Szeroki przegląd różnych typów elementów stosowanych do analizy przęseł skrzynekowych prostokątnych, ukośnych oraz zakrzywionych w planie zawierają prace [36], [97], [114], [118], [120], [121], [122].

Omówione sposoby dyskretyzacji przęseł sprowadzają rzeczywiste zadanie trójwymiarowe do zastępczego zagadnienia dwuwymiarowego. Przybliżenie takie zapewnia przeważnie rozwiązanie dostatecznie dokładne z technicznego punktu widzenia, a jednocześnie rachunkowo ekonomiczne. W wielu wypadkach wymagana jest jednak bardziej wnikliwa ocena pracy konstrukcji i wtedy konieczne staje się zastosowanie elementów trójwymiarowych.

Najprostszym typem takiego elementu jest czworościan posiadający 4 węzły w wierzchołkach, zaproponowany przez Martina [89], Gallaghera [58] oraz Melosha [96]. Przyjmując dodatkowe węzły pośrednie na krawędziach można utworzyć całą rodzinę złożonych elementów czworościennych [71], [110]. W pracach Argyrisa [3], [4], [6], [10] oraz Rashida [101], [110] podano przykłady praktycznych zastosowań elementów tego typu.

Innym stosowanym rozwiązaniem jest podział przestrzeni na prostopadłościany lub graniastosłupy o podstawie trójkątnej. Funkcje kształtu mogą być w tym wypadku określane za pomocą wielomianów Lagrange'a [5], [47] lub w oparciu o funkcje należące do rodziny "serendipowskiej" [77], [99], [149], [153]. W pracy [50] wykazano, że elementy prostopadłościenne zapewniają większą dokładność wyników w porównaniu z czworościanami, przy tej samej ogólnej liczbie stopni swobody.

Jednym z podstawowych problemów w zagadnieniach trójwymiarowych jest dobór odpowiedniego elementu zapewniającego największą dokładność w przeliczeniu na jednostkę czasu obliczeń [2], [32], [52], [108], [123], [140]. Obecnie za najbardziej efektywne i uniwersalne uważa się krzywoliniowe elementy izoparametryczne [49], [52], [77], [88], [99], [108], [142], [153].

Należy podkreślić, że w literaturze nie spotyka się przykładów zastosowań wymienionych wyżej typów elementów trójwymiarowych do analizy konstrukcji mostowych. Główną

przyczyną jest znaczne zwiększenie rozmiaru zadania w porównaniu z elementami jedno- i dwuwymiarowymi.

Przejsście od zagadnień dwuwymiarowych do przestrzennych powoduje skokowy wzrost liczby zmiennych i równań, a w związku z tym szczególnego znaczenia nabierają dwa zagadnienia:

- 1/ poprawny opis rzeczywistej konstrukcji wymaga przeważnie zastosowania znacznej liczby elementów, a więc i przygotowania dużej liczby danych wejściowych,
- 2/ w trakcie rozwiązywania dużych układów równań liniowych powstają często problemy numeryczne związane z ograniczoną pamięcią maszyny cyfrowej oraz dokładnością rozwiązania.

Pierwszy problem rozwiązywany jest w pewnym stopniu przez stosowanie specjalnych podprogramów dokonujących automatycznego podziału na elementy [15], [35], [54], [155]; pozwala to na znaczne ograniczenie liczby danych przygotowywanych przez użytkownika.

Rozwiązywanie dużych układów równań, szczególnie w przypadku analizy trójwymiarowej, wymaga stosowania specjalnych metod, gwarantujących racjonalne wykorzystanie pamięci operacyjnej oraz możliwie krótki czas obliczeń. W metodzie elementów skończonych macierz sztywności konstrukcji jest zazwyczaj pasmowa, symetryczna, dodatnio określona i charakteryzuje się dużymi rozmiarami oraz znaczną liczbą elementów zerowych [59]. Uwzględniając te charakterystyczne cechy opracowano wiele sposobów rozwiązywania dużych układów równań [22], [44], [57], [76], [78], [98], [105], [137], [143].

Wśród stosowanych rozwiązań można wyróżnić dwie grupy: metody iteracyjne i metody bezpośrednie. Rozwiązania iteracyjne używane są rzadziej, gdyż każde nowe obciążenie wymaga powtórzenia całego procesu iteracji, podczas gdy w rozwiązaniach bezpośrednich należy wykonać tylko dodatkowe podstawienia.

Wśród publikacji dotyczących zastosowania elementów skończonych do analizy przęseł mostowych prace autorów polskich stanowią stosunkowo niewielką grupę. Należy wymienić

tu prace zespołu K. Wysiadyckiego [17] , [18] , [21] , [145] , [146] , [147] dotyczące sposobu analizy ustrojów składających się z tarczy pracującej w płaskim stanie napięcia oraz ortogonalnego układu dowolnie rozmieszczonych żeber przenoszących zginanie.

Sposób określania macierzy sztywności elementu tarczowo-żebrowego podano w [21] , [146] , natomiast macierze sztywności żeber budowane są w oparciu o wzory metody deformacji układów prętowych z uwzględnieniem odkształceń postaciowych [18] . Przedstawioną metodę zastosowano z powodzeniem do analizy statycznej lekkich jezdni w mostach kratowych, w których pełnią one zarówno rolę pomostu jak i pasa dolnego dźwigara kratowego [17] . Rozwiązanie może być także stosowane do obliczania pełnościennych przęseł belkowych /stalowych i betonowych/, stropów płytowo-żebrowych i innych podobnie ukształtowanych konstrukcji.

Zespół J. Szmeltera opracował zestaw programów pozwalających na analizę układów prętowych [38] , [40] , [129] , płaskiego stanu naprężeń [131], konstrukcji płytowych [130] . We wszystkich programach wykorzystywane są specjalnie opracowane standardowe podprogramy [44] , [128] . Wymienione prace znajdują szerokie zastosowanie w analizie konstrukcji mostowych [39] .

Zestaw programów, opracowany specjalnie do analizy konstrukcji typu mostowego, przedstawił zespół J. Weselego [138] , [139] . Przygotowany system obliczeń numerycznych posiada bogatą bazę elementów typu prętowego, tarczowego, płytowego i płytowo-tarczowego, co pozwala na analizę szerokiej klasy konstrukcji dla różnych warunków brzegowych i schematów obciążeń.

2.3. Rozwiązania półanalityczne

Metoda elementów skończonych w ujęciu standardowym pozwala na jedno-, dwu- i trójwymiarową analizę dowolnych typów przęseł mostowych. W przypadku bardziej skomplikowanych zagadnień, wymagających zastosowania dużej liczby elementów, koszt obliczeń jest znaczny lub nawet zadania przekraczają możliwości istniejących maszyn cyfrowych.

Istotną redukcję zakresu obliczeń można uzyskać stosując sposoby półanalityczne, polegające na połączeniu znanych metod analitycznych z dyskretyzacją konstrukcji za pomocą elementów skończonych.

Rozwiązania tego typu są stosowane z powodzeniem w analizie powłok i innych konstrukcji osiowo-symetrycznych [1], [63], [116], [141], płyt [26], [27], [61], dźwigarów skrzynkowych [20], [24], [37].

Do obliczania przęseł mostowych najbardziej przydatne wydają się rozwiązania oparte na pasmowych [26], [62] lub pryzmatycznych [149], [157] elementach skończonych. Oba sposoby znajdują zastosowanie do analizy konstrukcji posiadających niezmienną geometrię i właściwości materiału w pewnym kierunku. Istota rozwiązania polega na połączeniu dyskretyzacji przy zastosowaniu elementów skończonych z odpowiednio dobranymi funkcjami przemieszczeń w wyróżnionym kierunku. Przyjęcie tych funkcji w postaci szeregów trygonometrycznych oraz wykorzystanie ich ortogonalności pozwala na zredukowanie zagadnienia dwuwymiarowego do jednowymiarowego w przypadku elementów pasmowych i trójwymiarowego do dwuwymiarowego przy zastosowaniu elementów pryzmatycznych. Ostateczne rozwiązanie tworzy się na podstawie szeregu uproszczonych rozwiązań składowych. Uzyskane w ten sposób znaczne zmniejszenie liczby parametrów węzłowych powoduje wydatną redukcję rozmiarów układu równań oraz ograniczenie liczby danych wejściowych.

Metoda pasm skończonych była w ciągu ostatnich lat z powodzeniem stosowana do obliczania przęseł różnych typów. Analizowane przęsto dzieli się wzdłuż na płaskie elementy pasmowe o jednakowych właściwościach na całej powierzchni elementu. Poszczególne pasma połączone są ze sobą wzdłuż linii węzłowych. Uwzględnia się przeważnie dwa rodzaje efektów: tarczowe i zgięciowe. Odkształcenia w stanie tarczowym określone są jednoznacznie przez dwie składowe przemieszczeń w płaszczyźnie elementu, a w stanie zgięciowym przez składową przemieszczenia prostopadłą do pasma oraz kąt obrotu. Odpowiednie sztywności elementu wyznaczane są jak dla tarczy i płyty cienkiej. Funkcje kształtu przyjmuje się w postaci iloczynu szeregów trygonometrycznych w kierunku podłużnym i wielomianów odpowiedniego stopnia w kierunku poprzecznym.

Dla stanu tarczowego stosuje się zazwyczaj wielomiany stopnia pierwszego [24] lub drugiego [81], a dla stanu zgięciowego wielomiany trzeciego stopnia [24], [26], [27], [29].

Metodę pasm skończonych zastosowano początkowo do analizy przęseł płytowych [26], [27], [81], [82], [91], [132], płytowo-belkowych [25], [30] i skrzynkowych [28], [37], [82], [127] podpartych swobodnie na obu końcach.

Następnie rozwiązanie rozszerzono na konstrukcje posiadające podpory pośrednie [61], [82], [127], a także na przęsła zakrzywione w planie [24], [29], [118] i ukośne [19], [20], [118].

W Polsce zastosowaniem sposobu pasm skończonych do analizy przęseł mostowych zajmuje się Mańko [85], [86], [87].

Sposób pasm skończonych, wykorzystując geometryczną regularność konstrukcji, pozwala na zmniejszenie czasu obliczeń o 60% ÷ 80% w stosunku do konwencjonalnych elementów skończonych. Zaleta ta spowodowała szerokie zastosowanie pasm skończonych mimo pewnych uproszczeń, jak:

- przybliżony opis rzeczywistej geometrii przekroju poprzecznego przęsła /stała grubość pasma/,
- założenie z góry sposobu rozkładu naprężeń na grubości elementu,
- pominięcie niektórych składowych odkształceń i naprężeń.

Uproszczenia te mają stosunkowo mały wpływ na wyniki obliczeń przęseł stalowych, gdzie grubości elementów są niewielkie. W przęsłach betonowych natomiast, wymiary elementów są często takie, że właściwą ocenę pracy konstrukcji można uzyskać jedynie przy zastosowaniu pełnej analizy trójwymiarowej.

Szczególnie przydatna do tego celu wydaje się koncepcja pryzmatycznych elementów skończonych zaproponowana w pracach [135], [149], [157]. Elementy pryzmatyczne pozwalają na pełną analizę przestrzenną przy znacznie mniejszym koszcie obliczeń w porównaniu z tradycyjnymi elementami trójwymiarowymi.

Pryzmatyczne elementy skończone stanowią podstawę rozwiązania przyjętego w niniejszej pracy i zostały dokładniej opisane w rozdziale 3.

3. PRYZMATYCZNE ELEMENTY SKOŃCZONE

3.1. Uwagi ogólne

Aktualne tendencje kształtowania przęseł mostowych charakteryzują się dążeniem do stosowania prostych rozwiązań, ułatwiających uprzemysłowienie wykonawstwa /prefabrykacja, deskowania przesuwne itp./. Uproszczenia polegają najczęściej na rezygnacji z poprzecznic przęsłowych przy pozostawieniu stężeń poprzecznych nad podporami. Ukształtowane w ten sposób konstrukcje posiadają niezmienną, na długości przęsła, geometrię i właściwości materiału. Zmienność obciążeń uniemożliwia jednak uproszczenie zagadnienia trójwymiarowego przez zastosowanie dwuwymiarowego stanu odkształcenia. Można natomiast przedstawić funkcje przemieszczeń i obciążeń w wyróżnionym kierunku za pomocą np. szeregów Fouriera i wykorzystując ortogonalność tych funkcji dla każdej harmonicznej rozpatrywać zastępcze zagadnienie dwuwymiarowe. Pełne rozwiązanie otrzymuje się na podstawie rozwiązań uzyskanych dla poszczególnych harmonicznych.

Opisany wyżej sposób postępowania stanowi podstawę koncepcji pryzmatycznych elementów skończonych /finite prism elements/ przedstawionej w pracach [149] , [157] . Analizowana konstrukcja dzielona jest wzdłuż na trójwymiarowe elementy o przekroju poprzecznym niezmiennym na długości. Długość każdego elementu jest równa długości całej konstrukcji. Funkcja kształtu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego przyjmowana jest w identycznej postaci jak dla zagadnień dwuwymiarowych, odpowiednio do przyjętego typu elementu; natomiast na długości elementu funkcja kształtu przedstawiona jest w postaci szeregu trygonometrycznego.

W pracach [135] , [157] zastosowano pryzmatyczne elementy skończone do analizy swobodnie podpartego przęsła o przekroju skrzynkowym. Uzyskane wyniki potwierdziły przydatność elementów pryzmatycznych do obliczania tego typu konstrukcji.

W niniejszej pracy przedstawiono szerzej metodę analizy statycznej przęseł mostowych przy zastosowaniu pryzmatycznych elementów skończonych w odniesieniu do przęseł o dowolnym przekroju poprzecznym. Analizą objęto konstrukcje prostokątne

i zakrzywione w planie, jedno- oraz wieloprzęsłowe. Przedstawiony algorytm umożliwia obliczanie konstrukcji jednorodnych i zespolonych z różnych typów materiału, a także pozwala na uwzględnianie różnych typów obciążeń charakterystycznych dla dźwigarów mostowych.

3.2. Oznaczenia

Podstawowe oznaczenia stosowane w pracy:

- a - długość elementu,
- a_1, a_2 - współrzędne "z" początku i końca obciążenia powierzchniowego,
- A^e - pole przekroju poprzecznego elementu "e" ,
- b - współrzędna "z" punktu przyłożenia siły skupionej,
- b_1, b_2 - współrzędne "z" początku i końca obciążenia liniowego,
- [B] - macierz w związku przemieszczenia - odkształcenia,
- c - liczba linii węzłowych w jednym elemencie,
- [D] - macierz sprężystości,
- E - moduł sprężystości,
- {f} - wektor przemieszczeń,
- {F} - wektor sił węzłowych,
- h - liczba harmonicznych uwzględniona w rozwiązaniu,
- [k] - macierz sztywności elementu,
- [K] - macierz sztywności konstrukcji,
- M - liczba elementów
- N - liczba punktów całkowania numerycznego,
- N_i - funkcja kształtu związana z linią węzłową "i"

- $\{q\}$ - wektor składowych obciążenia powierzchniowego,
- $\{p\}$ - wektor składowych obciążenia liniowego,
- $\{P\}$ - wektor składowych obciążenia skupionego,
- $\{R\}$ - wektor reakcji podpór pośrednich,
- S^e - powierzchnia elementu "e", na którą działa obciążenie rozłożone $\{q\}$,
- t - liczba pośrednich punktów podparcia,
- V^e - objętość elementu "e",
- w - liczba linii węzłowych w dyskretnym modelu konstrukcji,
- u_i, v_i - składowe przemieszczenia linii węzłowej "i",
- w_i
- x, y, z - współrzędne prostokątne,
- x, r, φ - współrzędne walcowe,
- ξ, η - znormalizowane współrzędne krzywoliniowe,
- α - kąt wewnętrzny określający długość elementu we współrzędnych walcowych,
- α_1, α_2 - współrzędne " φ " początku i końca obciążenia powierzchniowego,
- β - współrzędna " φ " punktu przyłożenia siły skupionej,
- β_1, β_2 - współrzędne " φ " początku i końca obciążenia liniowego,
- $\{\delta\}$ - wektor parametrów węzłowych,
- $\{\epsilon\}$ - wektor odkształceń,
- $\{\sigma\}$ - wektor naprężeń,
- ν - współczynnik Poissona .

3.3. Sposób dyskretyzacji konstrukcji.

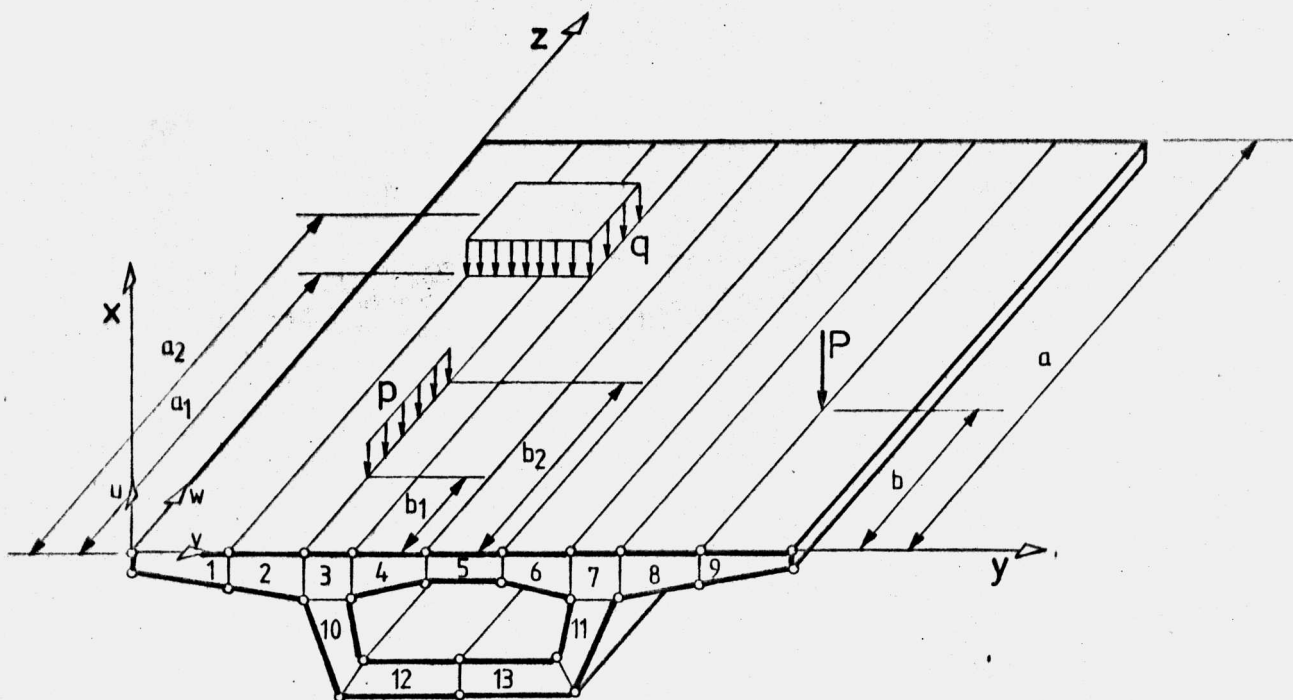
3.3.1. Podstawowe założenia

Analizowane przeszło mostowe dyskretyzowane jest przez podział na trójwymiarowe elementy pryzmatyczne, połączone ze sobą wzdłuż linii węzłowych. Przykładowy sposób podziału przęsła prostokątnego pokazano na rys. 3.1, a zakrzywionego w planie na rys. 3.2.

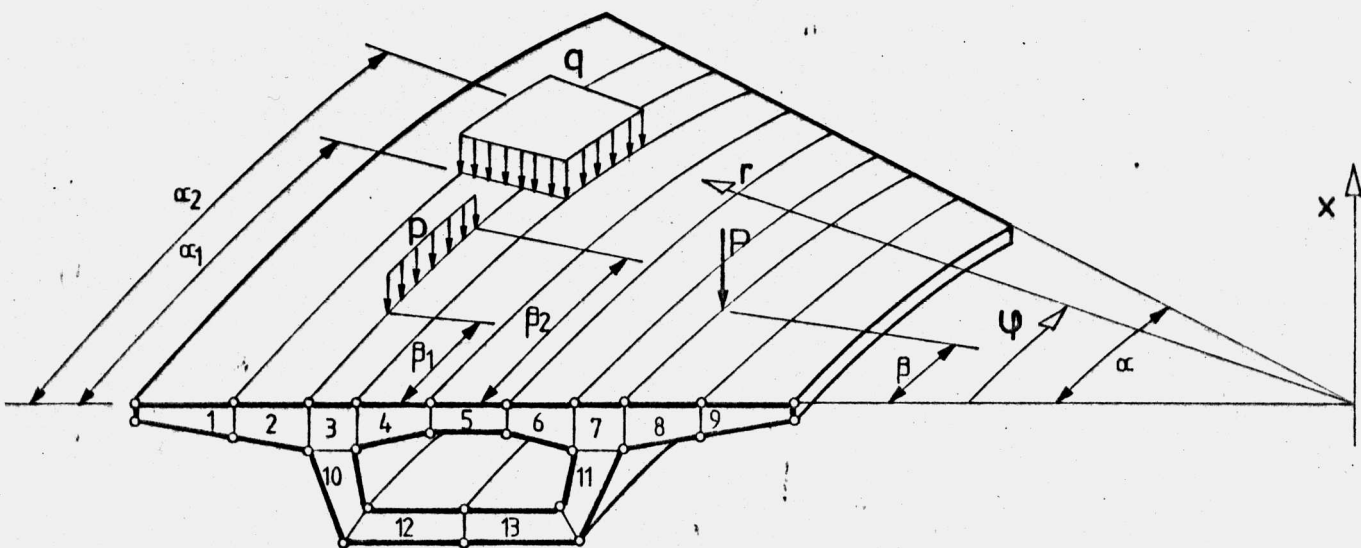
Dyskretny model konstrukcji oparty jest na następujących podstawowych założeniach:

- 1/ geometria przekroju poprzecznego i właściwości materiału konstrukcji pozostają niezmiennie w kierunku współrzędnej "z" w przypadku przęsł prostokątnych /rys. 3.1./ lub współrzędnej "φ" w przypadku przęsł zakrzywionych w planie /rys. 3.2./;
- 2/ każdy element podparty jest na obu końcach w sposób uniemożliwiający przemieszczenia przekroju podporowego w płaszczyźnie prostopadłej do osi elementu;
- 3/ elementy zakrzywione w planie podparte są na końcach wzdłuż promienia krzywizny;
- 4/ rozważa się infinitezymalny stan odkształcenia;
- 5/ związek między naprężeniami a odkształceniami jest zgodny z prawem Hooke'a;
- 6/ materiał jest jednorodny w całej objętości elementu;
- 7/ charakterystyki materiałowe poszczególnych elementów mogą być różne.

W pracy wyraźnie wydzielono fragmenty dotyczące elementów o osi prostej i elementów zakrzywionych w planie, co pozwoliło na zastosowanie wielu jednakowych oznaczeń dla obu typów elementów. Ogólny schemat rozwiązania jest dla pierwszego, jak i drugiego typu elementów taki sam, a różnice występują w jawnych postaciach niektórych macierzy. Różnice te podano



Rys. 3.1. Sposób dyskretyzacji przęsła prostokątnego



Rys. 3.2. Sposób dyskretyzacji przęsła zakrzywionego w planie

przy omawianiu charakterystyk elementów.

Elementy o osi prostej i elementy zakrzywione w planie będą w dalszej części pracy nazywane odpowiednio elementami prostymi lub zakrzywionymi.

3.3.2. Funkcja przemieszczeń dla elementu prostego

Przedstawiony w pracy sposób obliczeń oparty jest na metodzie przemieszczeń. Jako niewiadome przyjęto trzy składowe /u, v, w/ przemieszczeń linii węzłowych. Parametry węzłowe odpowiadające poszczególnym składowym przemieszczeń tworzą wektor

$$\{\delta\} = [\{\delta^1\}, \dots, \{\delta^h\}]^T, \quad /3.1/$$

gdzie

$$\{\delta^n\} = [u_1^n, v_1^n, w_1^n, \dots, u_c^n, v_c^n, w_c^n]^T. \quad /3.2/$$

Ogólną postać funkcji kształtu $N(x,y,z)$ dla elementu przyrzątecznego można zapisać jako

$$N(x,y,z) = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i(x,y) \cdot T(z)^n, \quad /3.3/$$

gdzie $N_i(x,y)$ określa zmienność funkcji kształtu w płaszczyźnie przekroju poprzecznego elementu, a $T(z)^n$ opisuje zmienność na długości. Jako funkcje $T(z)^n$ wygodnie jest przyjmować szeregi trygonometryczne Fouriera dobrane w taki sposób, aby dla każdej harmonicznej spełniały warunki brzegowe na końcach elementu. Ogólna postać funkcji $T(z)^n$ jest następująca

$$T(z)^n = A \cdot \sin \frac{n\pi z}{a} + B \cdot \cos \frac{n\pi z}{a} + C \cdot \operatorname{sh} \frac{n\pi z}{a} + D \operatorname{ch} \frac{n\pi z}{a}, \quad /3.4/$$

Stałe A, B, C, D wyznacza się na podstawie warunków brzegowych.

Przyjętą w niniejszej pracy funkcję opisującą przemieszczenia dowolnego punktu elementu pryzmatycznego można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \{f\} &= \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [N_i^n] \{\delta_i^n\} = \\ &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [T^n] [N_i] \{\delta_i^n\}, \end{aligned} \quad /3.5/$$

gdzie

$$[T^n] = \text{diag} \left[\sin \frac{n\pi z}{a}, \sin \frac{n\pi z}{a}, \cos \frac{n\pi z}{a} \right], \quad /3.6/$$

$$[N_i] = \text{diag} [N_i, N_i, N_i]. \quad /3.7/$$

Funkcje określające składowe przemieszczenia można też przedstawić jako

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i u_i^n \sin \frac{n\pi z}{a}, \\ v &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i v_i^n \sin \frac{n\pi z}{a}, \\ w &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i w_i^n \cos \frac{n\pi z}{a}. \end{aligned} \quad /3.8/$$

Przyjęta funkcja przemieszczeń spełnia w przekrojach podporowych $z = 0$ i $z = a$ dla każdej harmonicznej warunki brzegowe

$$u = v = 0 \quad \text{i} \quad \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad /3.9/$$

odpowiadające swobodnemu podparciu na obu końcach.

W przypadku elementów spełniających warunki /3.9/ można wykorzystać ortogonalność zastosowanych szeregów trygonometrycznych i rozpatrywać zagadnienie osobno dla każdej harmonicznej. Szersze uzasadnienie takiego postępowania podano w p. 3.6. Uproszczenia powyższego nie udaje

się niestety zastosować w przypadku warunków brzegowych innych niż /3.9/.

Do dyskretyzacji konstrukcji w płaszczyźnie xy mogą być używane wszystkie typy elementów stosowane w zagadnieniach dwuwymiarowych. Odpowiednio do typu elementu dobiera się postać funkcji kształtu N_i .

W niniejszej pracy zastosowano elementy izoparametryczne należące do tzw. rodziny serendipowskiej [48], [149]. Umożliwiają one dokładne odwzorowanie przekroju o zarysie krzywoliniowym i zapewniają zwiększenie dokładności w porównaniu z elementami prostszymi, przy tej samej liczbie stopni swobody. W celu uproszczenia obliczeń, dla każdego elementu wprowadza się w płaszczyźnie xy lokalny układ współrzędnych krzywoliniowych ξ, η . Transformację współrzędnych można ustalić w prosty sposób, wykorzystując funkcje kształtu $N_i(\xi, \eta)$. Wtedy

$$\begin{aligned} x &= \sum_{i=1}^c N_i(\xi, \eta) \cdot x_i, \\ y &= \sum_{i=1}^c N_i(\xi, \eta) \cdot y_i, \end{aligned} \quad /3.10/$$

gdzie x_i, y_i oznaczają współrzędne węzła "i" w układzie globalnym x, y, z . Zależność /3.10/ powinna określać w sposób wzajemnie jednoznaczny transformację pomiędzy współrzędnymi lokalnymi ξ, η a globalnymi x, y . Oznacza to, że każdy punkt w jednym układzie może posiadać tylko jeden odpowiadający mu punkt w drugim układzie współrzędnych.

Przedstawione podejście, zaproponowane w pracach [48], [74], [133], pozwala na transformację skomplikowanej geometrii elementów w układzie globalnym do postaci kwadratu we współrzędnych lokalnych, co znacznie upraszcza obliczenia.

W tab. 3.1 pokazano trzy typy elementów o 4, 8 i 12 węzłach rozmieszczonych na brzegach elementu. Funkcje kształtu wyrażone są za pomocą wielomianów w lokalnym układzie współrzędnych. Tak przyjęte funkcje kształtu spełniają, jak wykazano w pracach [48], [149], kryteria zbieżności obowiązujące w metodzie elementów skończonych [50], [71], [102].

Osobne zagadnienie stanowi problem czy kry-

teria te spełnione są także w układzie globalnym w stosunku do przekształconych elementów krzywoliniowych. Odpowiedź na to pytanie ułatwiają praktyczne wskazówki zawarte w pracach [71] , [153] :

- 1/ jeżeli dwa sąsiadujące elementy zakrzywione utworzone są z elementów macierzystych /w układzie ξ, η /, których funkcje kształtu zapewniają ciągłość przemieszczeń na granicy między elementami, to warunek ten spełniony jest także dla elementów zakrzywionych;
- 2/ jeżeli funkcje kształtu w lokalnym układzie współrzędnych zapewniają ciągłość przemieszczeń wewnątrz elementu, to ciągłość ta zostanie zachowana w elemencie przekształconym;
- 3/ warunek "stałej pochodnej" spełniony w izoparametrycznym elemencie macierzystym, spełniony jest też automatycznie w elemencie zakrzywionym, jeżeli $\sum_{i=1}^c N_i = 1$.

Na podstawie powyższych warunków można stwierdzić, że elementy przedstawione w tab. 3.1 spełniają wszystkie niezbędne kryteria zbieżności.

Określenie warunków równowagi elementu wymaga obliczenia całek typu

$$\int_{A^e} F \left(N_i, \frac{\partial N_i}{\partial x}, \frac{\partial N_i}{\partial y} \right) dx dy \quad . \quad /3.11/$$

Ponieważ funkcje kształtu N_i określone są we współrzędnych lokalnych ξ, η /tab. 3.1/ należy w tym układzie wyrazić także $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$ oraz dx dy . Zgodnie z regułami

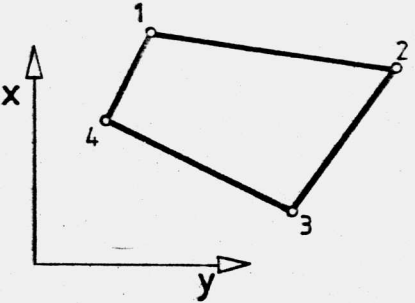
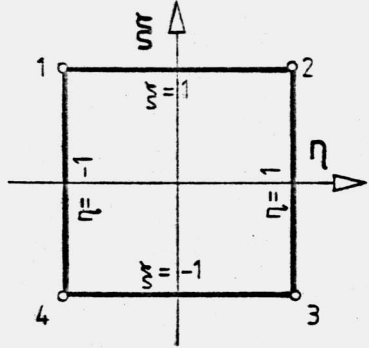
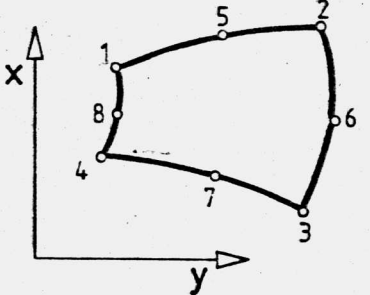
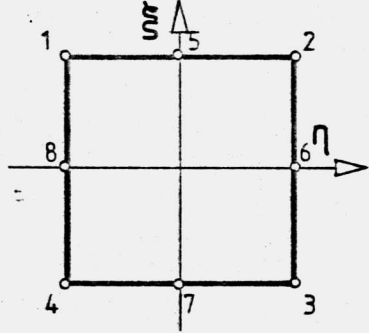
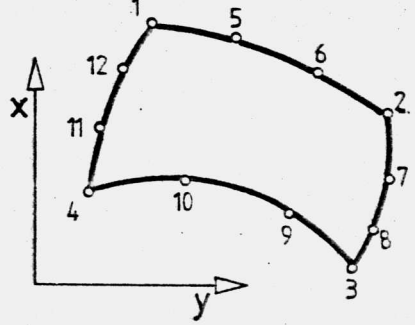
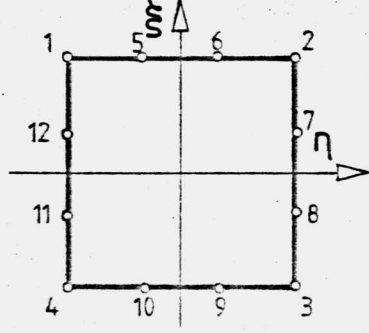
różniczkowania cząstkowego

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} ,$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad . /3.12/$$

Tabela 3.1

Funkcje kształtu dla elementów izoparametrycznych

L.P.	Globalny układ współrzędnych x,y	Lokalny układ współrzędnych ξ, η	Funkcje kształtu
1			$N_i(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) \quad \text{dla } i=1,2,3,4$ <p>gdzie:</p> $\xi_0 = \xi \xi_i$ $\eta_0 = \eta \eta_i$
2			$N_i(\xi, \eta) = 1/4 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0)(\xi_0 + \eta_0 - 1) \quad \text{dla } i=1,2,3,4$ $N_i(\xi, \eta) = 1/2 (1 - \xi^2)(1 + \eta_0) \quad \text{dla } i=6,8$ $N_i(\xi, \eta) = 1/2 (1 + \xi_0)(1 - \eta^2) \quad \text{dla } i=5,7$
3			$N_i(\xi, \eta) = 1/32 (1 + \xi_0)(1 + \eta_0) [9(\xi_0^2 + \eta_0^2) - 10] \quad \text{dla } i=1,2,3,4$ $N_i(\xi, \eta) = 9/32 (1 + \xi_0)(1 - \eta^2)(1 + 9\eta_0) \quad \text{dla } i=5,6,9,10$ $N_i(\xi, \eta) = 9/32 (1 - \xi^2)(1 + \eta_0)(1 + 9\xi_0) \quad \text{dla } i=7,8,11,12$

Wyrażenia $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ można wyznaczyć na podstawie równań /3.10/. Wtedy

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = [J] \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix}, \quad /3.13/$$

gdzie $[J]$ jest macierzą Jacobi'ego o postaci

$$[J] = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^c \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^c \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^c \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^c \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad /3.14/$$

Ostatecznie pochodne globalne otrzymuje się z zależności

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad /3.15/$$

Podobnie można wykazać, że

$$dx \, dy = \det [J] \, d\xi \, d\eta \quad /3.16/$$

i całka /3.11/ upraszcza się do postaci

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 F(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta, \quad /3.17/$$

gdzie $F(\xi, \eta)$ oznacza transformowaną do układu lokalnego funkcję $F(x, y)$.

Jawna postać funkcji $F(\xi, \eta)$ jest zwykle skomplikowana, co powoduje konieczność całkowania numerycznego.

3.3.3. Funkcja przemieszczeń dla elementu zakrzywionego

Podane w punkcie 3.3.2 rozważania dotyczą elementów o osi prostej. Wprowadzając współrzędne cylindryczne x, r, φ , /rys. 3.2/ zamiast układu prostokątnego x, y, z można podane zależności uogólnić na przypadek elementów zakrzywionych w płaszczyźnie yz .

Ogólna postać funkcji przemieszczeń pryzmatycznego elementu zakrzywionego jest określona, jak dla elementu prostego, wzorem /3.5/. Zmianie ulega jedynie postać macierzy $[T^n]$:

$$[T^n] = \text{diag} \left[\sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha}, \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \right] . \quad /3.18/$$

Analogicznie jak w elementach prostych, wprowadza się w płaszczyźnie xr lokalny układ współrzędnych ξ, η . Umożliwia to stosowanie funkcji $N_i(\xi, \eta)$ podanych w tab. 3.1 także do elementów zakrzywionych. Kierunki składowych przemieszczeń u, v, w w elemencie zakrzywionym odpowiadają kierunkom współrzędnych cylindrycznych x, r, φ . Składowe te można zapisać podobnie do /3.8/ w postaci

$$\begin{aligned} u &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i u_i^n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} , \\ v &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i v_i^n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} , \\ w &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c N_i w_i^n \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} . \end{aligned} \quad /3.19/$$

3.4. Macierz sztywności elementu prostego

Wektor odkształceń elementu ma postać

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad /3.20/$$

Różniczkując równania /3.8/ względem x, y i z oraz uwzględniając zależności /3.1/ i /3.2/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \{\varepsilon\} &= [B] \cdot \{\delta\} = \sum_{n=1}^h [B^n] \cdot \{\delta^n\} = \\ &= \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [B_i^n] \{\delta_i^n\} \quad /3.21/ \end{aligned}$$

Macierz odkształceń $[B_i^n]$ dla "i" - tej linii węzłowej i "n" - tej harmonicznej można zapisać jako

$$[B_i^n] = \begin{Bmatrix} [\bar{B}_i^n] \sin \frac{n\pi z}{a} \\ [\bar{\bar{B}}_i^n] \cos \frac{n\pi z}{a} \end{Bmatrix} \quad /3.22/$$

gdzie

$$[\bar{B}_i^n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & -N_i \frac{n\pi}{a} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}, [\bar{B}_i^n] = \begin{bmatrix} N_i \frac{n\pi}{a} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & N_i \frac{n\pi}{a} & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad /3.23/$$

Podstawiając zależności /3.2/ i /3.22/ do równania /3.21/ można zapisać elementy wektora odkształceń w postaci szeregów

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i^n \cdot \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i^n \cdot \sin \frac{n\pi z}{a} \\ - \frac{n\pi}{a} N_i w_i^n \cdot \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i^n \right) \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \left(\frac{n\pi}{a} N_i u_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i^n \right) \cos \frac{n\pi z}{a} \\ \left(\frac{n\pi}{a} N_i v_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i^n \right) \cos \frac{n\pi z}{a} \end{array} \right\}, \quad /3.24/$$

gdzie

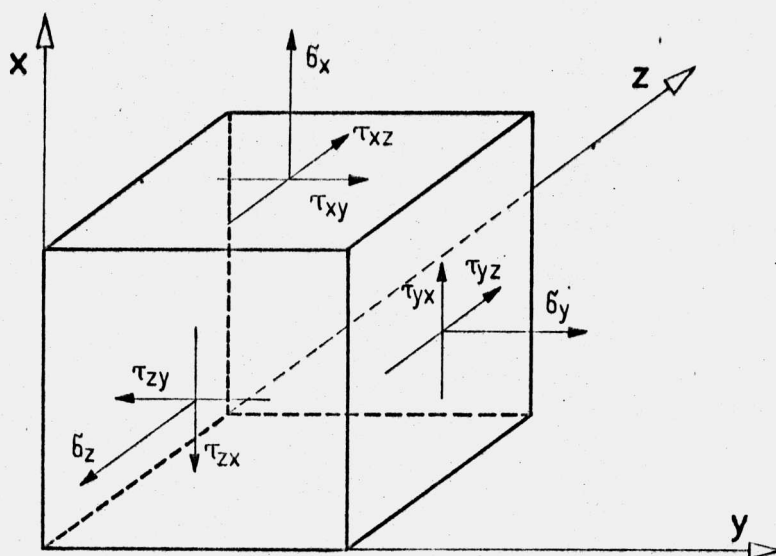
$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} = [1, 0][J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix},$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial y} = [0, 1][J]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{Bmatrix}. \quad /3.25/$$

Wektor naprężeń dla elementu pryzmatycznego określa się następująco

$$\{\sigma\} = [\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}]^T = [D]\{\varepsilon\} \quad /3.26/$$

W pracy rozpatrzono pełny trójwymiarowy stan naprężeń, a przyjęte oznaczenia składowych naprężenia podano na rys.3.3.



Rys.3.3. Oznaczenia składowych naprężenia

Wprowadzając związek /3.21/ do równania /3.26/ otrzymujemy

$$\{\sigma\} = [D]\{\varepsilon\} = [D][B]\{\delta\} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [D][B_i^n]\{\delta_i^n\} \quad /3.27/$$

Postać macierzy sprężystości $[D]$ zależy od charakterystyk sprężystych materiału.

Dla materiału izotropowego

$$[D] = \begin{bmatrix} 2\mu + \lambda & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & 2\mu + \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & 2\mu + \lambda & 0 & 0 & 0 \\ & & & \mu & 0 & 0 \\ \hline \text{Symetria} & & & & \mu & 0 \\ & & & & & \mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [D_{11}] & [D_{12}] \\ [D_{21}] & [D_{22}] \end{bmatrix}, /3.28/$$

gdzie λ i μ oznaczają stałe Lamégo

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1+\nu) \cdot (1-2\nu)}, \quad \mu = \frac{E}{2(1+\nu)}. \quad /3.29/$$

Warunek jaki musi spełniać macierz $[D]$ aby nastąpiło rozprężenie szeregów Fouriera można zapisać w postaci

$$[D_{12}] = [D_{21}] = [0]. \quad /3.30/$$

W przypadku materiałów anizotropowych, charakteryzowanych przez 21 stałych sprężystości, warunek ten nie jest spełniony. Spełniają go już natomiast materiały posiadające jedną płaszczyznę symetrii sprężystej, prostopadłą do osi "z" /13 stałych sprężystości/.

W niniejszej pracy przedstawiono ogólny tok rozwiązania na przykładzie materiału izotropowego, a uwzględnienie każdego innego typu materiału spełniającego warunek /3.30/ polega na przyjęciu odpowiedniej postaci macierzy $[D]$.

Elementy wektora naprężeń można przedstawić w postaci szeregów, podobnie jak uczyniono to dla odkształceń.

Wtedy :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot u_i^n \cdot \gamma + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} v_i^n - \frac{n\pi}{a} N_i w_i^n \right) \right] \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot v_i^n \cdot \gamma + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i^n - \frac{n\pi}{a} N_i w_i^n \right) \right] \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \left[-\gamma \frac{n\pi}{a} \cdot N_i \cdot w_i^n + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial y} v_i^n \right) \right] \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial y} u_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i^n \right) \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \mu \left(\frac{n\pi}{a} N_i u_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i^n \right) \cos \frac{n\pi z}{a} \\ \mu \left(\frac{n\pi}{a} N_i v_i^n + \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i^n \right) \cos \frac{n\pi z}{a} \end{array} \right\} , \quad /3.31/$$

gdzie

$$\gamma = 2\mu + \lambda = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad . \quad /3.32/$$

Ocenę stanu naprężenia, określonego wzorem /3.27/, można rozszerzyć, uwzględniając odkształcenia początkowe $\{\varepsilon_0\}$ oraz naprężenia początkowe $\{\sigma_0\}$

$$\{\sigma\} = [D] (\{\varepsilon\} - \{\varepsilon_0\}) + \{\sigma_0\} \quad . \quad /3.33/$$

Rozpatrując warunki równowagi elementu pryzmatycznego, przez $\{F\}$ oznaczono wektor sił węzłowych, statycznie równoważnych napięciom na granicach elementu wyciętego z konstrukcji. Siły te można wyznaczyć wymuszając wirtualne przemieszczenia węzłów $d\{\delta\}$ i porównując pracę sił zewnętrznych i wewnętrznych.

Praca wykonana przez siły $\{F\}$ równa się sumie iloczynów składowych sił przez odpowiednie przemieszczenia

$$L_1 = \sum_{n=1}^h \sum_{m=1}^h \sum_{i=1}^c \int_0^a \left([T^n] d\{\delta_i^n\} \right)^T [T^m] \{F_i^m\} dz =$$

$$\sum_{n=1}^h \sum_{m=1}^h \sum_{i=1}^c \left(d\{\delta_i^n\} \right)^T \int_0^a [T^n]^T [T^m] dz \{F_i^m\} \quad /3.34/$$

Pracę wykonaną przez naprężenia, siły masowe i powierzchniowe, uwzględniając równania /3.5/, /3.21/ i /3.27/, można zapisać w postaci

$$L_2 = \iiint_{V^e} (d\{\varepsilon\})^T \{\sigma\} dV^e - \iiint_{V^e} (d\{f\})^T \{g\} dV^e +$$

$$- \iint_{S^e} (d\{f\})^T \{q\} dS^e = \sum_{n=1}^h \sum_{m=1}^h \left[\sum_{i=1}^c \sum_{j=1}^c \iiint_{V^e} ([B_i^n] d\{\delta_i^n\})^T \times \right.$$

$$\times [D] [B_j^m] \{\delta_j^m\} dV^e - \sum_{i=1}^c \iiint_{V^e} ([T^n] [N_i] d\{\delta_i^n\})^T [T^m] \{g^m\} dV^e +$$

$$\left. - \sum_{i=1}^c \iint_{S^e} ([T^n] [N_i] d\{\delta_i^n\})^T [T^m] \{q^m\} dS^e \right] \quad /3.35/$$

Obliczone prace wirtualne muszą spełniać warunek

$$L_1 = L_2 \quad /3.36/$$

dla dowolnych dozwolonych przemieszczeń wirtualnych.

Stąd

$$\sum_{n=1}^h \sum_{m=1}^h \sum_{i=1}^c \left[\int_0^a [T^n]^T [T^m] dz \{F_i^m\} \right] =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{n=1}^h \sum_{m=1}^h \sum_{i=1}^c \left[\sum_{j=1}^c \iiint_{V^e} [B_i^n]^T [D][B_j^m] dV^e \{\delta_j^m\} \right. \\
 &- \iiint_{V^e} [N_i]^T [T^n]^T [T^m] \{g^m\} dV^e + \\
 &\left. - \iint_{S^e} [N_i]^T [T^n]^T [T^m] \{q^m\} dS^e \right] \quad /3.37/
 \end{aligned}$$

Pierwszy składnik sumy po prawej stronie równania /3.37/ określa typową podmacierz $[k_{ij}^{nm}]$ macierzy sztywności elementu $[k]$. Uwzględniając zależności /3.22/ i /3.28/ otrzymujemy

$$\begin{aligned}
 [k_{ij}^{nm}] &= \iiint_{V^e} \left\{ \begin{array}{l} [\bar{B}_i^n]^T \sin \frac{n\pi z}{a} \\ [\bar{B}_i^n]^T \cos \frac{n\pi z}{a} \end{array} \right\}^T \left[\begin{array}{c|c} [D_{11}] & [0] \\ \hline [0] & [D_{22}] \end{array} \right] \left\{ \begin{array}{l} [\bar{B}_j^m] \sin \frac{m\pi z}{a} \\ [\bar{B}_j^m] \cos \frac{m\pi z}{a} \end{array} \right\} dV^e = \\
 &= \iiint_{V^e} [\bar{B}_i^n]^T [D_n] [\bar{B}_j^m] \sin \frac{n\pi z}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} dV^e + \\
 &+ \iiint_{V^e} [\bar{B}_i^n]^T [D_{22}] [\bar{B}_j^m] \cos \frac{n\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dV^e, \quad /3.38/ \\
 & \quad \quad \quad i, j = 1, 2, \dots, c, \\
 & \quad \quad \quad n, m = 1, 2, \dots, h.
 \end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę, że

$$\begin{aligned}
 \int_0^a \sin \frac{n\pi z}{a} \sin \frac{m\pi z}{a} dz &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \neq m \\ \frac{a}{2} & \text{gdy } n = m \end{cases} \\
 \int_0^a \cos \frac{n\pi z}{a} \cos \frac{m\pi z}{a} dz &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } n \neq m \\ \frac{a}{2} & \text{gdy } n = m \end{cases} \quad /3.39/ \\
 & \quad \quad \quad \text{dla } n, m = 1, 2, 3, \dots,
 \end{aligned}$$

otrzymujemy

$$\int_0^a [T^n]^T [T^n] dz = \int_0^a \text{diag} \left[\sin^2 \frac{n\pi z}{a}, \sin^2 \frac{n\pi z}{a}, \cos^2 \frac{n\pi z}{a} \right] dz =$$

$$= \text{diag} [a/2, a/2, a/2] . \quad /3.40/$$

Stąd

$$[k_{ij}^{nn}] = \frac{a}{2} \iint_{\Delta^e} \left([\bar{B}_i^n]^T [D_{11}] [B_j^n] + [\bar{B}_i^n]^T [D_{22}] [B_j^n] \right) dA^e \quad /3.41/$$

$$i, j = 1, 2, \dots, c .$$

Oznacza to, że macierz sztywności jest blokowo diagonalna

$$[k] = \begin{bmatrix} [k^{11}] & & 0 \\ & [k^{22}] & \\ 0 & & \dots \\ & & [k^{hh}] \end{bmatrix} . \quad /3.42/$$

Jawną postać typowej podmacierzy $[k_{ij}^{nn}]$ pokazano poniżej

$$[k_{ij}^{nn}] = \begin{bmatrix} \gamma \cdot c_1 + \mu \cdot c_4 & \lambda \cdot c_2 + & \mu \cdot t_n \cdot c_6 + \\ + \mu \cdot t_n^2 \cdot c_9 & + \mu \cdot c_3 & -\lambda \cdot t_n \cdot c_5 \\ \hline \lambda \cdot c_3 + & \gamma \cdot c_4 + \mu \cdot c_1 + & \mu \cdot t_n \cdot c_8 + \\ + \mu \cdot c_2 & + \mu \cdot t_n^2 \cdot c_9 & -\lambda \cdot t_n \cdot c_7 \\ \hline \mu \cdot t_n \cdot c_5 + & \mu \cdot t_n \cdot c_7 + & \gamma \cdot t_n^2 \cdot c_9 + \\ -\lambda \cdot t_n \cdot c_6 & -\lambda \cdot t_n \cdot c_8 & \mu \cdot c_1 + \mu \cdot c_4 \end{bmatrix} , \quad /3.43/$$

gdzie

$$c_l = \frac{a}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A_l(\xi, \eta) \det [J] d\xi d\eta \quad l = 1, \dots, 9, \quad /3.44/$$

natomiast

$$A_1 = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad A_2 = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial y},$$

$$A_3 = \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \quad A_4 = \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y},$$

$$A_5 = \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot N_j, \quad A_6 = N_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x},$$

$$A_7 = \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot N_j, \quad A_8 = N_i \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y},$$

$$A_9 = N_i \cdot N_j, \quad t_n = \frac{n\pi}{a},$$

N_i, N_j - funkcje kształtu w lokalnym układzie współrzędnych /tab. 3.1/ .

Obliczenie całek /3.44/ wymaga przeważnie całkowania numerycznego ze względu na skomplikowaną jawną postać funkcji podcałkowych.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że macierz sztywności tradycyjnego elementu skończonego jest osobliwa, natomiast macierz sztywności elementu pryzmatycznego określona wzorami /3.42/, /3.43/ nie jest osobliwa, gdyż z góry zostały spełnione warunki brzegowe.

Uwzględniając zależności /3.39/ można na podstawie równania /3.37/ ustalić warunki równowagi węzła "i" dla "n"-tej harmonicznej w postaci

$$\begin{aligned} \{F_i^n\} &= \sum_{j=1}^c \iint_{A^e} [B_i^n]^T [D] [B_j^n] dA^e \{ \delta_j^n \} + \\ &- \iint_{A^e} [N_i]^T \{g^n\} dA^e - \int_{S^e} [N_i]^T \{q^n\} dS^e = \end{aligned}$$

$$= \sum_{j=1}^c [k_{ij}^{nn}] \{ \delta_j^n \} - \{ F_i^n \}_g - \{ F_i^n \}_q, \quad /3.45/$$

gdzie

$\{ F_i^n \}$ - wektor składowych siły w węźle "i" statycznie równoważnej napięciom na granicach elementów,

$\sum_{j=1}^c [k_{ij}^{nn}] \{ \delta_j^n \}$ - wektor składowych siły w węźle "i", wywołanej przemieszczeniami węzłów elementu,

$\{ F_i^n \}_g$ - wektor składowych siły w węźle "i", wywołanej rozłożonym obciążeniem masowym,

$\{ F_i^n \}_q$ - wektor składowych siły w węźle "i", wywołanej rozłożonym obciążeniem powierzchniowym.

3.5. Macierz sztywności elementu zakrzywionego

Wektor odkształceń elementu zakrzywionego, zapisany we współrzędnych walcowych /rys.3.2/, ma następującą postać

$$\{ \varepsilon \} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_r \\ \varepsilon_\varphi \\ \gamma_{xr} \\ \gamma_{x\varphi} \\ \gamma_{r\varphi} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi} + \frac{v}{r} \\ \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{\partial w}{\partial r} - \frac{w}{r} \end{Bmatrix} \quad /3.46/$$

Różniczkując równania /3.19/ względem x, r i φ otrzymujemy

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ \delta \} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [B_i^n] \{ \delta_i^n \}, \quad /3.47/$$

gdzie

$$[B_i^n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial r} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & 0 \\ 0 & \frac{N_i}{r} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & -\frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \frac{\partial N_i}{\partial r} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & 0 \\ \frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ 0 & \frac{N_i}{r} \frac{n\pi}{\alpha} \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} & \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \right) \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \end{bmatrix} \quad /3.48/$$

Wektor naprężeń można określić następująco

$$\{\delta\} \begin{Bmatrix} \delta_x \\ \delta_r \\ \delta_\varphi \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\varphi} \\ \tau_{r\varphi} \end{Bmatrix} = [D] \cdot \{\varepsilon\} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c [D] [B_i^n] \{\delta_i^n\} \quad /3.49/$$

Oznaczenia składowych naprężeń są zgodne z podanymi na rys. 3.3 z tym, że indeksy x, y, z przechodzą odpowiednio w x, r, φ . Macierz sprężystości $[D]$ ma identyczną postać jak dla elementów prostych /3.28/. Składowe naprężenia można przedstawić w postaci

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_r \\ \bar{\sigma}_\varphi \\ \tau_{xr} \\ \tau_{x\varphi} \\ \tau_{r\varphi} \end{array} \right\} = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c \left\{ \begin{array}{l} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i^n \cdot \gamma + \lambda \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} + \frac{N_i}{r} \right) v_i^n - \lambda \cdot t_n \frac{N_i}{r} w_i^n \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i^n \cdot \lambda + \left(\gamma \frac{\partial N_i}{\partial r} + \lambda \frac{N_i}{r} \right) v_i^n - \lambda \cdot t_n \frac{N_i}{r} w_i^n \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} u_i^n \cdot \lambda + \left(\lambda \frac{\partial N_i}{\partial r} + \gamma \frac{N_i}{r} \right) v_i^n - \gamma \cdot t_n \frac{N_i}{r} w_i^n \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \left[\frac{\partial N_i}{\partial r} u_i^n \cdot \mu + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} v_i^n \right] \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \left[t_n \frac{N_i}{r} \cdot u_i^n \cdot \mu + \mu \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i^n \right] \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \left[t_n \frac{N_i}{r} \cdot v_i^n \cdot \mu + \mu \left(\frac{\partial N_i}{\partial r} - \frac{N_i}{r} \right) w_i^n \right] \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \end{array} \right\} \quad /3.50/$$

gdzie

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial x} = [1, 0] [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\}, \quad /3.51/$$

$$\frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial r} = [0, 1] [J]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \end{array} \right\},$$

$$t_n = \frac{n\pi}{\alpha}.$$

Stosując analogiczny tok postępowania jak w przypadku elementu prostego /p. 3.4/ dochodzi się do sformułowania macierzy sztywności elementu zakrzywionego

$$[k_{ij}^{nn}] = \frac{\mathcal{R}}{2} \iint_A [B_i^n]^T [D] [B_j^n] dA^e. \quad /3.52/$$

Ogólną postać podmacierzy $[k_{ij}^{nn}]$ przedstawiono poniżej

$$[K_{ij}^{nn}] = \begin{bmatrix} \gamma \cdot c_1 + \mu \cdot c_4 + & \lambda \cdot c_2 + \lambda \cdot c_5 + & \mu \cdot t_n \cdot c_6 + \\ + \mu \cdot t_n^2 \cdot c_9 & + \mu \cdot c_3 & - \lambda \cdot t_n \cdot c_5 \\ \hline \lambda \cdot c_3 + \lambda \cdot c_6 + & \gamma(c_4 + c_9) + \lambda(c_7 + c_8) & \mu \cdot t_n(c_8 - c_9) + \\ + \mu \cdot c_2 & + \mu(c_1 + t_n^2 \cdot c_9) & - \lambda \cdot t_n \cdot c_7 - \gamma \cdot t_n \cdot c_9, \\ \hline \mu \cdot t_n \cdot c_5 + & \mu \cdot t_n(c_7 - c_9) + & \gamma \cdot t_n^2 \cdot c_9 + \mu(c_1 + \\ - \lambda \cdot t_n \cdot c_6 & - \lambda \cdot t_n \cdot c_8 - \gamma \cdot c_9 & + c_4 - c_7 - c_8 + c_9) \end{bmatrix} \quad /3.53/$$

gdzie

$$c_1 = \frac{\alpha}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 A_1(\xi, \eta) \det [J] d\xi d\eta, \quad 1 = 1, \dots, 9, \quad /3.54/$$

natomiast

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x}, & A_2 &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial r}, \\ A_3 &= \frac{\partial N_1}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial x}, & A_4 &= \frac{\partial N_1}{\partial r} \frac{\partial N_j}{\partial r}, \\ A_5 &= \frac{\partial N_1}{\partial x} \frac{N_j}{r}, & A_6 &= \frac{N_1}{r} \frac{\partial N_j}{\partial x}, \\ A_7 &= \frac{\partial N_1}{\partial r} \frac{N_j}{r}, & A_8 &= \frac{N_1}{r} \frac{\partial N_j}{\partial r}, \\ A_9 &= \frac{N_1}{r} \frac{N_j}{r}, & t_n &= \frac{n\pi}{\alpha}, \end{aligned}$$

N_1, N_j - funkcje kształtu w lokalnym układzie współrzędnych /tab. 3.1/ .

Całki typu /3.54/ występujące w macierzy /3.53/ wymagają z zasady całkowania numerycznego ze względu na skomplikowaną jawną postać funkcji podcałkowych.

Warunki równowagi węzła "i" dla "n"-tej harmonicznej można, podobnie jak dla elementu prostego, zapisać ogólnie w postaci

$$\{F_1^n\} = \sum_{j=1}^c [k_{1j}^{nn}] \{\delta_j^n\} - \{F_1^n\}_g - \{F_1^n\}_q \quad /3.55/$$

W powyższym równaniu zastosowano identyczne oznaczenia jak we wzorze /3.45/.

3.6. Macierz sztywności konstrukcji

Funkcję przemieszczeń dla całej konstrukcji można zapisać w podobny sposób jak dla elementu /równanie 3.5/, a mianowicie

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = [N] \{\delta\}, \quad /3.56/$$

gdzie

$$\{\delta\} = [\{\delta\}^1, \dots, \{\delta\}^M]^T, \quad /3.57/$$

$$[N_i] = \begin{cases} [N_i]^e & \text{gdy } i \in e \\ 0 & \text{gdy } i \notin e \end{cases} \quad /3.58/$$

dla $i = 1, 2, 3, \dots, W$, $e = 1, 2, 3, \dots, M$.

Wielkości dotyczące jednego elementu oznaczono indeksem "e", natomiast odnoszące się do całej konstrukcji pozostawiono bez dodatkowych oznaczeń.

Całkowitą energię potencjalną konstrukcji można zapisać jako

$$E_0 = \sum_{e=1}^M E_0^e, \quad /3.59/$$

gdzie M oznacza liczbę wszystkich elementów w dyskretnym modelu konstrukcji.

Ponieważ w zagadnieniach sprężystości całkowita energia potencjalna jest minimalna w stanie równowagi, otrzymujemy

$$d E_0 = \sum_{e=1}^M d E_0^e = 0, \quad /3.60/$$

gdzie

$$d E_0^e = \sum_{n=1}^h \sum_{i=1}^c \frac{\partial E_0^e}{\partial \{\delta_{ij}^n\}^e} d \{\delta_{ij}^n\}^e = 0. \quad /3.61/$$

Zależność /3.61/ musi być spełniona dla dowolnych wariacji przemieszczeń spełniających warunki brzegowe, a więc

$$\frac{\partial E_o^e}{\partial \{\delta_i^n\}^e} = \left[\frac{\partial E_o^e}{\partial u_i^n}, \frac{\partial E_o^e}{\partial v_i^n}, \frac{\partial E_o^e}{\partial w_i^n} \right]^T = 0 \quad /3.62/$$

dla $n = 1, 2, \dots, h$ oraz $i = 1, 2, \dots, c$.

Stosując standardowy dla metody elementów skończonych proces określania energii potencjalnej [71], [149], wykonując różniczkowanie według /3.62/ oraz uwzględniając ortogonalność szeregów trygonometrycznych /3.39/ otrzymujemy

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_o^e}{\partial \{\delta_i^n\}^e} &= \sum_{j=1}^c \iint_{A^e} [B_i^n]^T [D]^e [B_j^n] dA^e \{\delta_j^n\}^e + \\ &- \iint_{A^e} [N_i]^T \{g^n\} dA^e - \int_{S^e} [N_i]^T \{q^n\} dS^e = 0 \quad , \quad /3.63/ \end{aligned}$$

a stąd

$$\sum_{j=1}^c [k_{ij}^{nn}]^e \{\delta_j^n\}^e = \{F_i^n\}_g^e + \{F_i^n\}_q^e \quad . \quad /3.64/$$

Ostateczny układ równań równowagi konstrukcji można zapisać w postaci

$$\begin{bmatrix} [K^{11}] & 0 & \dots & 0 \\ 0 & [K^{22}] & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & [K^{hh}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\delta^1\} \\ \{\delta^2\} \\ \vdots \\ \{\delta^h\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{F^1\}_g \\ \{F^2\}_g \\ \vdots \\ \{F^h\}_g \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \{F^1\}_q \\ \{F^2\}_q \\ \vdots \\ \{F^h\}_q \end{Bmatrix} \quad /3.65/$$

lub

$$[K] \cdot \{\delta\} = \{F\}_g + \{F\}_q ,$$

gdzie

$$[K_{ij}^{nn}] = \begin{cases} \sum_{e \in C_{ij}} [k_{ij}^{nn}]^e & \text{dla } j \in C_i , \\ 0 & \text{dla } j \notin C_i , \end{cases} \quad /3.66/$$

$$\{F^n\}_g = \sum_{e \in C_i} \{F^n\}_g^e , \quad /3.67/$$

$$\{F^n\}_q = \sum_{e \in S} \{F^n\}_q^e . \quad /3.68/$$

Literą S oznaczono powierzchnię, na której rozłożone jest obciążenie $\{q\}$. Jeżeli na konstrukcję działa także układ sił $\{p\}$ i $\{P\}$ przyłożonych bezpośrednio w węzłach, to do prawej strony równania /3.65/ trzeba dodać wektory

$$\{F\}_p = [\{F^1\}_p , \dots , \{F^h\}_p]^T , \quad /3.69/$$

$$\{F\}_P = [\{F^1\}_P , \dots , \{F^h\}_P]^T . \quad /3.70/$$

Macierz sztywności konstrukcji $[K]$ jest blokowo diagonalna, a układy równań odpowiadające poszczególnym harmonicznym są niesprężone. Pozwala to na rozwiązywanie "h" układów typu

$$[K^{nn}] \{\delta^n\} = \{F^n\}_g + \{F^n\}_q + \{F^n\}_p + \{F^n\}_P \quad /3.71/$$

o wymiarach $3W \times 3W$ zamiast dużego układu równań $3Wh \times 3Wh$.

Uproszczenie takie jest możliwe, ponieważ wyrazy obciążeniowe "n"-tej harmonicznej wpływają jedynie na "n"-ty układ równań /3.71/. Końcowe rozwiązanie otrzymuje się na podstawie rozwiązań częściowych, odpowiadających poszczególnym harmonicznym. W ten sposób zagadnienie trójwymiarowe, dzięki wykorzystaniu ortogonalnych właściwości szeregów Fouriera, zredukowane zostało do szeregu zadań dwuwymiarowych.

Gdy do dokładnego opisu obciążenia konieczne jest zastosowanie dużej liczby wyrazów rozwinięcia w szereg Fouriera, wzrasta także liczba układów równań /3.71/ i rozwiązanie może okazać się nieekonomiczne. W większości praktycznie ważnych przypadków wpływ wyższych harmonicznych jest mały i czas obliczeń jest znacznie krótszy niż w przypadku zastosowania tradycyjnych elementów trójwymiarowych.

3.7. Obciążenia

3.7.1. Przęsło prostokątne

Obciążenia działające na konstrukcję należy, podobnie jak przemieszczenia /3.6/, rozwinąć w szeregi Fouriera w kierunku osi z. W pracy przeanalizowano trzy podstawowe typy obciążeń /rys. 3.1/: obciążenie rozłożone na powierzchni elementu $\{q\}$, obciążenie rozłożone wzdłuż linii węzłowej $\{p\}$ i obciążenie siłą skupioną $\{P\}$ przyłożoną na linii węzłowej. Z tych elementarnych sił buduje się model rzeczywistych obciążeń działających na przęsło.

O b c i ą ż e n i e p o w i e r z c h n i o w e

Obciążenie rozłożone na powierzchni elementu można przedstawić w postaci

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} q_x^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^{\infty} q_y^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^{\infty} q_z^n \cos \frac{n\pi z}{a} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1} [T^n] \{q^n\} \quad /3.72/$$

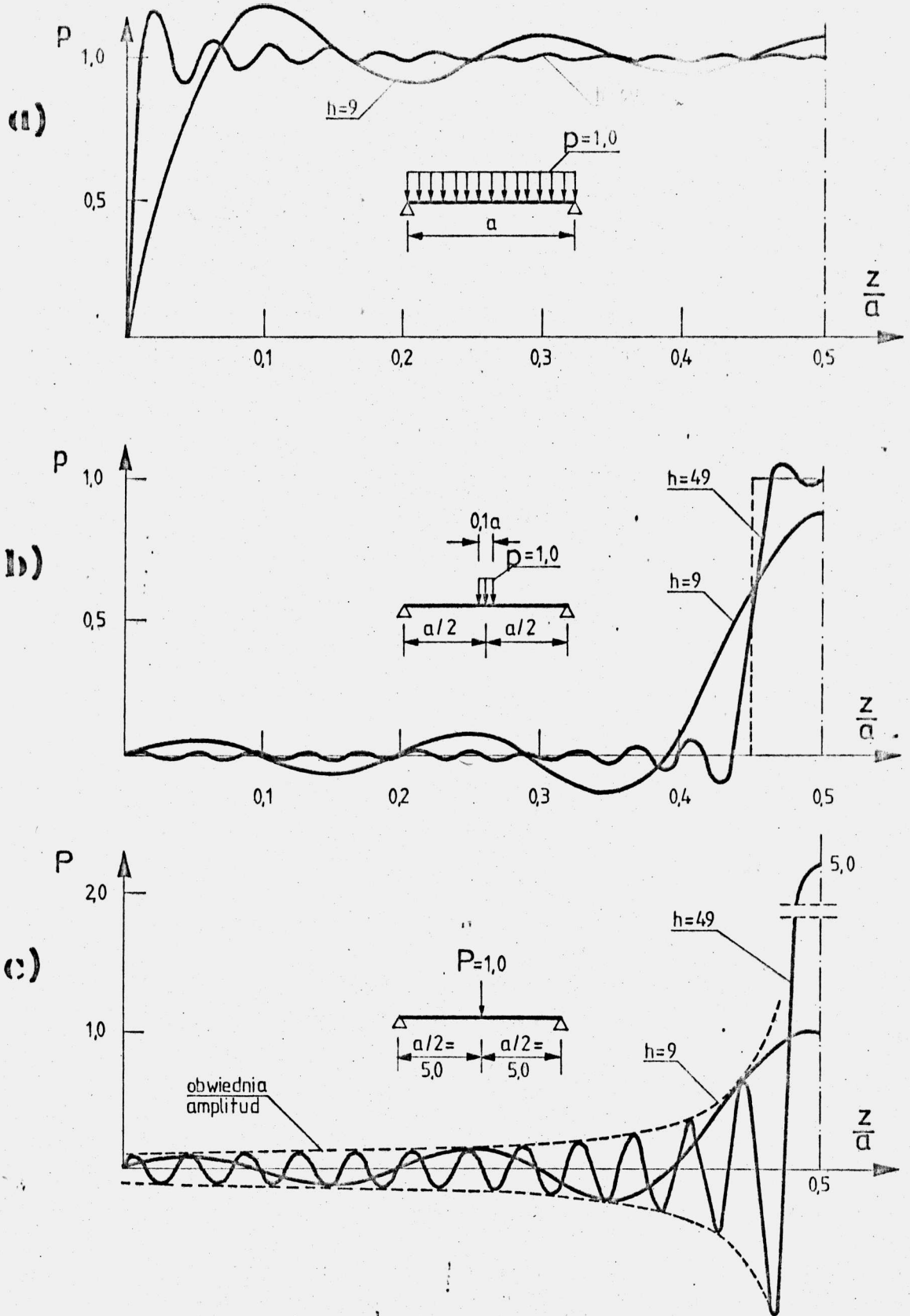
Uwzględniając w rozwiązaniu, skończoną liczbę wyrazów szeregu, przyjmujemy że w przybliżeniu

$$\{q\} = \sum_{i=1}^h [T^n] \{q^n\} \quad . \quad /3.73/$$

Wpływ pominięcia wyższych harmonicznych na dokładność odwzorowania obciążenia rozłożonego pokazano na rys. 3.4.a /obciążenie na całej długości przęsła/ i rys. 3.4.b /obciążenie na wybranym odcinku przęsła/. Elementy wektora $\{q^n\}$ oblicza się wykorzystując zasadę prac przygotowanych. Dla obciążenia równomiernie rozłożonego od $z = a_1$ do $z = a_2$ /rys. 3.1/ otrzymujemy

$$q_x^n = \frac{\int_{a_1}^{a_2} q_x \sin \frac{n\pi z}{a} dz}{\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi z}{a} dz} = \frac{2q_x}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi a_1}{a} - \cos \frac{n\pi a_2}{a} \right), \quad /3.74.a/$$

$$q_y^n = \frac{\int_{a_1}^{a_2} q_y \sin \frac{n\pi z}{a} dz}{\int_0^a \sin^2 \frac{n\pi z}{a} dz} = \frac{2q_y}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi a_1}{a} - \cos \frac{n\pi a_2}{a} \right), \quad /3.74.b/$$



Rys.3.4.

Rozwinięcie w szereg Fouriera różnych typów obciążeń

$$q_z^n = \frac{\int_{a_1}^{a_2} q_z \cos \frac{n\pi z}{a} dz}{\int_0^a \cos^2 \frac{n\pi z}{a} dz} = \frac{2q_z}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi a_2}{a} - \sin \frac{n\pi a_1}{a} \right) \quad /3.74.c/$$

dla $n = 1, 2, 3, \dots$

Uwzględniając /3.68/, wektor sił węzłowych można zapisać w postaci

$$\{F_1^n\}_q = \sum_{e \in S} \iint_{S^e} [N_1]^e [T^n][T^n] \{q^n\} ds^e, \quad /3.75/$$

gdzie sumowanie obejmuje wszystkie elementy, na których znajduje się obciążenie, a S^e oznacza należącą do elementu "e" część pola S na jakim rozłożone jest obciążenie.

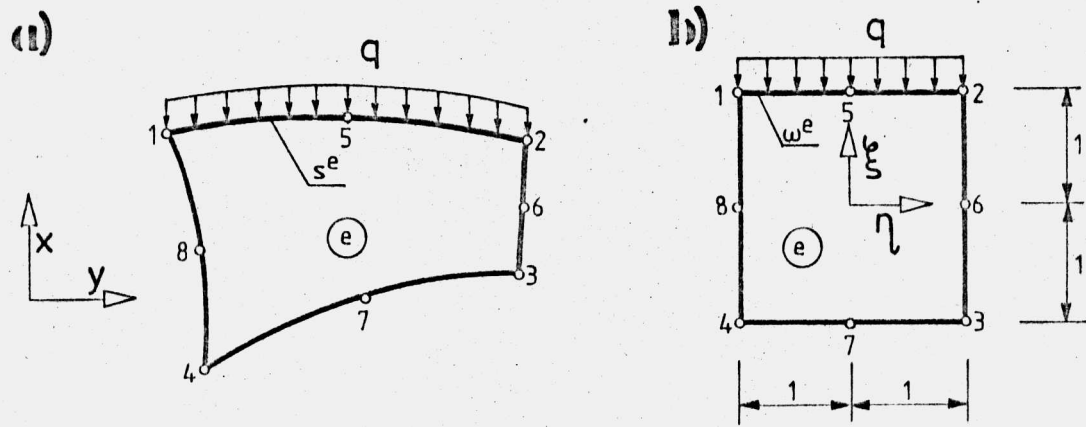
Uwzględniając ortogonalne właściwości szeregów Fouriera /3.39/, /3.40/, otrzymujemy

$$\{F_1^n\}_q = \sum_{e \in S} \frac{a}{2} \int_{S^e} [N_1]^e \{q^n\} ds = \frac{a}{2} \{q^n\} \sum_{e \in S} \int_{S^e} N_1^e ds^e, \quad /3.76/$$

gdzie s^e oznacza długość obciążonego brzegu elementu /rys.3.5.a/. Całkę w równaniu /3.76/ oblicza się przeważnie numerycznie w lokalnym układzie współrzędnych. Wtedy

$$\{F_1^n\}_q = \frac{a}{2} \{q^n\} \sum_{e \in S} \int_{\omega^e} N_1^e(\xi, \eta) \det [J] d\omega^e, \quad /3.77/$$

gdzie ω^e jest długością obciążonego brzegu elementu w układzie lokalnym /rys. 3.5.b/.



Rys. 3.5. Obciążenie powierzchniowe elementu

O b c i ą ż e n i e l i n i o w e

Obciążenie rozłożone wzdłuż linii węzłowej można wyrazić w przybliżeniu jako

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^h p_x^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^h p_y^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^h p_z^n \cos \frac{n\pi z}{a} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h [T^n] \{p^n\} \quad /3.78/$$

Dokładność odwzorowania jest analogiczna jak w przypadku obciążenia powierzchniowego /rys. 3.4/. Dla obciążenia równomiernie rozłożonego od $z = b_1$ do $z = b_2$ /rys. 3.1/ elementy wektora $\{p^n\}$ określone są wzorami analogicznymi do /3.74/ z tym, że q_x, q_y, q_z przechodzi odpowiednio w p_x, p_y, p_z , natomiast a_1 i a_2 w b_1 i b_2 .

Wektor sił węzłowych dla "n"-tej harmonicznej można zapisać jako

$$\{F_i^n\}_p = \int_0^a [T^n] [T^n] \{p^n\} dz, \quad /3.79/$$

uwzględniając /3.40/ mamy

$$\{F_i^n\}_p = \frac{a}{2} \{p^n\} = \frac{a}{n\pi} \begin{pmatrix} p_x \left(\cos \frac{n\pi b_1}{a} - \cos \frac{n\pi b_2}{a} \right) \\ p_y \left(\cos \frac{n\pi b_1}{a} - \cos \frac{n\pi b_2}{a} \right) \\ p_z \left(\sin \frac{n\pi b_2}{a} - \sin \frac{n\pi b_1}{a} \right) \end{pmatrix}. \quad /3.80/$$

Niezerowe siły $\{F_i^n\}$ występują oczywiście tylko w węźle bezpośrednio obciążonym.

Obciążenie siłą skupioną

Obciążenie skupione przyłożone w punkcie $z = b$ /rys.3.1/ na linii węzłowej "i"

$$\{P\} = [P_x, P_y, P_z]^T \quad /3.81/$$

można potraktować jako szczególny przypadek obciążenia liniowego $\{\bar{P}\}$, określonego następująco

$$\{P\} = \begin{cases} \{0\} & \text{dla } 0 \leq z < b - \varepsilon \quad \text{ i } \quad b + \varepsilon < z \leq a, \\ \frac{1}{2\varepsilon} \{P\} & \text{dla } b - \varepsilon \leq z \leq b + \varepsilon. \end{cases} \quad /3.82/$$

Zgodnie ze wzorem /3.78/ można tak określone obciążenie zapisać w postaci szeregu

$$\{\bar{p}\} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_y \\ \bar{p}_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^h \bar{p}_x^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^h \bar{p}_y^n \sin \frac{n\pi z}{a} \\ \sum_{n=1}^h \bar{p}_z^n \cos \frac{n\pi z}{a} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h [T^n] \{\bar{p}^n\} \quad /3.83/$$

Elementy wektora współczynników rozwinięcia $\{\bar{p}^n\}$ oblicza się wykorzystując zasadę prac przygotowanych

$$\begin{aligned} \bar{p}_x^n &= \frac{\int_0^{b+\varepsilon} \bar{p}_x \sin \frac{n\pi z}{a} dz}{\int_0^{b+\varepsilon} \sin^2 \frac{n\pi z}{a} dz} = \frac{P_x}{\varepsilon n\pi} \left[\cos \frac{n\pi (b-\varepsilon)}{a} - \cos \frac{n\pi (b+\varepsilon)}{a} \right] = \\ &= \frac{2P_x}{\varepsilon n\pi} \sin \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{a} \quad , \quad /3.84.a/ \end{aligned}$$

podobnie

$$\bar{p}_y^n = \frac{2P_y}{\varepsilon n\pi} \sin \frac{n\pi c}{a} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{a} \quad , \quad /3.84.b/$$

natomiast

$$\begin{aligned} \bar{p}_z^n &= \frac{\int_0^{b+\varepsilon} \bar{p}_z \cos \frac{n\pi z}{a} dz}{\int_0^{b+\varepsilon} \cos^2 \frac{n\pi z}{a} dz} = \frac{P_z}{\varepsilon n\pi} \left[\sin \frac{n\pi (b+\varepsilon)}{a} - \sin \frac{n\pi (b-\varepsilon)}{a} \right] = \\ &= \frac{2P_z}{\varepsilon n\pi} \cos \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi \varepsilon}{a} \quad . \quad /3.84.c/ \end{aligned}$$

Dla małych wartości ε można przyjąć, że $\sin \frac{n\pi \varepsilon}{a} \approx \frac{n\pi \varepsilon}{a}$ i wtedy

$$\{\bar{p}^n\} = \frac{2}{a} \begin{Bmatrix} P_x \sin \frac{n\pi b}{a} \\ P_y \sin \frac{n\pi b}{a} \\ P_z \cos \frac{n\pi b}{a} \end{Bmatrix} \quad . \quad /3.85/$$

Wektor sił węzłowych znajdujemy jako

$$\{F_1^n\}_P = \frac{a}{2} \{\bar{p}^n\} = \begin{Bmatrix} P_x \sin \frac{n\pi b}{a} \\ P_y \sin \frac{n\pi b}{a} \\ P_z \cos \frac{n\pi b}{a} \end{Bmatrix} . \quad /3.86/$$

Wpływ liczby harmonicznych na odwzorowanie obciążenia skupionego za pomocą szeregów Fouriera pokazano na rys. 3.4.c.

S i ł y s p r ę ż a j ą c e

Przedstawione wyżej podstawowe typy obciążeń pozwalają na modelowanie różnorodnych, złożonych układów obciążeń działających na przęsła mostowe.

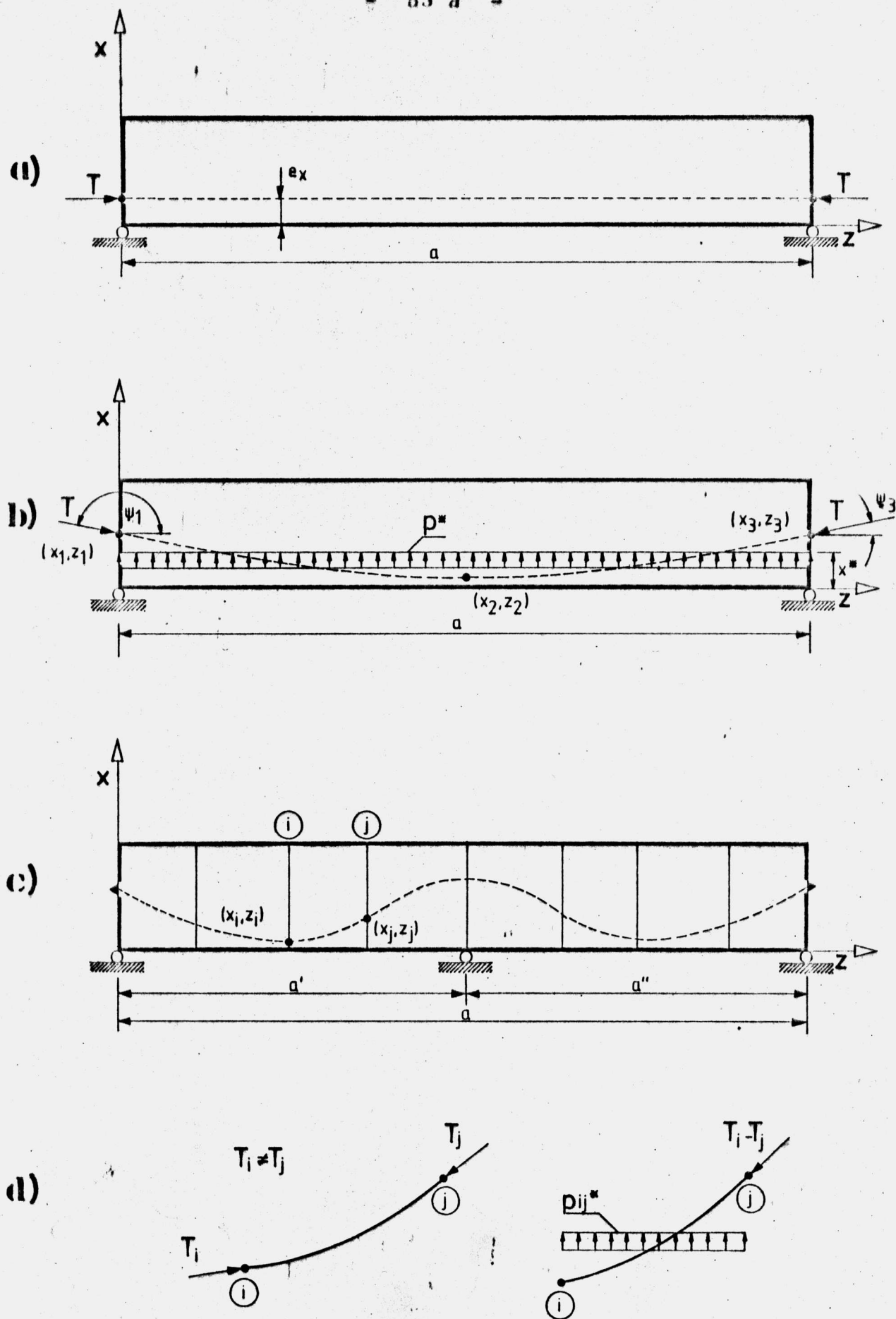
Pewnego wyjaśnienia wymaga sposób idealizacji sił sprężających. W najprostszym przypadku sprężenia za pomocą kabla o trasie prostej i przy pominięciu sił tarcia na długości kabla, praktycznie dostatecznie dokładny model tworzą dwie siły skupione przyłożone w miejscach zakotwień /rys.3.6.a/. Rzeczywisty układ sił występujących przy zastosowaniu kabli o trasie krzywoliniowej można w przybliżeniu zastąpić dwiema siłami skupionymi w miejscach zakotwień oraz obciążeniem liniowym p^* rozłożonym na długości cięgna sprężającego. W przypadku kabli o trasie parabolicznej /rys.3.6.b/ intensywność obciążenia można określić jako

$$p^* = \frac{T (\sin \psi_3 - \sin \psi_1)}{z_3 - z_1} , \quad /3.87/$$

$$\text{gdzie } \psi_i = \text{arctg} (2Az_i + B) \quad i = 1, 2, 3 , \quad /3.88/$$

natomiast

$$A = \frac{(x_1 - x_2)/(z_1 - z_2) - (x_2 - x_3)/(z_2 - z_3)}{(z_1 - z_3)} , \quad /3.89/$$



Rys 3.6. Siły sprężające

$$B = \frac{x_2 - x_3}{z_2 - z_3} - A (z_2 + z_3) \quad . \quad /3.90/$$

Przez T oznaczono siłę sprężającą, a "x_i" oraz "z_i" oznaczają współrzędne punktów definiujących trasę kabla /rys.3.6.b/.

Zazwyczaj przyjmuje się, że obciążenie p* działa w płaszczyźnie trasy kabla, wzdłuż prostej o współrzędnej

$$x^* = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 x_i \quad . \quad /3.91/$$

W przypadku trasy o złożonym profilu można zastosować podział przęsła na przedziały /rys. 3.6.c,d/, umożliwiając także uwzględnienie wpływu tarcia na zmianę siły sprężającej na długości kabla. Rzeczywisty układ sił zastępowany jest wtedy dwiema siłami w miejscach zakotwień, układem obciążeń rozłożonych p_{ij}* i szeregiem sił (T_i - T_j), odpowiadających stratom siły sprężającej na długości przedziału. W tak określonym modelu dokładność zależy od przyjętej gęstości podziału.

Podobne sposoby przedstawiania sił sprężających zastosowano z powodzeniem np. w pracach [37], [80]. W przypadku sprężenia w płaszczyźnie xy lub yz stosuje się analogiczne podejście.

3.7.2. Przęsło zakrzywione w planie

Obciążenia przęseł zakrzywionych w planie modeluje się, analogicznie jak w przypadku przęseł prostokątnych, wykorzystując trzy podstawowe typy obciążeń: powierzchniowe $\{q\}$, liniowe $\{p\}$ i skupione $\{P\}$ /rys. 3.2./ .

O b c i ą ż e n i e p o w i e r z c h n i o w e

Rozwijając obciążenie w szereg Fouriera w kierunku współrzędnej φ , otrzymujemy

$$\{q\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_r \\ q_\varphi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_{n=1}^h q_x^n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \sum_{n=1}^h q_r^n \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \\ \sum_{n=1}^h q_\varphi^n \cos \frac{n\pi\varphi}{\alpha} \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h [T^n] \{q^n\}, \quad /3.92/$$

gdzie $[T^n]$ określone jest wzorem /3.18/ .

Dla obciążenia równomiernia rozłożonego od $\varphi = \alpha_1$ do $\varphi = \alpha_2$ znajdujemy podobnie jak w równaniach /3.74/:

$$q_x^n = \frac{2q_x}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} \right), \quad /3.93.a/$$

$$q_r^n = \frac{2q_r}{n\pi} \left(\cos \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} \right), \quad /3.93.b/$$

$$q_\varphi^n = \frac{2q}{n\pi} \left(\sin \frac{n\pi\alpha_2}{\alpha} - \sin \frac{n\pi\alpha_1}{\alpha} \right), \quad /3.93.c/$$

Wektor sił węzłowych odpowiadający "n"-tej harmonicznej obliczamy jako

$$\begin{aligned}
 \{F_i^n\}_q &= \frac{2R}{2} \{q^n\} \sum_{e \in \mathcal{G}} \int_{s^e} N_i^e ds^e = \\
 &= \frac{2R}{2} \{q^n\} \sum_{e \in \mathcal{G}} \int_{\omega^e} N_i^e(\xi, \eta) \det [J] d\omega^e. \quad /3.94/
 \end{aligned}$$

Obciążenie liniowe

Obciążenie rozłożone wzdłuż linii węzłowej /rys.3.2/ można zapisać jako

$$\{p\} = \begin{Bmatrix} p_x \\ p_r \\ p_\varphi \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h [T^n] \{p^n\}. \quad /3.95/$$

Wektor sił węzłowych ma postać analogiczną do /3.80/

$$\{F_i^n\}_p = \frac{\alpha}{2} \{p^n\} = \frac{\alpha}{n\pi} \begin{Bmatrix} p_x \left(\cos \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \right) \\ p_r \left(\cos \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} - \cos \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} \right) \\ p_\varphi \left(\sin \frac{n\pi\beta_2}{\alpha} - \sin \frac{n\pi\beta_1}{\alpha} \right) \end{Bmatrix}. \quad /3.96/$$

Obciążenie siłą skupioną

Traktując obciążenie skupione jako szczególny przypadek obciążenia liniowego, możemy zapisać podobnie jak w p. 3.7.1:

$$\{\bar{p}\} = \begin{cases} \{0\} & \text{dla } 0 \leq \varphi < \beta - \varepsilon \quad \text{ i } \quad \beta + \varepsilon < \varphi \leq \alpha, \\ \frac{1}{2R\varepsilon} \{p\} & \text{dla } \beta - \varepsilon \leq \varphi \leq \beta + \varepsilon, \end{cases} \quad /3.97/$$

gdzie R oznacza współrzędną "r" punktu przyłożenia siły $\{P\}$.
Rozwijając obciążenie w szereg Fouriera otrzymujemy

$$\{\bar{p}\} = \begin{Bmatrix} \bar{p}_x \\ \bar{p}_r \\ \bar{p}_\varphi \end{Bmatrix} = \sum_{n=1}^h [T^n] \{\bar{p}^n\}, \quad /3.98/$$

gdzie

$$\bar{p}_x^n = \frac{\int_0^{(\beta+\epsilon)} \bar{p}_x \cdot \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} R d\varphi - \int_0^{(\beta-\epsilon)} \bar{p}_x \cdot \sin \frac{n\pi\varphi}{\alpha} R d\varphi}{\int_0^{\beta} \sin^2 \frac{n\pi\varphi}{\alpha} R d\varphi} = \frac{2P_x}{R \epsilon n\pi} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \sin \frac{n\pi\epsilon}{\alpha} =$$

$$= \frac{2P_x}{R\alpha} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha}, \quad /3.99.a/$$

podobnie

$$\bar{p}_r^n = \frac{2P_r}{R\alpha} \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha}, \quad /3.99.b/$$

$$\bar{p}_\varphi^n = \frac{2P_\varphi}{R\alpha} \cos \frac{n\pi\beta}{\alpha}. \quad /3.99.c/$$

Ostatecznie wektor sił węzłowych można zapisać jako

$$\{F_1^n\}_P = \frac{\alpha}{2} \{\bar{p}^n\} = \frac{1}{R} \begin{Bmatrix} P_x \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \\ P_y \sin \frac{n\pi\beta}{\alpha} \\ P_z \cos \frac{n\pi\beta}{\alpha} \end{Bmatrix}. \quad /3.100/$$

3.8. Odkształcalne podpory pośrednie

Przedstawiony powyżej sposób obliczeń dotyczy konstrukcji podpartych swobodnie na obu końcach. Znaczne rozszerzenie zakresu zastosowań rozwiązania można uzyskać, uwzględniając wpływ dodatkowych podpór pośrednich /rys.3.7.a/.

Zastosowana w niniejszej pracy koncepcja polega na wyznaczeniu układu nieznanych reakcji podporowych $\{R\}$ w oparciu o metodę sił przy wykorzystaniu geometrycznych warunków zgodności przemieszczeń. Obliczone w ten sposób reakcje traktowane są następnie jako dodatkowy układ obciążeń swobodnie podpartej konstrukcji o rozpiętości równej długości całego mostu.

W procesie obliczania konstrukcji można wyróżnić następujące etapy:

- 1/ traktując całą konstrukcję jako swobodnie podpartą na obu końcach wyznacza się przemieszczenia $\{d\}_1$ w miejscach podpór pośrednich, wywołane zadaniem obciążeniem zewnętrznym

$$\{d\}_1 = [\{d_1\}_1, \{d_2\}_1, \dots, \{d_t\}_1]^T, \quad /3.101/$$

$$\{d_i\}_1 = [u_i, v_i, w_i]^T, \quad /3.102/$$

gdzie "t" oznacza liczbę podpór pośrednich;

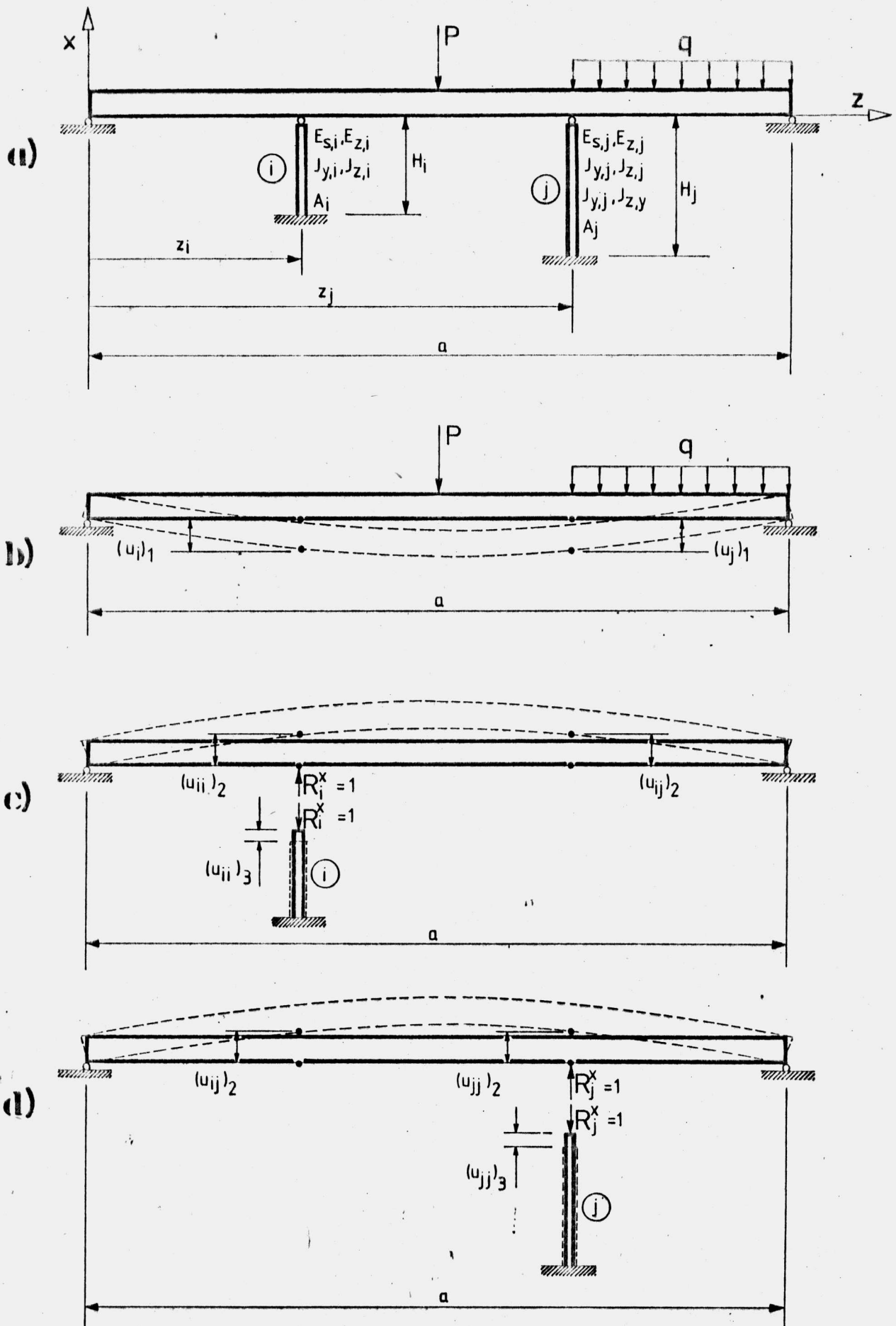
- 2/ konstrukcja traktowana w dalszym ciągu jako swobodnie podparta na obu końcach obciążana jest kolejno jednostkowymi siłami odpowiadającymi składowym sił $\{R\}$ /rys. 3.7.c,d/ i budowana jest macierz odkształcalności konstrukcji $[C]_2$ określona jako

$$\{d\}_2 = [C]_2 \cdot \{R\}, \quad /3.103/$$

gdzie

$$\{d_i\}_2 = [u_i, v_i, w_i]^T, \quad /3.104/$$

$$[C_{ij}]_2 = \begin{bmatrix} u_{ij}^x & u_{ij}^y & u_{ij}^z \\ v_{ij}^x & v_{ij}^y & v_{ij}^z \\ w_{ij}^x & w_{ij}^y & w_{ij}^z \end{bmatrix}_2, \quad /3.105/$$



Rys. 37. Odształcalne podpory pośrednie

$$\{R_i\} = [R_i^x, R_i^y, R_i^z]^T \quad /3.106/$$

$$i, j = 1, 2, \dots, t \quad ;$$

- 3/ podpory pośrednie obciążane są kolejno jednostkowymi siłami odpowiadającymi poszczególnym składowym wektora $\{R\}$ i tworzona jest macierz odkształcalności podpór $[C]_3$ określona związkami

$$\{d\}_3 = [C]_3 \cdot \{R\} \quad , \quad /3.107/$$

w którym budowa poszczególnych składników jest taka sama jak w równaniu /3.103/ ;

- 4/ na podstawie warunku geometrycznej zgodności przemieszczeń

$$\{d\}_1 + [C]_2 \{R\} + [C]_3 \{R\} = 0 \quad /3.108/$$

wyznaczane są reakcje w podporach pośrednich

$$\{R\} = -[C]^{-1} \{d\}_1 \quad , \quad /3.109/$$

gdzie

$$[C] = [C]_2 + [C]_3 \quad ;$$

- 5/ ostateczne wielkości przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wyznaczane są jak dla konstrukcji swobodnie podpartej na końcach, obciążonej zadany układem sił zewnętrznych oraz reakcjami podpór pośrednich /3.109/.

W programach stanowiących część niniejszej pracy /rozdział 4/ uwzględniono istotny w praktyce przypadek podpór pośrednich, a mianowicie układ dowolnie usytuowanych niezależnych podpór słupowych. Założono przegubowe połączenie podpór pośrednich z konstrukcją przęsła. Macierz $[C]_3$ odpowiadająca takim podporom jest diagonalna, a elementarne podmacierze mają postać

$$[C_{ii}]_3 = \begin{bmatrix} \frac{H_i}{E_{s,i} A_i} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{H_i^3}{3E_{g,i} J_{z,i}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H_i^3}{3E_{g,i} J_{y,i}} \end{bmatrix}, \quad /3.110/$$

gdzie:

- H_i - wysokość "i"-tego słupa podporowego,
- E_s, E_g - moduł sprężystości przy ściskaniu i zginaniu,
- J_y, J_z - momenty bezwładności przekroju poprzecznego słupa podporowego,
- A - powierzchnia przekroju poprzecznego słupa.

Elementy macierzy $[C_{ii}]_3$ leżące poza główną przekątną są bardzo małe w porównaniu z elementami leżącymi na przekątnej i dlatego we wzorze /3.110/ przyjęto je jako równe zero.

W opracowanych programach reakcje podpór mogą być przyłożone do konstrukcji przęsła w postaci sił skupionych lub jako równoważne obciążenie równomiernie rozłożone na powierzchni styku.

4. PROGRAMY DO OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

4.1. Uwagi wstępne

W oparciu o przedstawiony w poprzednim rozdziale algorytm, opracowano zestaw programów umożliwiający przestrzenną analizę przęseł mostowych przy wykorzystaniu EMC.

Przy opracowywaniu programów szczególną uwagę zwrócono na:

- 1/ racjonalne wykorzystanie pamięci operacyjnej maszyny ;
- 2/ minimalizację liczby danych wprowadzanych do programu ;
- 3/ zwięzły sposób zapisu programu ;
- 4/ możliwie krótki czas obliczeń ;
- 5/ przejrzystą budowę programu, pozwalającą na szybkie wprowadzenie zmian lub uzupełnień.

W celu zrealizowania wymienionych wyżej postulatów postanowiono:

- zrezygnować ze standardowego dla programów metody elementów skończonych zapisu macierzowego [71] , [149] , wprowadzając odpowiednie wyrażenia analityczne ;
- zamiast jednego dużego programu opracować zestaw kilku programów cząstkowych współpracujących za pośrednictwem pamięci zewnętrznej ;
- poszczególnym programom nadać strukturę segmentową, wyróżniając część główną i pewną liczbę podprogramów.

Jednoczesne spełnienie wymienionych na początku postulatów nie jest praktycznie możliwe, a w związku z tym ostateczna postać programu jest pewnym rozwiązaniem kompromisowym, uwzględniającym możliwości wykorzystywanych w Uczelni maszyn cyfrowych.

Programy napisano w języku FORTRAN przystosowanym do maszyn serii ODRA 1300. Obliczenia wykonywano na maszynach

ODRA 1305 i ODRA 1325, wykorzystując pamięć operacyjną 32 K. Programy mogą być łatwo dostosowane do każdej innej maszyny cyfrowej posiadającej:

- kompilator języka FORTRAN,
- pamięć operacyjną nie mniejszą niż 32 K,
- możliwość współpracy z pamięcią zewnętrzną w postaci taśmy magnetycznej.

W czasie przygotowywania i uruchamiania programów wykorzystano przede wszystkim z prac [42] , [66] , [126] , [128] .

Opracowane programy oparte są na następujących założeniach:

- a/ materiał konstrukcji jest liniowo-sprężysty, jednorodny i izotropowy ;
- b/ poszczególne elementy mogą mieć różne charakterystyki materiałowe ;
- c/ przewidziano następujące podstawowe typy obciążeń /rys. 3.1 i rys. 3.2/ :
 - obciążenie liniowe równomiernie rozłożone wzdłuż linii węzłowej,
 - obciążenie skupione działające na linii węzłowej,
 - obciążenie równomiernie rozłożone na powierzchni elementu ;
- d/ obliczenia mogą być wykonywane dla dowolnej liczby harmonicznych ;
- e/ programy przeznaczone są do analizy statycznej konstrukcji swobodnie podpartych na obu końcach, z możliwością uwzględnienia wpływu dowolnie usytuowanych, odkształcalnych słupowych podpór pośrednich ;
- f/ ukształtowanie przekroju poprzecznego analizowanych konstrukcji może być dowolne .

4.2. Sposób organizacji obliczeń

Opracowano dwa zestawy programów:

- 1/ zestaw PR - służący do analizy prostokątnych pręseł pryzmatycznych, swobodnie podpartych na obu końcach, umożliwiającą uwzględnianie pośrednich podpór słupowych;
- 2/ zestaw KR - przeznaczony do analizy pryzmatycznych pręseł zakrzywionych w planie, o stałej krzywiznie i obu końcach podpartych swobodnie wzdłuż promienia, z możliwością uwzględniania dowolnie usytuowanych pośrednich podpór słupowych.

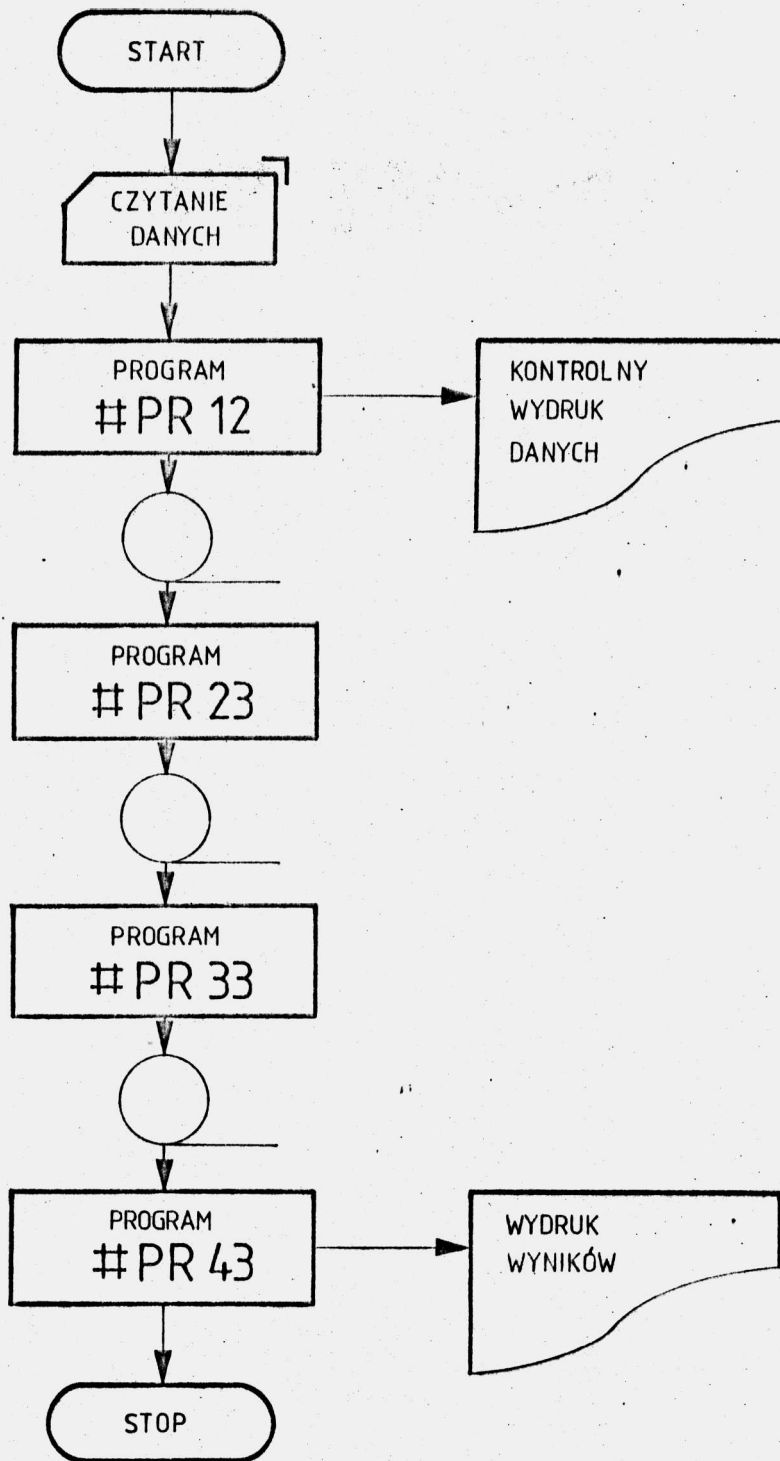
Każdy zestaw składa się z 4 programów. Oba zestawy posiadają podobną organizację i strukturę logiczną. Schemat operacyjny, na przykładzie zestawu PR, pokazano na rys. 4.1.

Zestawy opracowane są w ten sposób, że pierwszy program wczytuje wszystkie dane potrzebne do obliczeń, wykonuje zaprogramowane operacje i ich wyniki przekazuje do pamięci zewnętrznej. Wyniki te stanowią jednocześnie dane wejściowe dla następnego programu. Na tej zasadzie oparta jest współpraca kolejnych programów w zestawie. Ostatni program, po zakończeniu obliczeń, drukuje ostateczne wyniki.

Zakres obliczeń realizowany przez kolejne programy podano w tabeli 4.1. W sumie opracowano 7 programów, gdyż program PR 33 rozwiązujący układ równań liniowych stosowany jest w obu zestawach w identycznej postaci.

Do obliczania całek C_1 według wzoru /3.38/ zastosowano w programach PR 12 i KR 12 /tab. 4.1/ całkowanie numeryczne sposobem Gaussa, przyjmując jednakową liczbę punktów całkowania w obu kierunkach. Liczba punktów całkowania, odpowiednia dla zastosowanego typu elementów, deklarowana jest w danych wejściowych.

Macierz sztywności elementu tworzona jest w programach PR 23 i KR 23 /tab. 4.1/ na podstawie analitycznych wyrażeń (wzory /3.38/ i /3.47/), określających poszczególne elementy macierzy. Zastosowane rozwiązanie pozwala na znaczne zmniejszenie liczby operacji, a więc i czasu obliczeń, w porównaniu ze standardowym ujęciem macierzowym. Oszczędności



Rys. 4.1. Blokowy schemat operacyjny dla zestawu PR

Tabela 4.1

Zestawienie programów do obliczeń numerycznych

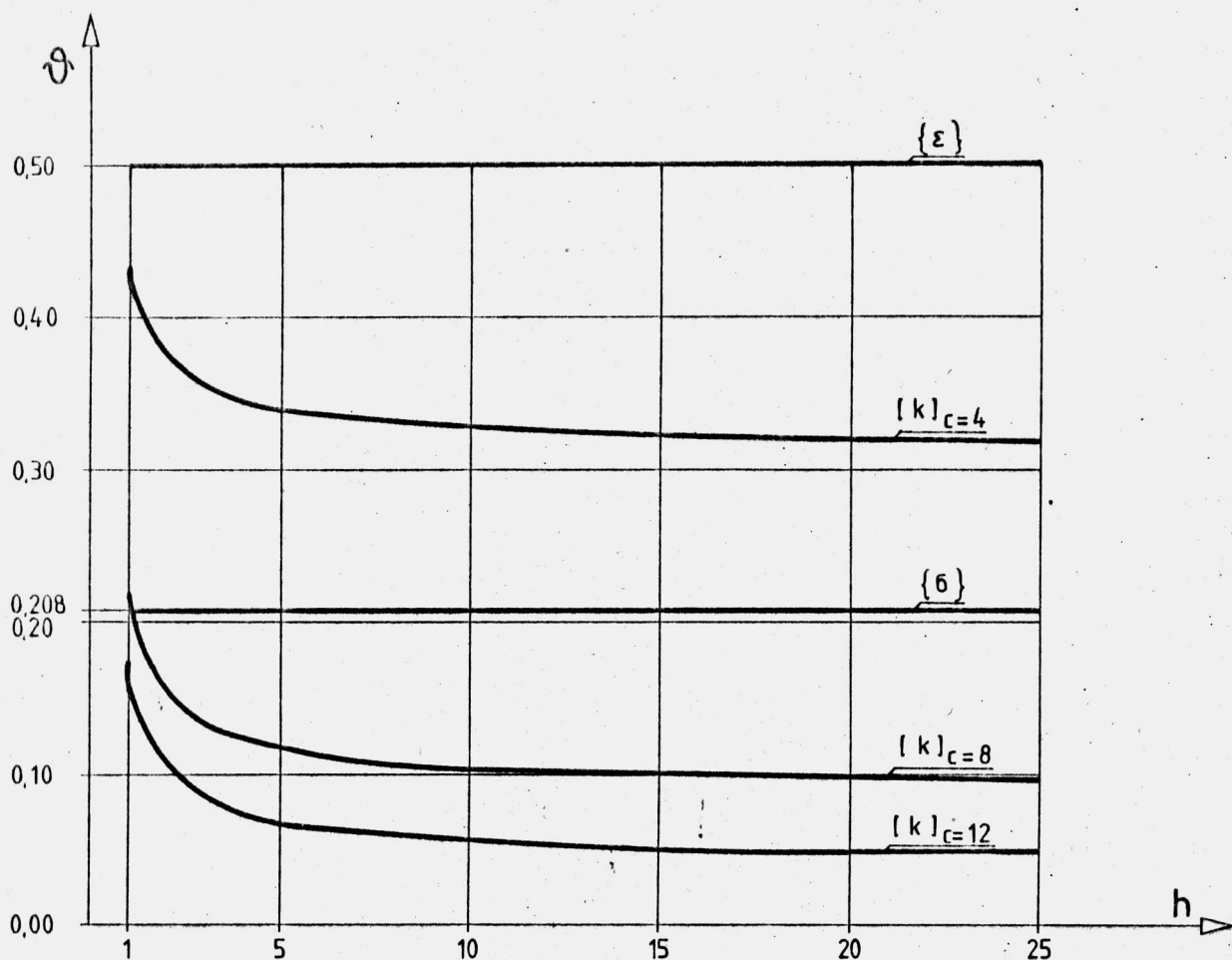
L.p.	Nazwa programu	Realizowany zakres obliczeń
1.	PR 12 KR 12	<ul style="list-style-type: none"> - czytanie danych. - obliczanie elementów macierzy sprężystości [D] - obliczanie całek C_1, potrzebnych do określenia macierzy sztywności elementu [k]
2.	PR 23 KR 23	<ul style="list-style-type: none"> - budowa macierzy sztywności elementów [k] i sumowanie ich w macierz sztywności układu [K] - obliczanie elementów wektora obciążeń {F}
3.	PR 33 KR 33	<ul style="list-style-type: none"> - rozwiązywanie układu równań $[K] = \{F\}$
4.	PR 43 KR 43	<ul style="list-style-type: none"> - obliczanie sił {R} w podporach pośrednich i modyfikacja wektora rozwiązań - obliczanie przemieszczeń, odkształceń i naprężeń - wydruk wyników

wynikają przede wszystkim z pominięcia operacji na zerowych elementach macierzy [59]. Na podstawie równania /3.41/ macierz sztywności elementu dla "n"-tej harmonicznej można zapisać jako

$$[k^{nn}] = \frac{a}{2} \int \int_{A^e} \left([\bar{B}^n]^T [D_{11}] [\bar{B}^n] + [\bar{\bar{B}}^n]^T [D_{22}] [\bar{\bar{B}}^n] \right) dA^e = \quad /4.1/$$

$$= [\bar{I}] + [\bar{\bar{I}}] \quad , \quad n = 1, 2, \dots, h \quad .$$

Liczbę elementarnych operacji dodawania i mnożenia, niezbędną do budowy macierzy sztywności według wzoru /4.1/ podano w tabeli 4.2. Dla porównania w tabeli 4.3 zestawiono analogiczne wielkości dotyczące zastosowanego w pracy sposobu, opartego na wzorach /3.43/ i /3.44/. Podane wielkości określają liczbę operacji dla jednej harmonicznej.



Rys 4.2. Zależność współczynnika ϑ od liczby harmonicznych

W przypadku pierwszego sposobu dla każdej kolejnej harmonicznej należy powtórzyć wszystkie operacje opisane w tab. 4.2.. W drugim sposobie, działania podane w tab. 4.3 trzeba wykonać dla pierwszej harmonicznej, a dla następnych powtarzać jedynie obliczenia określone w p. 4 tabeli.

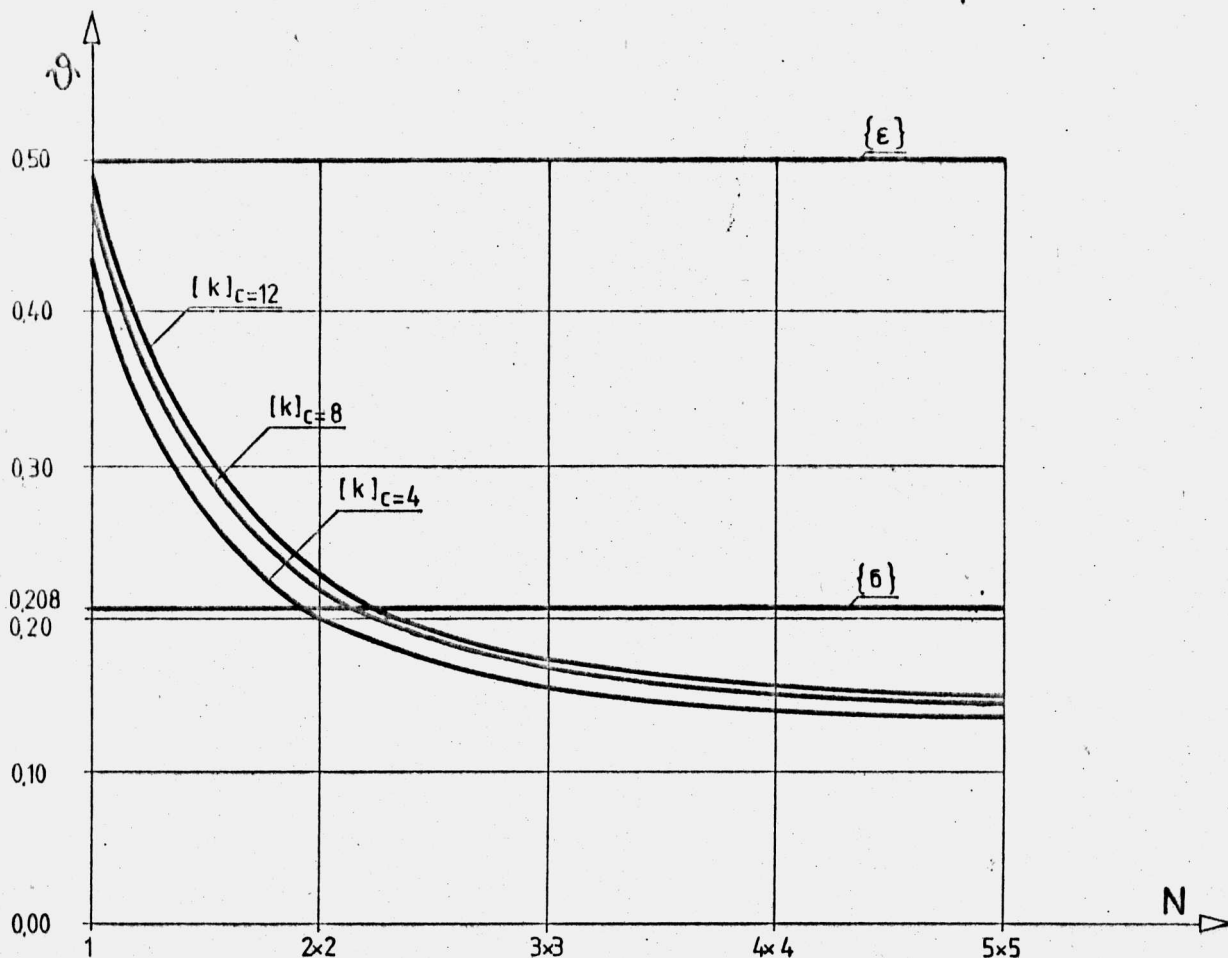
Porównanie ogólnej liczby operacji w przypadku jednego i drugiego sposobu w zależności od typu elementu i liczby harmonicznych pokazano na rys. 4.2. Współczynnik \mathcal{V} określony jest jako

$$\mathcal{V} = \frac{\sum_2 + \Pi_2}{\sum_1 + \Pi_1}, \quad /4.2/$$

gdzie

\sum - liczba operacji sumowania ,
 Π - liczba operacji mnożenia .

Na rys. 4.3 pokazano zależność \mathcal{V} od typu elementu i liczby punktów całkowania .



Rys. 4.3. Zależność współczynnika \mathcal{V} od liczby punktów całkowania

Tabela 4.2

L.p.	Etap obliczeń	Liczba sumowań \sum_1		Liczba mnożeń \prod_1	
		$[\bar{I}]$	$[\bar{I}]$	$[\bar{I}]$	$[\bar{I}]$
1.	Dla każdego punktu całkowania: - mnożenie elementów macierzy $[D]$ przez współczynniki wagi - obliczenie iloczynu $[D][B^n]$ - obliczenie $[B^n]^T[D][B^n]$	 4x4x3c 2x3c (3c+1)	 2x2x3c 3c (3c+1)	 4x4 4x4x3c 2x3c (3c+1)	 2x2 2x2x3c 3c (3c+1)
2.	Powtórzenie operacji z p.1 dla N punktów całkowania	$(18c^2+54c) N$	$(9c^2+15c) N$	$(18c^2+54c+16)N$	$(9c^2+15c+4)N$
3.	Sumowanie wartości wyznaczonych w N punktach całkowania	$0,5 [3c(3c+1)]N$	$0,5 [3c(3c+1)]N$		
4.	Dodawanie macierzy $[\bar{I}] + [\bar{I}]$	$0,5 [3c(3c+1)]$			
5.	Sumaryczna liczba operacji	$(36c^2+72c)N + 0,5(9c^2+3c)$		$(27c^2 + 69c + 20) N$	

Tabela 4.3

L.p.	Etap obliczeń	Liczba sumowań \sum_2	Liczba mnożeń \prod_2
1.	Dla każdego punktu całkowania: - mnożenie $\frac{\partial N_i}{\partial x}$, $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, N_i przez współczynniki wagi ; $i=1,2,\dots,c$ - obliczanie iloczynów A_j wg /3.39/ $j = 1,2,\dots,9$		$3c$ $0,5 [c (c+1)] 3 \times 3$
2.	Powtórzenie operacji z p.1 dla N punktów całkowania		$0,5 (9c^2 + 15c) N$
3.	Obliczanie całek C_j przez sumowanie wartości A_j wyznaczonych w N punktach całkowania ; $j = 1,2,\dots,9$	$0,5 [c (c+1)] 3 \times 3 \times N$	
4.	Wykonanie obliczeń wg wzoru /3.43/	$0,5 [c (c+1)] \times 21$	$0,5 [c (c+1)] \times 32$
5.	Sumaryczna liczba operacji	$0,5 (c^2 + c)(9N + 21)$	$0,5 (9c^2 + 15c)N + 16(c^2 + c)$

Minimalną liczbę punktów całkowania można ustalić na podstawie następującego twierdzenia [74]: w zagadnieniach analizy przemieszczeń sprężystych zbieżność wyników jest zapewniona wówczas, gdy za pomocą użytego sposobu całkowania można dokładnie wyznaczyć objętość elementu. Na mocy powyższego twierdzenia niezbędną liczbę punktów całkowania można określić dla każdego typu elementu badając postać jacobianu $[J]$ ([149], [153]). W niektórych przypadkach bardziej ekonomiczne może okazać się zastosowanie dokładniejszego całkowania przy większej liczbie punktów, a zmniejszenie natomiast liczby elementów użytych do opisu konstrukcji. Opracowane programy umożliwiają swobodny dobór liczby elementów oraz punktów całkowania.

Podobne korzyści jak w przypadku tworzenia macierzy sztywności można uzyskać przy obliczaniu wektora odkształceń $\{\epsilon\}$ i naprężeń $\{\sigma\}$ na podstawie wzorów odpowiednio /3.24/ i /3.31/. Wyznaczone wielkości współczynnika ν pokazano na rys. 4.2 i 4.3. Dla pryzmatycznych elementów zakrzywionych współczynnik ν przyjmuje podobne wielkości jak dla elementów prostych.

Zagadnienie całkowania numerycznego oraz sposób określania macierzy sztywności i innych charakterystyk elementów skończonych mają bardzo istotny wpływ na efektywność otrzymanego rozwiązania, czego dowodem są liczne prace poświęcone tym problemom, np. [33], [56], [65], [66], [68], [74], [75], [104], [152], [156].

W programach PR 33 i KR 33 rozwiązujących układ równań liniowych /tab. 4.1/ zastosowano podprogram oparty na pracy [90]. Umożliwia on otrzymanie "m" rozwiązań układu dla "m" prawych stron przy jednokrotnym wywołaniu, co pozwala na zmniejszenie ogólnego kosztu obliczeń.

4.3. Dane wejściowe i postać wyników

W czasie opracowywania programów kierowano się zasadą minimalizacji liczby danych wejściowych, co ułatwia użytkowanie programu oraz zmniejsza możliwość powstawania błędów na etapie przygotowywania danych.

Dla obu zestawów, PR i KR, układ danych wejściowych jest identyczny. Różnice występują przy określaniu rozpiętości przęsła oraz usytuowania obciążenia na długości przęsła. W przypadku przęseł prostokątnych /zestaw PR/ wielkości powyższe należy podawać w jednostkach długości, natomiast dla przęseł zakrzywionych jako wielkości odpowiednich kątów wewnętrznych φ /rys. 3.2/, wyrażone w mierze łukowej.

Poniżej omówiono dane wejściowe w kolejności wczytywania /przed oznaczeniem każdej zmiennej podano w nawiasach jej typ: R - oznacza zmienne typu REAL, I - zmienne typu INTEGER/ :

1/(I) LEL - liczba elementów ;

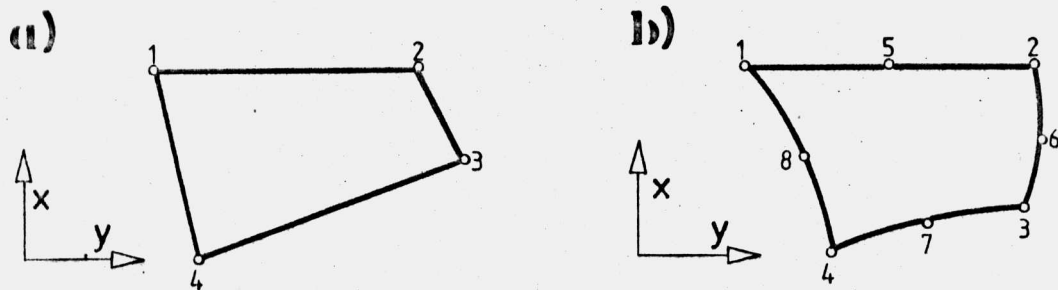
2/(I) W - liczba węzłów ;

3/(I) W_1 - liczba węzłów w jednym elemencie, określająca jednocześnie typ elementu :

$W_1 = 4$ - elementy o zmienności liniowej /rys.4.4.a/

$W_1 = 8$ - elementy o zmienności kwadratowej

/rys. 4.4.b/ ;



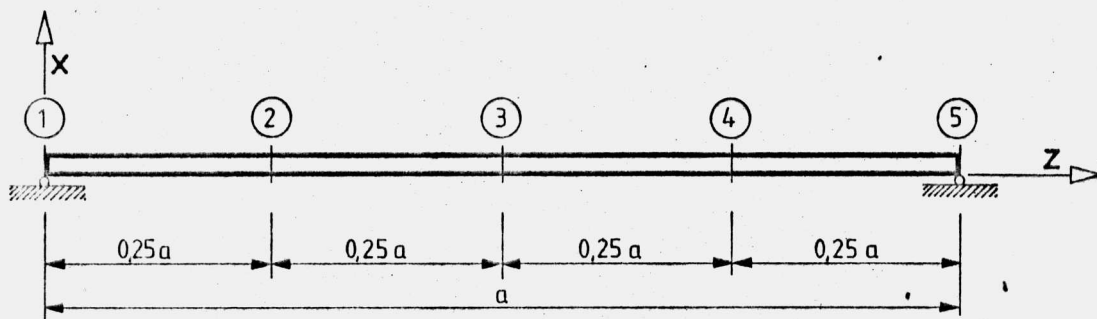
Rys. 4.4. Typy elementów zastosowane w programach

4/(I) H - liczba harmonicznych uwzględnianych w obliczeniach ;

5/(I) PC - liczba punktów całkowania w każdym kierunku, całkowanie sposobem Gaussa , PC można przyjmować od 1 do 6 ;

6/(R) DP - rozpiętość przęsła ;

- 7/ (I) TM - liczba typów materiału ;
- 8/ (I) R - liczba układów obciążeń ;
- 9/ (I) M_1 - szerokość półpasma macierzy sztywności /bez głównej przekątnej/ ;
- 10/ (I) SYM - wskaźnik symetrii obciążenia ;
- 11/ (I) PRP - liczba przekrojów, w których mają być obliczane przemieszczenia /rys. 4.5/
PRP może się zmieniać od 0 do 5 ;



Rys. 4.5. Oznaczenia przekrojów

- 12/ (I) PRN - liczba przekrojów, w których mają być obliczane naprężenia, PRN określa się analogicznie jak PRP ;
- 13/ (I) ICONT - wskaźnik sterujący uwzględnianiem podpór pośrednich ;
- 14/ (R) EPS - dokładność obliczania det [J] ;
- 15/ (R) MAT [1:TM, 1:2] - tablica zawierająca stałe materiałowe /moduły sprężystości Younga i współczynniki Poissona/ dla poszczególnych typów materiału ;
- 16/ (I) ELEM [1:LEL, 1:(W_1+1)] - określenie wzajemnych powiązań między elementami; dla każdego elementu podaje się numery należących do niego węzłów w kolejności pokazanej na rys. 4.4 oraz numer typu materiału

- 17/ (R) X [1:W] - współrzędne "x" położenia węzłów ;
- 18/ (R) Y [1:W] - współrzędne "y" położenia węzłów ;
- 19/ (I) R_1 [1:R] - liczby pojedynczych obciążeń tworzących kolejne układy ;
- 20/ (R) OBC $[1:\sum_{I=1}^R R_1(I), 1:7]$ - tablica zawierająca charakterystyki obciążeń /nr typu obciążenia, nr węzła obciążonego, składowe obciążenia kolejno w kierunku osi x,y,z, współrzędne początku i końca obciążenia ;
- 21/ (R) SLUP [1:(R-1), 1:6] - charakterystyka słupowych podpór pośrednich /nr linii węzłowej przechodzącej przez oś podpory, współrzędna "z" lub " φ " osi podpory, kierunek składowej reakcji, wysokość podpory, pole przekroju lub moment bezwładności podpory, moduł sprężystości materiału podpory/;

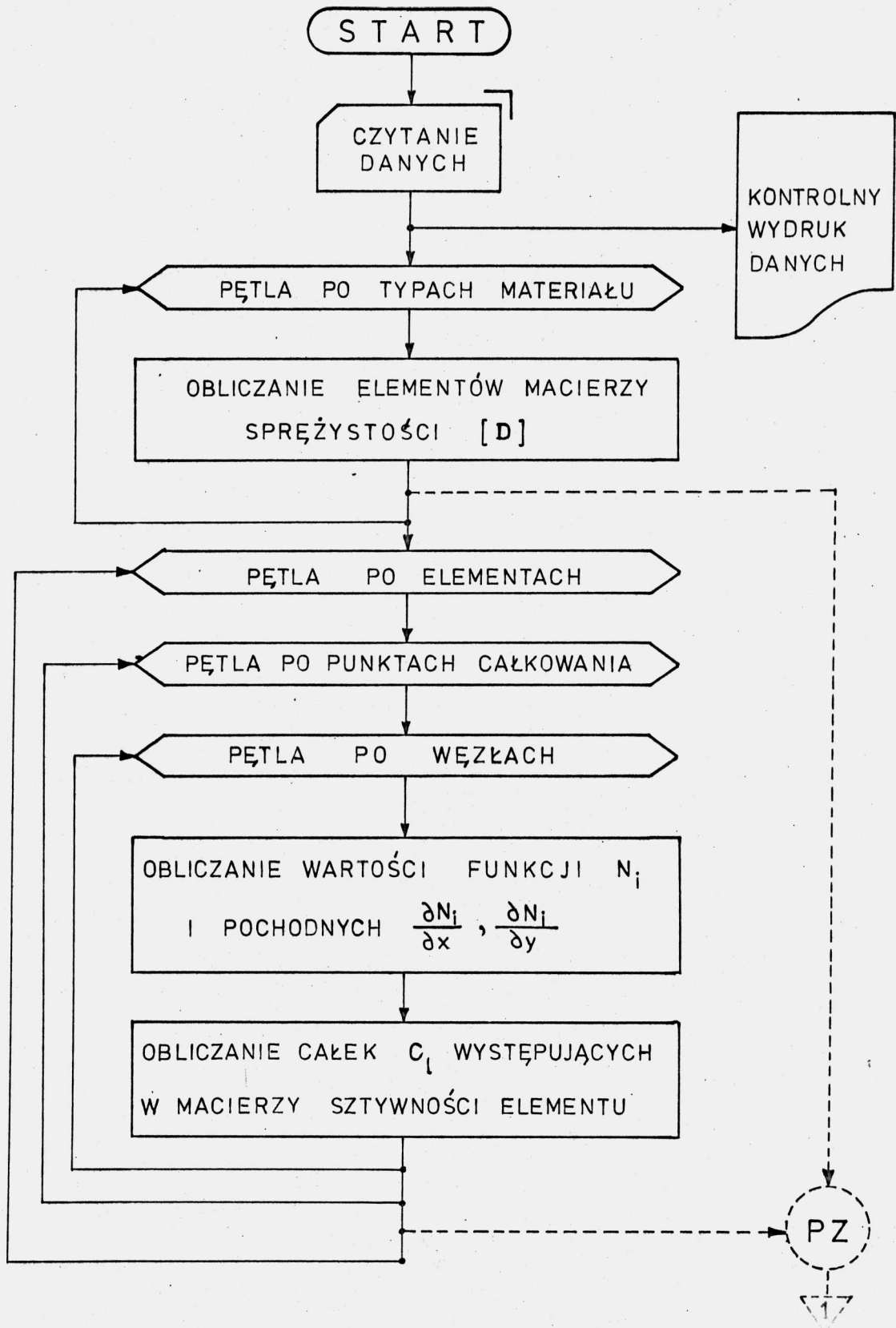
Programy przystosowane są do wprowadzania danych wejściowych przez czytnik kart.

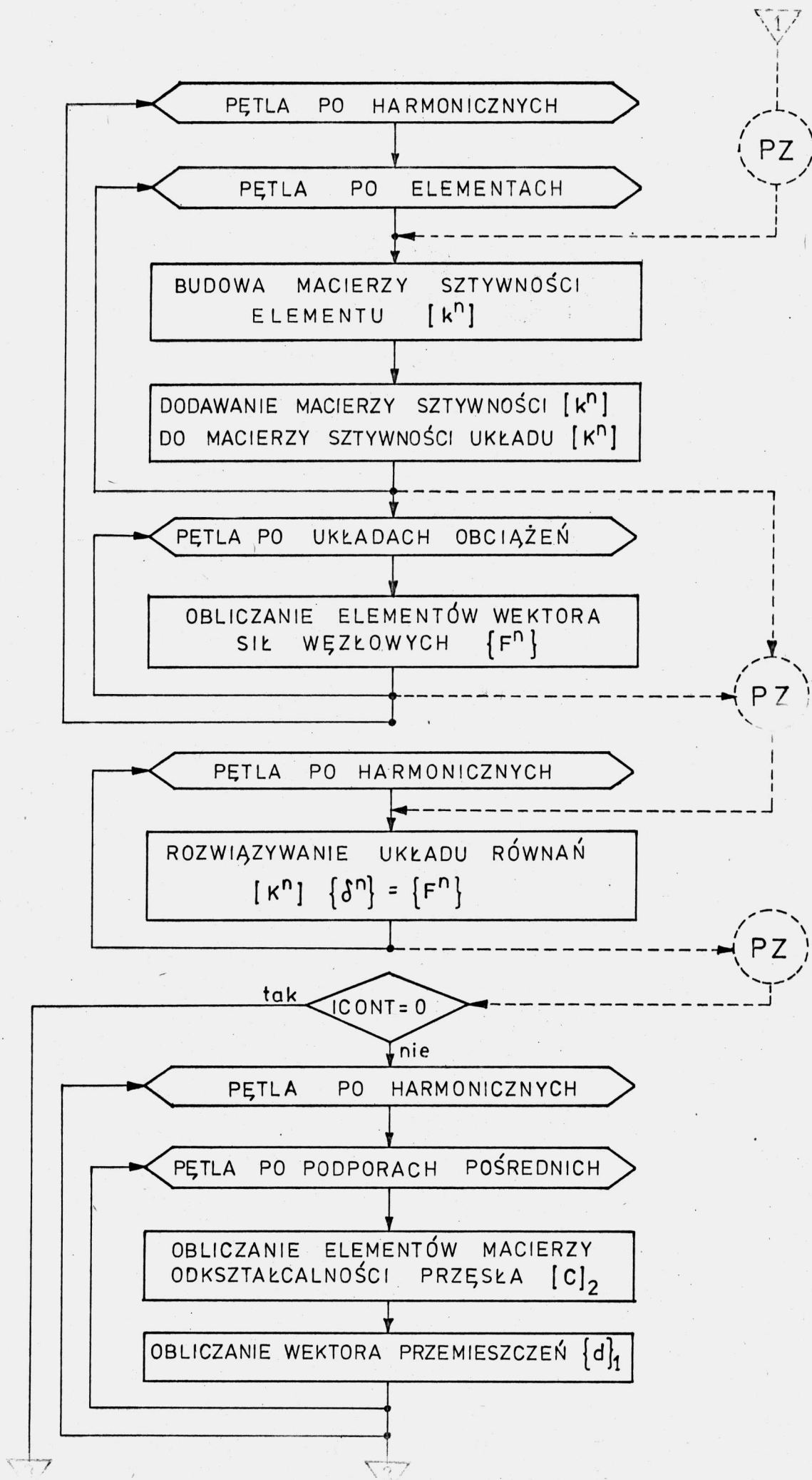
Jako ostateczne wyniki obliczeń otrzymuje się wartości przemieszczeń, odkształceń i naprężeń określone w sposób dyskretny na liniach węzłowych w wybranych przekrojach. Wyniki drukowane są na drukarce wierszowej w następującej kolejności:

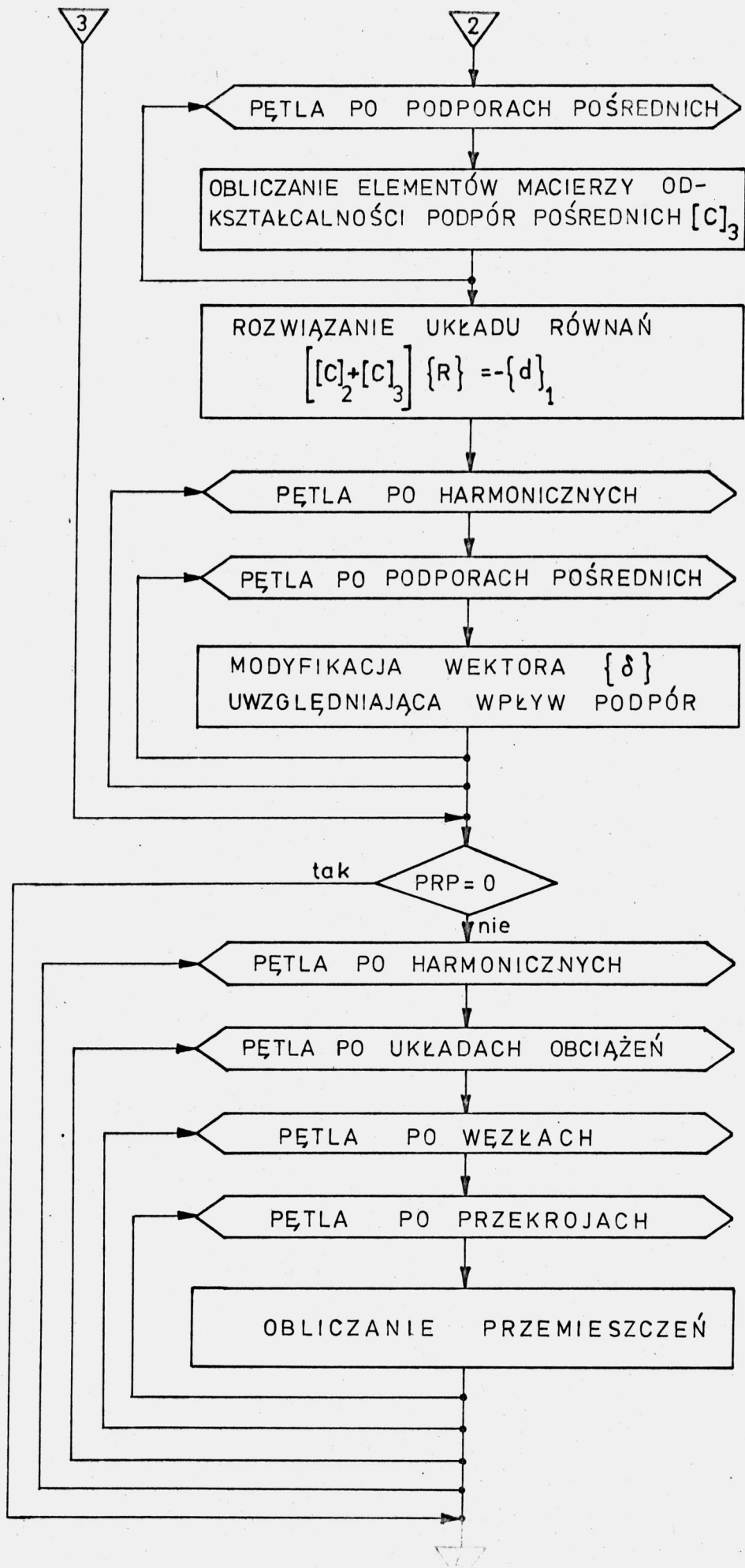
- tytuł zestawu programów ;
- kontrolny wydruk danych wejściowych ;
- składowe reakcje w podporach pośrednich ;
- składowe "u", "v" i "w" przemieszczeń linii węzłowych w wybranych przekrojach, kolejno dla poszczególnych układów obciążeń ;
- składowe odkształceń w wybranych przekrojach we wszystkich węzłach każdego elementu, kolejno dla poszczególnych układów obciążeń ;
- składowe naprężeń w analogicznym układzie jak składowe odkształceń.

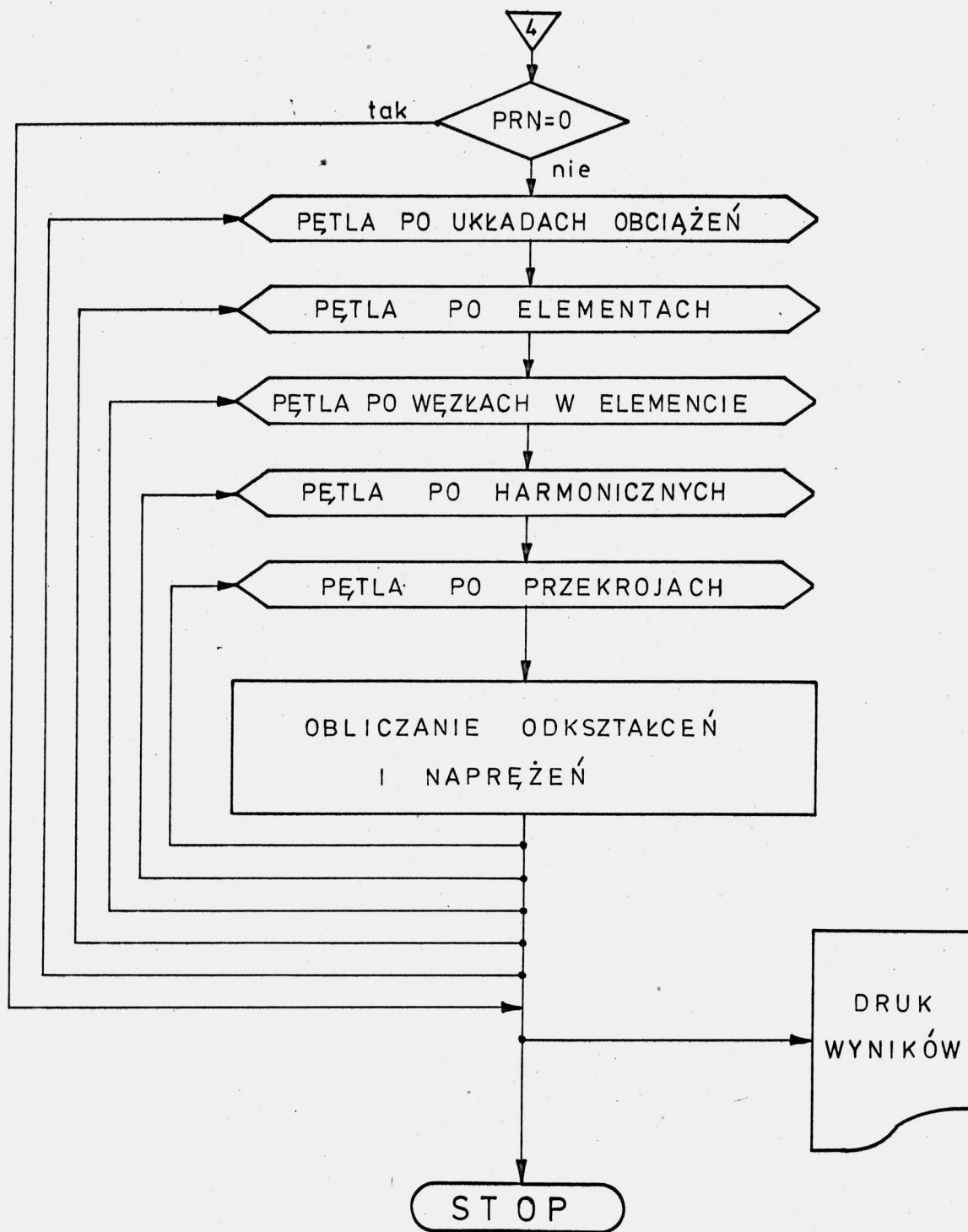
4.4. Schemat blokowy

Zestawy programów PR i KR posiadają bardzo zbliżoną budowę i sposób działania. Strukturę logiczną obu zestawów pokazano w postaci schematu blokowego.









5. ANALIZA WYNIKÓW OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

5.1. Uwagi ogólne

Wykorzystując programy opisane w rozdziale 4, wykonano szereg obliczeń, pozwalających na ocenę dokładności i możliwości zastosowań przedstawionego rozwiązania. Podane przykłady podzielono na trzy grupy.

P i e r w s z a g r u p a służy do oceny zbieżności i dokładności wyników przez porównanie z rozwiązaniami uzyskanymi innymi metodami. Przeanalizowano wpływ stosowanego typu elementów, gęstości podziału oraz liczby harmonicznych uwzględnianych w rozwiązaniu. Obliczenia wykonano dla różnych schematów statycznych i różnych typów obciążenia.

G r u p ę d r u g ą tworzą obliczenia numeryczne modeli przęseł mostowych. Porównanie z wynikami przeprowadzonych badań doświadczalnych stanowi w pewnym stopniu weryfikację rozwiązania teoretycznego. Badania i obliczenia wykonano dla przęseł prostokątnych i zakrzywionych w planie.

T r z e c i a g r u p a to przykłady zastosowań przedstawionego sposobu obliczeń do analizy wybranych typów przęseł mostowych. Analizą objęto konstrukcje prostokątne i zakrzywione w planie, jednoprzęsłowe oraz posiadające podpory pośrednie. Obliczenia wykonano dla różnych układów obciążeń.

W przedstawionych przykładach starano się stosować możliwie małą liczbę elementów, aby sprawdzić czy przedstawiony typ elementu zapewnia poprawne rozwiązanie przy rzadkiej siatce podziału. Ma to istotny wpływ na czas i koszt obliczeń. Przy zastosowaniu m.c. ODRA serii 1300 orientacyjny czas obliczeń w przeliczeniu na jedną linię węzłową i jedną harmoniczną wynosi około 3 sek.

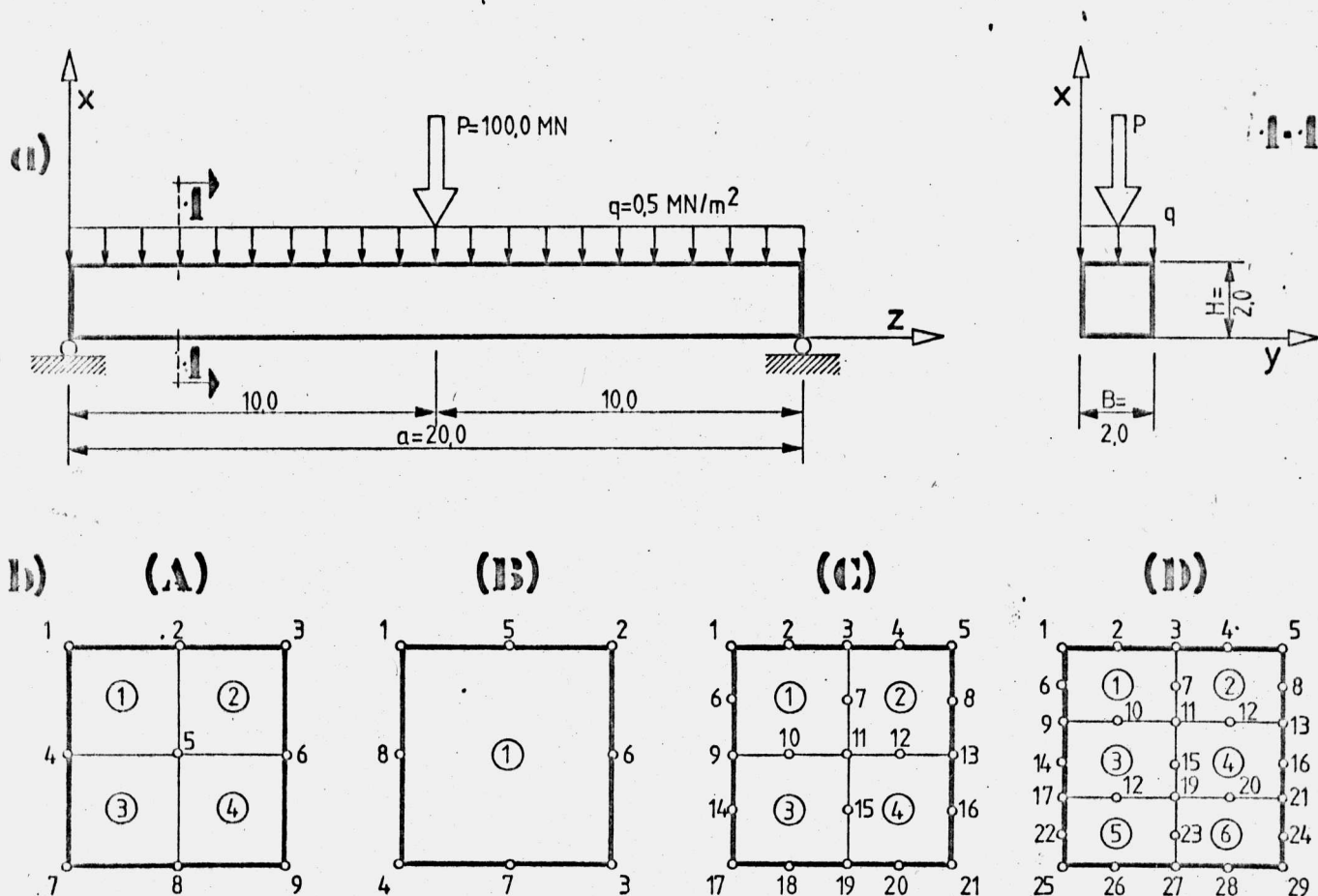
Obliczenia przeprowadzono dla dwóch skrajnych przypadków obciążenia, a mianowicie obciążenia skupionego i powierzchniowego obciążenia równomiernie rozłożonego. Rzeczywiste obciążenia stanowią z zasady przypadek pośredni, mieszczący się w granicach tak wyznaczonego przedziału zmienności.

W zamieszczonych przykładach poddano analizie stan przemieszczeń i naprężeń konstrukcji. W węzłach związanych z kilkoma elementami, naprężenia wyznaczano jako wartości średnie na podstawie wielkości wyliczonych dla każdego elementu. Należy przypuszczać, że udoskonalenie sposobu obliczania naprężeń [11], [70], [101], [152], [154] pozwoli na dalsze uściślenie rozwiązań.

5.2. Ocena zbieżności i dokładności rozwiązania

5.2.1. Prosta belka pryzmatyczna

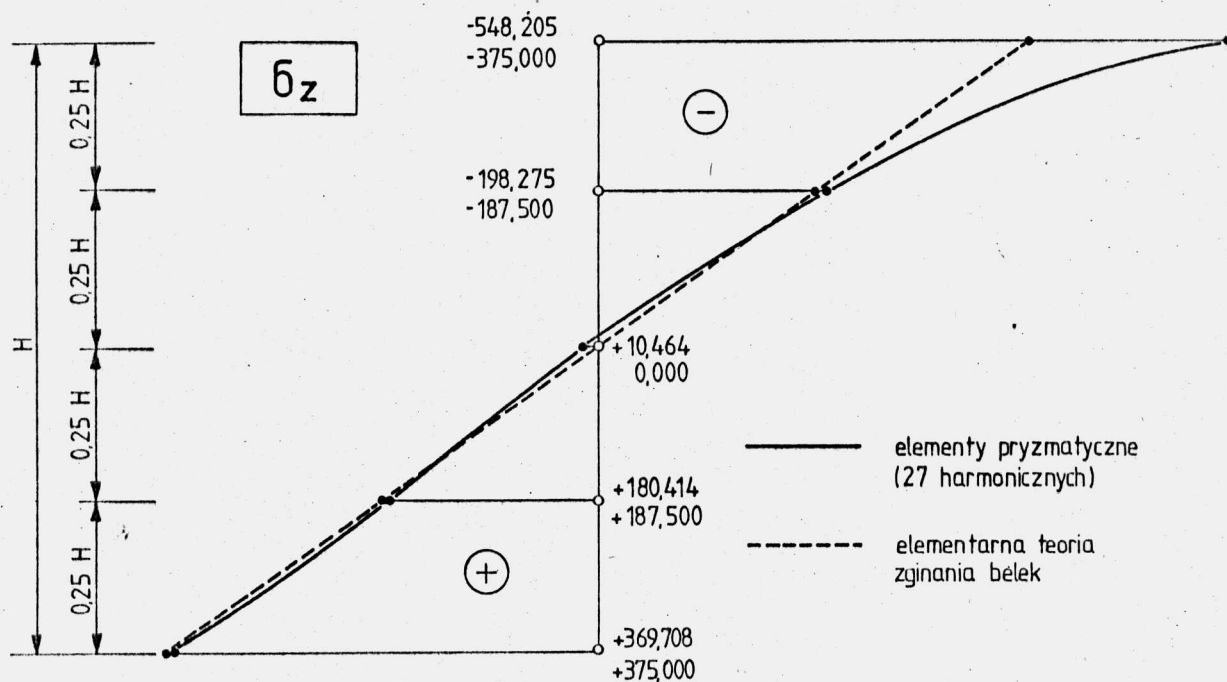
Jako pierwszy przykład rozpatrzono jednoprzęsłową swobodnie podpartą belkę o przekroju kwadratowym, pokazaną na rys. 5.1. Materiał belki charakteryzują dwie stałe: $E = 1.0 \cdot 10^5 \text{ MP}$ i $\nu = 0.20$.



Rys. 5.1. Schemat belki i sposób podziału na elementy

Zastosowano cztery sposoby dyskretyzacji belki /rys. 5.1.b/ przy użyciu dwóch typów pryzmatycznych elementów skończonych. Uzyskane wyniki, wyznaczone przy uwzględnieniu 11 harmonicznych, zestawiono w tabelach 5.1 ÷ 5.4. Analizę przeprowadzono dla obciążenia równomiernie rozłożonego na całej długości belki i dla obciążenia siłą skupioną w środku rozpiętości. Podane w tabelach wielkości ugięć i składowych naprężenia obliczone są jako wartości średnie dla całej szerokości belki. Umożliwia to orientacyjne porównanie z rozwiązaniami traktującymi zginanie belek jako zagadnienie dwuwymiarowe [134]. Odpowiednie wartości podano w ostatnich kolumnach tabel 5.1 ÷ 5.4.

Dla obciążenia skupionego, w tabelach podano wartości naprężeń σ_x i σ_z w osi belki /pod punktem przyłożenia siły/. Wykres naprężeń σ_z dla podziału (D) i 27 harmonicznych pokazano na rys. 5.2.



Rys. 5.2. Rozkład naprężeń σ_z [MPa] pod siłą skupioną

Tabela 5.1
Ugięcia belki [m]

Rodzaj obciążenia	z/a	Sposób podziału na elementy				Wg teorii prętowej
		A	B	C	D	
Równomiernie rozłożone	0.25	- 10.668	- 10.921	- 10.956	- 10.060	- 11.133
	0,50	- 14.952	- 15.272	- 15.358	- 15.368	- 15.625
Siła skupiona	0,25	- 81.972	- 83.996	- 84.218	- 84.221	- 85.942
	0.50	-119.874	-122.773	-123.201	-123.865	-125.000

Uwaga :: w tabeli podano rzędne ugięcia pomnożone przez 10³

Tabela 5.2
Napężenia σ_z [MPa] w środku rozpiętości belki

Rodzaj obciążenia	x/H	Sposób podziału na elementy				Wg pracy [134]
		A	B	C	D	
Równomiernie rozłożone	1.00	- 38.367	- 37.452	- 37.583	- 37.611	- 37.600
	0.75	-	-	- 18.691	- 18.695	- 18.706
	0.50	- 0.010	- 0.006	- 0.005	- 0.000	- 0.000
	0.25	-	-	18.688	18.728	18.706
	0.00	38.361	37.471	37.598	37.605	37.600
Siła skupiona	1.00	-375.392	-365.502	-380.741	-414.492	...
	0.75	-	-	-181.391	-188.367	-166.100
	0.50	5.374	10.64	1.142	10.121	6.050
	0.25	-	-	179.582	180.083	180.700
	0.00	364.655	356.376	364.575	367.498	368.350

Tabela 5.3

Naprężenia σ_x [MPa] w środku rozpiętości belki

Rodzaj obciążenia	x/H	Sposób podziału na elementy				Wg pracy [134]
		A	B	C	D	
Równomiernie rozłożone	1.00	- 5.821	- 0.472	- 0.531	- 0.562	- 0,500
	0.75	-	-	- 9.376	- 0.418	- 0.422
	0.50	- 0.259	- 0.241	- 0.246	- 0.251	- 0.250
	0.25	-	-	- 0.102	- 0.077	- 0.078
	0.00	5.347	- 0.001	0.055	0.031	0.000
Siła skupiona	1.00	-117.402	- 45.138	-135.655	-288.103	∞
	0.75	-	-	- 41.166	- 79.861	- 61.500
	0.50	- 10.195	8.932	- 19.321	- 12.492	- 22.800
	0.25	-	-	- 1.485	- 5.518	- 7.250
	0.00	43.314	5.183	4.642	2.671	0.000

Tabela 5.4

Naprężenia τ_{xz} [MPa] w 1/4 rozpiętości belki

Rodzaj obciążenia	x/H	Sposób podziału na elementy				Wg pracy [134]
		A	B	C	D	
Równomiernie rozłożone	1.00	- 0.581	- 1.222	- 0,296	- 0.148	0.000
	0.75	-	-	- 1.331	- 1.422	- 1.406
	0.50	- 0.668	- 1.526	- 2.178	- 1.875	- 1.875
	0.25	-	-	- 1.338	- 1.426	- 1.406
	0.00	- 0.583	- 1.226	- 0.305	- 0.151	- 0.000
Siła skupiona	1.00	- 13.472	- 13.203	- 4.691	- 1.448	0.000
	0.75	-	-	- 14.943	- 14.295	-14.060
	0.50	- 14.143	- 15.607	- 23.142	- 18.828	-18.750
	0.25	-	-	- 13.875	- 14.288	-14.060
	0.00	- 11.918	- 13.411	- 3.396	- 1.522	0.000

Tabela 5.5

Zbieżność rozwiązania przy obciążeniu rozłożonym

Obliczana wielkość	z/a	Nr węzła	Liczba harmonicznych				
			1	5	11	21	27
$u \cdot 10^3$ [m]	0.50	9	- 15.427	- 15.359	- 15.358	- 15.358	- 15.358
		11	- 15.380	- 15.315	- 15.342	- 15.313	- 15.313
	0.25	9	- 10.908	- 10.956	- 10.956	- 10.956	- 10.956
		11	- 10.876	- 10.922	- 10.922	- 10.922	- 10.922
δ_z [MPa]	0.50	3	- 38.860	- 37.721	- 37.593	- 37.633	- 37.617
		11	0.001	0,002	0,002	0,000	0.001
		19	38.854	37.705	37.613	37.622	37.621
	0,25	3	- 27.478	- 28.283	- 28.285	- 28.248	- 28.253
		11	0.000	0.000	0.003	0.000	0.000
		19	27.474	28.286	28.257	28.247	28.246
δ_x [MPa]	0.50	3	- 0.702	- 0.609	- 0.522	- 0.566	- 0.534
		11	- 0.318	- 0.275	- 0.240	- 0.252	- 0.252
		19	0.065	0.056	0.050	0.052	0.030
	0.25	3	- 0.497	- 0.562	- 0.592	- 0.553	- 0.565
		11	- 0.225	- 0.255	- 0.264	- 0.250	- 0.253
		19	0.046	0.053	0.053	0.052	0.030
τ_{xz} [MPa]	0.00	9	- 3.926	- 4.520	- 4.675	- 4.733	- 4.751
		11	- 3.255	- 3.742	- 3.869	- 3.918	- 3.932
	0.25	9	- 2.776	- 2.356	- 2.425	- 2.419	- 2.410
		11	- 2.301	- 1.957	- 2.012	- 2.007	- 2.005

Tabela 5.6

Zbieżność rozwiązania przy obciążeniu skupionym

Obliczana wielkość	z/a	Nr węzła	Liczba harmonicznych				
			1	5	11	21	27
$u \cdot 10^3$ [m]	0.50	9	-121.027	-123.059	-123.201	-123.304	-123.206
		11	-120.683	-122.699	-122.868	-122.898	-122.912
	0.25	9	- 85.579	- 84.141	- 84.218	- 84.218	- 84.218
		11	- 85.336	- 83.910	- 83.994	- 83.991	- 83.990
σ_z [MPa]	0.50	3	-311.446	-373.465	-414.957	-476.923	-520.876
		11	0.286	0.570	0.007	0.908	1.335
		19	305.126	352.678	364.756	366.323	368.536
	0.25	3	-220.226	-176.372	-187.543	-179.016	-187.787
		11	- 0.202	- 0.001	0.058	0.108	0.009
		19	215.757	182.132	187.789	187.697	187.497
σ_x [MPa]	0.50	3	- 22.513	- 67.658	-135.655	-246.429	-313.096
		11	- 5.793	- 17.022	- 31.514	- 46.395	- 48.353
		19	1.385	4.031	7.353	10.789	11.957
	0.25	1	- 2.865	- 2.808	0.006	- 2.738	- 0.105
		11	- 4.096	4.230	- 0.189	1.264	- 0.058
		19	0.979	- 0.891	0.038	- 0.307	0.003
τ_{xz} [MPa]	0.00	9	- 21.657	- 26.152	- 23.845	- 23.878	- 23.892
		11	- 18.166	- 22.436	- 18.766	- 20.589	- 20.884
	0.25	9	- 30.628	- 24.823	- 24.720	- 24.265	- 23.986
		11	- 25.691	- 20.469	- 21.965	- 20.190	- 19.975

Stosując podział (C) przeanalizowano wpływ liczby harmonicznych uwzględnianych w rozwiązaniu na dokładność wyników. Obliczone wartości ugięć i składowych naprężeń w wybranych węzłach przedstawiono w tabelach 5.5 i 5.6.

W oparciu o przedstawione wyżej wyniki można sformułować następujące uwagi:

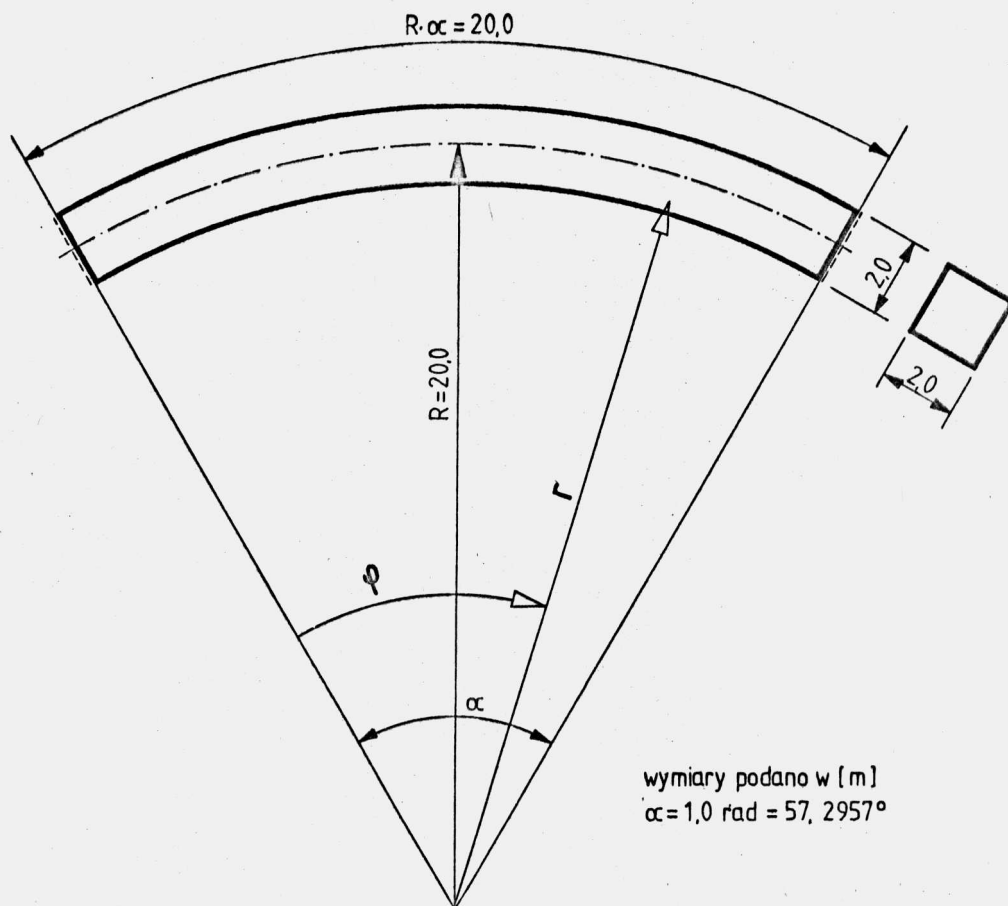
- zastosowanie elementów o 8 liniach węzłowych pozwala na uzyskanie dokładniejszych wyników, przede wszystkim w zakresie ugięć i naprężeń σ_x , w porównaniu z elementami o 4 węzłach /przy podobnej liczbie stopni swobody/,
- zadawalające wyniki otrzymuje się już przy zastosowaniu jednego elementu o 8 węzłach; zagęszczanie podziału pozwala na uściślenie rozwiązania, szczególnie w otoczeniu punktu przyłożenia siły skupionej,
- zwiększanie liczby elementów ma największy wpływ na poprawę dokładności opisu naprężeń stycznych τ_{xz} ,
- uwzględnienie 11 harmonicznych zapewnia uzyskanie poprawnego rozwiązania, zarówno przy obciążeniu rozłożonym, jak i skupionym ,
- wyższe harmoniczne wpływają w istotny sposób jedynie na wartości naprężeń w bezpośrednim otoczeniu punktu przyłożenia siły skupionej.

5.2.2. Belka zakrzywiona w planie

Wymiary belki w planie pokazano na rys. 5.3. Przekrój poprzeczny, charakterystyki materiałowe oraz obciążenia przyjęto w sposób identyczny jak w p. 5.2.1.

Obliczenia przeprowadzono dla podziału (D) /rys.5.1.b/, uwzględniając 21 harmonicznych.

Na rys. 5.4 porównano naprężenia σ_φ w środku rozpiętości przęsła z naprężeniami σ_z w środku rozpiętości analogicznej belki prostej opisanej w punkcie 5.2.1. W tab. 5.7 zestawiono procentowe różnice naprężeń na górnej oraz dolnej powierzchni belki przy obciążeniu skupionym i rozłożonym.

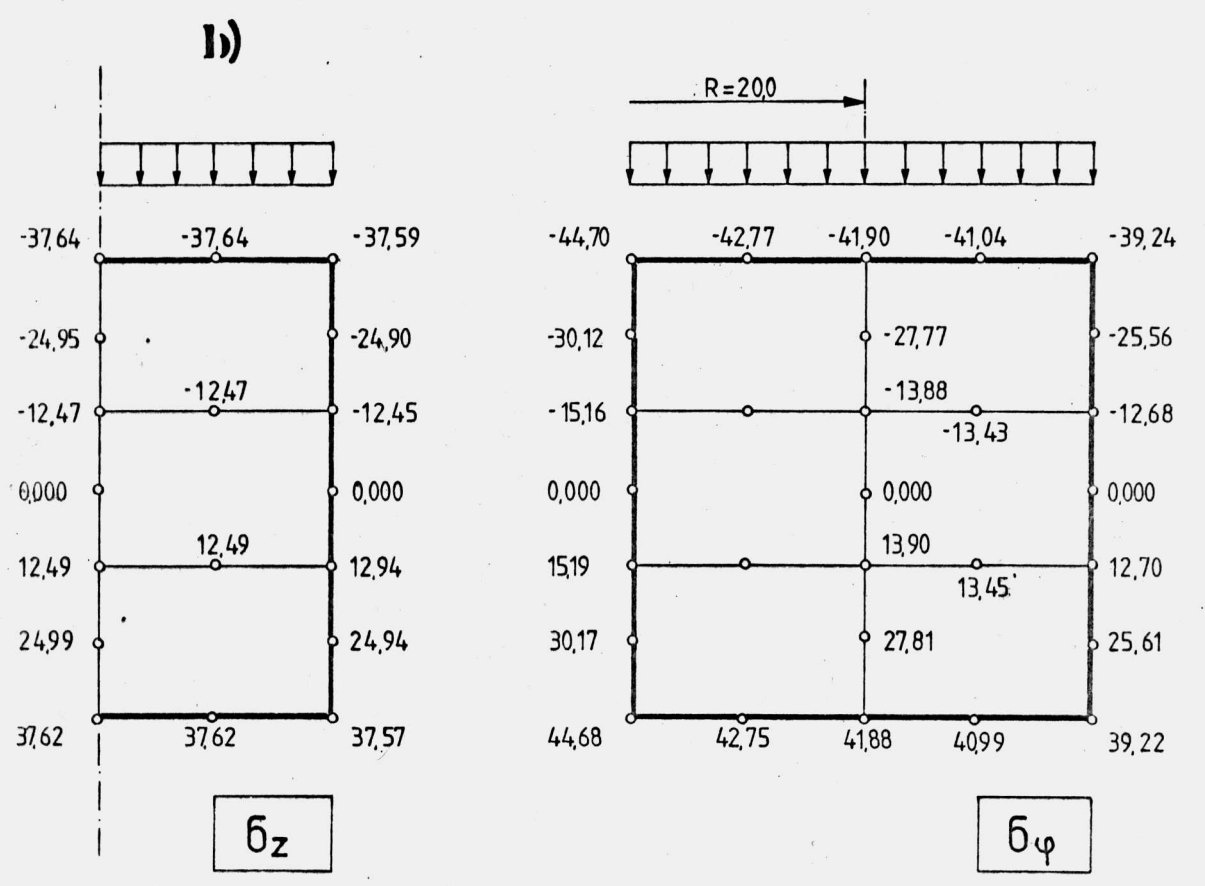
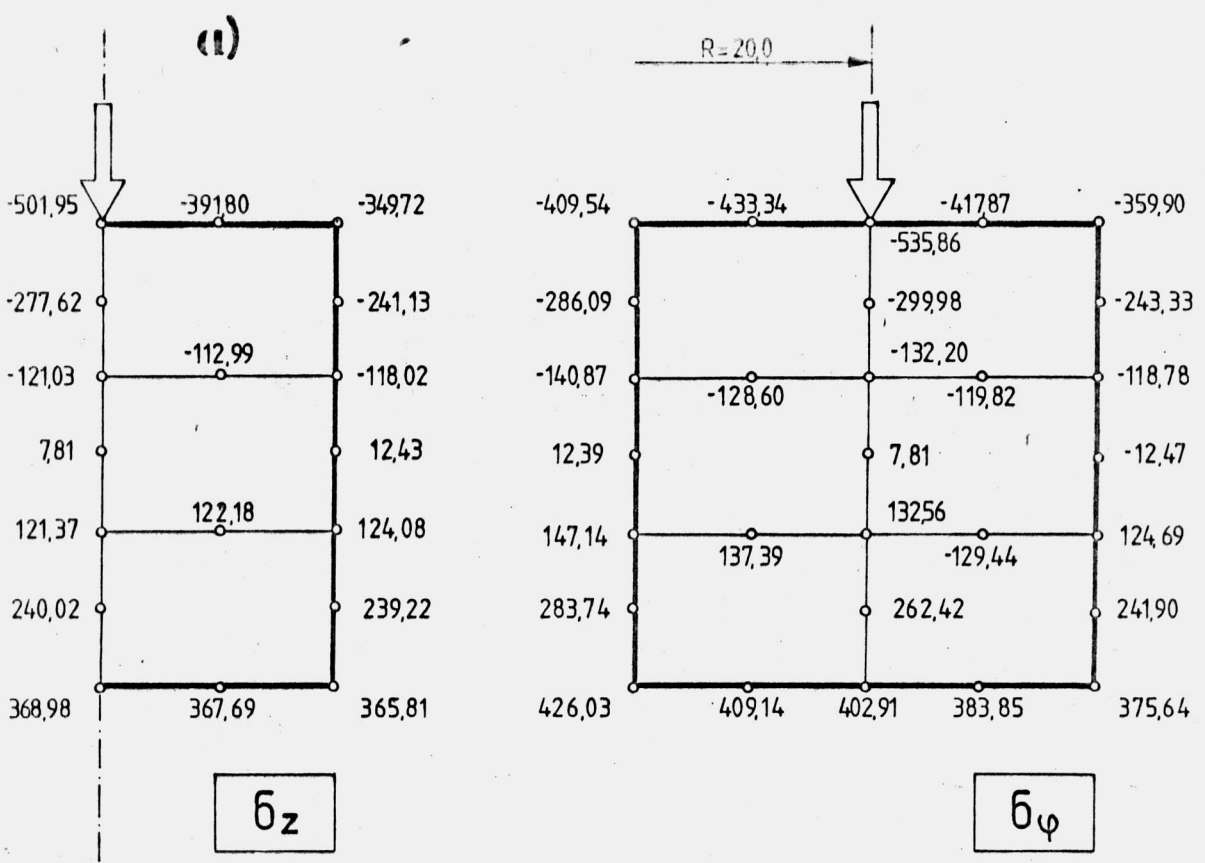


Rys. 5.3. Belka zakrzywiona w planie

Średni przyrost naprężeń na szerokości belki porównano z przyrostem naprężeń obliczonym według teorii układów prętowych /w oparciu o pracę [51] /, przy założeniu liniowego rozkładu naprężeń. Dla obciążenia rozłożonego zgodność jest bardzo dobra, natomiast różnice w przypadku obciążenia skupionego są spowodowane najprawdopodobniej efektami lokalnymi w pobliżu punktu przyłożenia siły.

Należy zwrócić uwagę na fakt, że przyjęcie jednakowych średnich naprężeń na całej szerokości belki prowadzi do заниzenia naprężeń σ_z na krawędzi wewnętrznej i zawyżenia na zewnętrznej. W rozpatrywanym przykładzie dla obciążenia rozłożonego różnice te wynoszą odpowiednio - 6,6 % i + 6,4 %.

W tab. 5.8 zestawiono ekstremalne wartości naprężeń stycznych τ_{xz} w belce prostej i $\tau_{x\varphi}$ w belce zakrzywionej



Rys. 5.4. Porównanie naprężeń σ_z [MPa] w belce prostej z naprężeniami σ_ψ [MPa] w belce zakrzywionej

Tabela 5.7

Porównanie naprężeń w belce prostej i zakrzywionej

L.p.	Obciążenie skupione				Obc.rozłożone	
	Nr węzła	$\frac{\sigma_{\varphi}-\sigma_z}{\sigma_z} \cdot 100$	Nr węzła	$\frac{\sigma_{\varphi}-\sigma_z}{\sigma_z} \cdot 100$	Nr węzła	$\frac{\sigma_{\varphi}-\sigma_z}{\sigma_z} \cdot 100$
		[%]		[%]		[%]
1	1	14.61	25	16.46	1	18.91
2	2	10.60	26	11.27	2	13.63
3	3	6.75	27	9.19	3	11.32
4	4	6.65	28	4.39	4	8.95
5	5	2.91	29	2.69	5	4.39
Średni przyrost naprężeń		8.30		8.80		11.44
Wg [51]		9.26		9.26		11.59

Tabela 5.8

Naprężenia styczne w 1/4 rozpiętości belki

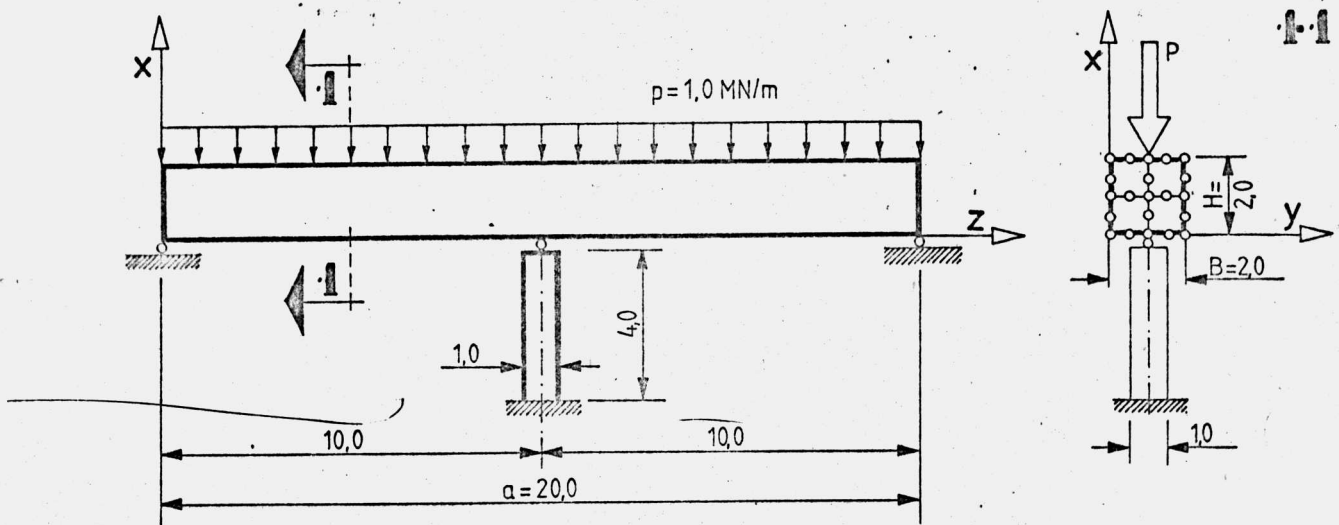
Rodzaj obciążenia	Nr węzła	τ_{xz} [MPa]		$\tau_{x\varphi}$ [MPa]	
		Elementy pryzmatyczne	Wg pracy [134]	Elementy pryzmatyczne	Wg pracy [134]
skupione	14	- 20.534	- 21.112	- 40.517	41.430
	15	- 17.122	- 17.625	- 18.881	- 17.625
	16	- 20.534	- 21.112	- 80.005	- 83.653
rozłożone	14	- 2.048	- 2.111	5.448	5.561
	15	- 1.703	- 1.762	- 1.919	- 1.762
	16	- 2.048	- 2.111	- 9.351	- 9.782

obliczone w 1/4 rozpiętości. Dla porównania podano także wielkości tych naprężeń wyznaczone na podstawie prac [51], [134]. Maksymalne różnice przy obciążeniu skupionym, jak i rozłożonym nie przekraczają 4,5 %.

Zakrzywienie belki spowodowało zwiększenie średnich ugięć o 41,7 % przy obciążeniu rozłożonym i o 40,8 % przy skupionym w porównaniu z belką prostą o takiej samej długości.

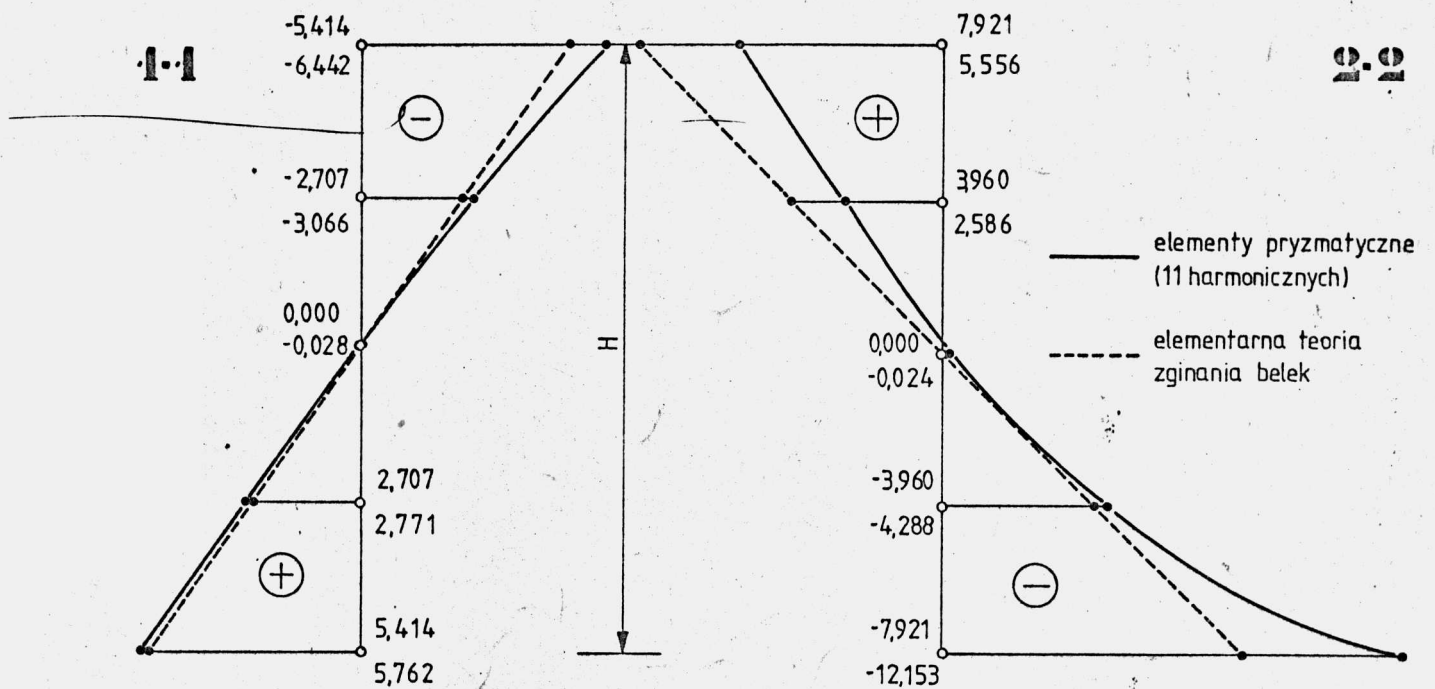
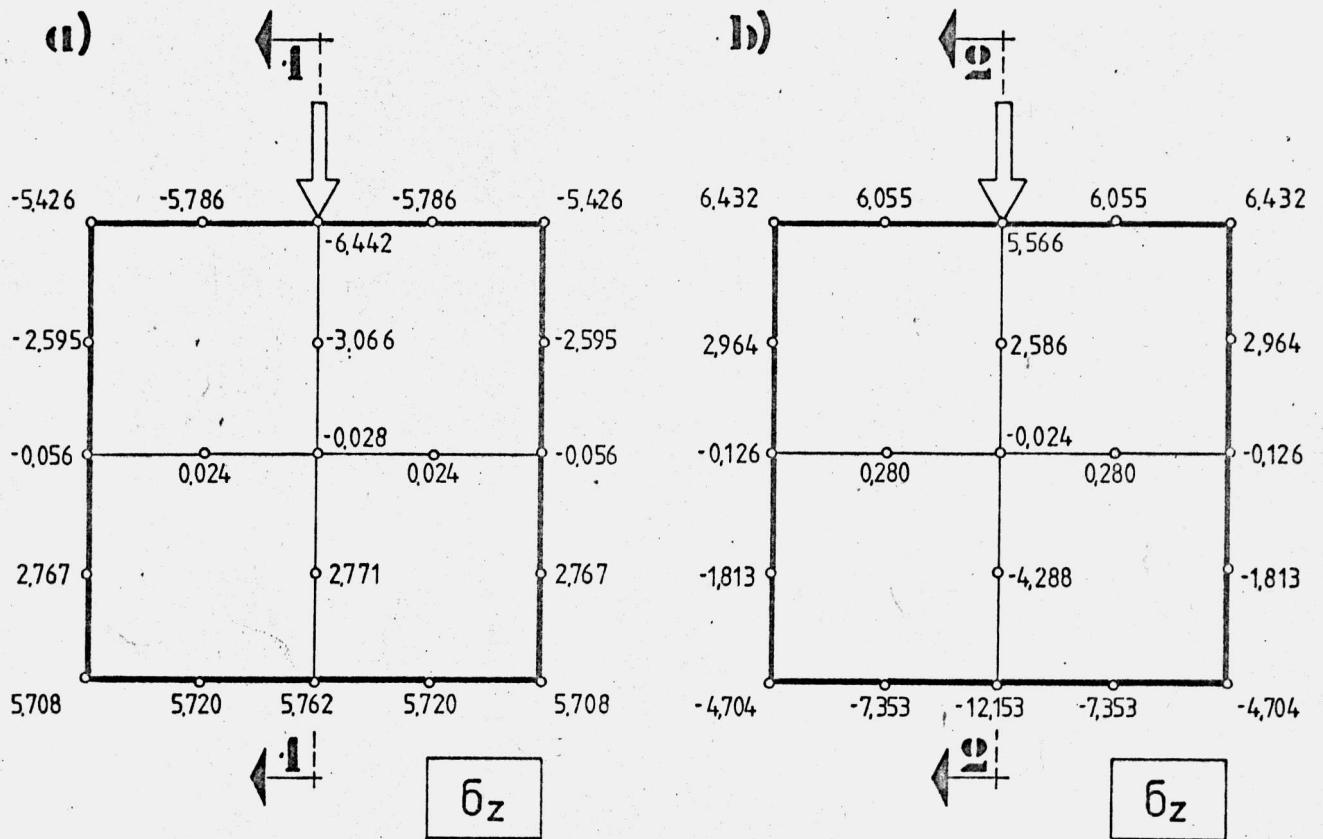
5.2.3. Belka z odkształcalną podporą pośrednią

Jako ostatni przykład konstrukcji typu prętowego rozpatrzono belkę dwuprzęsłową z odkształcalną podporą pośrednią. Geometrię oraz sposób obciążenia belki pokazano na rys. 5.5.



Rys 5.5. Schemat belki dwuprzęsłowej z odkształcalną podporą pośrednią

Belkę podzielono na 4 elementy pryzmatyczne według schematu (C) na rys. 5.1. Przyjęto jednakowe stałe charakteryzujące materiał belki i podpory: $E = 1.0 \cdot 10^5$ MPa i $\nu = 0.20$. W obliczeniach uwzględniono 11 harmonicznych.



Rys. 5.6. Rozkład naprężeń σ_z [MPa]: a) w środku rozpiętości przęsła; b) nad podporą pośrednią

Na rys. 5.6 przedstawiono rozkład naprężeń normalnych σ_z w środku rozpiętości przęsła i nad podporą pośrednią. Jak widać rozkład naprężeń w pobliżu podpory znacznie odbiega od rozkładu liniowego. Efekt ten zanika w miarę zwiększania odległości od podpory.

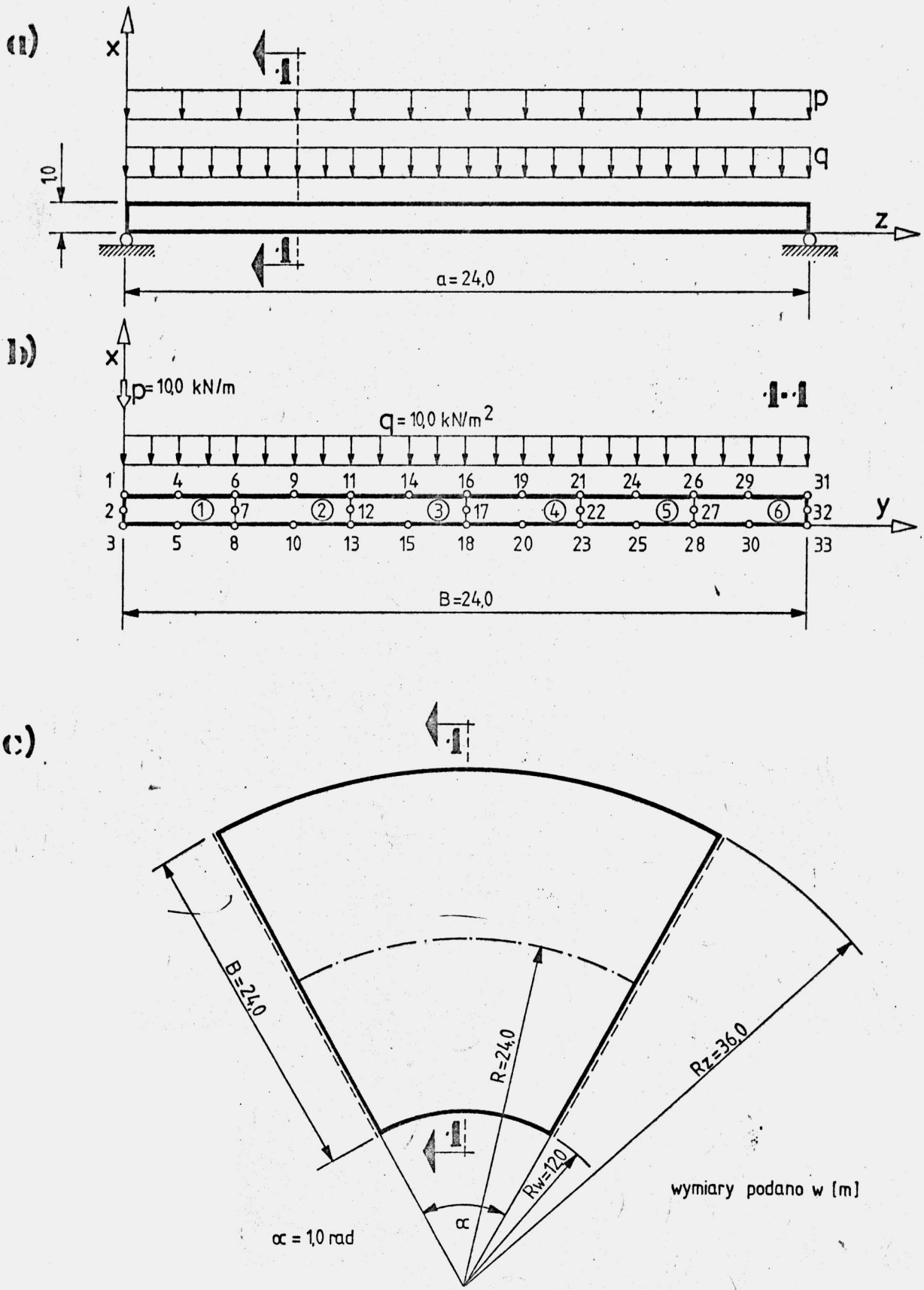
Porównanie wielkości reakcji w podporze pośredniej, ugięć i naprężeń σ_z obliczonych za pomocą przyzmatycznych elementów skończonych i według teorii układów prętowych przedstawiono w tab. 5.9.

Tabela 5.9
Belka dwuprzęsłowa z podporą odkształcalną

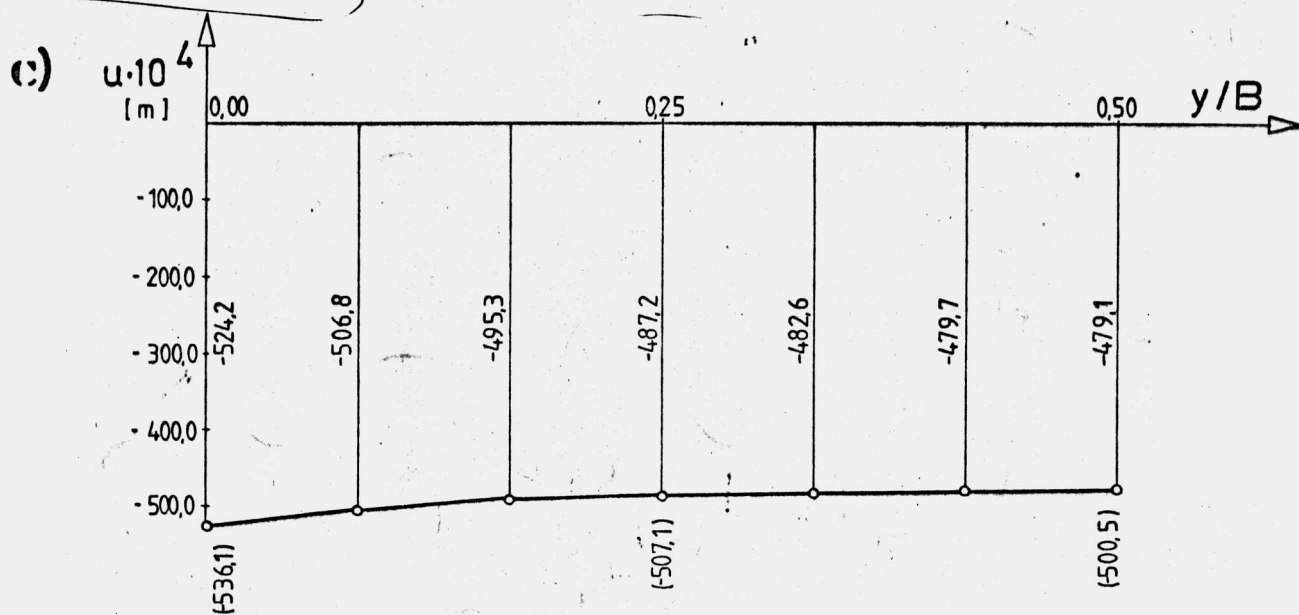
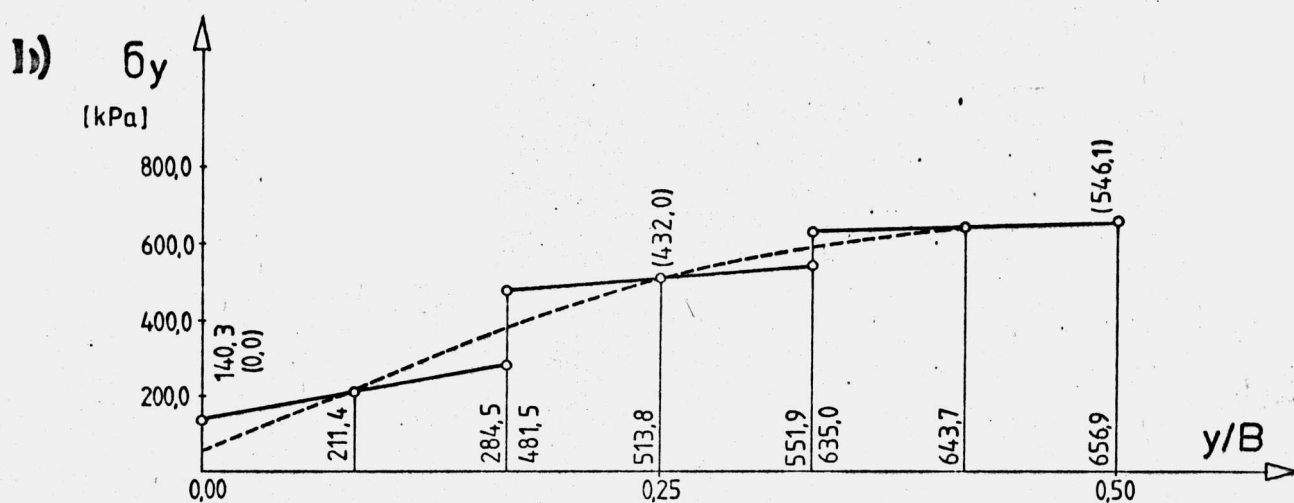
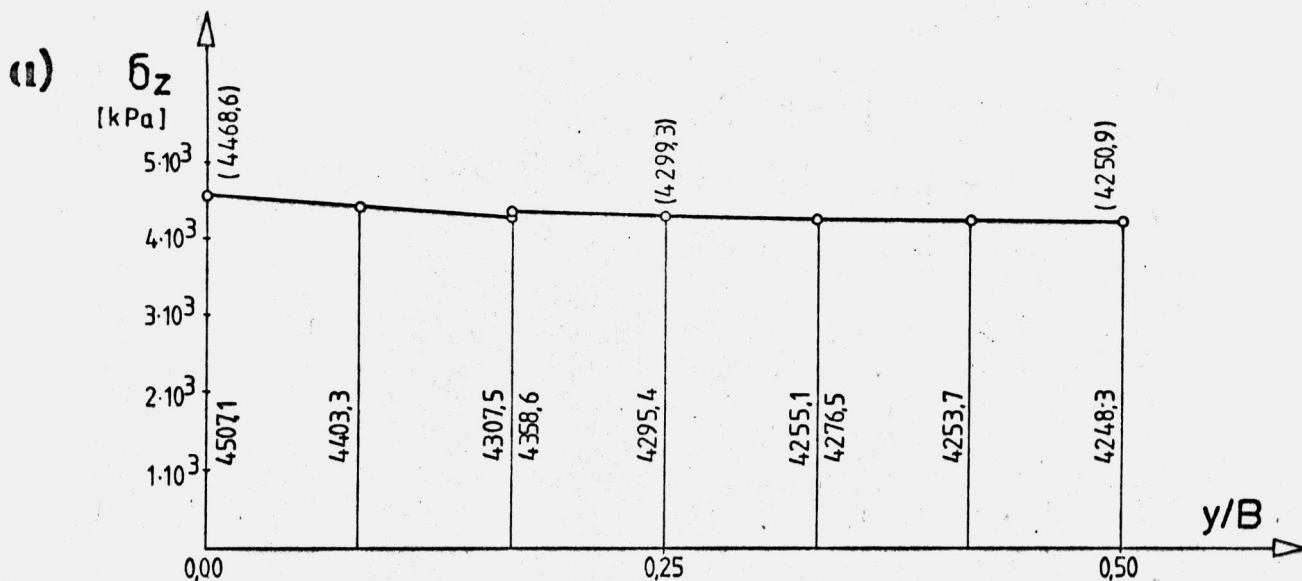
Wielkość	$\frac{z}{a}$	Nr węzła	Elementy przyzmatyczne	Wg teorii układów prętowych	Różnica [%]
Reakcja podporowa [MN]	0.50	19	11.993	12.112	0,99
Ugięcie u.10 ³ [m]	0.50	19	- 0.4797	- 0.4800	0.06
Naprężenia σ_z [MPa]	0.50	1	6.432	7.921	23.15
		3	5.566		42.31
		17	- 4.704	- 7.921	68.39
		19	- 12.153		53.43
	0,25	1	- 5.426	- 5.414	- 0,22
		3	- 6.442		- 18.99
		17	5.708	5.414	- 5.43
		19	5.762		- 6.43

5.2.4. Płyta o stałej grubości

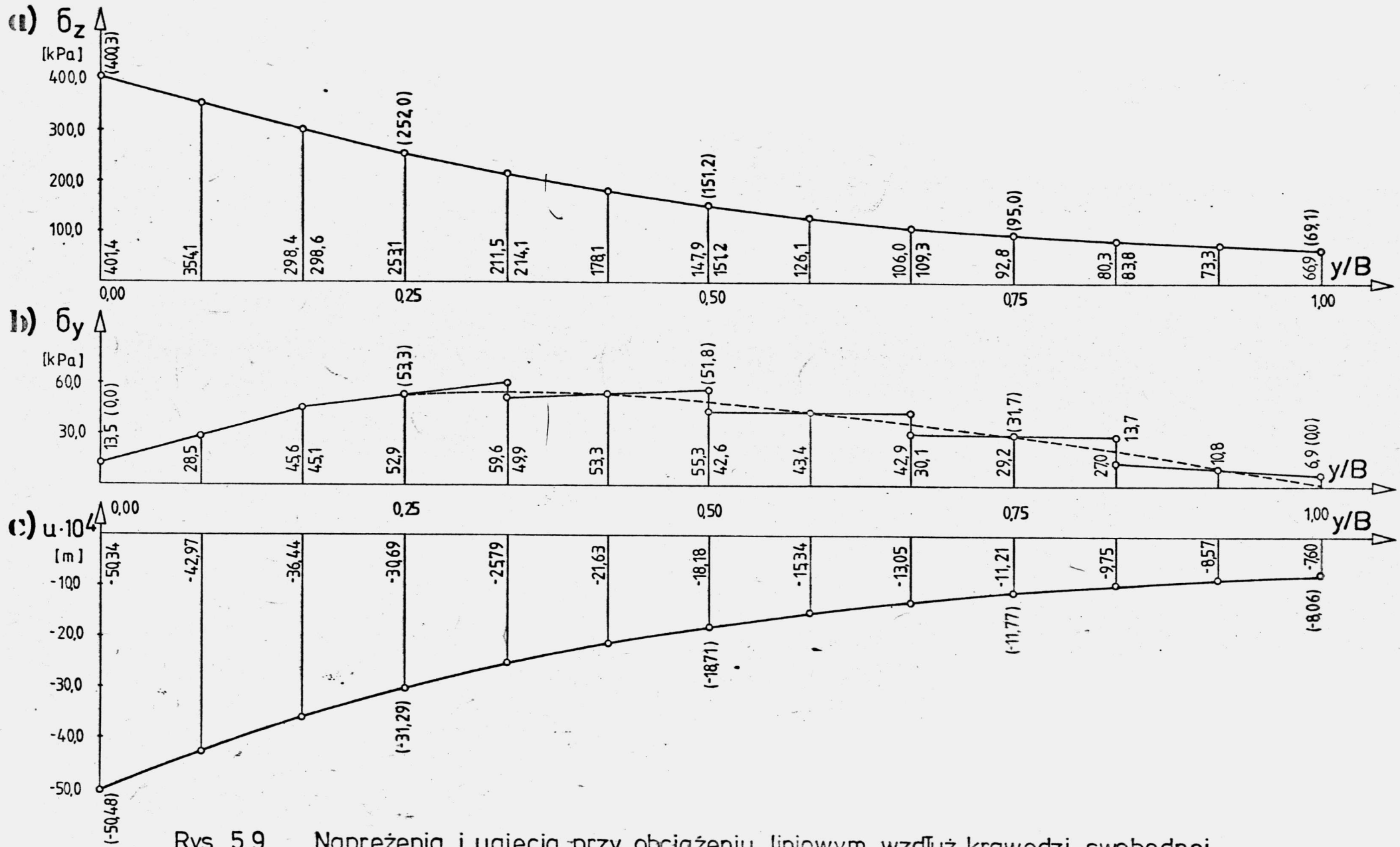
Jako kolejny przykład przeanalizowano stan przemieszczeń i naprężeń w izotropowej płycie o stałej grubości. Analizę przeprowadzono dla płyty o kwadratowym zarysie w planie, której przekrój podłużny pokazano na rys. 5.7.a oraz dla płyty, która w planie ma kształt wycinka pierścienia kołowego /rys. 5.7.c/. Płyty posiadają jednakowe przekroje poprzeczne i w obu przypadkach zastosowano identyczny sposób podziału na



Rys. 5.7. Wymiary płyty i sposób podziału na elementy



Rys. 5.8. Naprężenia i ugięcia przy obciążeniu równomiernie rozłożonym (w nawiasach wartości wg pracy [103])



Rys. 5.9 Naprężenia i ugięcia przy obciążeniu liniowym wzdłuż krawędzi swobodnej (w nawiasach wartości wg pracy [103])

Tabela 5.10

Przemieszczenia i naprężenia w środku rozpiętości płyty

Analizowana wielkość		Obciążenie powierzchniowe					Obciążenie liniowe					
		Nr węzła					Nr węzła					
		1	9	16	24	31	1	9	16	24	31	
Płyta kwadratowa	$u \cdot 10^4$ [m]	Wg [103]	-536.1	-507.1	-500.5	-507.1	-536.1	-50.48	-31.29	-18.71	-11.77	-8.06
		E.P.	-524.2	-487.2	-479.1	-487.2	-524.2	-50.34	-30.69	-18.18	-11.21	-7.60
	σ_z [MPa]	Wg [103]	-4.469	-4.299	-4.251	-4.299	-4.469	-0.400	-0.252	-0.151	-0.095	-0.069
		E.P.	-4.507	-4.295	-4.248	-4.295	-4.507	-0.404	-0.253	-0.149	-0.093	-0.067
	σ_y [MPa]	Wg [103]	0.000	0.432	0.546	0.432	0.546	0.000	0.053	0.052	0.032	0.000
		E.P.	0.140	0.514	0.657	0.514	0.140	0.013	0.053	0.049	0.029	0.007
Płyta za- krzywiona	$u \cdot 10^4$ [m]	E.P.	-152.2	-362.3	-681.5	-1091.1	-1564.7	-7.7	-23.4	-53.4	-101.8	-166.2
	σ_φ [MPa]	E.P.	-4.220	-4.174	-4.484	-4.743	-4.692	-0.191	-0.228	-0.284	-0.357	-0.426
	σ_r [MPa]	E.P.	0.291	0.799	0.377	-0.102	-0.061	0.047	0.167	0.212	0.165	0.040

E.P. - pryzmatyczne elementy skończone

elementy /rys. 5.7.b/.

Obliczenia wykonano na stałych materiałowych $E=10 \cdot 10^2$ MPa i $\nu = 1/6$, a w rozwiązaniu uwzględniono 21 harmonicznych. Przyjęto dwa schematy obciążenia: równomiernie rozłożone na całej powierzchni płyty i liniowe, rozłożone równomiernie wzdłuż krawędzi swobodnej. W przypadku płyty kwadratowej obciążenie liniowe przyłożono wzdłuż linii węzłowej nr 1, natomiast płytę zakrzywioną obciążono wzdłuż krawędzi zewnętrznej /linia węzłowa nr 31/.

Naprężenia oraz ugięcia obliczone w środku rozpiętości płyty kwadratowej przy obciążeniu powierzchniowym, przedstawiono na rys. 5.8, a przy obciążeniu krawędziowym na rys. 5.9.

W węzłach leżących na granicach między elementami podano po dwie wartości naprężeń, wyznaczone niezależnie w obu elementach. Średnie wartości naprężeń oraz ugięcia w wybranych węzłach zestawiono w tab. 5.10 i porównano z wielkościami wyznaczonymi na podstawie pracy [103]. W przypadku ugięć maksymalne różnice wynoszą 4.3 % przy obciążeniu powierzchniowym i 5.7 % przy obciążeniu liniowym, dla naprężeń σ_z odpowiednio - 0.9 % i 3.2 %, a dla naprężeń σ_y : - 20.2 % oraz 7.9 %. W tab. 5.10 przedstawiono także naprężenia i ugięcia w środku rozpiętości płyty zakrzywionej w planie, obliczone w analogicznych punktach jak dla płyty kwadratowej. Umożliwia to oszacowanie wpływu zakrzywienia na stan przemieszczeń i naprężeń w konstrukcji.

Na podstawie przedstawionych wyników można stwierdzić, że zastosowanie nawet niewielkiej liczby elementów zapewnia dość dokładne rozwiązania w zakresie ugięć i naprężeń σ_z . Uzyskanie podobnej dokładności naprężeń σ_y wymaga zagęszczenia podziału na elementy.

5.3. Porównanie z wynikami badań modelowych.

5.3.1. Cel badań

Celem badań jest eksperymentalna weryfikacja wyników obliczeń teoretycznych przeprowadzonych za pomocą programów opisanych w rozdziale 4.

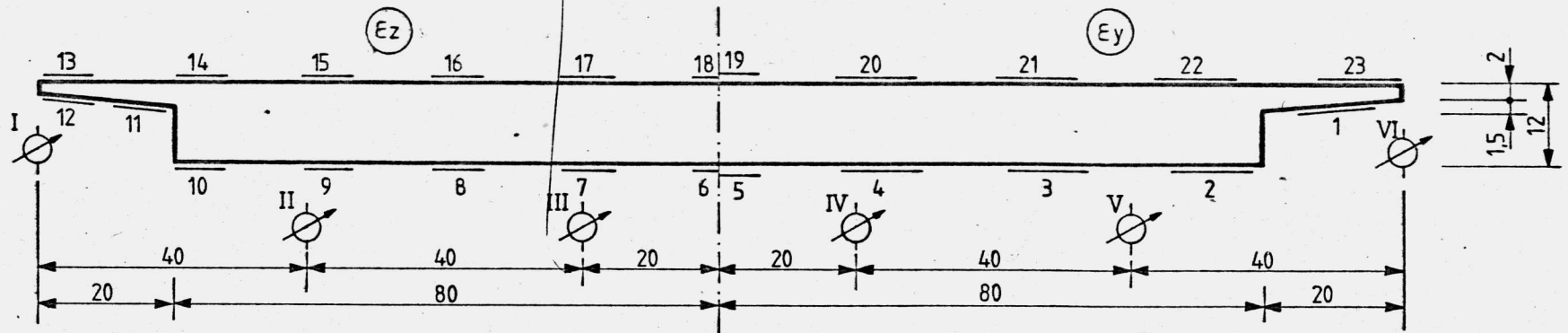
Zastosowanie pryzmatycznych elementów skończonych pozwala na określenie stanu przemieszczeń, odkształceń i naprężeń, a także na analizę efektów lokalnych /np. koncentracje naprężeń/ przy dostatecznie gęstym podziale na elementy. Doświadczalne określenie efektów tego typu wymaga zastosowania specjalnych technik badawczych jak np. metody elastooptyki trójwymiarowej [45]. Niedostępność urządzeń koniecznych do realizacji takich badań spowodowała ograniczenie przeprowadzonej weryfikacji do porównania wielkości wyznaczonych na powierzchniach modeli.

Badania przeprowadzono na modelach pręseł typu płytowego, różniących się proporcją wysięgu wsporników do całkowitej szerokości pręśla /rys. 5.10/. Taki dobór modeli ma na celu eksperymentalne określenie zakresu przydatności elementów pryzmatycznych do analizy pręseł ze wspornikami podchodnikowymi. Wsporniki te z reguły nie są podparte w przekrojach podporowych, co powoduje niezgodność rzeczywistych warunków brzegowych z modelem teoretycznym, w którym przyjmuje się, że przemieszczenia "u" i "v" na obu końcach każdego elementu są równe zero.

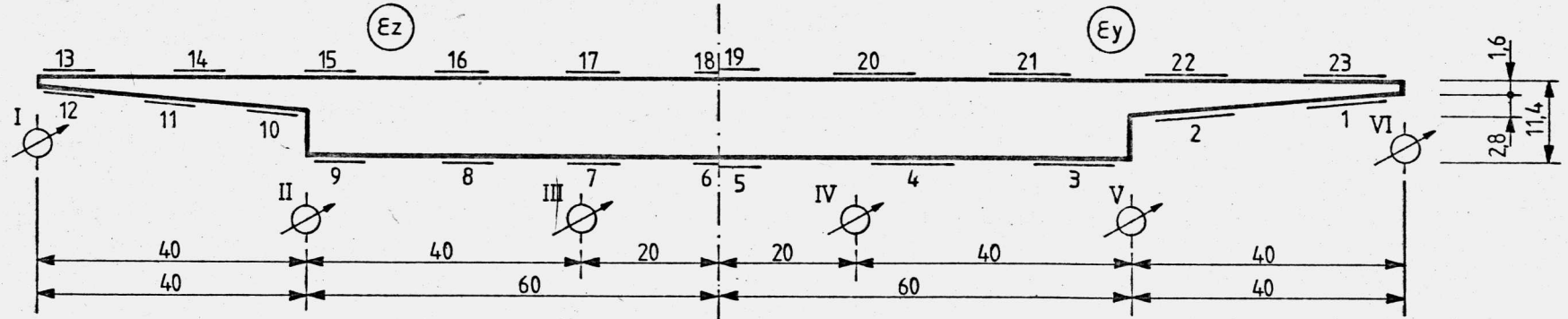
5.3.2. Materiał modeli

Jako materiału do wykonania modeli użyto szkła organicznego /metaplexu/ produkcji Zakładów Chemicznych w Oświęcimiu. Badania współczynnika Poissona przeprowadzono na płytkach o wymiarach pokazanych na rysunku w tab. 5.11. Na rysunku tym pokazano również schemat obciążenia i sposób podparcia próbki oraz miejsce i kierunki naklejenia czujników elektrooporowych. Średnie wartości współczynnika Poissona wyznaczone na dolnej (ν_d) i górnej (ν_g) powierzchni płytki dla siły P zmieniającej się w zakresie 0.0 ÷ 50.0 N zestawiono w odpowiednich kolumnach tabeli 5.11. Badania przeprowadzono na trzech próbkach, a do ob-

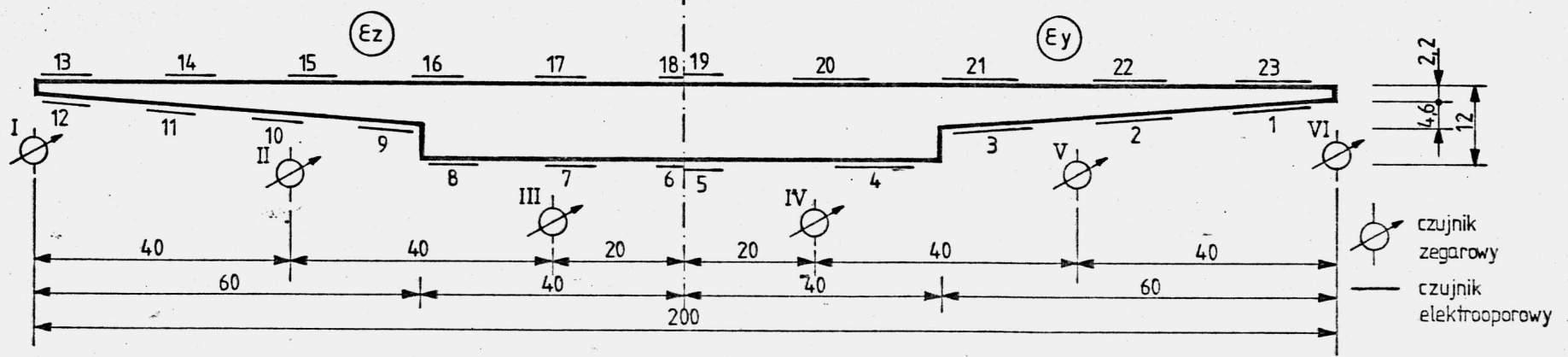
MODEL
A



MODEL
B



MODELE
C1D



Rys. 5.10. Wymiary modeli i rozmieszczenie czujników pomiarowych

liczeń przyjęto $v_{sr} = 0,2353$ obliczone jako średnia arytmetyczna wartości uzyskanych dla poszczególnych próbek.

Tabela 5.11

L.p.	Oznaczenie próbki	v_d	v	Wymiary próbek [mm]
1	P-1	0.2274	0.2188	
2	P-2	0.2476	0.2588	
3	P-3	0.2263	0.2327	
4	$v_{sr} = 0.2353$			

Moduł sprężystości E przy zginaniu wyznaczono na próbkach o przekroju 10 x 30 mm. Schemat i wymiary próbek oraz wyznaczone średnie wartości E dla przedziału obciążeń $P = 0,0 \div 50,0$ przedstawiono w tabeli 5.12. Przez E_d i E_g oznaczono wartości modułu sprężystości wyznaczone na podstawie odkształceń dolnej i górnej powierzchni próbki.

Tabela 5.12

L.p.	Oznaczenie próbki	E_d [MPa]	E_g [MPa]	Wymiary próbek [mm]
1	E-1	3219	3237	
2	E-2	3171	3149	
3	E-3	3142	3151	
4	$E_{sr} = 3178.5$			

Do obliczeń przyjęto $E = 3180,0$ MPa.

5.3.3. Aparatura pomiarowa

Zastosowano dwa niezależne układy pomiarowe: układ służący do pomiaru odkształceń jednostkowych oraz układ do pomiaru ugięć.

Do pomiaru odkształceń użyto czujniki elektrooporowe typu RL 10/120 produkcji Spółdzielni Pracy "Techno-mechanik" w Gdańsku. Czujniki tego typu posiadają bazę pomiarową równą 10 mm oporność 120Ω i stałą $k = 2,15$. Do przyklejenia tensometrów zastosowano specjalny klej acetonowo-celulozowy także produkcji Spółdzielni Pracy "Techno-mechanik".

Wielkości odkształceń jednostkowych określano za pomocą zestawu produkcji czechosłowackiej firmy "Mikrotechna", składającego się z mostka typu TS-4 o stałej $k = 2,15$ oraz 24 punktowej skrzynki rozdzielczej.

Drugi układ pomiarowy służył do rejestracji ugięć dolnej powierzchni badanych modeli. Pomiar przeprowadzono za pomocą czujników zegarowych typu "MNZa-A" - PN-M/54645 o dokładności odczytów 1×10^{-5} m produkcji Pieszyckiej Fabryki Zegarów. Czujniki mocowane były na specjalnej konstrukcji zapewniającej niezależność układu pomiarowego od stanowiska badawczego.

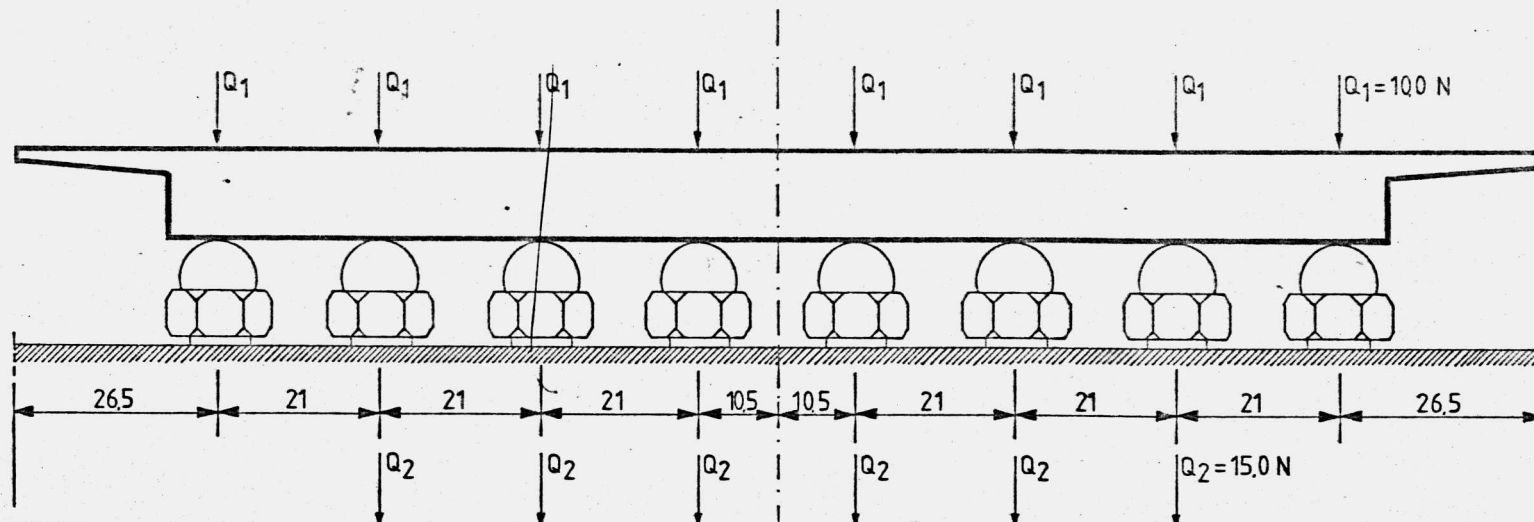
Pomieszczenie czujników elektrooporowych i zegarowych dla poszczególnych modeli pokazano na rys. 5.10. Pomiar odkształceń i przemieszczeń przeprowadzono w środku rozpiętości modeli.

5.3.4 Opis modeli i obciążeń

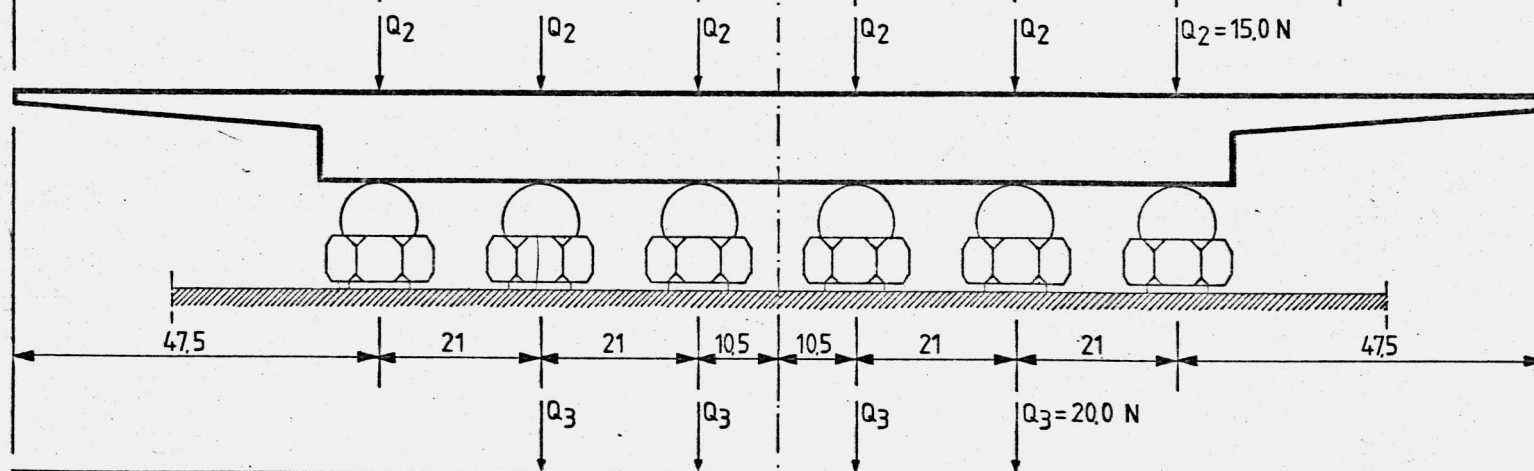
Badania przeprowadzono na 4 modelach przęseł typu płyto-
wego, różniących się proporcją wysięgu wsporników do całkowitej szerokości przęsła /rys. 5.10/. Analizą objęto przęsła prostokątne /modele A, B, C/ oraz przęsło zakrzywione w planie /model D/. Podparcie modeli zrealizowano za pomocą specjalnych łożysk z kulek stalowych o średnicy 11,9 mm /rys. 5.11/. Aby zapewnić jednakowe warunki podparcia w całym zakresie obciążeń, w przekrojach podporowych przyłożono siły Q w sposób pokazany na rys. 5.11.

Wymiary w planie modeli prostokątnych przedstawiono na rys. 5.12, a modelu zakrzywionego na rys. 5.13. Na rysunkach

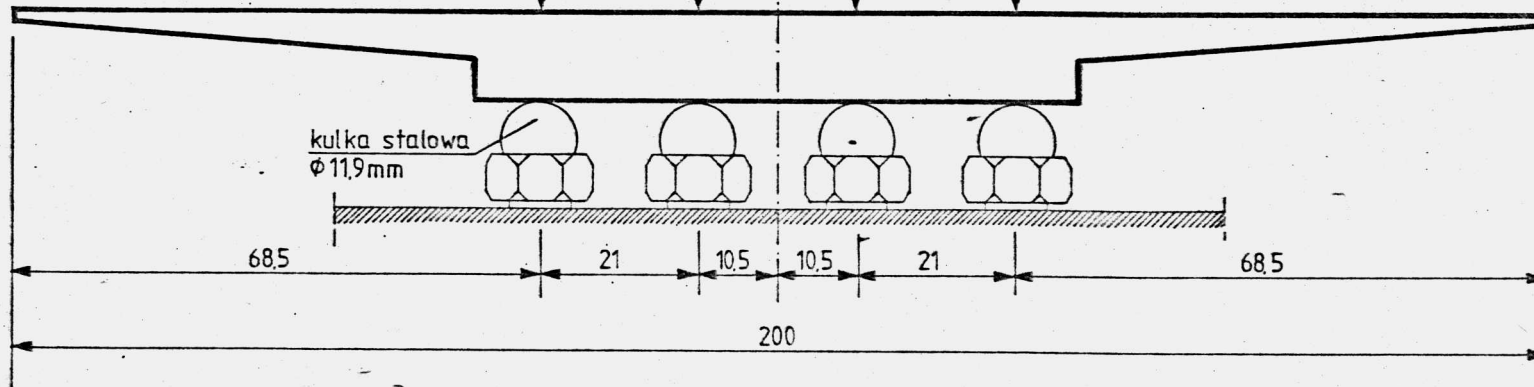
a)
MODEL
A



b)
MODEL
B

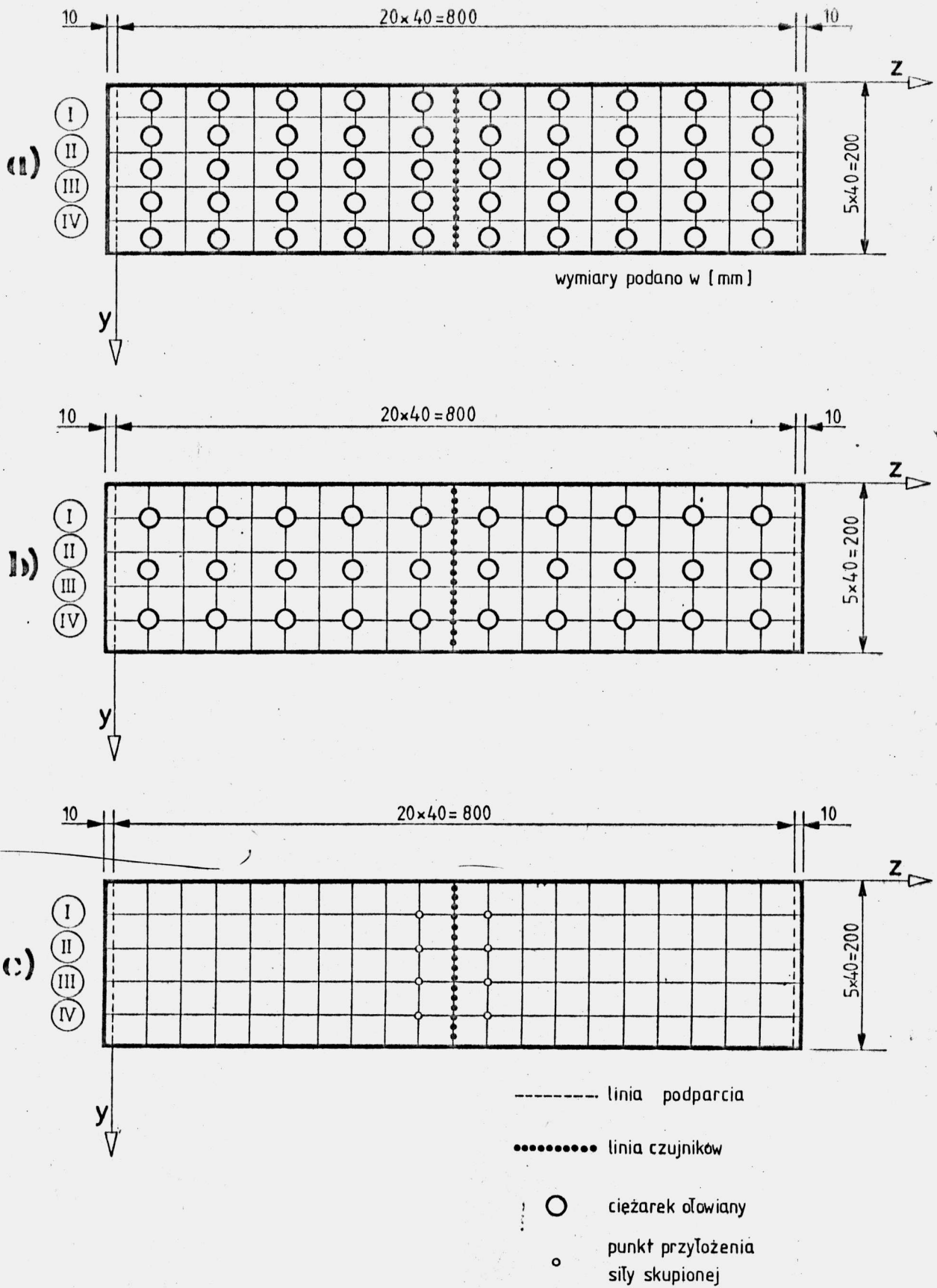


c)
MODEL
C



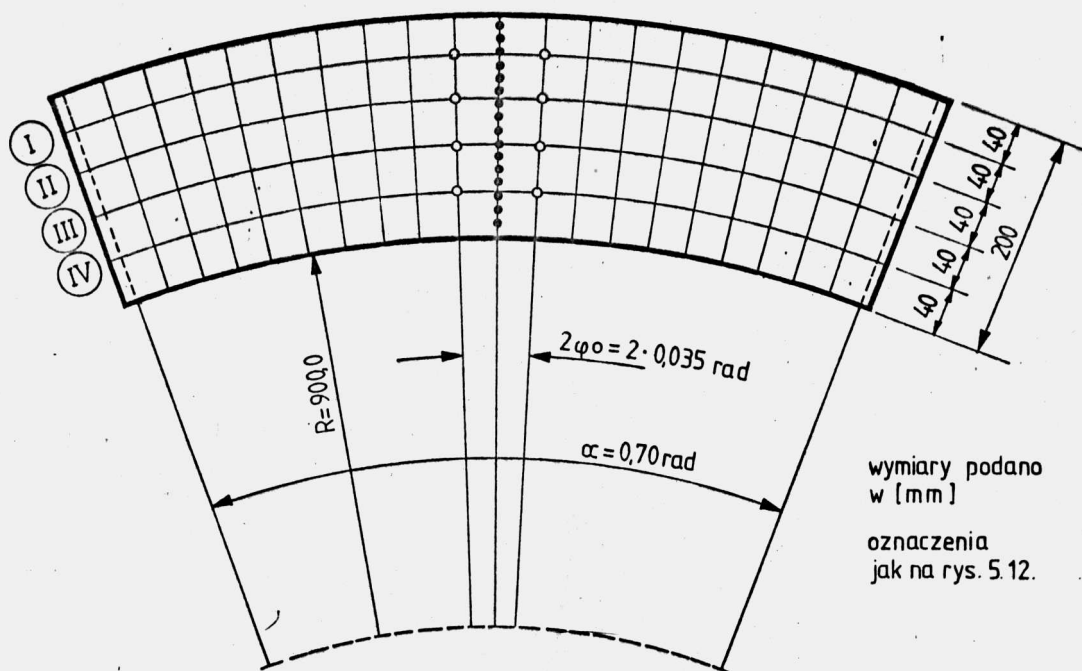
wymiary podano
w [mm]

Rys. 5.11. Sposób oparcia modeli na podporach



Rys. 5.12. Sposób obciążania modeli

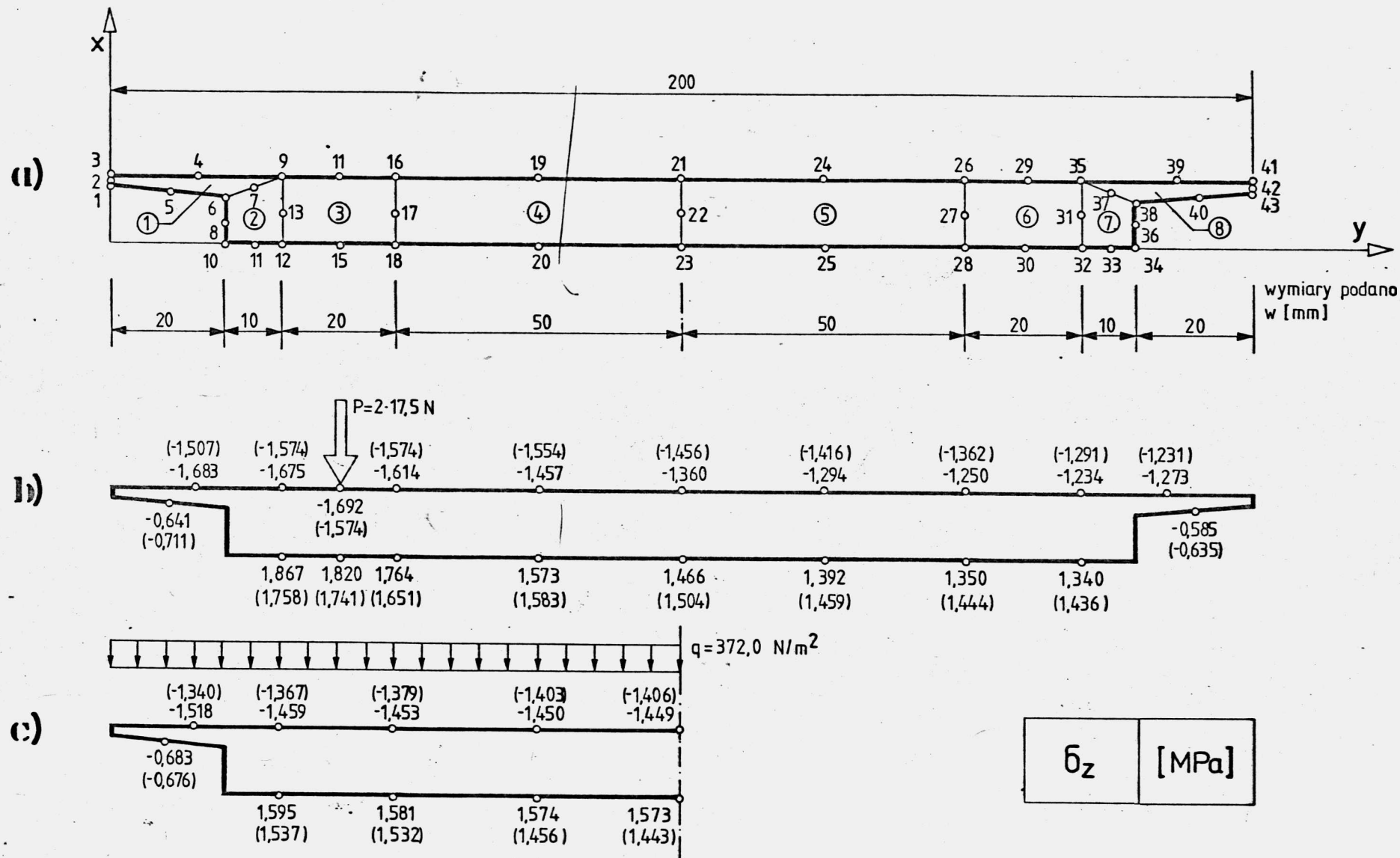
tych pokazano także sposób obciążania modeli. Stosowano dwa rodzaje obciążeń: rozłożone i skupione. Obciążenie rozłożone realizowano za pomocą specjalnych ciężarków ołowianych w kształcie walca. Rozmieszczenie ciężarków dla modeli A i B podano na rys. 5.12.a, natomiast dla modelu C na rys. 5.12.b. Obciążenie typu skupionego składało się z 2 sił przykładanych kolejno na liniach I, II, III i IV w punktach zaznaczonych na rys. 5.12.c i na rys. 5.13.



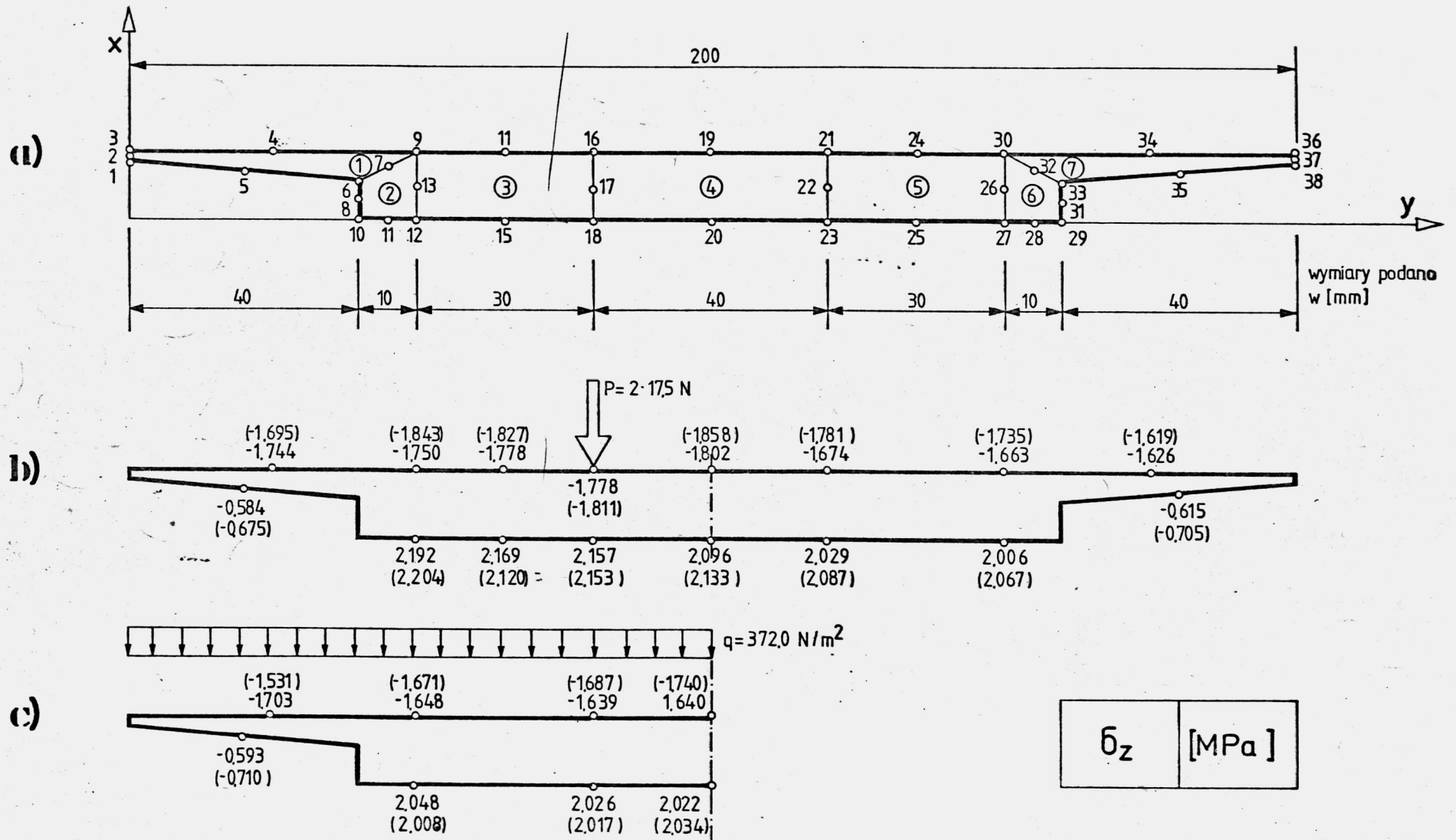
Rys. 5.13. Model D

5.3.5. Wyniki teoretyczne i doświadczalne

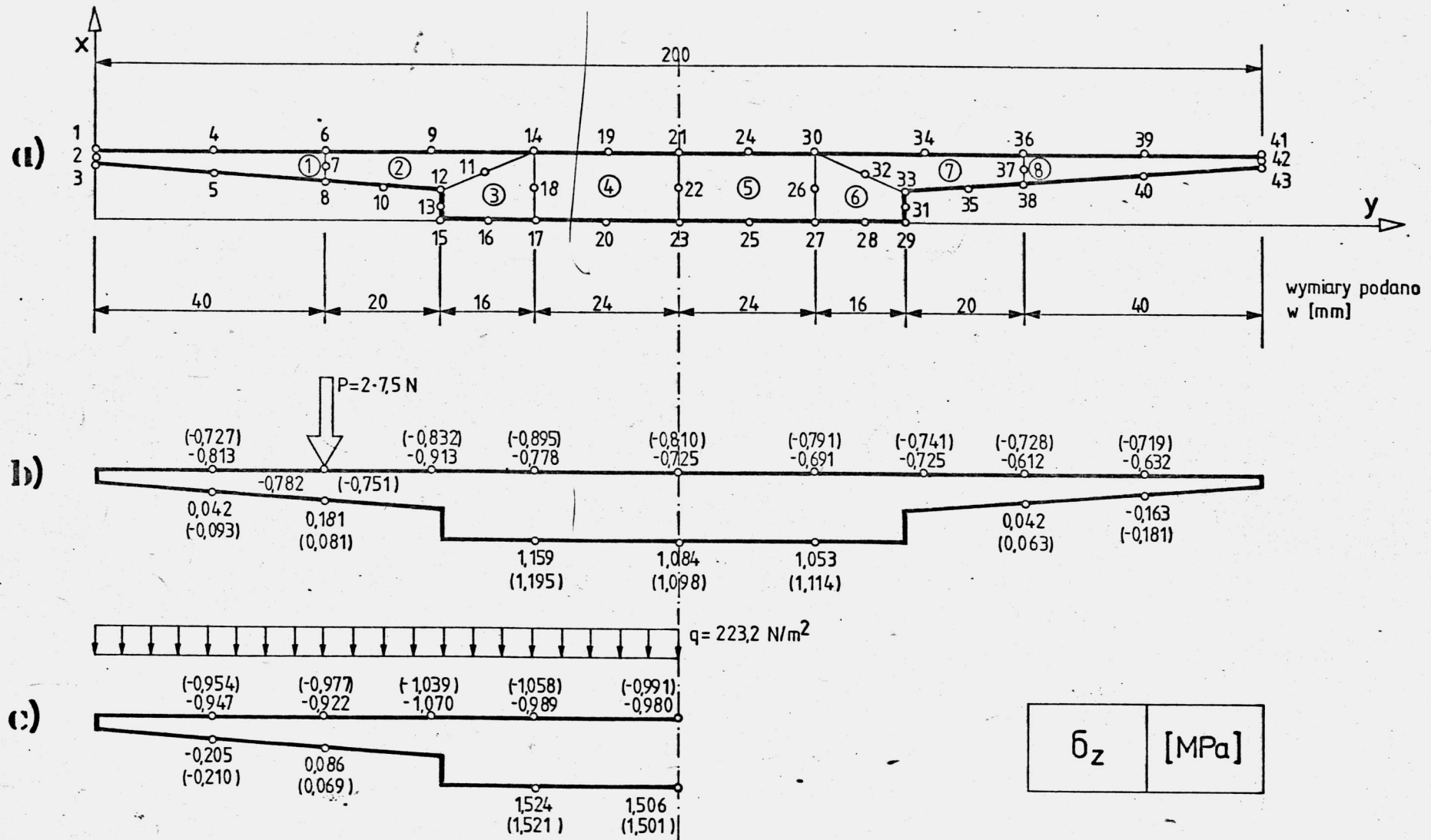
Przyjęty w obliczeniach sposób dyskretyzacji poszczególnych modeli pokazano na rys. 5.14.a, 5.15.a, 5.16.a i 5.20.a. Na rysunkach tych porównano także wartości naprężeń



Rys. 5.14. Model A : podział na elementy oraz naprężenia σ_z wyznaczone doświadczalnie (wartości w nawiasach) i teoretycznie



Rys. 5.15. Model B : podział na elementy oraz naprężenia σ_z wyznaczone doświadczalnie (wartości w nawiasach) i teoretycznie



Rys. 5.16. Model C: podział na elementy oraz naprężenia σ_z wyznaczone doświadczalnie (wartości w nawiasach) i teoretycznie

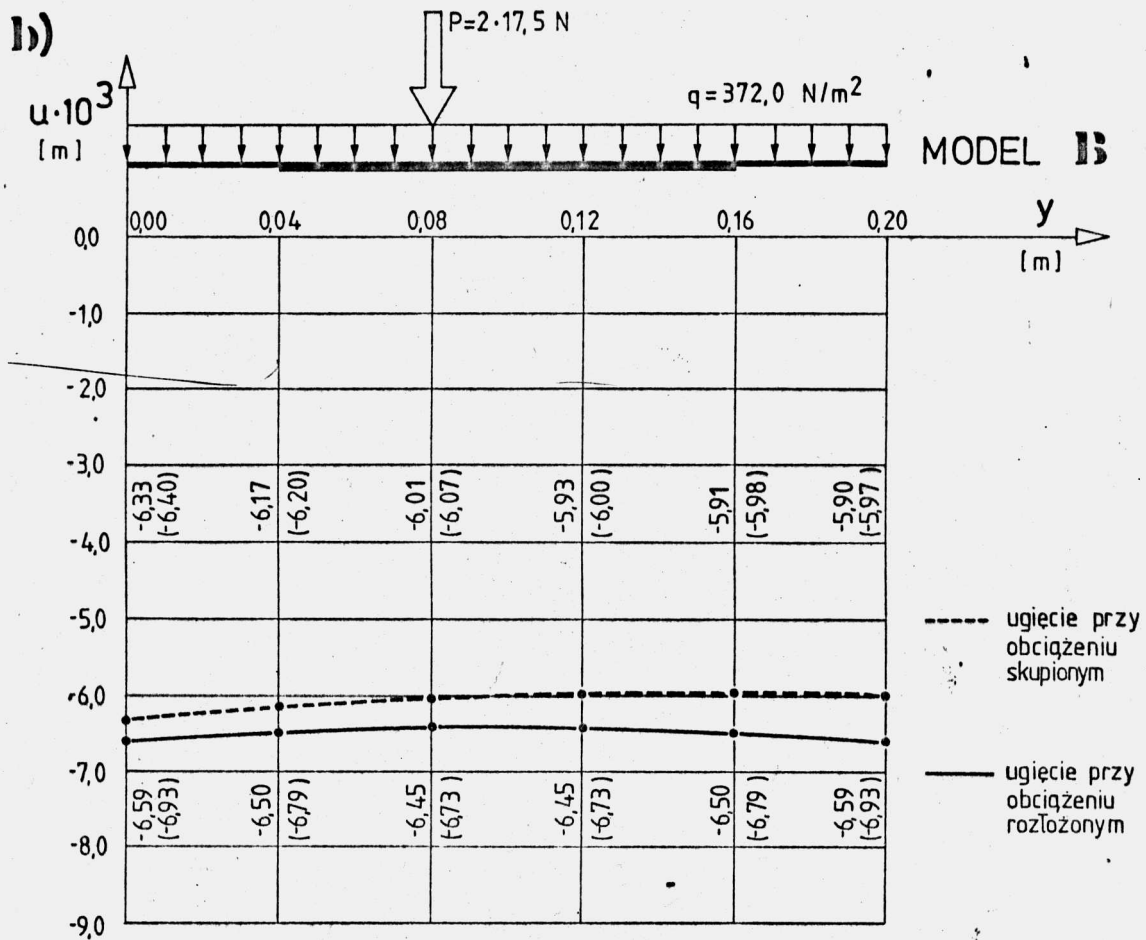
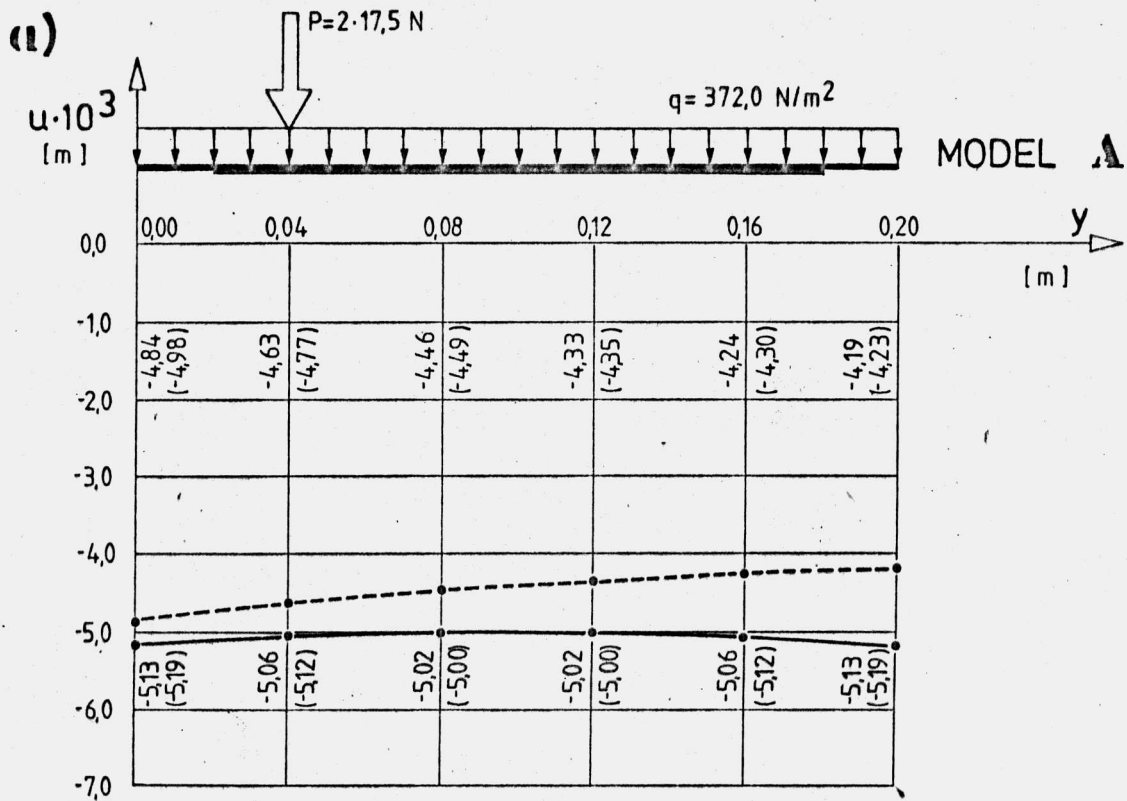
δ_z lub δ_φ wyznaczone doświadczalnie z naprężeniami obliczonymi na drodze teoretycznej. Porównanie przeprowadzono w wybranych punktach modelu dla różnych schematów obciążeń. Analogiczne porównanie wielkości ugięć przedstawiono na rysunkach 5.17, 5.18 i 5.19. Na rysunkach podano wartości wyznaczone przy uwzględnieniu 11 harmonicznych, gdyż okazało się, że wyższe harmoniczne nie wpływają w sposób istotny na analizowane wielkości. Procentowe zestawienie różnic między wartościami wyznaczonymi eksperymentalnie i teoretycznie podano w tab. 5.13 oraz w tab. 5.14.

Ze względu na ograniczoną objętość pracy przeanalizowano jedynie ugięcia i naprężenia δ_z lub odpowiednio δ_φ /w modelu zakrzywionym/. Z tego samego powodu dla każdego modelu przedstawiono wyniki jedynie dla dwóch wybranych schematów obciążenia.

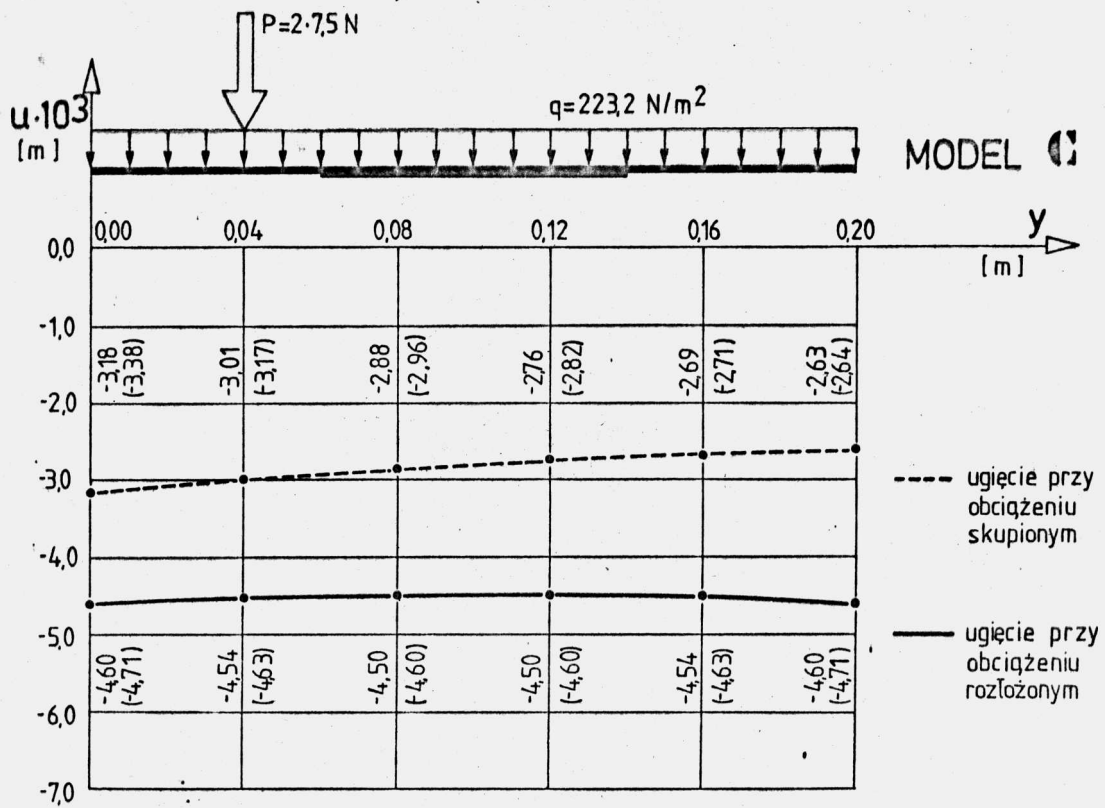
W przypadku pręseł prostokątnych przedstawione wyniki wykazują dobrą zgodność nawet przy znacznych wysięgach wsporników /model C/. Największe rozbieżności naprężeń występują w punktach położonych na wspornikach /tab. 5.13/. Wpływa na to z jednej strony nieco zbyt rzadka siatka podziału wsporników na elementy, a z drugiej strony niewielkie wartości odkształceń na dolnej powierzchni wsporników, mieszczące się w granicach błędu pomiaru. Ze względu na niewielkie grubości wsporników istotne znaczenie mogą mieć także niedokładności wykonania modeli.

Znaczniejsze różnice /w granicach kilkunastu procent/ między wielkościami wyznaczonymi teoretycznie i doświadczalnie stwierdzono w przypadku modelu D podpartego w sposób pokazany na rys. 5.11.c. Aby stwierdzić czy rozbieżności te są wynikiem niespełnienia warunków brzegowych /3.9 / na szerokości wsporników, badanie powtórzono podpierając model na całej szerokości. Uzyskane wyniki /rys. 5.19 i rys. 5.20/ charakteryzują się lepszą zgodnością z wielkościami obliczonymi teoretycznie. Porównania procentowe przedstawiono w tab. 5.14 i w tab. 5.15.

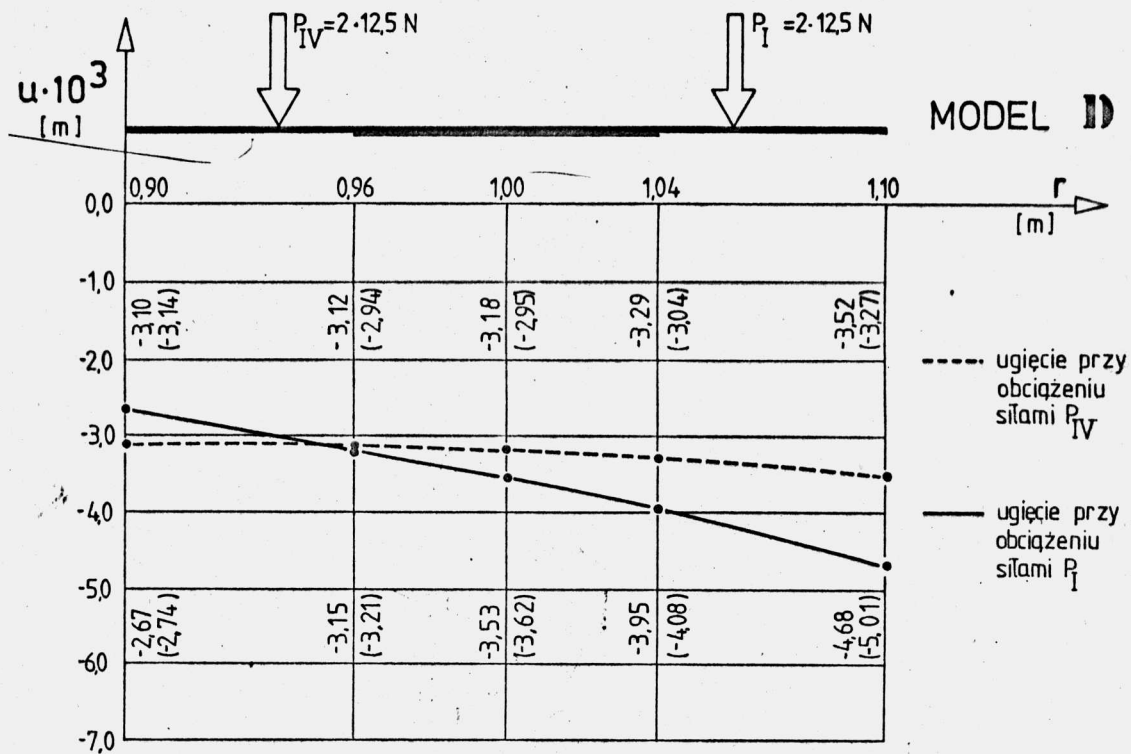
Na podstawie przeprowadzonych badań można stwierdzić, że pryzmatyczne elementy skończone mogą być stosowane do analizy pręseł ze wspornikami podchodnikowymi, mimo różnic między warunkami brzegowymi w rzeczywistej konstrukcji i w modelu teo-



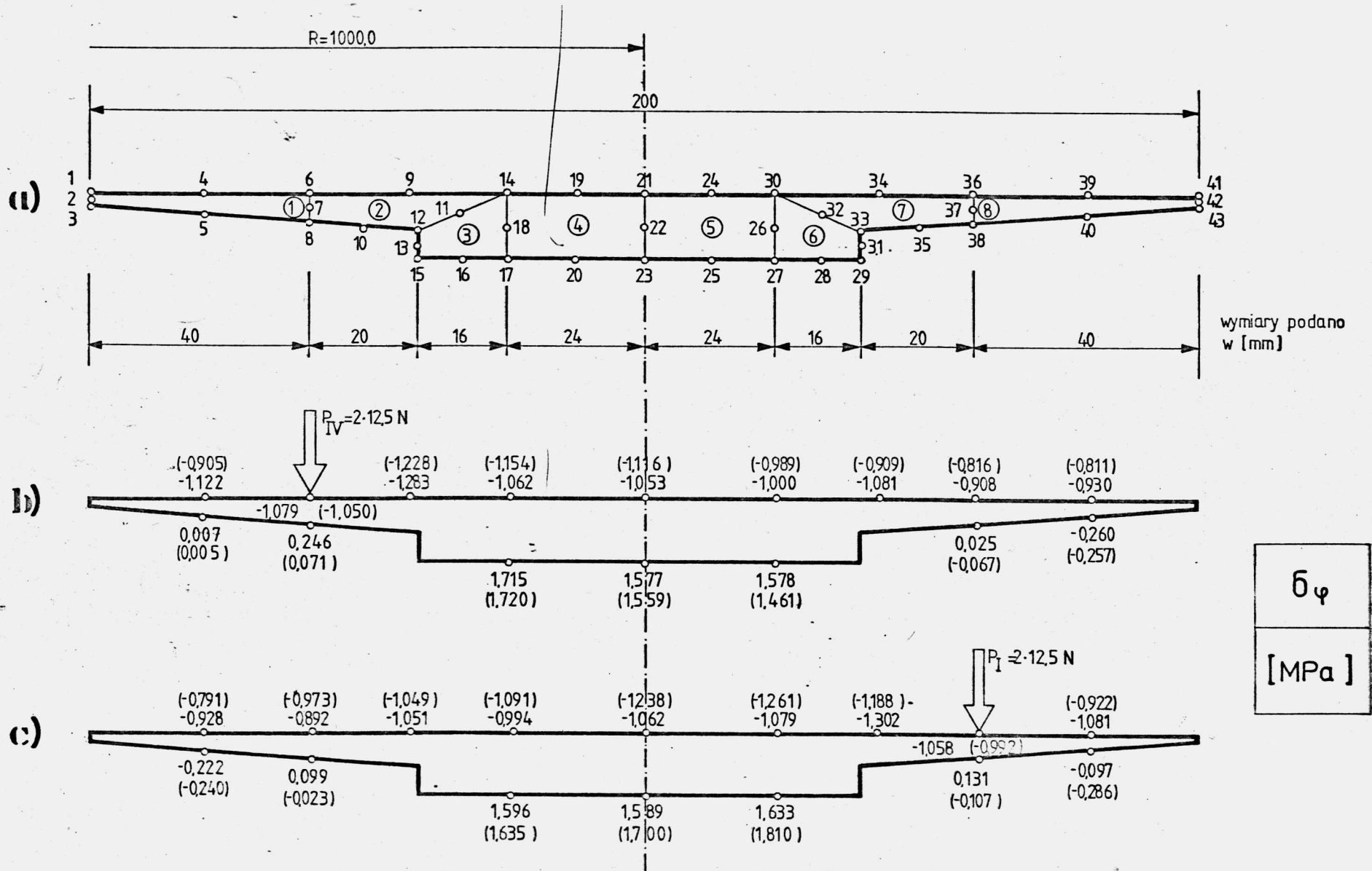
Rys. 5.17. Porównanie ugięć wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie (w nawiasach wyniki badań modelowych)



Rys. 5.18. Porównanie ugięć wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie (w nawiasach wyniki badań modelowych)



Rys. 5.19. Porównanie ugięć wyznaczonych teoretycznie i doświadczalnie (w nawiasach wyniki badań modelowych)



Rys. 5.20. Model D: podział na elementy oraz naprężenia σ_φ wyznaczone doświadczalnie (wartości w nawiasach) i teoretycznie

Tabela 5.13

Porównanie naprężeń wyznaczonych doświadczalnie $\bar{\sigma}_z$
i teoretycznie σ_z

Model	Obciążenie rozłożone		Obciążenie skupione			
	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_z}{\bar{\sigma}_z} \cdot 100$ [%]	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_z}{\bar{\sigma}_z} \cdot 100$ [%]	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_z - \sigma_z}{\bar{\sigma}_z} \cdot 100$ [%]
A	4	-13.28	4	-11.68	21	6.59
	5	1.03	5	9.84	23	2.53
	9	- 6.73	9	- 6.42	24	8.61
	12	- 3.77	12	- 6.20	25	4.59
	16	- 5.36	14	- 7.49	26	8.22
	18	- 3.20	15	- 4.54	28	6.51
	19	- 3.35	16	- 2.54	32	4.41
	20	- 8.10	18	- 6.84	35	6.68
	21	- 3.06	19	6.24	39	- 3.41
	23	- 9.01	20	0,63	40	7.87
B	4	-11.23	4	- 2,89	19	3.01
	5	16.48	5	13.38	20	1,73
	9	1.37	9	4.56	21	6.01
	12	1.99	12	0.54	23	2.30
	16	2.84	14	2.68	27	2.95
	18	0,45	15	- 2.31	30	4.15
	19	5.75	16	1.82	34	0.43
	20	0,59	18	0.18	35	12.76
C	4	0,73	4	-11.83	27	5.47
	6	5.63	6	- 4.13	30	12.64
	9	- 2.98	9	- 9.73	34	2.16
	14	6.52	14	13.07	36	15.93
	17	- 0.20	17	3.01	38	33.30
	21	1.11	21	10.49	39	12.10
	23	- 0.33	23	1.27	40	9.94

Tabela 5.14

Porównanie ugięć wyznaczonych doświadczalnie \bar{u} i teoretycznie u

Model	Obciążenie	$\frac{\bar{u}-u}{u} \cdot 100$ [%]					
		Numer punktu pomiarowego					
		I	II	III	IV	V	VI
A	rozłożone	1.17	1.18	-0.40	-0.40	1.18	1.17
	skupione	2.90	3.02	0.67	0.46	1.42	0.95
B	rozłożone	5.16	4.46	4.34	4.34	4.46	5.16
	skupione	1.11	0.49	1.00	1.18	1.18	1.19
C	rozłożone	2.39	1.98	2.22	2.22	1.98	2.39
	skupione	6.29	5.31	2.78	2.17	0.79	0.38
D	skupione P_{IV}	1.29	-5.77	-7.23		-7.60	-7.10
	skupione P_I	2.62	1.90	2.55		3.29	7.05

Tabela 5.15

Porównanie naprężeń wyznaczonych doświadczalnie $\bar{\sigma}_\varphi$ i teoretycznie δ_φ

Model	Obciążenie skupione P_{IV}				Obciążenie skupione P_I			
	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_\varphi - \delta_\varphi}{\bar{\sigma}_\varphi} \cdot 100$ [%]	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_\varphi - \delta_\varphi}{\bar{\sigma}_\varphi} \cdot 100$ [%]	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_\varphi - \delta_\varphi}{\bar{\sigma}_\varphi} \cdot 100$ [%]	Nr węzła	$\frac{\bar{\sigma}_\varphi - \delta_\varphi}{\bar{\sigma}_\varphi} \cdot 100$ [%]
D	4	- 23.98	23	- 1.15	4	- 17.32	23	6.53
	5	- 40.00	27	- 2.60	5	7.50	27	9.78
	6	- 2.76	30	- 1.11	6	8.32	30	14.43
	9	- 4.48	34	- 18.92	9	- 0.19	34	- 9.59
	14	7.97	36	- 11.27	14	8.89	36	6.65
	17	0.29	39	- 14.67	17	2.38	39	- 17.24
	21	5.64	40	- 1.17	21	14.22	40	66.08

retycznym. W przypadku przęseł prostokątnych typu płytowego poprawne wyniki uzyskuje się nawet przy wysięgach wsporników osiągających 0.6 całkowitej szerokości przęsła. Zakrzywienie konstrukcji powoduje zmniejszenie dokładności wyników, a rozbieżności pogłębiają się ze wzrostem krzywizny i zwiększaniem wysięgu wsporników. Wpływ niepełnej zgodności rzeczywistych i obliczeniowych warunków brzegowych na poprawność rozwiązania powinien zostać szczegółowo przeanalizowany dla różnych typów przęseł.

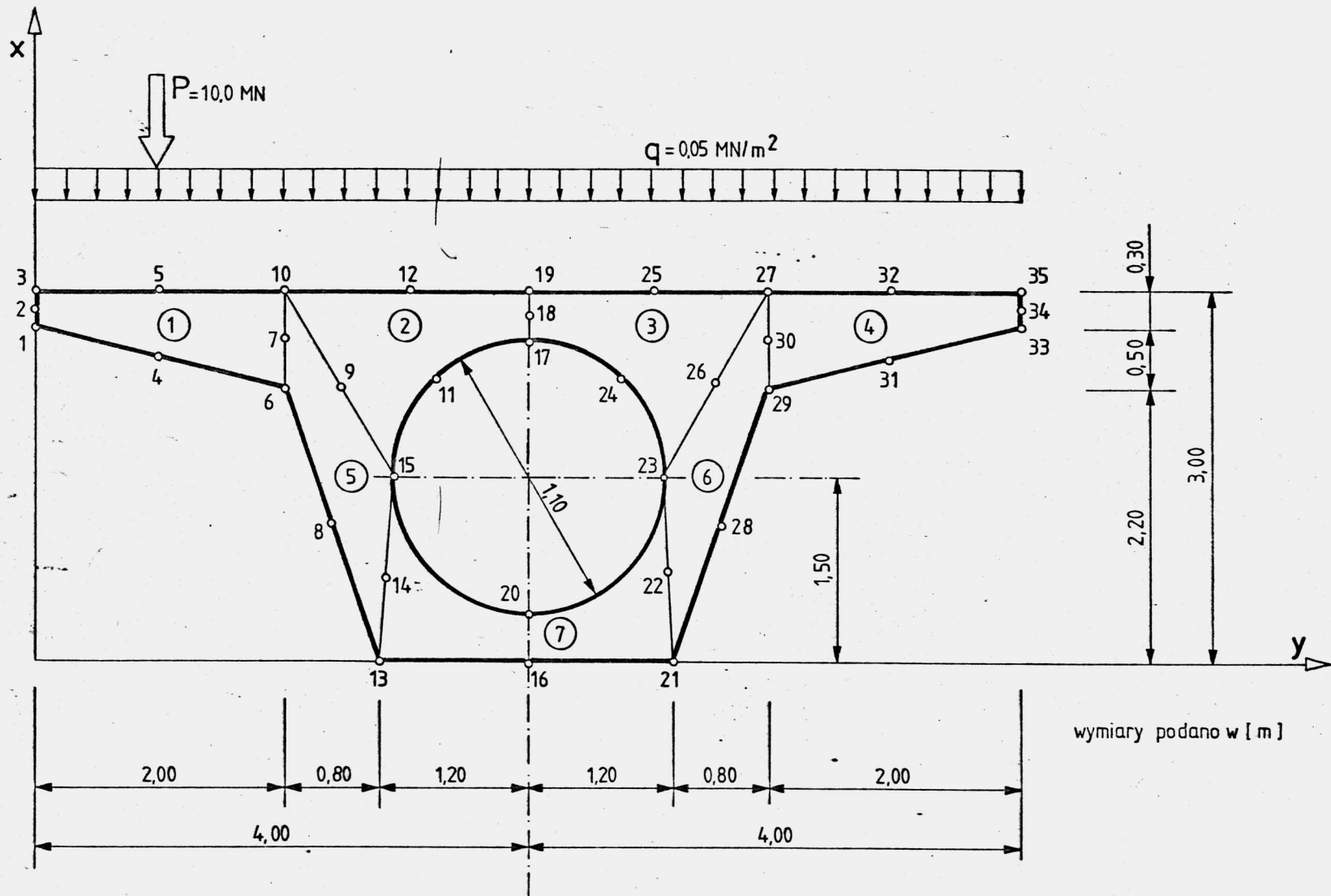
5.4. Przykłady zastosowań

5.4.1. Przęsło o przekroju skrzynkowym

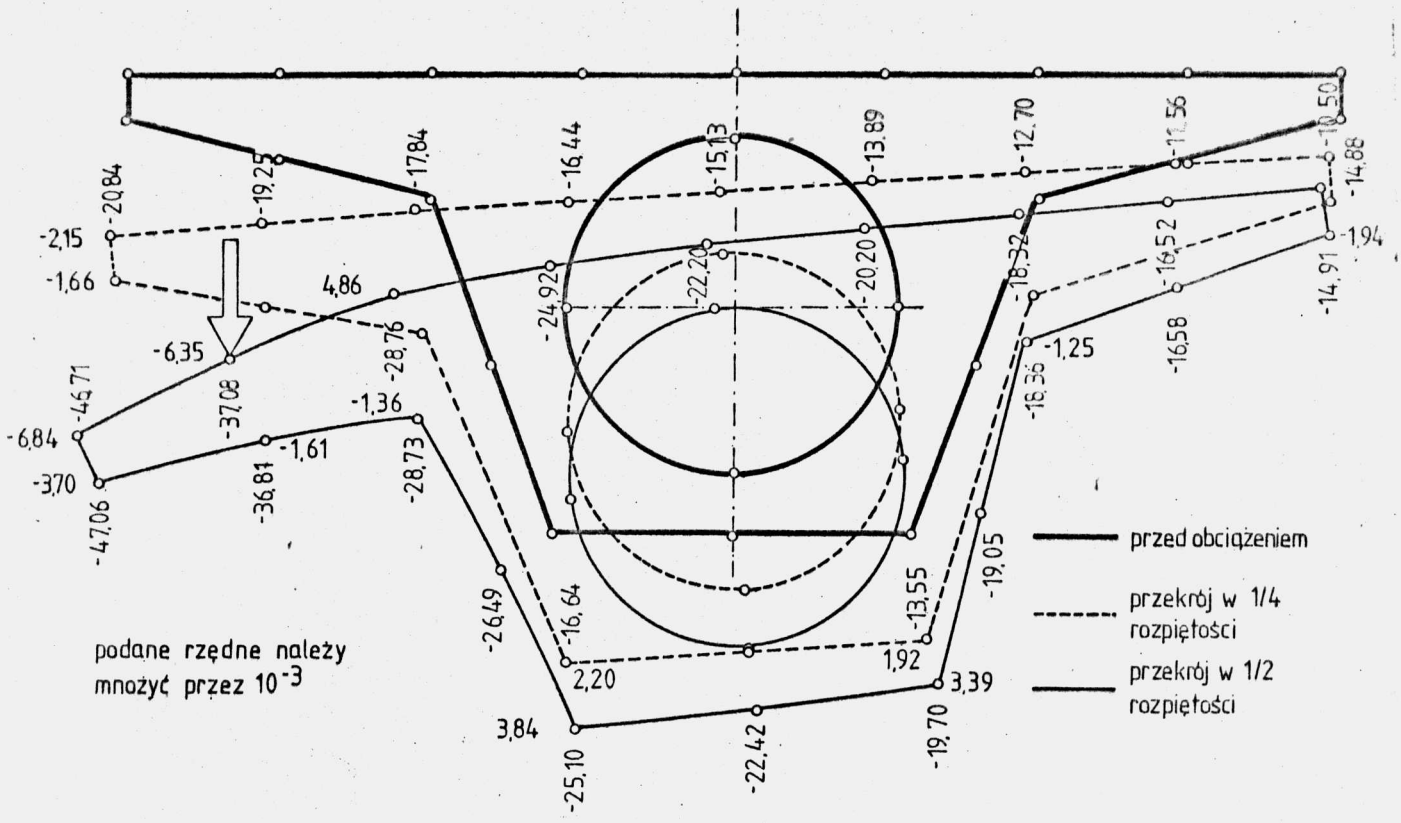
Analizie poddano swobodnie podparte, prostokątne przęsło o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 5.21. Na rysunku tym zaznaczono także sposób dyskretyzacji konstrukcji. Zastosowanie elementów o 8 liniach węzłowych pozwala na dość dokładny opis skomplikowanej geometrii przekroju poprzecznego o zarysie krzywoliniowym.

Rozpiętość przęsła wynosi $a = 20.0$ m. Materiał charakteryzowany jest przez dwie stałe sprężystości $E = 1.0 \cdot 10^4$ MPa i $\nu = 0.20$. Obliczenia wykonano dla trzech schematów obciążeń /rys. 5.21/:

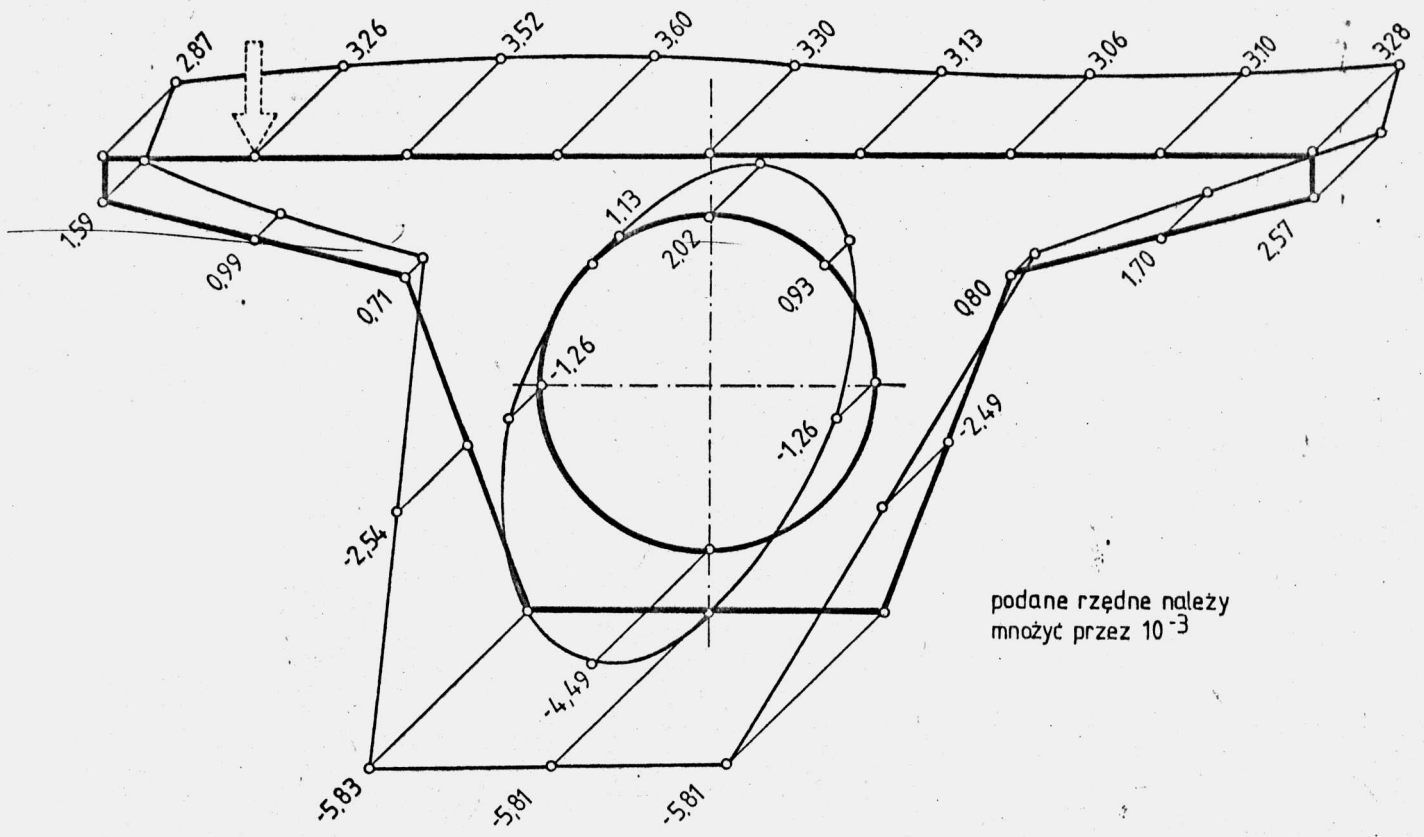
- 1/ siła skupiona $P = 10.0$ MN przyłożona w środku rozpiętości przęsła na linii węzłowej nr 5 ;
- 2/ obciążenie $q = 0,05$ MN/m² rozłożone równomiernie na całej powierzchni przęsła ;
- 3/ sprężenie dwoma kablami o trasach pokrywających się z liniami węzłowymi nr 14 i nr 22, przy jednakowych siłach sprężających $T = 10.0$ MN.



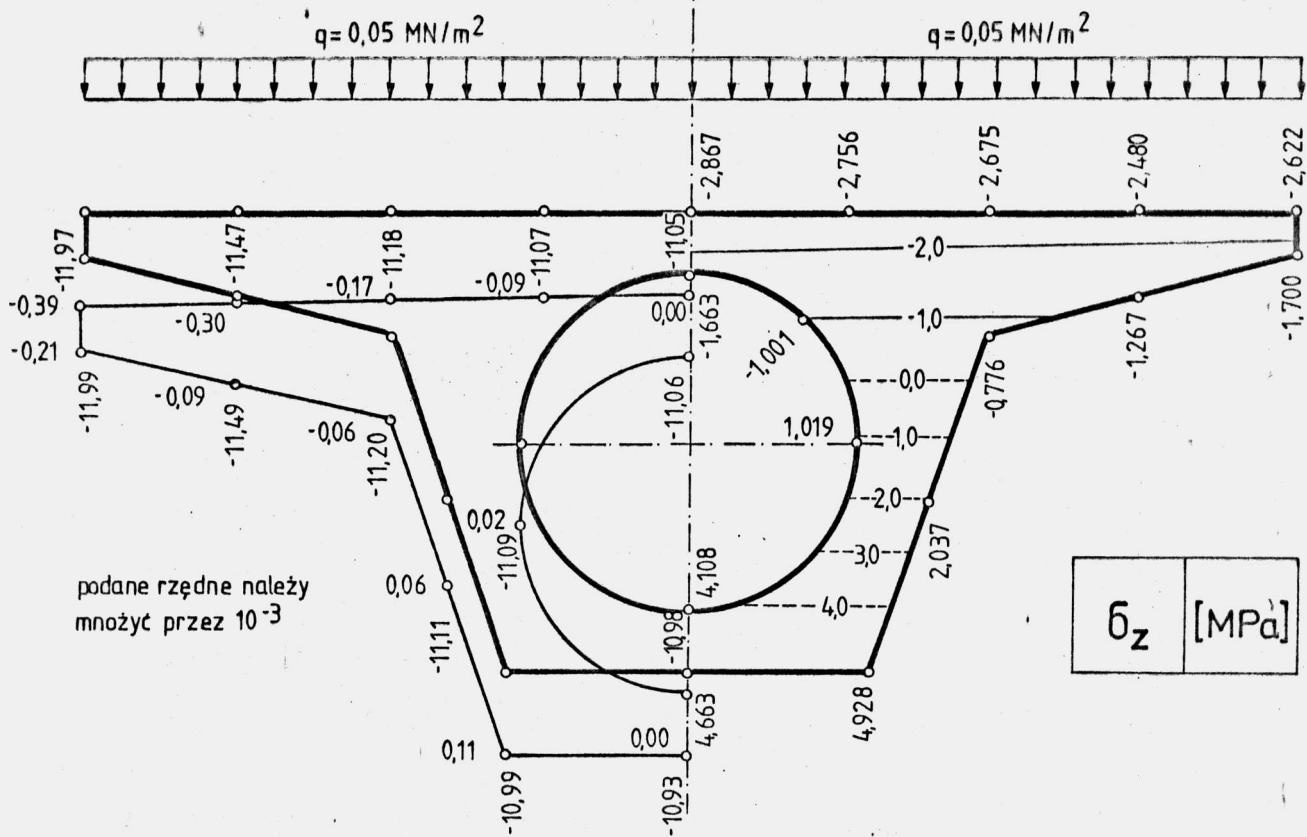
Rys.5.21.Wymiary przekroju poprzecznego i sposób podziału na elementy



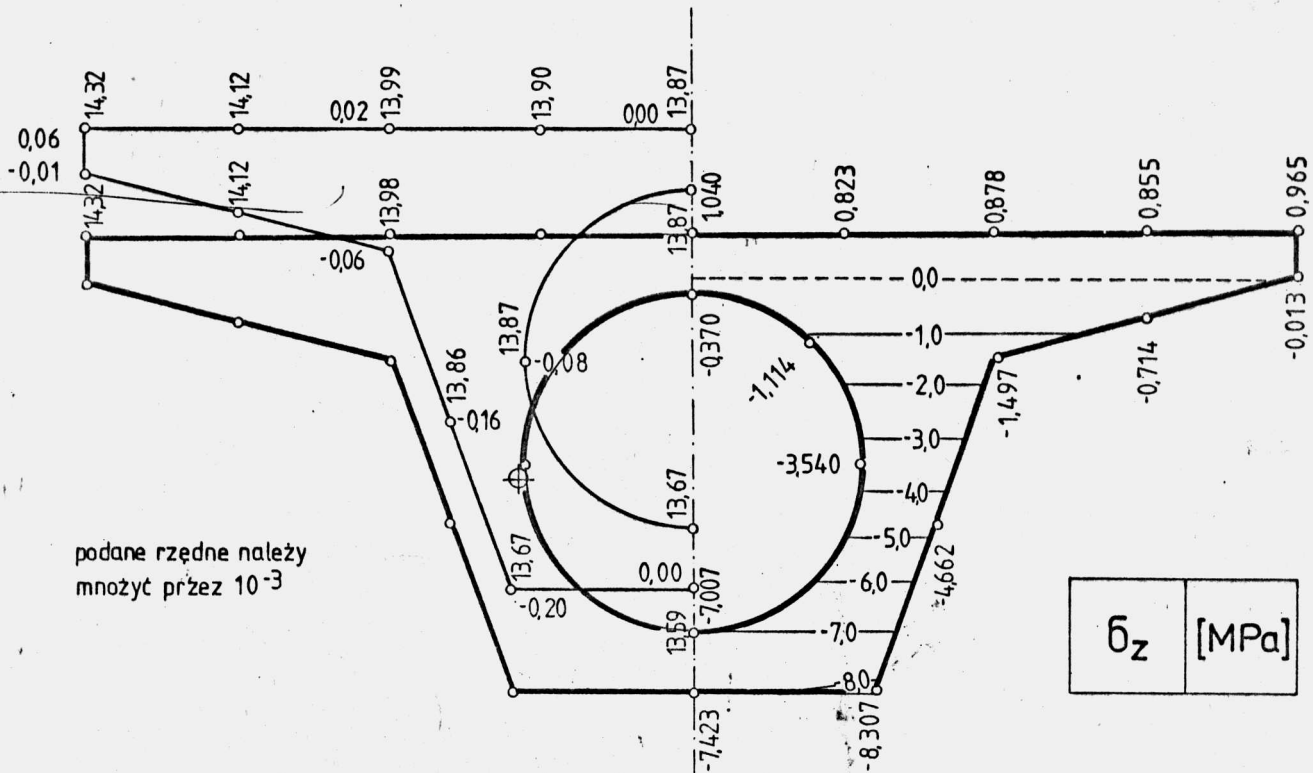
Rys. 5.22. Deformacja przekroju poprzecznego przy obciążeniu siłą skupioną; przemieszczenia podane w [m]



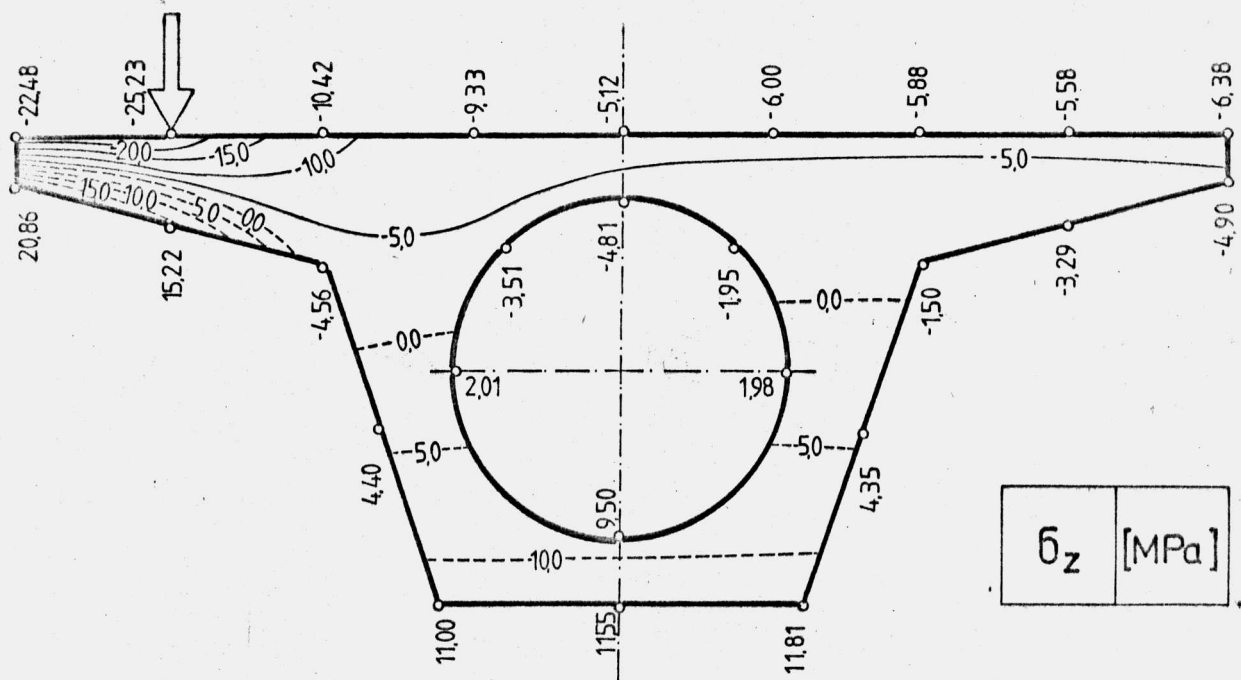
Rys. 5.23. Przemieszczenia w [m] przekroju podporowego przy obciążeniu siłą skupioną,



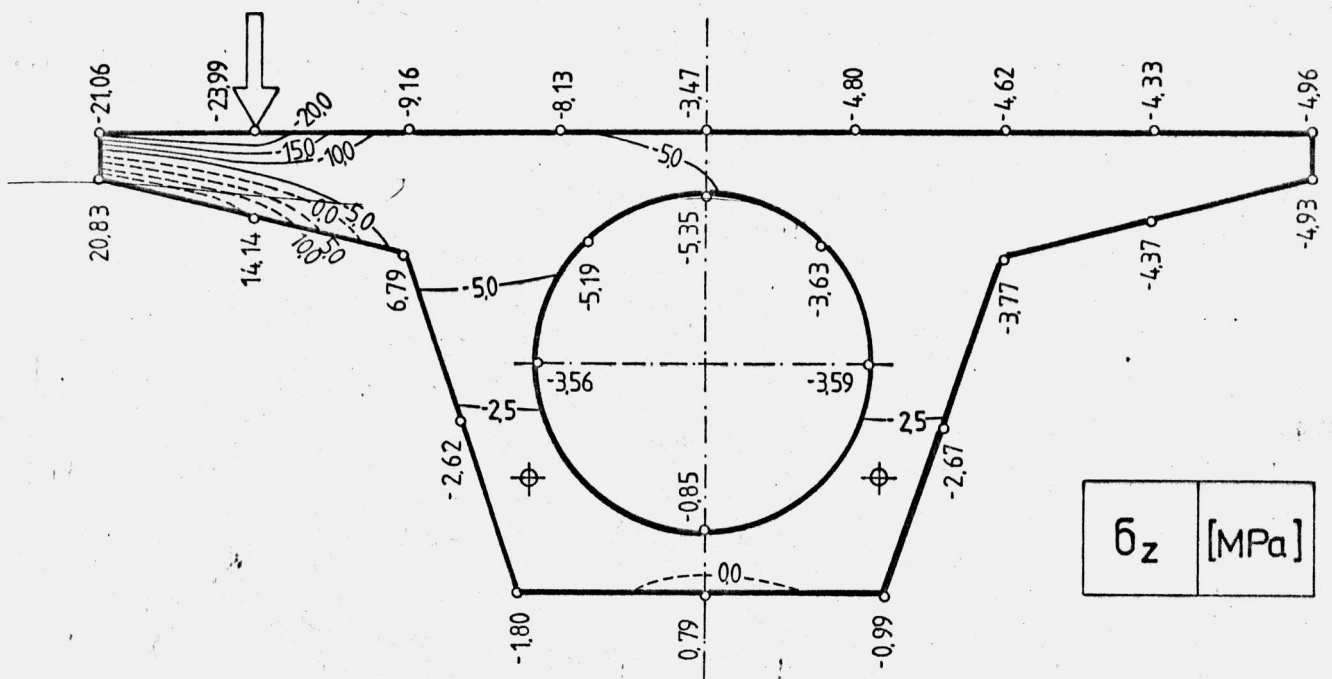
Rys. 5.24. Przemieszczenia u i v [m] oraz naprężenia σ_z [MPa] w środku rozpiętości przęśła wywołane obciążeniem rozłożonym



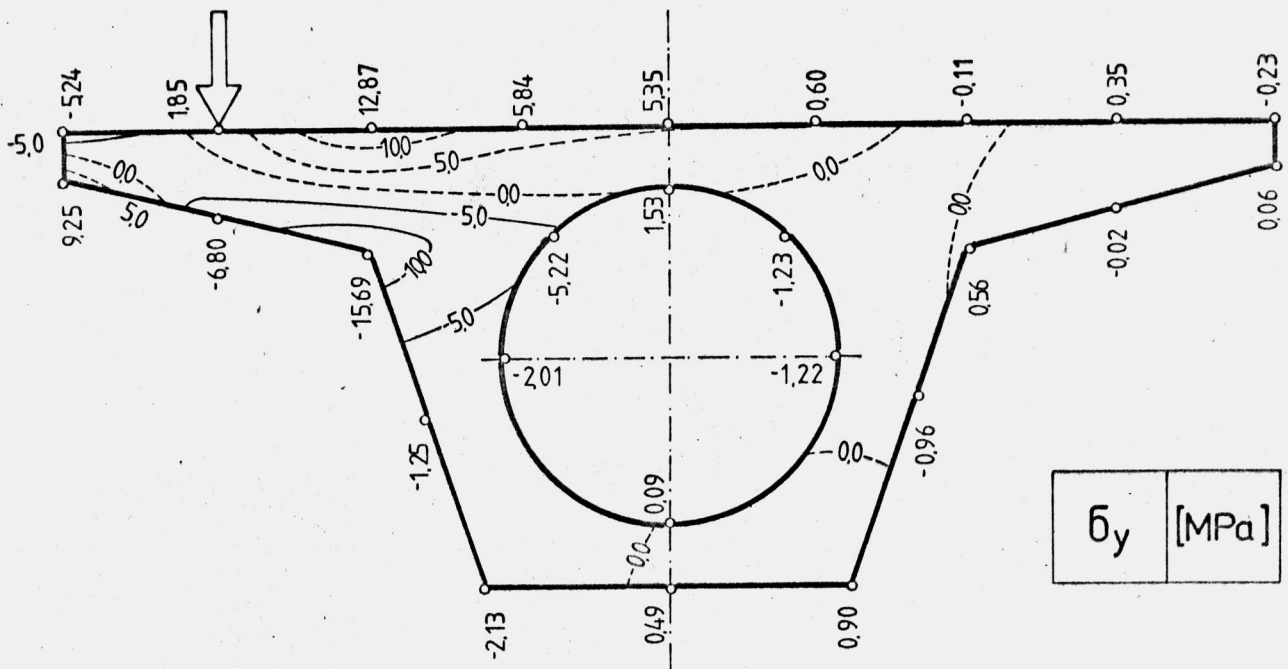
Rys. 5.25. Przemieszczenia u i v [m] oraz naprężenia σ_z [MPa] w środku rozpiętości przęśła wywołane sprężeniem



Rys. 5.26. Rozkład naprężeń σ_z w połowie rozpiętości przęsta przy obciążeniu siłą skupioną



Rys. 5.27. Rozkład naprężeń σ_z przy obciążeniu siłą skupioną i siłami sprężającymi



Rys. 5.28. Rozkład naprężeń σ_y w połowie rozpiętości przęsła przy obciążeniu siłą skupioną

Przemieszczenia wywołane poszczególnymi obciążeniami pokazano na rys. 5.22 ÷ 5.25. Na rys. 5.22 wyraźnie widać inny charakter deformacji w przekroju przyłożenia siły skupionej niż w przekrojach oddalonych od obciążenia.

Naprężenia σ_z w środku rozpiętości przęsła przedstawiono na rys. 5.24 ÷ 5.26. Na rysunkach podano wartości naprężeń w węzłach leżących na powierzchniach konstrukcji, a rozkład w płaszczyźnie przekroju poprzecznego pokazano za pomocą linii łączących punkty o jednakowych naprężeniach. Linie te mają charakter orientacyjny ze względu na rzadką siatkę podziału na elementy, ale taka forma przedstawienia wyników wydaje się najbardziej czytelna. Rozwiązania uzyskane przy użyciu niewielkiej liczby elementów należy traktować jako pierwsze przybliżenie, pozwalające na ogólną ocenę pracy konstrukcji oraz lokali-

zacje miejsc koncentracji naprężeń. Uściślenie wyników wymaga zagęszczenia podziału na elementy, szczególnie w obszarach o dużej zmienności naprężeń.

W przypadku obciążenia rozłożonego /rys. 5.24/ i sprężenia /rys. 5.25/ zmienność naprężeń σ_z na wysokości przekroju jest w przybliżeniu liniowa. Przy sile skupionej /rys.5.26/ obserwuje się koncentrację naprężeń w pobliżu miejsca przyłożenia obciążenia. Znaczne naprężenia rozciągające w dolnej części obciążonego wspornika pojawiają się nawet po sprężeniu konstrukcji siłami $T = 15.0 \text{ MN}$ /rys.5.27/.

Na rys. 5.28 pokazano rozkład naprężeń σ_y w połowie rozpiętości przęsła przy obciążeniu siłą skupioną.

5.4.2. Porównanie przemieszczeń i naprężeń w przęsle prostokątnym i zakrzywionym

Wpływ zakrzywienia na pracę konstrukcji przeanalizowano na przykładzie dźwigara o przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 5.29. Obliczenia wykonano dla przęsła prostokątnego o rozpiętości $a = 10.0 \text{ m}$ oraz dla przęsła zakrzywionego o identycznej długości łuku w osi przekroju poprzecznego:

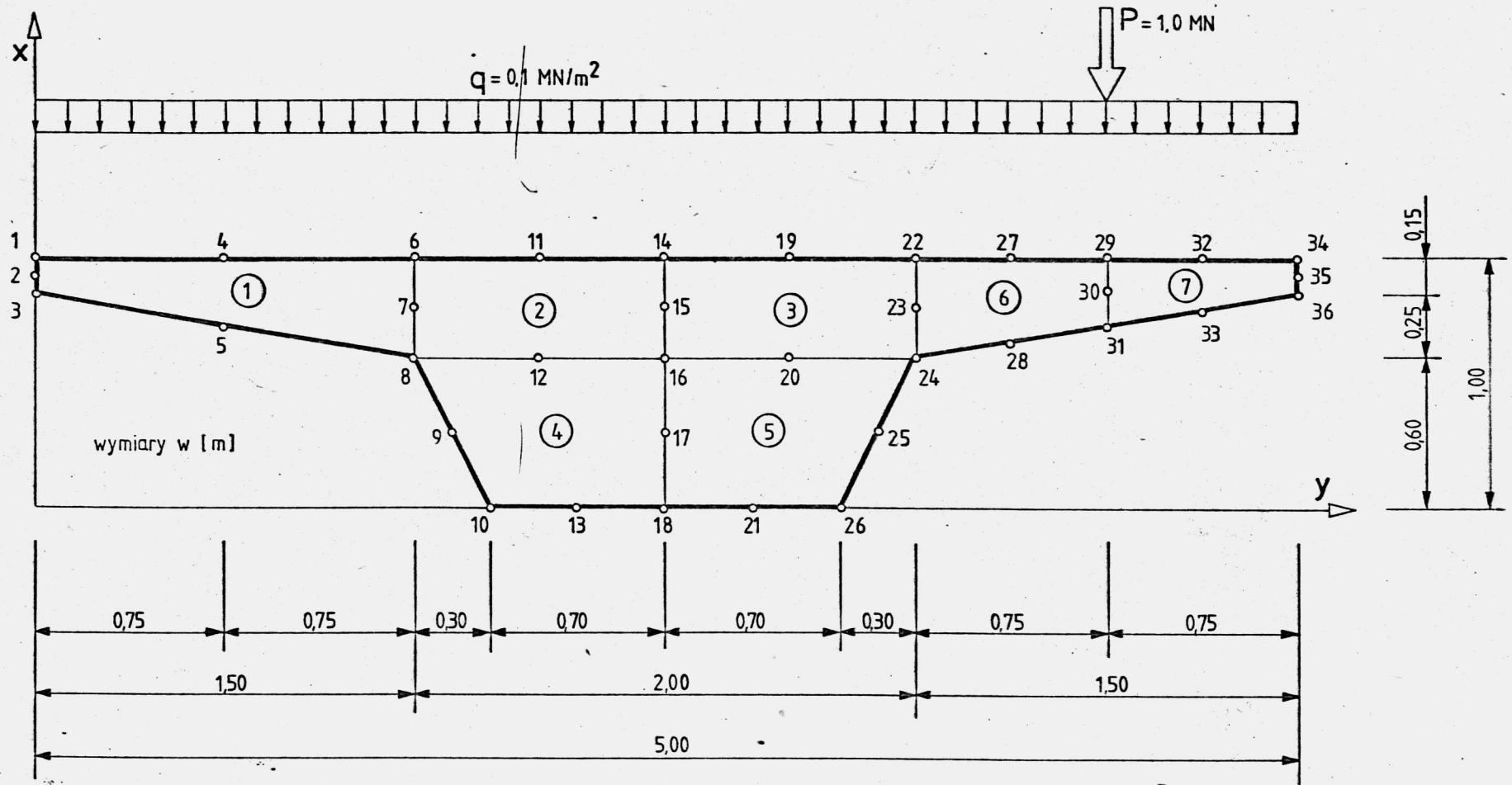
$R \cdot \alpha = 20.0 \text{ m} ; 0.5 = 10.0 \text{ m}$. Wewnętrzny promień krzywizny przęsła wynosi $R_w = 17.5 \text{ m}$, a zewnętrzny $R_z = 22.5 \text{ m}$. Materiał konstrukcji charakteryzują dwie stałe sprężystości:

$E = 3.0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ oraz $\nu = 0.20$. W obliczeniach uwzględniono 11 harmonicznych.

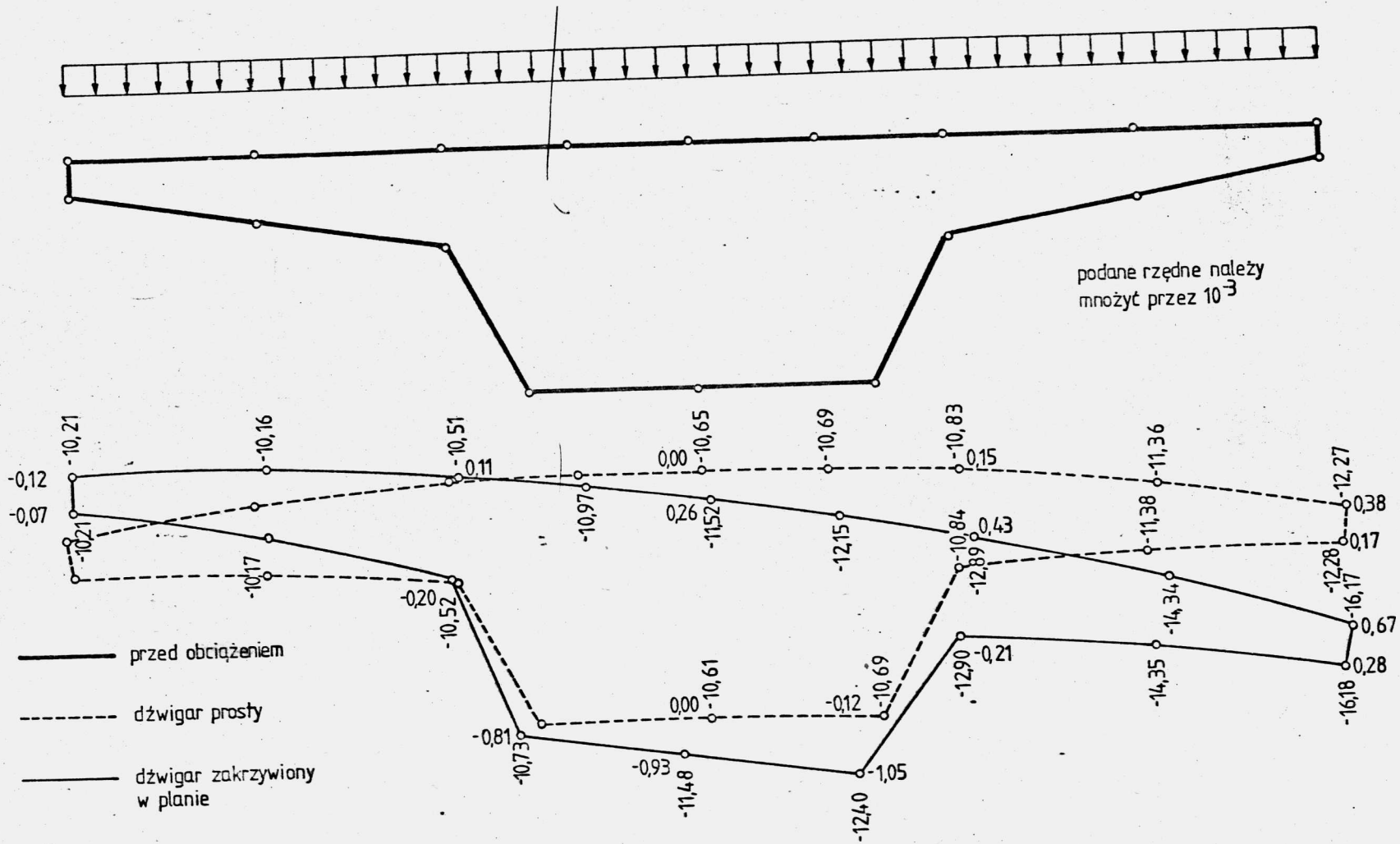
Porównanie przeprowadzono dla dwóch schematów obciążenia /rys. 5.29/ ;

- 1/ obciążenia powierzchniowego o intensywności $q = 0.1 \text{ MN/m}^2$ równomiernie rozłożonego na całej powierzchni przęsła ;
- 2/ obciążenia siłą skupioną $P = 1.0 \text{ MN}$ przyłożoną w połowie rozpiętości przęsła na linii węzłowej nr 29.

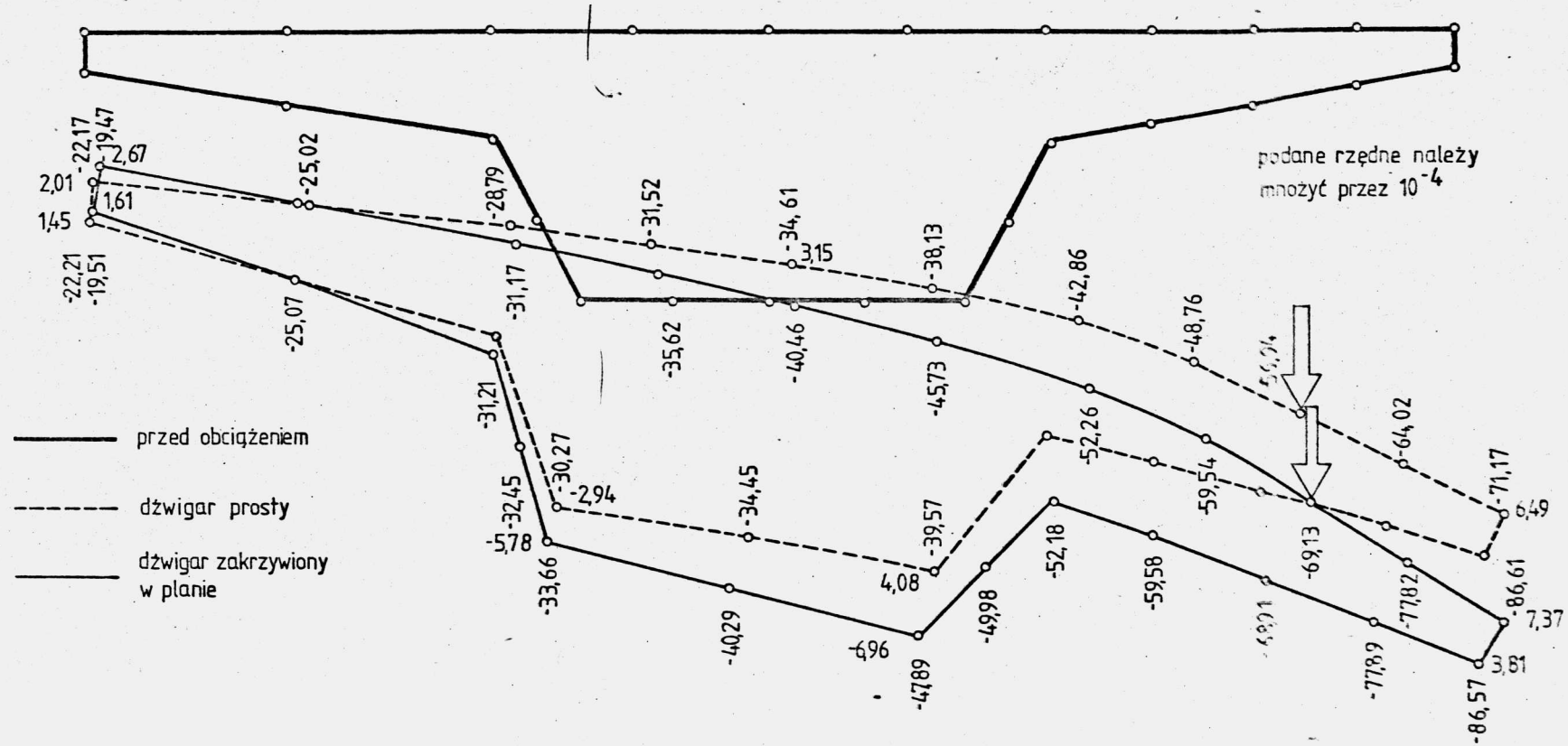
Na wszystkich rysunkach dotyczących konstrukcji zakrzywionych krawędź wewnętrzna znajduje się po lewej stronie rysunku, natomiast krawędź zewnętrzna /o mniejszej krzywiznie/ - po prawej .



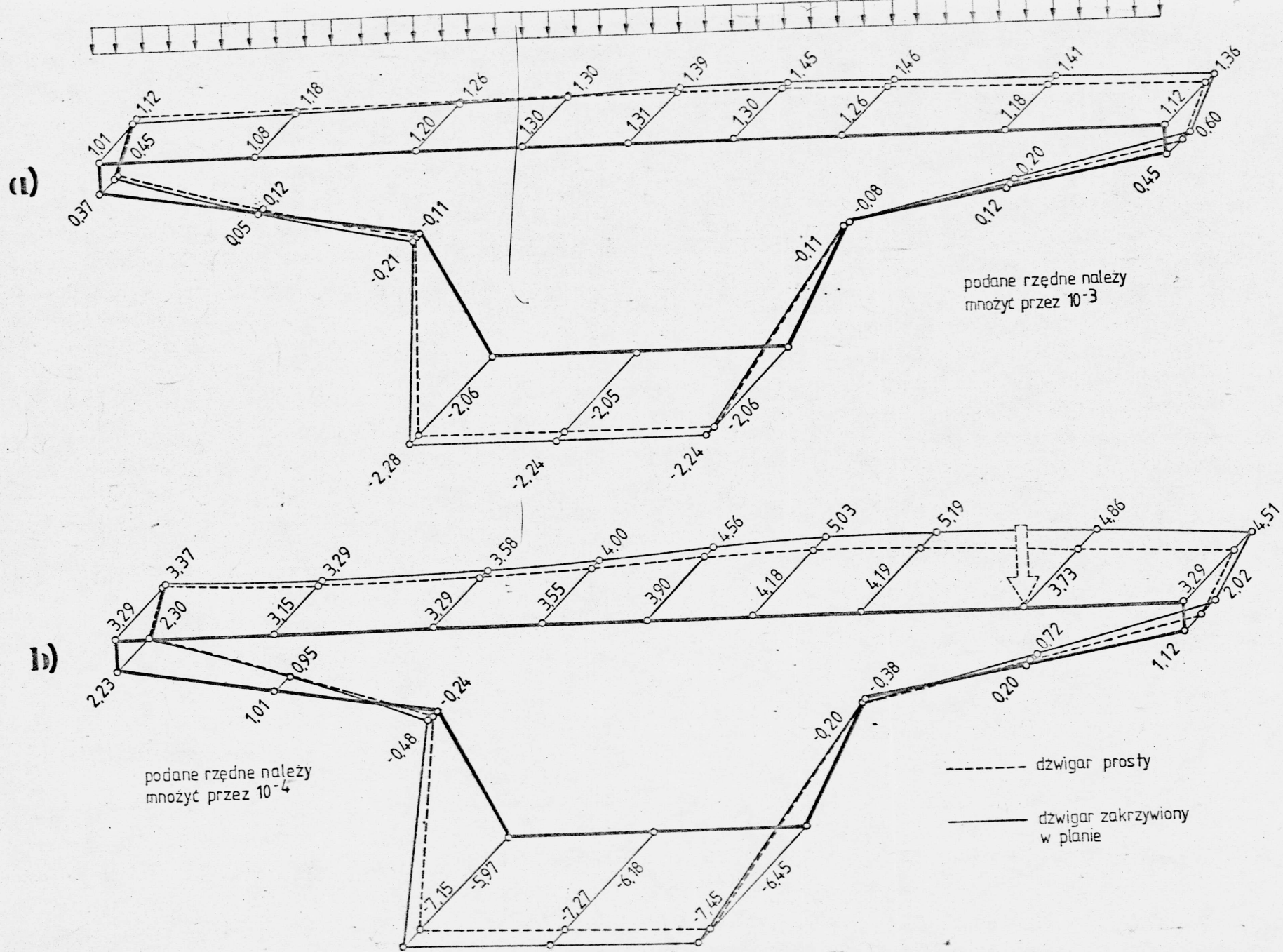
Rys. 5.29. Wymiary przekroju poprzecznego i sposób podziału na elementy



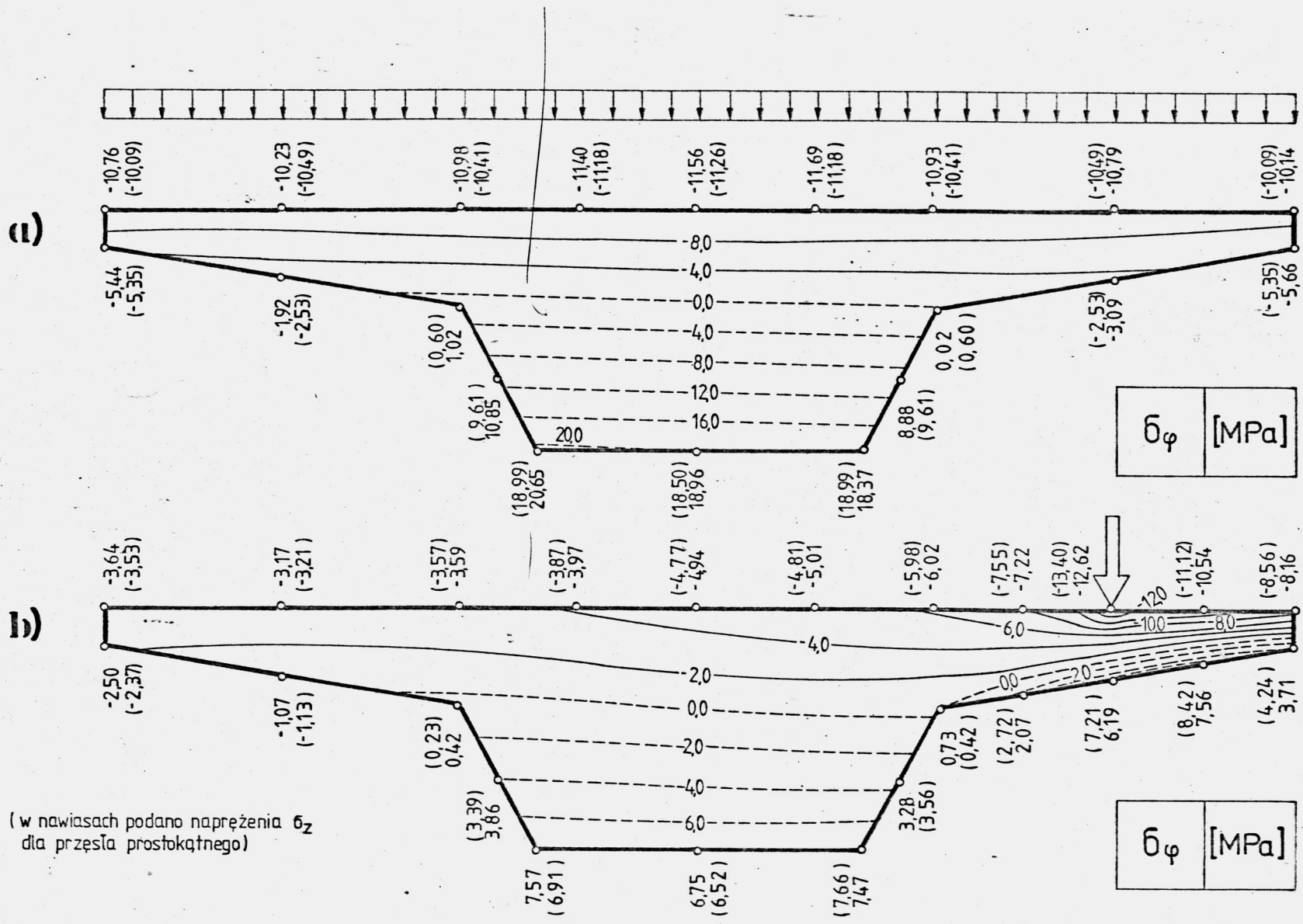
Rys. 5.30. Porównanie przemieszczeń u i v [m] w środku rozpiętości dźwigara prostego i zakrzywionego przy obciążeniu rozłożonym



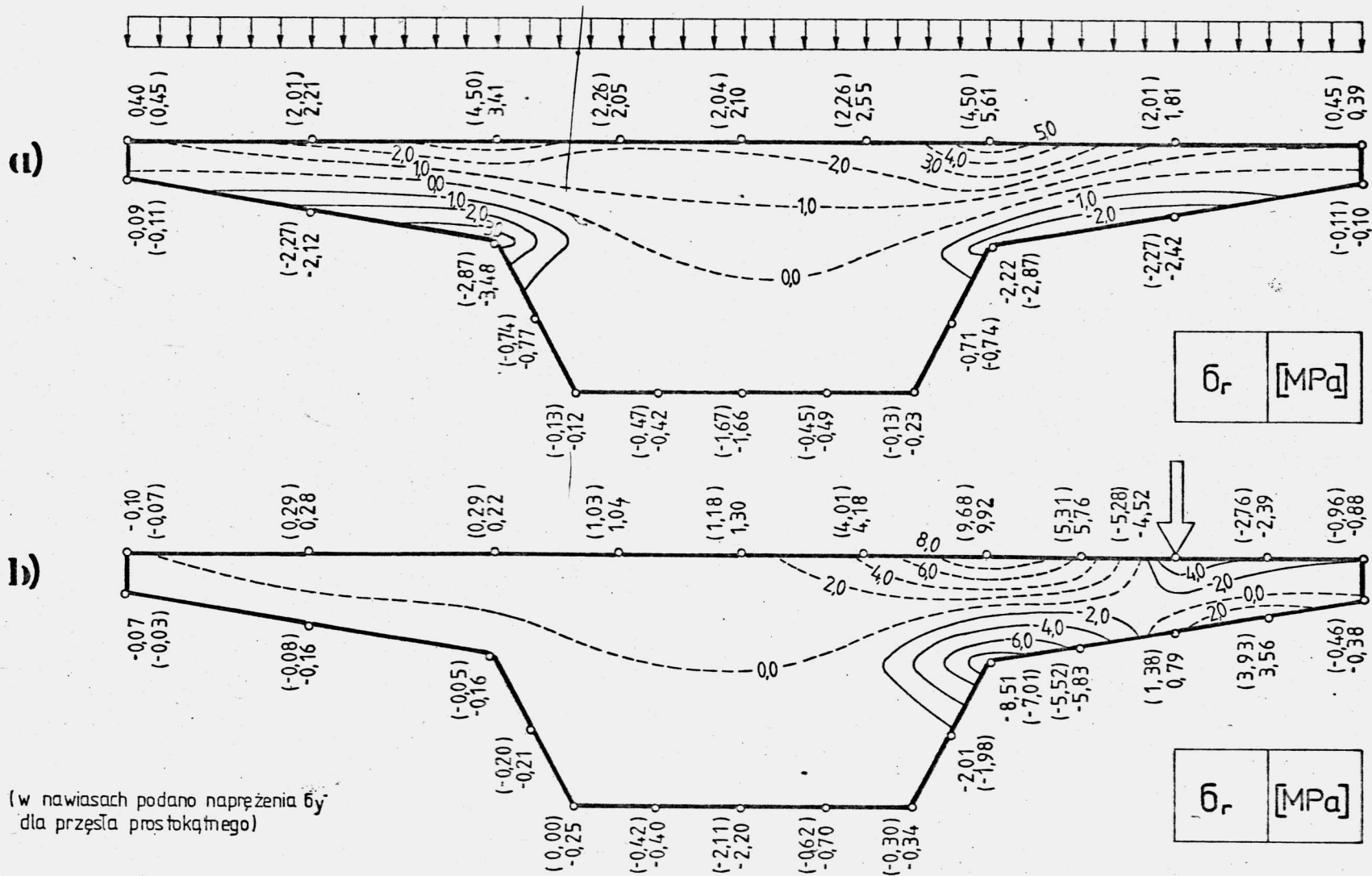
Rys. 5.31. Porównanie przemieszczeń u i v [m] w środku rozpiętości dźwigara prostego i zakrzywionego przy obciążeniu skupionym



Rys. 5.32. Przemieszczenia w [m] przekroju podporowego przy obciążeniu rozłożonym i skupionym

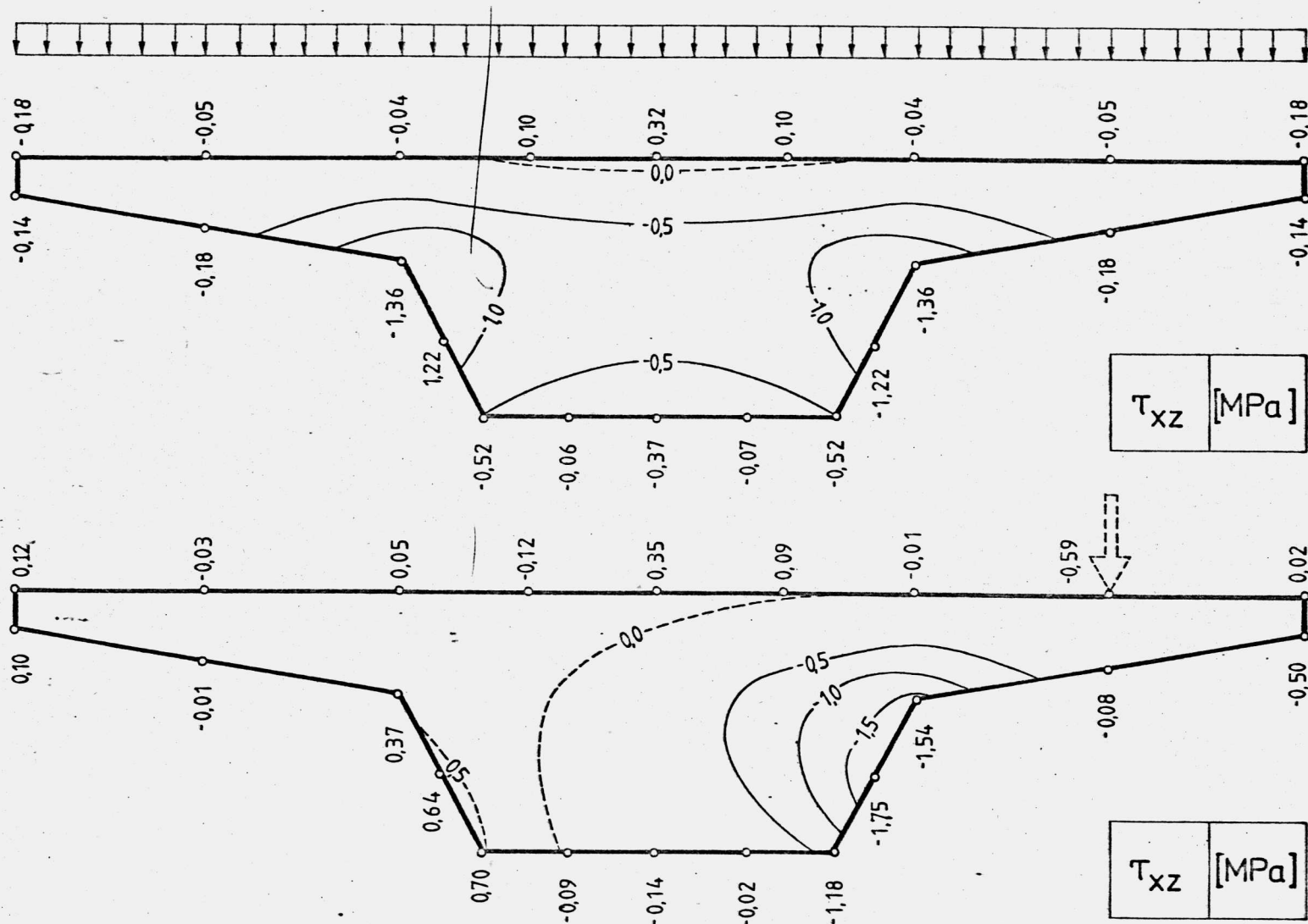


Rys. 5.33. Rozkład naprężeń σ_φ w środku rozpiętości przęsła zakrzywionego w planie przy obciążeniu rozłożonym i skupionym

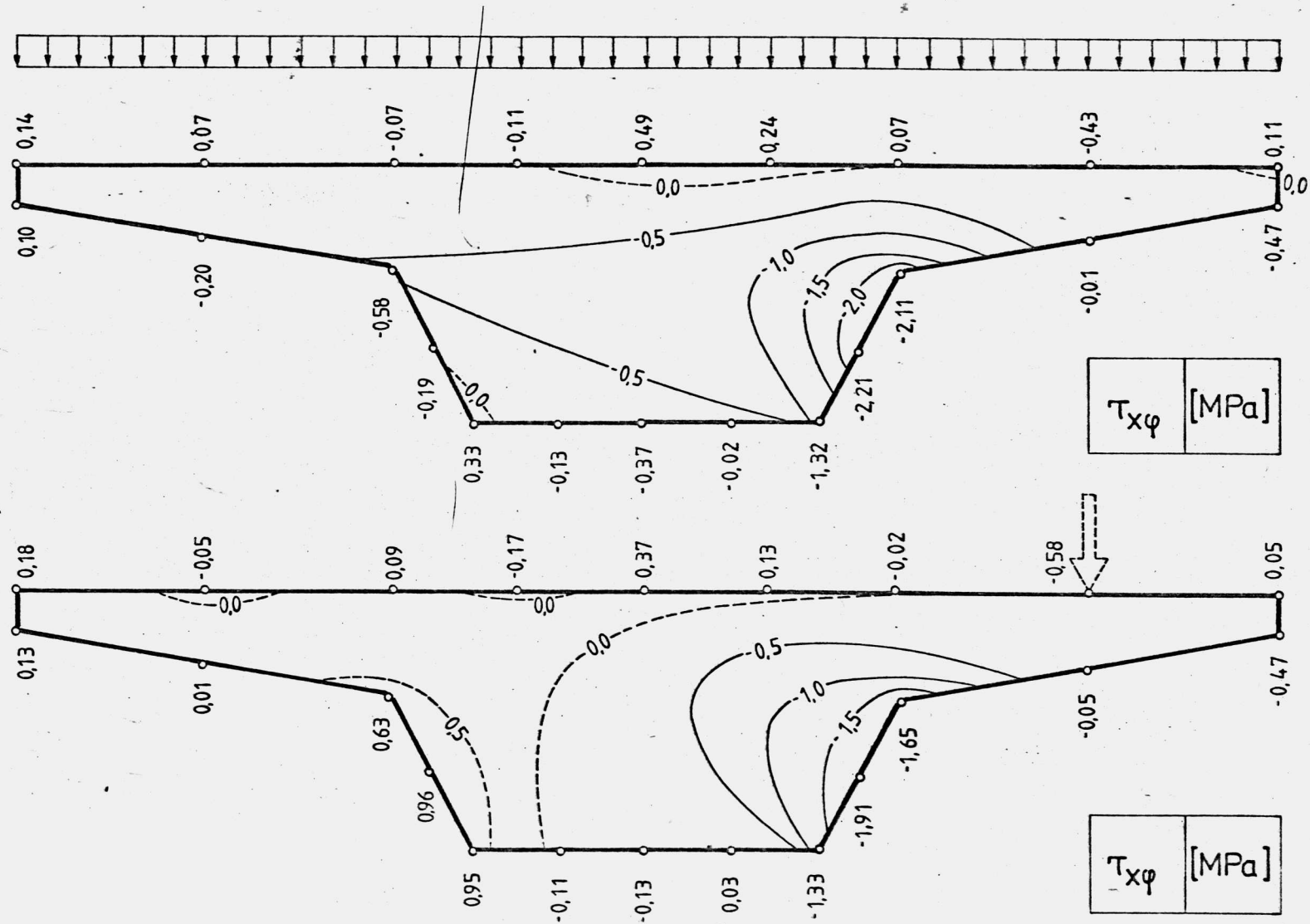


(w nawiasach podano naprężenia σ_y dla przęśta prostokątnego)

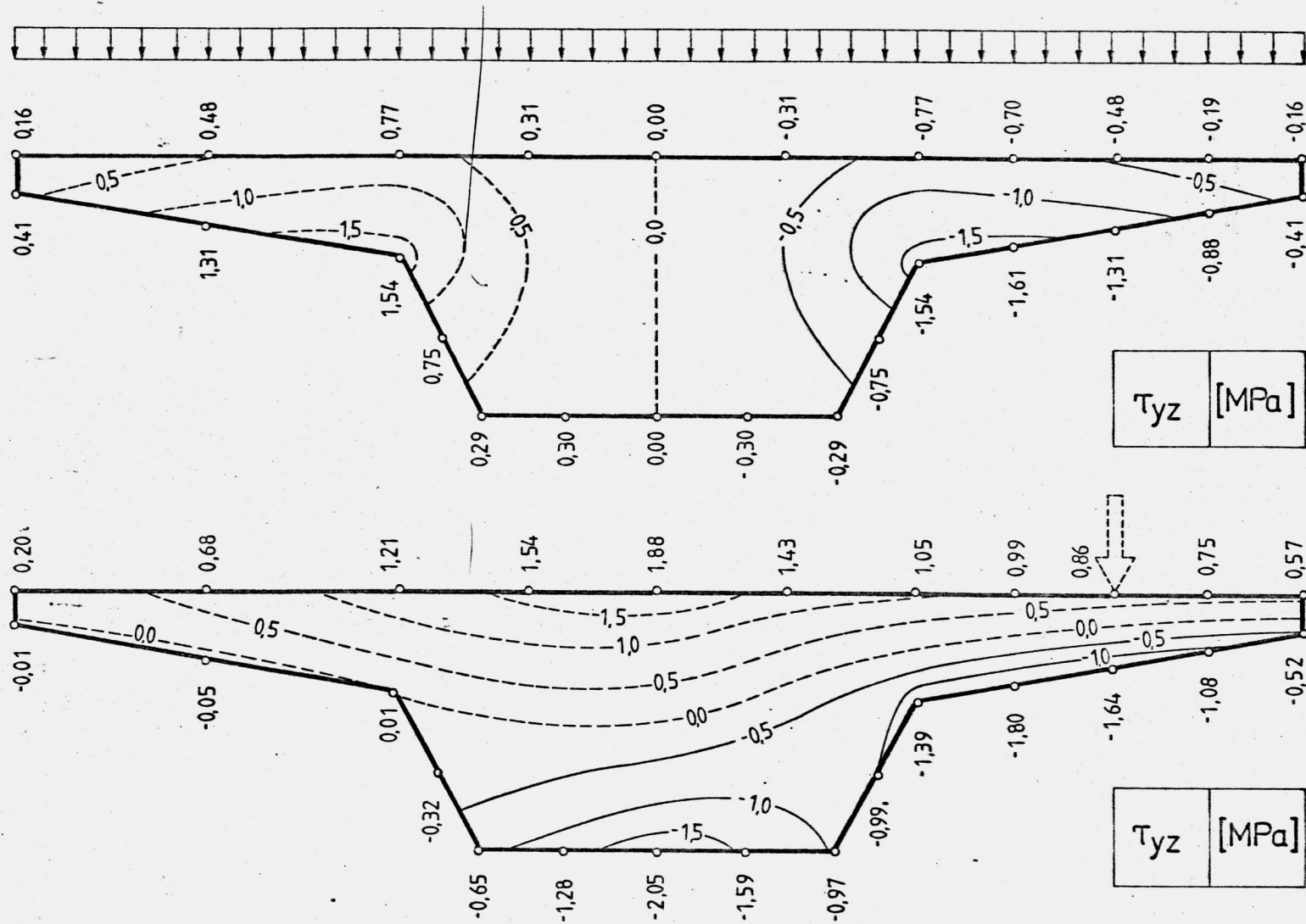
Rys. 5.34. Rozkład naprężeń σ_r w środku rozpiętości przęśta zakrzywionego w planie przy obciążeniu rozłożonym i skupionym



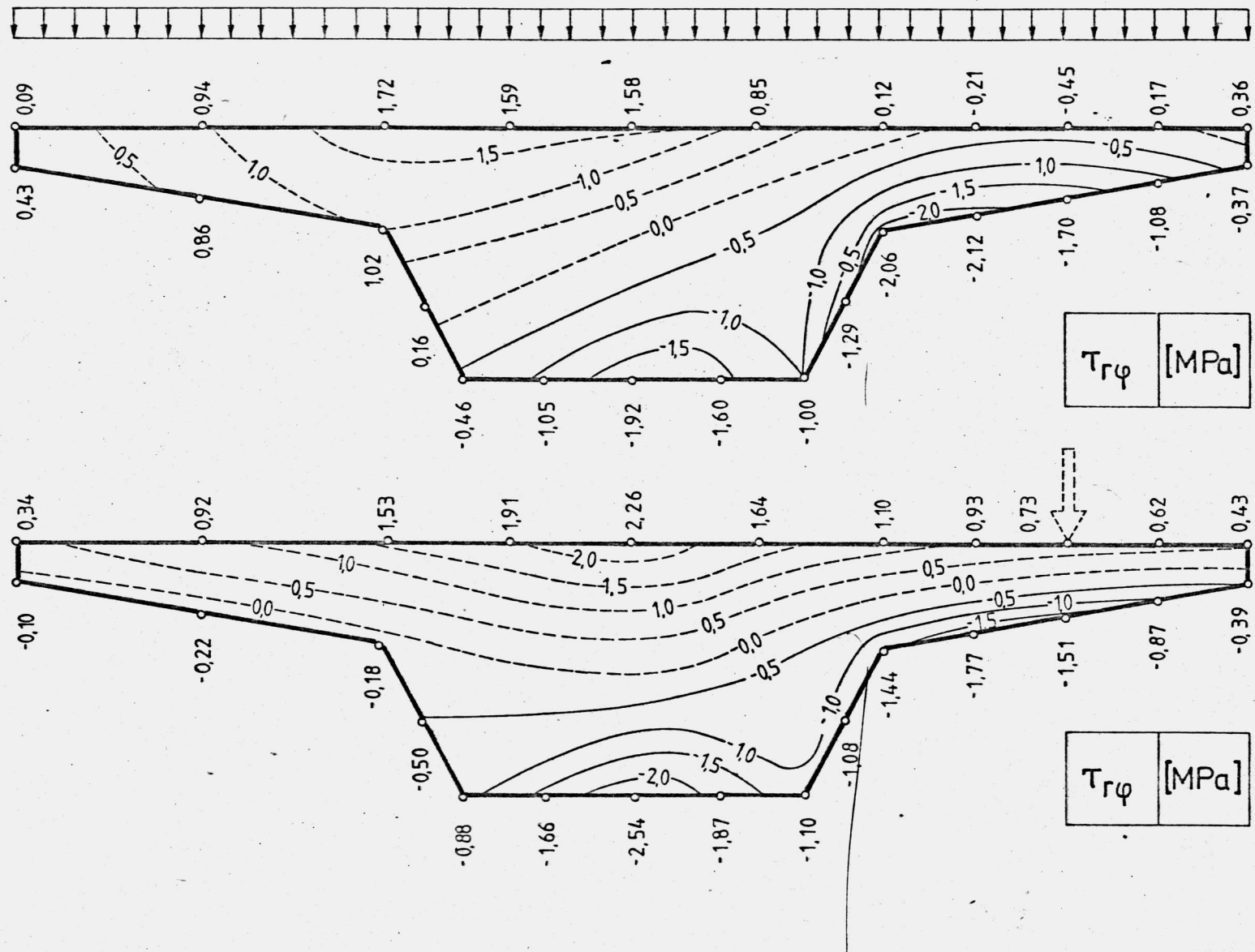
Rys. 5.35. Naprężenia τ_{xz} w $1/4$ rozpiętości przęsła prostokątnego przy obciążeniu rozłożonym i skupionym



Rys. 5.36. Naprężenia $\tau_{x\varphi}$ w 1/4 rozpiętości przęsła zakrzywionego w planie przy obciążeniu rozłożonym i skupionym



Rys. 5.37. Naprężenia τ_{yz} w $1/4$ rozpiętości przęsla prostokątnego przy obciążeniu rozłożonym i skupionym



Rys. 5.38. Naprężenia $\tau_{r\varphi}$ w 1/4 rozpiętości przęsta zakrzywionego w planie przy obciążeniu rozłożonym i skupionym

Na rys. 5.30 ÷ 5.32 pokazano wpływ zakrzywienia na stan przemieszczeń konstrukcji. Przy obciążeniu rozłożonym ugięcie w środku szerokości przęsła wzrasta o 8.2 %, a na krawędzi zewnętrznej o 31.8 %. Analogiczne przyrosty przy obciążeniu skupionym wynoszą 16.9 % oraz 21.7 %.

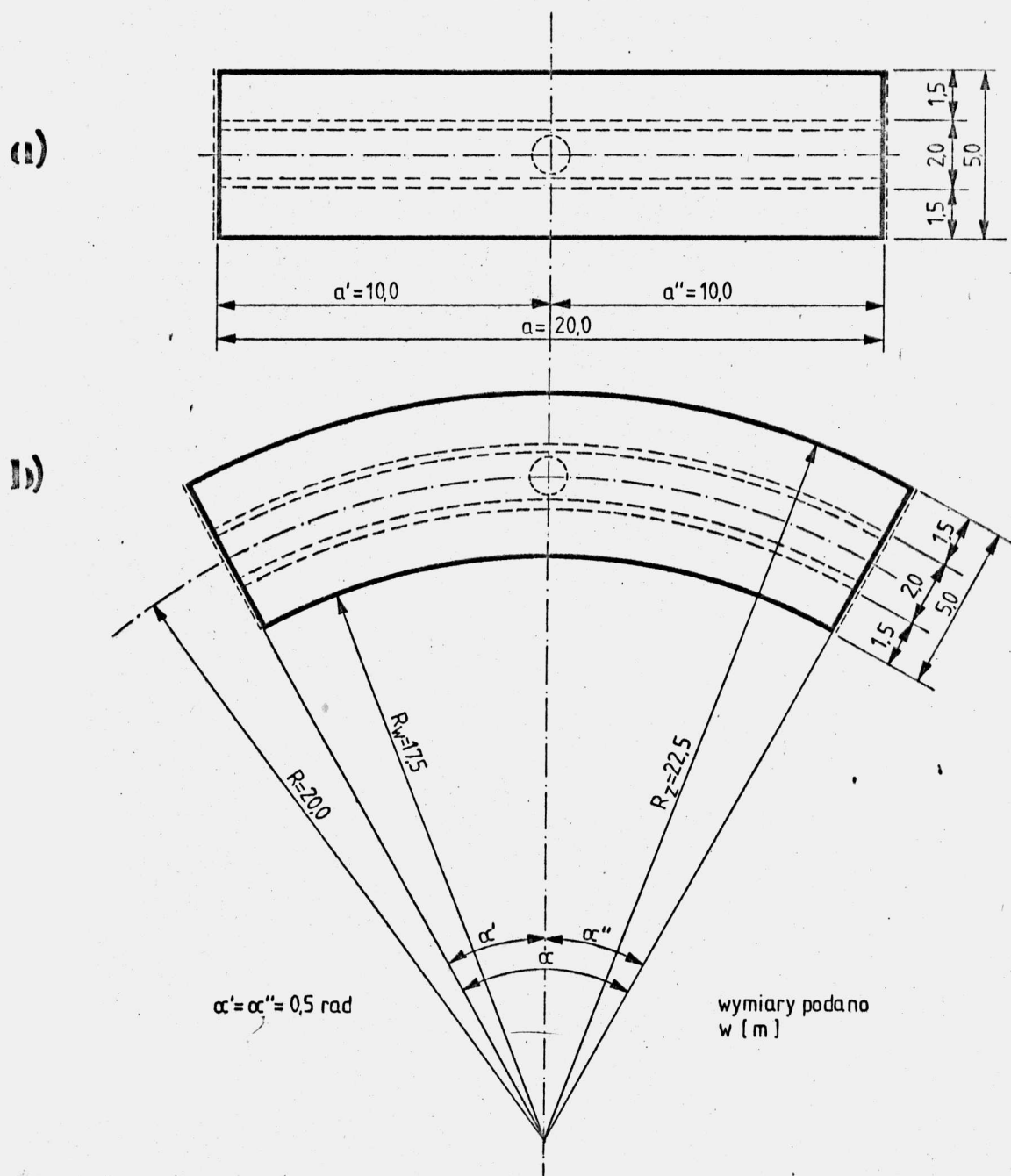
Rozkłady naprężeń normalnych σ_φ i σ_r w przęsle zakrzywionym przedstawiono na rys. 5.33 i na rys. 5.34. Dla porównania w nawiasach podano odpowiednio wartości naprężeń σ_z lub σ_y w przęsle prostokątnym. W przypadku naprężeń normalnych zakrzywienie powoduje zmiany ilościowe, natomiast ogólny charakter rozkładu naprężeń pozostaje podobny. Znaczniejsze różnice jakościowe występują w odniesieniu do naprężeń stycznych i w związku z tym rozkłady naprężeń dla przęsła prostokątnego oraz zakrzywionego przedstawiono na osobnych rysunkach. Naprężenia τ_{xz} i $\tau_{x\varphi}$ pokazano na rys. 5.35 i 5.36, a naprężenia τ_{yz} i $\tau_{r\varphi}$ na rys. 5.37 i 5.38.

5.4.3. Dźwigar dwuprzęsłowy

Obliczenia wykonano dla dźwigara o osi prostej oraz dla dźwigara zakrzywionego, których wymiary w planie pokazano na rysunkach 5.39.a i 5.39.b. Oba dźwigary mają identyczny przekrój poprzeczny, taki sam jak dźwigary analizowane w p. 5.4.2 /rys. 5.29/. Zastosowano także identyczny sposób podziału na elementy.

Podporę pośrednią stanowi słup, o wysokości $H = 5.0$ m zamocowany w fundamencie. Przyjęto, że sposób oparcia przęsła na podporze powoduje powstanie w słupie jedynie reakcji pionowej oraz założono, że reakcja ta przekazywana jest na przęsło w postaci siły skupionej przyłożonej na linii węzłowej nr 18. Pole przekroju słupa podporowego wynosi $A = 0.78 \text{ m}^2$, a moduł sprężystości $E_s = 2.5 \cdot 10^4 \text{ MPa}$. Charakterystyki sprężyste materiału przęsła wynoszą $E = 3.0 \cdot 10^4 \text{ MPa}$ i $\nu = 0.20$.

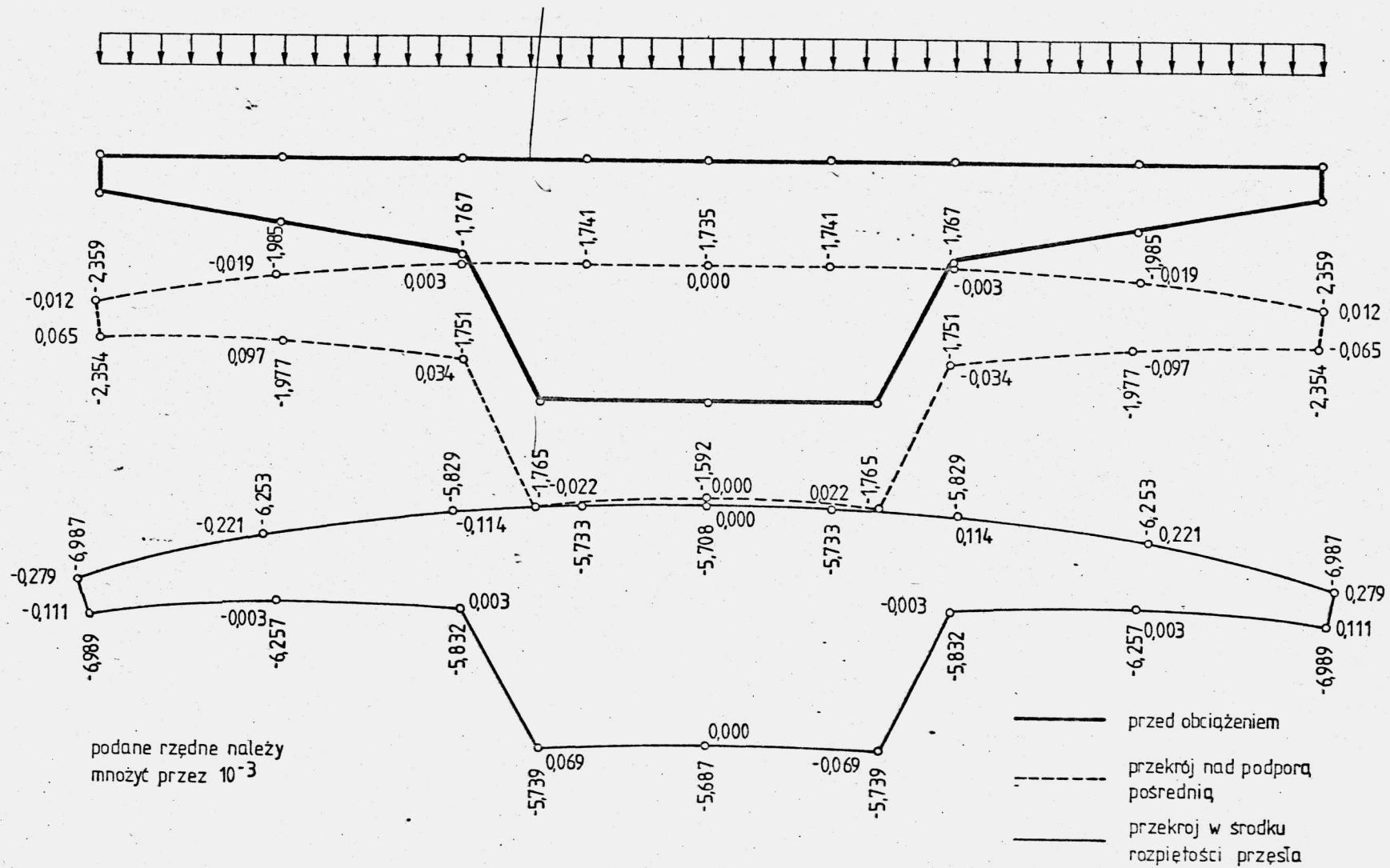
Przemieszczenia wywołane obciążeniem $q = 0.1 \text{ MN/m}^2$ równomiernie rozłożonym na całej powierzchni przęsła przedstawiono na rys. 5.40 /dźwigar prosty/ i na rys. 5.41 /dźwigar zakrzywiony/. W obu przypadkach pokazano deformację przekroju



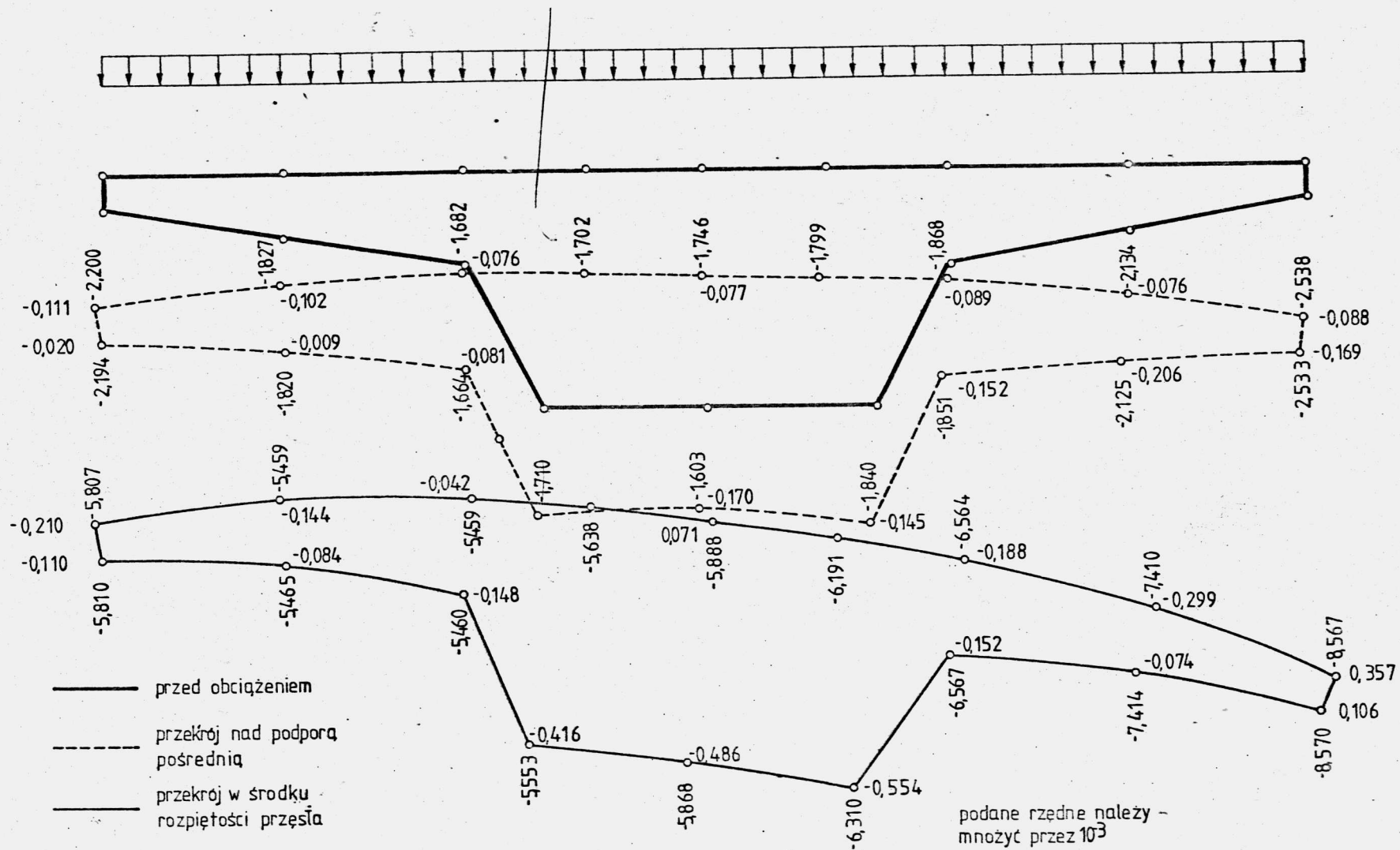
Rys. 5.39. Wymiary w planie dźwigara prostego i zakrzywionego

poprzedniego w środku rozpiętości przęsła i nad podporą pośrednią. W przypadku konstrukcji zakrzywionych, tak jak i w poprzednich przykładach, obowiązuje zasada, że środek krzywizny znajduje się po lewej stronie rysunku.

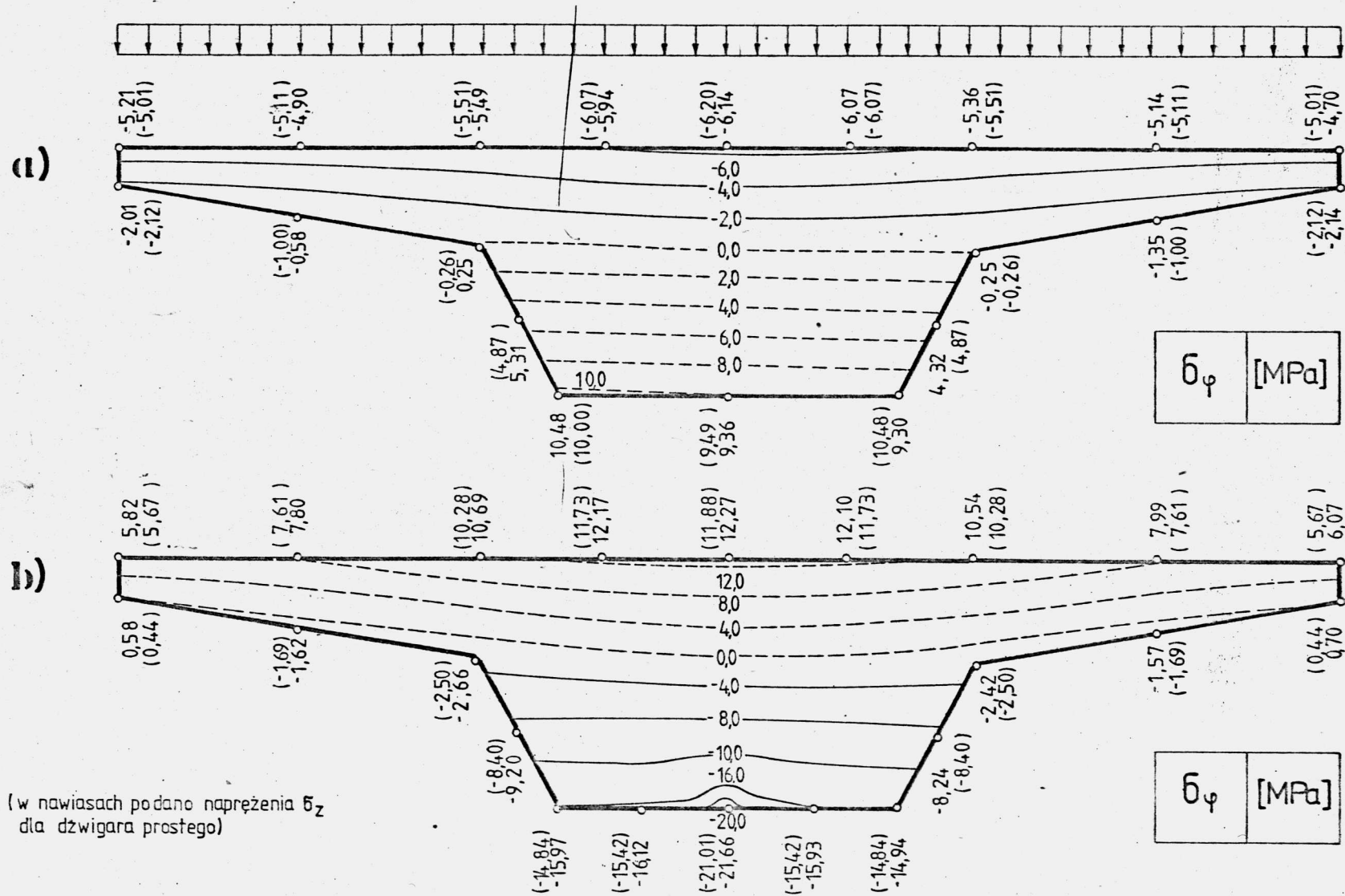
Na rys. 5.42 porównano naprężenia σ_φ w dźwigarze zakrzywionym z naprężeniami σ_z w dźwigarze o osi prostej. Analizę przeprowadzono w przekroju nad podporą pośrednią i w środku rozpiętości przęsła. Podobne porównanie naprężeń σ_r i



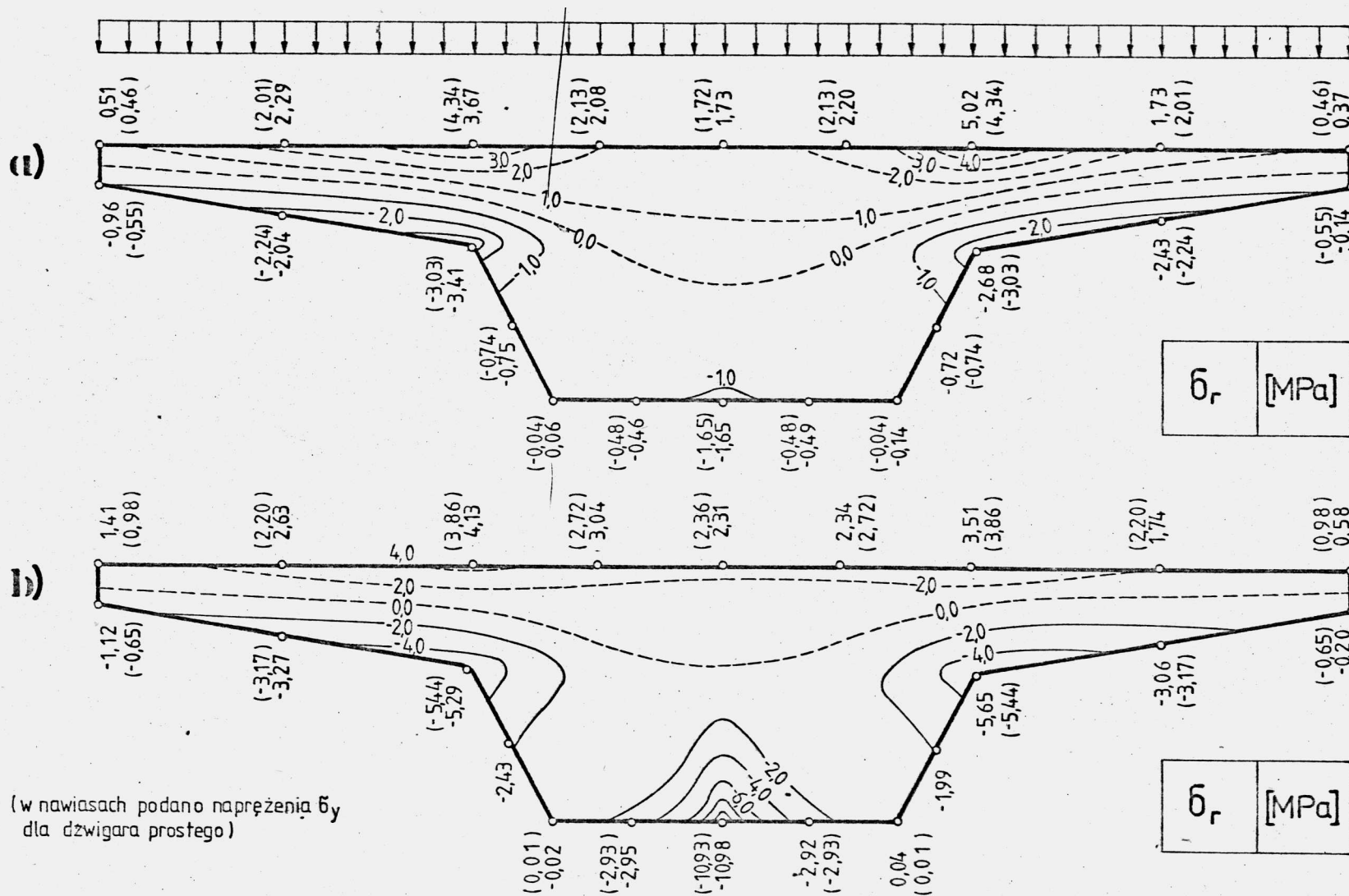
Rys 5.40. Przemieszczenia u i v [m] dwuprzęsłowego dźwigara o osi prostej



Rys. 5.41. Przemieszczenia u i v [m] dwuprzęsłowego dźwigara zakrzywionego w planie



Rys. 5.42. Rozkład naprężeń σ_φ w zakrzywionym dźwigarze dwuprzęsłowym:
 a) w środku rozpiętości przęsła, b) nad podporą pośrednią



(w nawiasach podano naprężenia σ_y dla dźwigara prostego)

Rys. 5.43. Rozkład naprężeń σ_r w zakrzywionym dźwigarze dwuprzęsłowym
a) w środku rozpiętości przęsła, b) nad podporą pośrednią

6_y przedstawiono na rys. 5.43.

Należy podkreślić, że we wszystkich przykładach przedstawionych w p. 5.4. zastosowano rzadką siatkę podziału na elementy i w związku z tym uzyskane wyniki mają charakter orientacyjny. Głównym celem przytoczonych przykładów jest pokazanie możliwości zastosowań zaproponowanego sposobu obliczeń w przypadku różnych układów konstrukcyjnych, a wyniki przedstawione w p. 5.4.2 i 5.4.3 /dla dźwigarów o jednakowym przekroju poprzecznym/ pozwalają na oszacowanie wpływu zakrzywienia konstrukcji oraz wprowadzenia podpór pośrednich na stan przemieszczeń i naprężeń. Zwiększenie dokładności wyników wymaga zagęszczenia podziału na elementy, szczególnie w pobliżu miejsc koncentracji naprężeń.

6. MOŻLIWOŚCI UPROSZCZENIA ROZWIĄZANIA

6.1. Uwagi ogólne

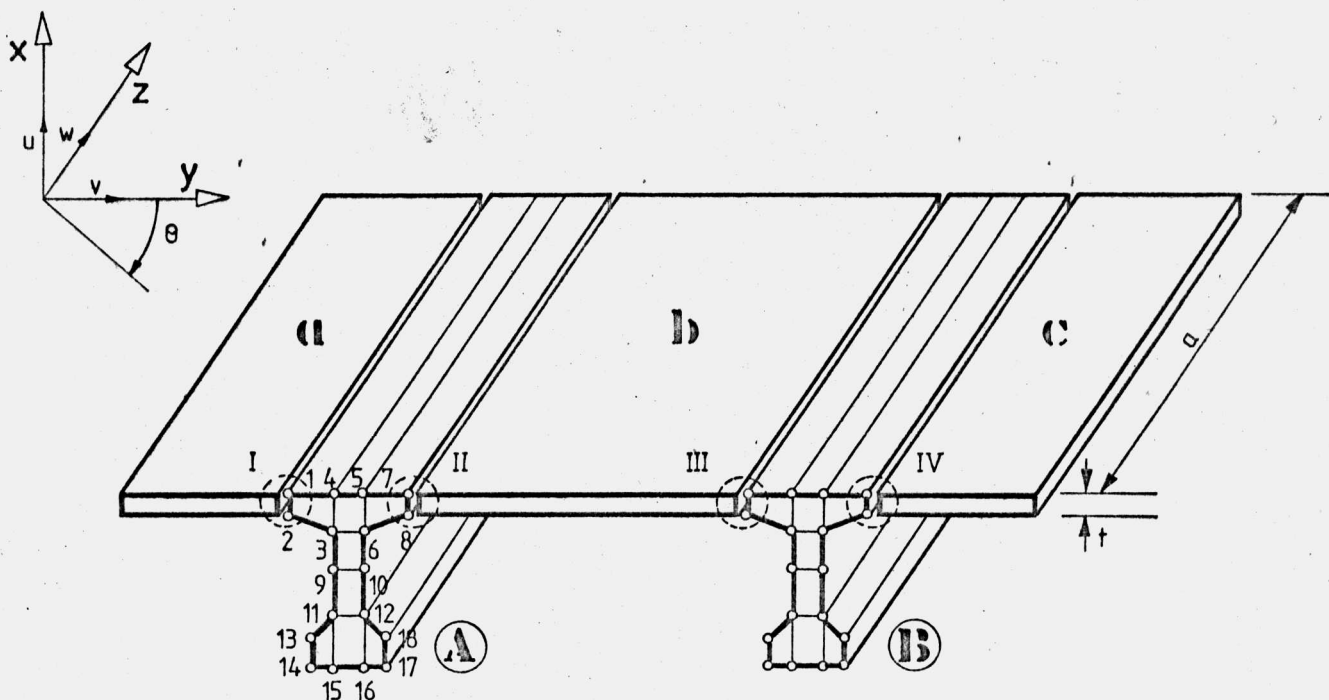
Jak wykazano w poprzednich rozdziałach trójwymiarowe pryzmatyczne elementy skończone mogą być stosowane do analizy szerokiej klasy konstrukcji. Poprawne wyniki uzyskuje się już przy dość rzadkiej siatce podziału, a zagęszczanie podziału pozwala na uściślenie rozwiązania. Zwiększanie liczby elementów użytych do opisu konstrukcji powoduje oczywiście także wzrost czasu i kosztu obliczeń.

Z drugiej strony w niektórych typach konstrukcji można z góry wskazać fragmenty, które ze względu na proporcje wymiarów oraz charakter pracy mogą być z dostateczną dokładnością dyskretyzowane za pomocą prostszych, jedno- lub dwuwymiarowych elementów. Dobrym przykładem są tu przęsła mostowe o przekroju płytowo - belkowym, w których dyskretyzację dwuwymiarową można zastosować do płyty pomostowej, a trójwymiarową do belek. Zastosowanie wyłącznie elementów przestrzennych do analizy takich konstrukcji jest podejściem merytorycznie najwłaściwszym, ale rozwiązanie może okazać się nieekonomiczne pod względem nakładu pracy obliczeniowej. Z kolei użycie tylko elementów prostszych nie pozwala przeważnie na uwzględnianie efektów typu lokalnego, ocenę pracy połączeń elementów oraz umożliwia jedynie przybliżony opis geometrii konstrukcji. W tej sytuacji uzasadnione wydaje się poszukiwanie sposobów tworzenia dyskretnych modeli konstrukcji przy zastosowaniu zarówno elementów trójwymiarowych jak i elementów innych typów. Swoboda doboru odpowiednich rodzajów elementów do opisu poszczególnych fragmentów konstrukcji pozwala na tworzenie bardziej racjonalnych modeli obliczeniowych, zapewniających możliwość wnikliwej analizy przy stosunkowo niewielkim nakładzie pracy rachunkowej.

Próba takiego podejścia jest koncepcja jednoczesnego zastosowania elementów dwu- i trójwymiarowych do analizy statycznej konstrukcji pryzmatycznych, podana w pracy [14]. W niniejszym rozdziale przedstawiono szerzej rozwiązanie zaproponowane w tej pracy oraz rozważono możliwości dalszych uproszczeń.

6.2. Jednoczesne zastosowanie elementów dwu- i trójwymiarowych

6.2.1. Dyskretny model konstrukcji



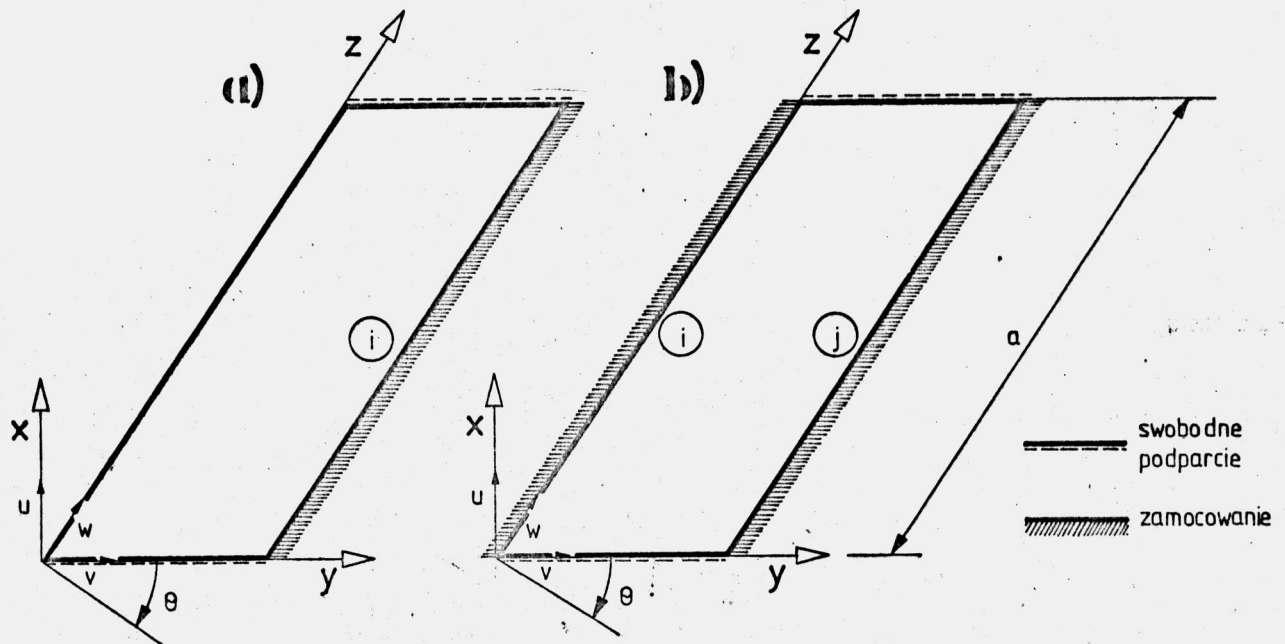
Rys. 6.1. Sposób dyskretyzacji konstrukcji

Na rys. 6.1 pokazano sposób dyskretyzacji konstrukcji na przykładzie przęsla płytowo - belkowego. Jako model obliczeniowy płyt pomostowych przyjęto płaskie prostokątne elementy powierzchniowe przedstawione w pracy [84]. Belki oraz ich połączenia z płytą opisano natomiast za pomocą trójwymiarowych przyzmatycznych elementów skończonych. Rozwiązanie oparto na metodzie przemieszczeń, a przy tworzeniu dyskretnego modelu przęsla przyjęto następujące założenia:

- analizowana konstrukcja posiada niezmienną geometrię i właściwości materiału w kierunku osi "z" globalnego układu współrzędnych /rys. 6.1/ ;
- każdy fragment konstrukcji dyskretyzowany za pomocą elementów przyzmatycznych traktowany jest jak osobny superelement /np. A i B na rys. 6.1/ ;

- poszczególne elementy dwu- i trójwymiarowe połączone są wzdłuż linii węzłowych równoległych do osi "z" ;
- każdy element jest swobodnie podparty na obu końcach ;
- rozróżnia się dwa rodzaje linii węzłowych:
 - I/ linie łączące elementy powierzchniowe z superelementami przestrzennymi /np. I, II, III, IV na rys. 6.1/,
 - II/wewnętrzne linie węzłowe superelementu /np. 1,2,3,... na rys. 6.2/ ;
- niewiadomymi parametrami w węzłach I rodzaju są składowe przemieszczenia u , v , w oraz kąt obrotu θ , a w węzłach II rodzaju składowe przemieszczenia u , v , w ;
- materiał konstrukcji jest jednorodny, liniowo-sprężysty oraz posiada płaszczyznę symetrii sprężystej prostopadłą do osi "z" /warunek/3.30// .

Zastosowano dwa typy prostokątnych elementów powierzchniowych, pokazane na rys. 6.2.



Rys. 6.2. Elementy powierzchniowe

W elementach tych uwzględnia się stan zgięciowy charakteryzowany przez przemieszczenie pionowe "u" i kąt obrotu "θ" oraz stan błonowy związany z przemieszczeniami "v" i "w". W stanie zgięciowym element traktowany jest jak ortotropowa płyta cienka, natomiast w stanie błonowym jak tarcza ortotropowa. W obu stanach rozwiązania odpowiednich równań różniczkowych uzyskano stosując sposób Levy'ego.

Należy podkreślić, że zastosowane elementy powierzchniowe nie są związane z koncepcją elementów skończonych, a połączenie ich z pryzmatycznymi elementami skończonymi jest możliwe dzięki użyciu w obu przypadkach szeregów Fouriera do przedstawienia zmienności obciążeń i przemieszczeń w kierunku długości konstrukcji. Pozwala to także na wykorzystanie omówionych wcześniej /rozdział 3/ uproszczeń wynikających z ortogonalności tak przyjętych funkcji.

Dla "n"-tej harmonicznej przemieszczenia brzegowe $\{\delta^n\}$ elementu powierzchniowego związane są z siłami brzegowymi $\{f^n\}$ podstawową zależnością metody przemieszczeń

$$[k^n] \cdot \{\delta^n\}^e = \{f^n\}^e, \quad /6.1/$$

gdzie

$$\{\delta_i^n\} = [u_i^n, \theta_i^n, v_i^n, w_i^n]^T, \quad /6.2/$$

$$\{f_i^n\} = [f_{u,i}^n, f_{\theta,i}^n, f_{v,i}^n, f_{w,i}^n]^T, \quad /6.3/$$

$$[k_{ij}^n] = \begin{bmatrix} k_{uu} & k_{u\theta} & 0 & 0 \\ k_{\theta u} & k_{\theta\theta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{vv} & k_{vw} \\ 0 & 0 & k_{wv} & k_{ww} \end{bmatrix}_{ij}^n. \quad /6.4/$$

Dla elementu pokazanego na rys. 6.2.a macierz sztywności zbudowana jest z jednej podmacierzy typu /6.4/

$$[k^n] = [k_{ii}^n] \quad /6.5/$$

i odpowiednio $\{\delta^n\}^e = \{\delta_i^n\} \quad /6.6/$

Dla elementu przedstawionego na rys. 6.2.b

$$[k^n] = \begin{bmatrix} [k_{ii}^n] & [k_{ij}^n] \\ [k_{ji}^n] & [k_{jj}^n] \end{bmatrix} \quad /6.7/$$

$$i\{\delta^n\}^e = [[\delta_i^n], [\delta_j^n]]^T \quad /6.8/$$

Opis sposobu wyznaczania macierzy sztywności i wektora sił brzegowych podano w pracy [84] .

Pryzmatyczne elementy skończone zastosowane w omawianym dyskretnym modelu konstrukcji zostały szczegółowo opisane w rozdziale 3.

6.2.2. Macierz sztywności konstrukcji

Warunki równowagi w węzłach I rodzaju dla "n"-tej harmonicznej, można zapisać w postaci

$$[K^n] : \{\delta^n\} = \{f^n\} \quad /6.9/$$

Wektor nieznanych przemieszczeń węzłów I rodzaju ma następującą budowę

$$\{\delta^n\} = [\{\delta_I^n\}, \{\delta_{II}^n\}, \dots, \{\delta_M^n\}]^T, \quad /6.10/$$

gdzie $\{\delta_i^n\}$ określone jest wzorem /6.2/ natomiast "M" oznacza liczbę węzłów I rodzaju. Podobnie można określić wektor sił węzłowych

$$\{f^n\} = [\{f_I^n\}, \{f_{II}^n\}, \dots, \{f_M^n\}]^T \quad /6.11/$$

Macierz sztywności konstrukcji $[K^n]$ tworzy się przez odpowiednie sumowanie sztywności elementów powierzchniowych $[k^n]^e$ i superelementów pryzmatycznych $[r^n]^s$

$$[K_{ij}^n] = \sum_{eci,j} [k_{ij}^n]^e + \sum_{Sci,j} [r_{ij}^n]^s, \quad i, j = I, II, \dots, M \quad /6.12/$$

Sposób określania macierzy $[k_{ij}^n]$ przedstawiono w pracy [84] .

Macierze $[r_{ij}^n]^S$ opisują sztywność superelementów w układzie globalnym, a ogólna ich postać jest następująca

$$[r_{ij}^n]^S = \begin{bmatrix} r_{uu} & r_{u\theta} & r_{uv} & r_{uw} \\ & r_{\theta\theta} & r_{\theta v} & r_{\theta w} \\ & & r_{vv} & r_{vw} \\ \text{symetria} & & & r_{ww} \end{bmatrix}_{ij}^{n,S} \quad /6.13/$$

W interpretacji fizycznej elementy macierzy /6.13/ odpowiadają wartościom sił uogólnionych w węźle "i" wywołanych jednostkowymi przemieszczeniami węzła "j". Poszczególne elementy macierzy $[r_{ij}^n]$ określa się przez odpowiednie sumowanie sił w węzłach superelementu /węzły II rodzaju/ bezpośrednio połączonych z węzłem "i".

$$[r_{ij}^n]^S = \sum_{l<i} [\lambda_l] [F_l^n]_j \quad , \quad /6.14/$$

gdzie

$$[F_l^n] = [\{F_l^n\}_u, \{F_l^n\}_\theta, \{F_l^n\}_v, \{F_l^n\}_w] \quad . \quad /6.15/$$

~~Macierz transformacji~~ $[\lambda_l]$ przekształca siły $[F_l^n]$ w węzłach II rodzaju na odpowiednie siły w węzłach I rodzaju. Siły $[F_l^n]$ wywołane zostały jednostkowymi przemieszczeniami węzła "j", a można je wyznaczyć budując dla superelementu "S" układ równań typu /3.71/

$$[K^n]^S \cdot [\delta^n]^S = [F^n]^S \quad /6.16/$$

i zadając odpowiednie przemieszczenia węzłów związanych z linią węzłową "j". W równaniu tym $[K^n]^S$ oznacza macierz sztywności superelementu "S" zbudowaną w sposób opisany w rozdziale 3. Układ równań/6.16/ można przekształcić do postaci

$$\begin{bmatrix} [K^n]_{aa} & [K^n]_{ab} \\ [K^n]_{ba} & [K^n]_{bb} \end{bmatrix}^S \begin{bmatrix} [\delta^n]_a \\ [\delta^n]_b \end{bmatrix}^S = \begin{bmatrix} [F^n]_a \\ [F^n]_b \end{bmatrix}^S \quad , \quad /6.17/$$

gdzie $[\delta^n]_a$ i $[F^n]_a$ oznaczają odpowiednio macierze przemieszczeń i sił w węzłach superelementu "S" połączonych bezpośrednio z węzłami I rodzaju /np. węzły 1,2,7,8 superelementu "A" na rys. 6.1/. Macierze $[\delta^n]_b$ i $[F^n]_b$ zawierają przemieszczenia i siły w pozostałych węzłach superelementu. Ponieważ siły $[F^n]_b$ są równe zero, a macierz $[\delta^n]_a$ zawiera zadane przemieszczenia jednostkowe, niewiadomymi w równaniu /6.17/ są macierze $[\delta^n]_b$ i $[F^n]_a$. Siły $[F^n]_1$ występujące we wzorze /6.14/ są podmacierzami tak określonej macierzy $[F^n]_a$. Rozwiązanie układów równań /6.17/ dla poszczególnych superelementów pozwala więc na zbudowanie macierzy sztywności konstrukcji w oparciu o wzory /6.14/ i /6.12/.

Rozwiązanie zadania, w postaci wektora przemieszczeń linii węzłowych I rodzaju, tworzy się na podstawie rozwiązań układu równań /6.9/ otrzymanych dla kolejnych harmonicznych. Znając przemieszczenia linii węzłowych I rodzaju można w oparciu o zależności podane w pracy [84], wyznaczyć przemieszczenia oraz siły wewnętrzne w dowolnym przekroju elementu powierzchniowego. Podobnie dla każdego superelementu przemieszczenia wewnętrznych linii węzłowych /II rodzaju/ wyznacza się superponując rozwiązania układów równań /6.17/ przy uwzględnieniu obliczonych z równań /6.9/ przemieszczeń linii węzłowych I rodzaju. Znając przemieszczenia linii węzłowych każdego elementu można określić panujący w nim stan odkształceń i naprężeń w sposób opisany w rozdziale 3.

6.3. Rozwiązanie dwuetapowe

Rozważono także możliwość dalszego uproszczenia sposobu obliczeń przedstawionego w p. 6.2. Zmiana polega na wyróżnieniu dwóch etapów obliczeń:

- 1/ cała konstrukcja obliczana jest przy zastosowaniu elementów dwuwymiarowych ;
- 2/ wybrane fragmenty konstrukcji dyskretyzowane są za pomocą elementów trójwymiarowych i obciążane siłami przekrojowymi wyznaczonymi w pierwszym etapie.

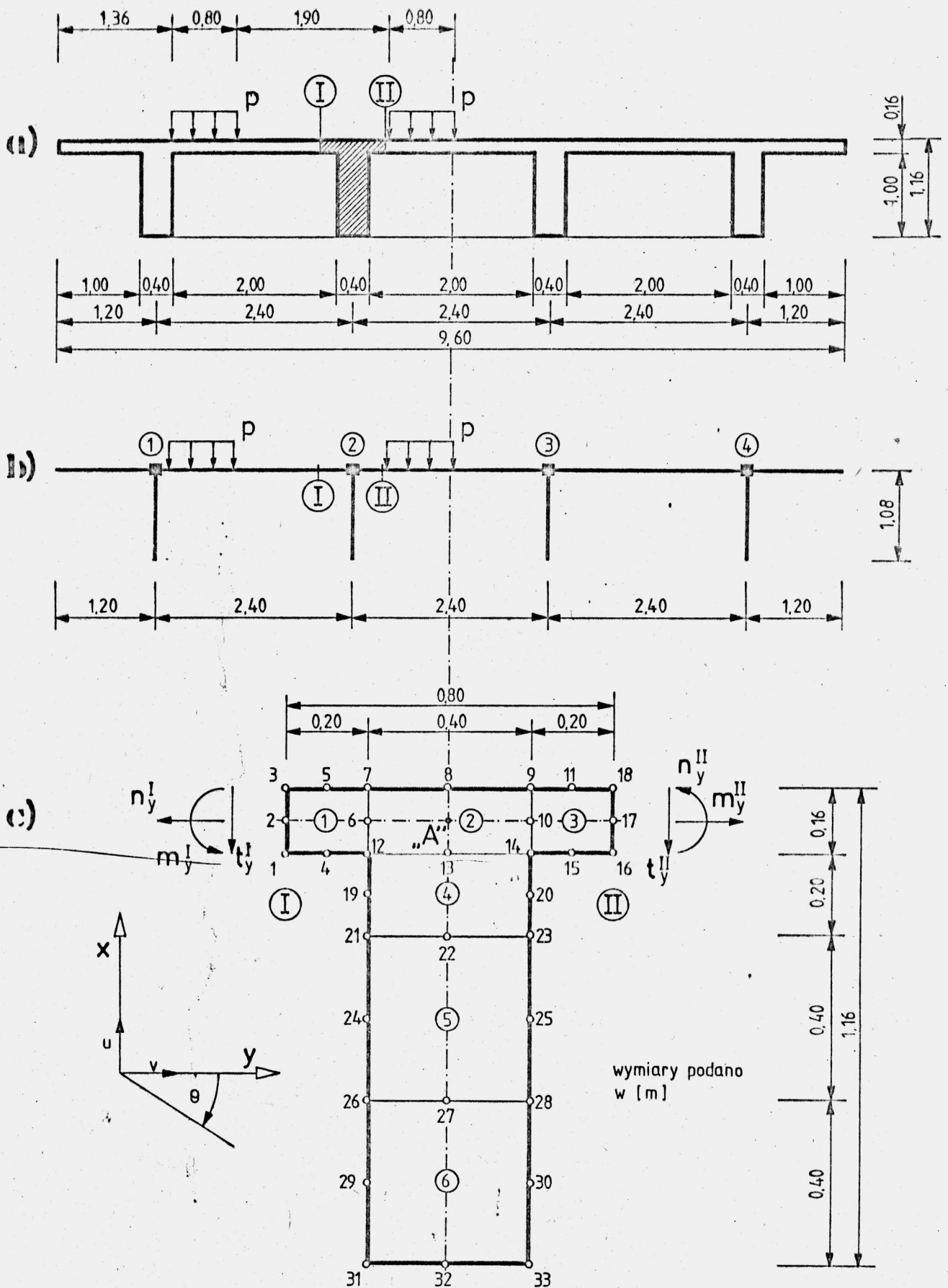
Taki dwuetapowy sposób analizy pozwala na znaczne uproszczenie obliczeń, gdyż unika się konieczności rozwiązywania układów równań typu /6.17/ oraz budowy macierzy sztywności konstrukcji w postaci /6.13/.

Poprawność rozwiązania zależy od dokładności wyznaczenia sił wewnętrznych w pierwszym etapie. Omawiany sposób powinien więc być stosowany przede wszystkim do analizy konstrukcji, które mogą być w możliwie wierny sposób opisane przy zastosowaniu elementów dwuwymiarowych. Użycie w drugim etapie obliczeń elementów przestrzennych pozwala na bardziej wnikliwą analizę fragmentów konstrukcji, dla których ujęcie dwuwymiarowe nie zapewnia dostatecznie dokładnego rozwiązania. Należy wymienić tu przede wszystkim połączenia elementów, miejsca przyłożenia obciążeń o charakterze skupionym, fragmenty o skomplikowanej geometrii przekroju poprzecznego itp.

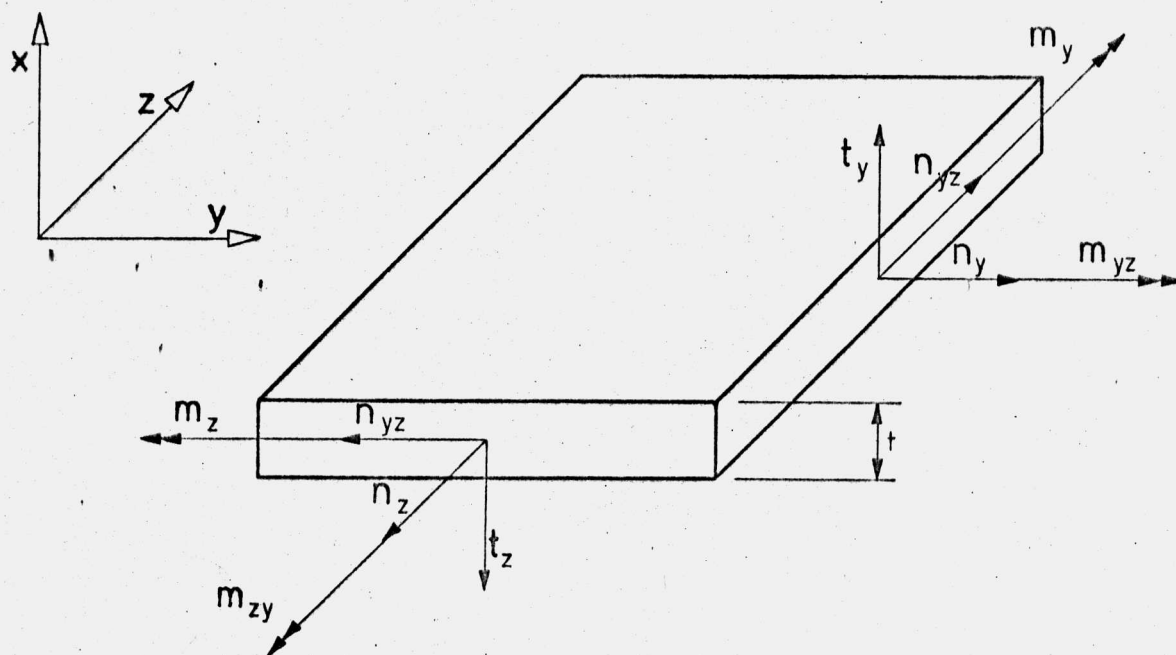
Praktyczne zastosowanie powyższej koncepcji przedstawiono na przykładzie przęsła mostowego o przekroju płytowo - belkowym. Analizie poddano prostokątne przęsło swobodnie podparte o rozpiętości $a = 16.0$ m i przekroju poprzecznym pokazanym na rys. 6.3.a, nie posiadające poprzecznice przęsłowych, a jedynie poprzecznicę podporową na obu końcach. Na przęsło działają dwa pasma obciążenia rozłożonego sinusoidalnie o intensywności $p = 62.5 : \sin \frac{\pi z}{a} \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}$, których usytuowanie pokazano na rys. 6.3.a. Obliczenia wykonano przy założeniu izotropii materiału, charakteryzowanego przez dwie stałe: $E = 3.0 \cdot 10^4$ MPa i $\nu = 0.16$.

W pierwszym etapie wykorzystano program do obliczeń numerycznych oparty na pracy [84]. W programie tym do dyskretyzacji płyty pomostowej zastosowano elementy pokazane na rys. 6.2, a żebra podłużne traktuje się jak elementy prętowe lub powierzchniowe w zależności od proporcji wyników. Sposób podziału przęsła na elementy wraz z numeracją węzłów podano na rys. 6.3.b. Na rys. 6.4 pokazano oznaczenia sił wewnętrznych uwzględnionych w analizie płyty pomostowej.

Wyznaczone rozkłady momentów zginających m_z i m_y oraz sił tarczowych n_z i n_y w środku rozpiętości przęsła przedstawiono na rys. 6.5 i na rys. 6.6. Na rys. 6.7 pokazano natomiast wykres sił n_{yz} oraz momentów skręcających m_{zy} w przekroju podporowym.



Rys. 6.3 Sposób dyskretyzacji przęsła przy analizie dwuetapowej

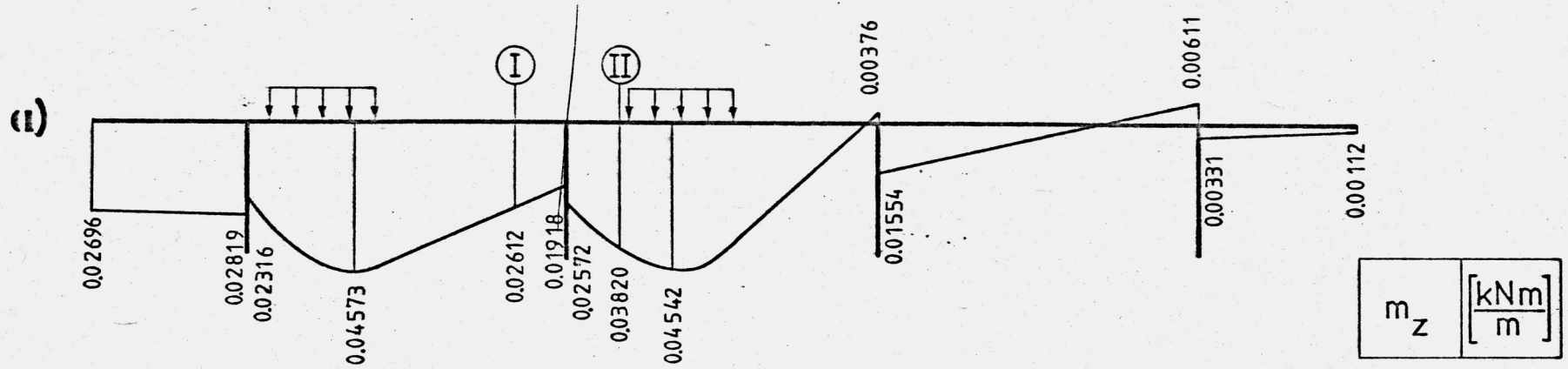


Rys. 6.4 Oznaczenia sił wewnętrznych w płycie pomostowej

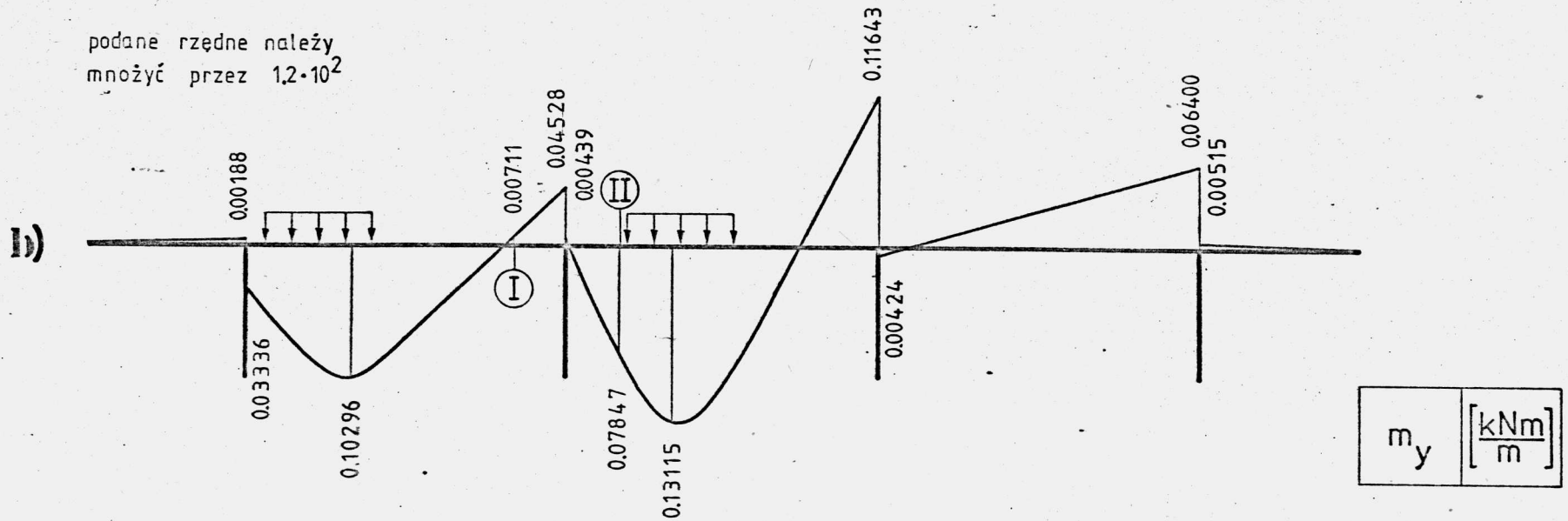
W drugim etapie przeprowadzono bardziej wnikliwą analizę dźwigara wydzielonego z przęsła przekrojami I i II /rys. 6.3.a/. Dźwigar wraz z fragmentem płyty pomostowej potraktowano jako oddzielną konstrukcję i obciążono siłami wyznaczonymi w pierwszym etapie. Odpowiednie wielkości sił w przekrojach I i II zestawiono w tab. 6.1. Momenty m_y zastąpiono w drugim etapie statycznie równoważnym układem sił przyłożonych w węzłach elementów

Tabela 6.1

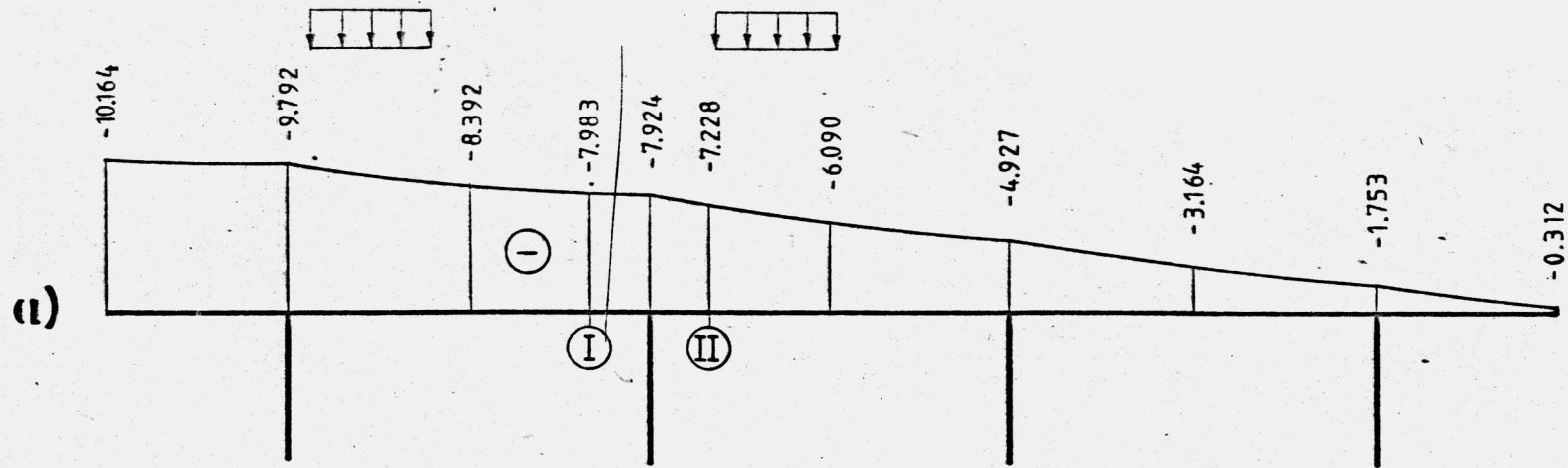
Oznaczenie siły	Wielkość siły		Mnożnik
	Węzeł I	Węzeł II	
$n_y \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	13.99875	15.0352	$\sin \frac{\pi z}{a}$
$m_y \left[\frac{\text{kNm}}{\text{m}} \right]$	0.853742	9.415968	$\sin \frac{\pi z}{a}$
$t_y \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	11.86175	24.42535	$\sin \frac{\pi z}{a}$
$n_{yz} \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$	82.6395	72.2740	$\cos \frac{\pi z}{a}$



podane rzędne należy
mnożyć przez $1,2 \cdot 10^2$

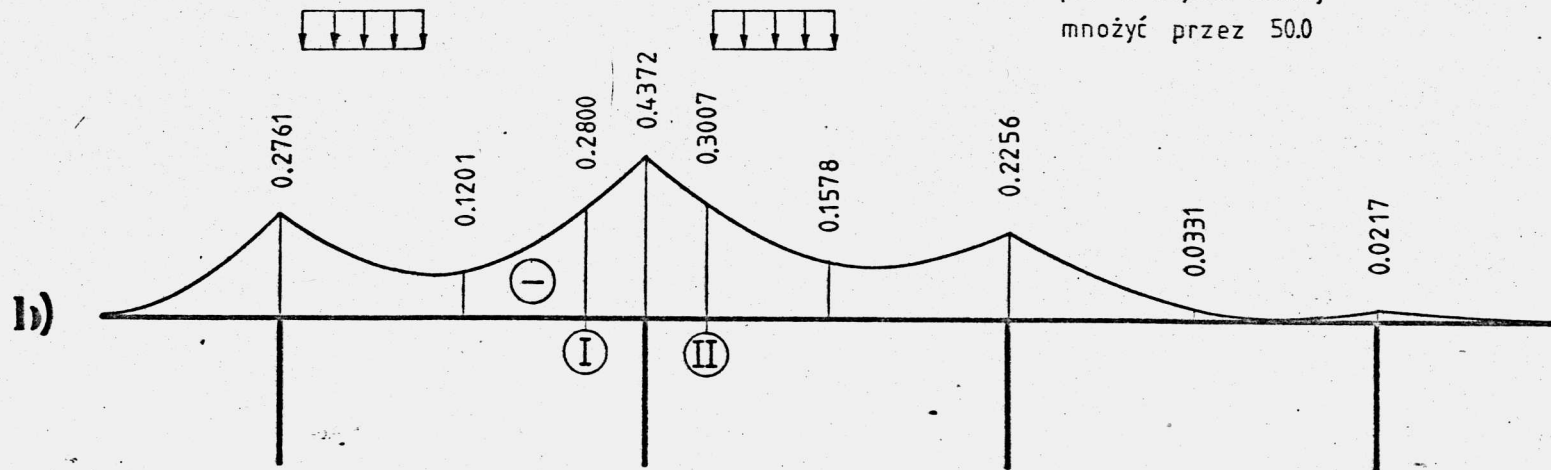


Rys.6.5. Wykresy momentów zginających w płycie pomostowej



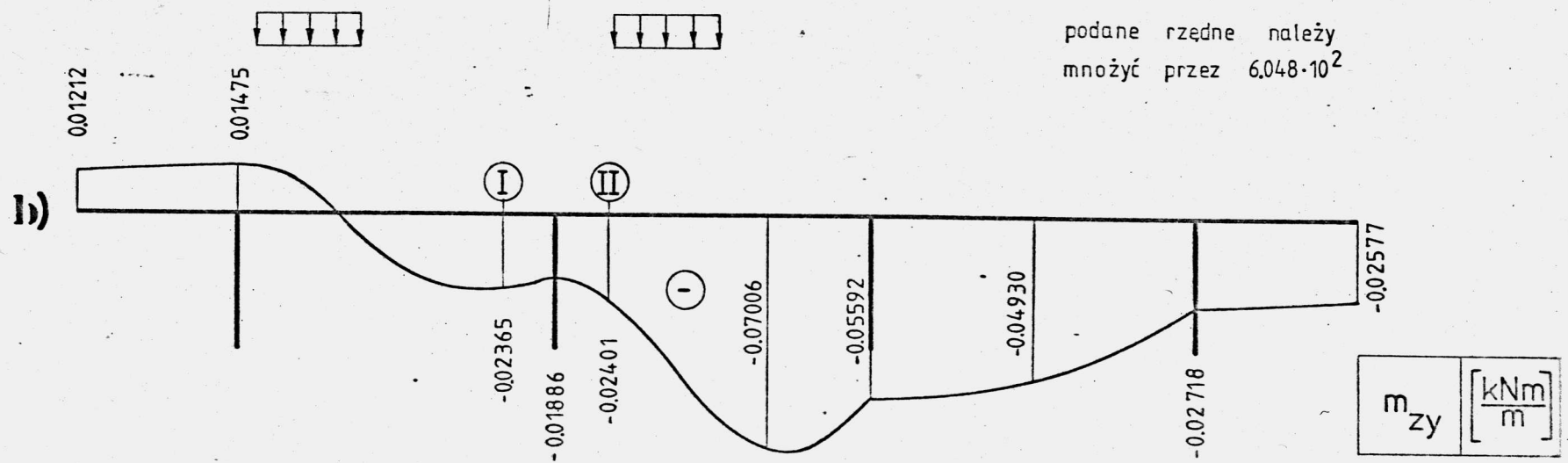
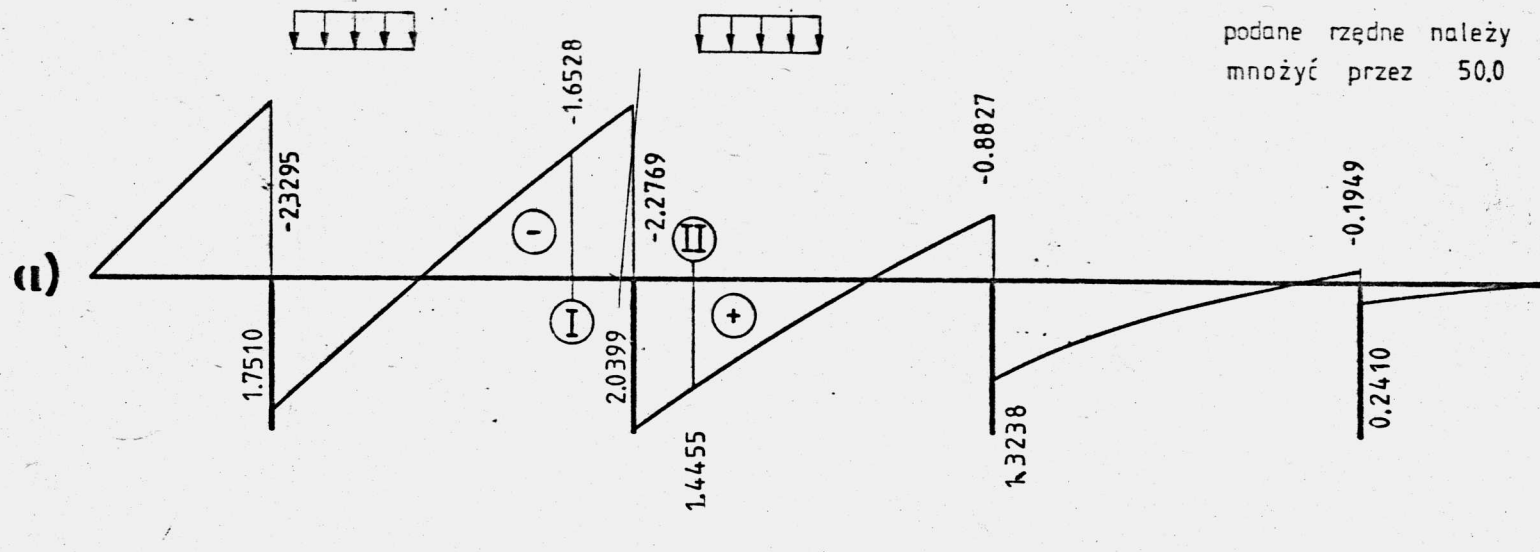
n_z	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$
-------	---

podane rzędne należy
mnożyć przez 50.0



n_y	$\left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$
-------	---

Rys. 6.6. Wykresy sił tarczowych w płycie pomostowej



Rys. 6.7. Wykresy sił wewnętrznych w płycie pomostowej

Do dyskretyzacji wydzielonego dźwigara zastosowano pryzmatyczne elementy skończone o 8 liniach węzłowych, a przyjęty sposób podziału pokazano na rys. 6.3.c. Na rysunku tym zaznaczono także rzeczywiste zwroty sił stanowiących obciążenie dźwigara ; nie pokazano sił n_{yz} działających prostopadle do płaszczyzny rysunku.

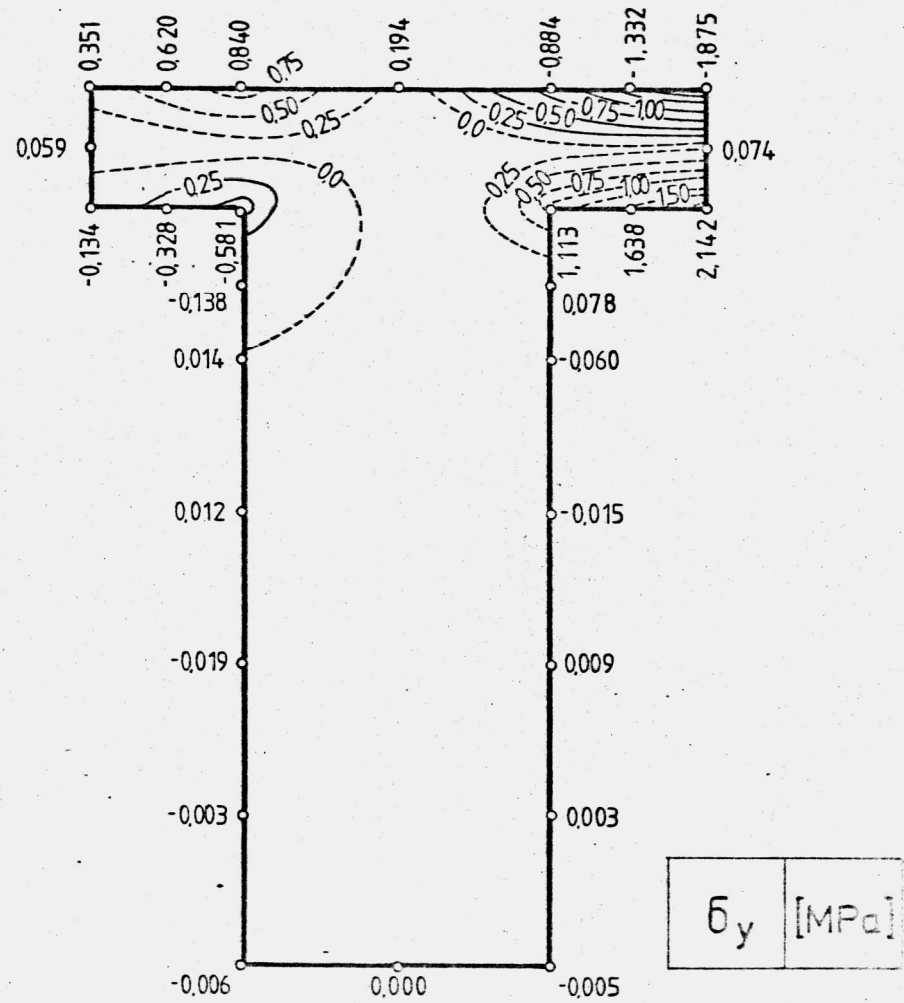
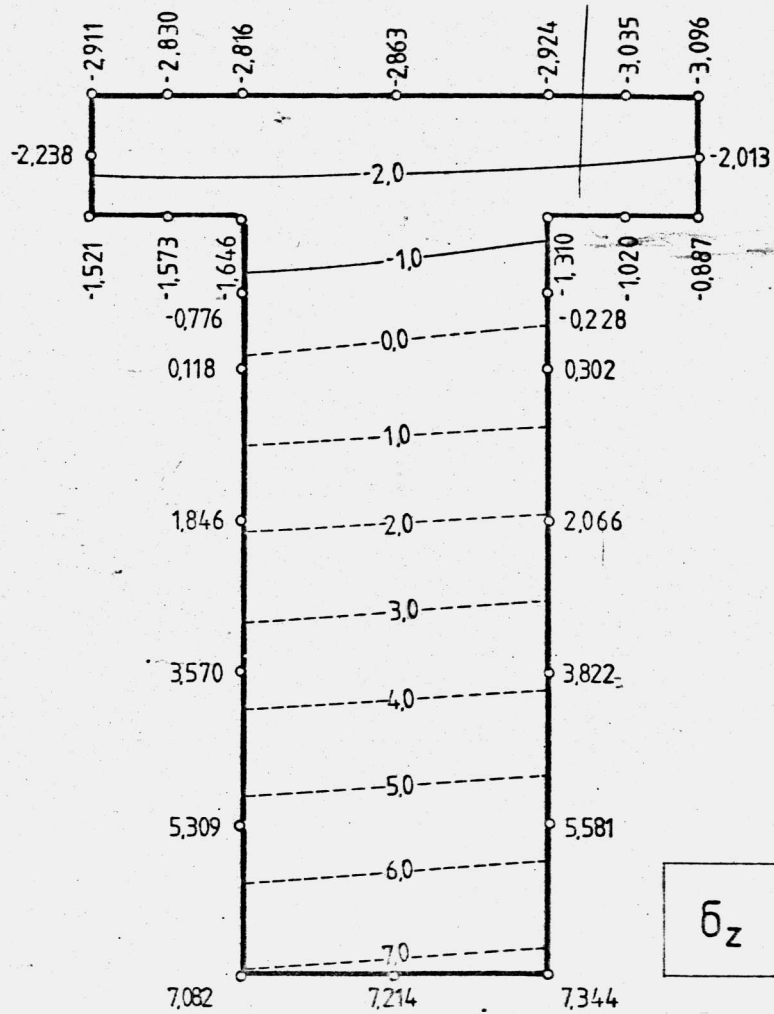
Dla porównania zgodności rozwiązań zestawiono w tab. 6.2 wielkości składowych przemieszczenia węzła nr 2 /rys.6.3.b/ wyznaczone w pierwszym etapie oraz analogiczne wartości dla punktu "A" /rys.6.3.c/ obliczone w drugim etapie.

Tabela 6.2

Składowa przemieszczenia	Etap ①	Etap ②	$\frac{①-②}{①} \cdot 100 [\%]$
u [m]	- 0.803319	- 0.784231	2.4
θ [rad]	- 0.548484. 10^{-3}	- 0.525448. 10^{-3}	4.2
v [m]	0.267935. 10^{-1}	0.259629. 10^{-1}	3.1
w [m]	0.424149. 10^{-1}	0.416476. 10^{-1}	1.8

Naprężenia σ_z i σ_y w środku rozpiętości przęsła, wyznaczone w drugim etapie, pokazano na rys. 6.8. Podobnie jak w poprzednich przykładach, na rysunku podano wartości naprężeń w węzłach zewnętrznych, a rozkład naprężeń na powierzchni przekroju poprzecznego przedstawiono za pomocą linii łączących punkty o jednakowych naprężeniach. Pewnych zaburzeń w rozkładzie naprężeń można spodziewać się w pobliżu przekrojów I i II, w których siły wewnętrzne rozłożone w rzeczywistości w sposób ciągły zastąpione zostały statycznie równoważnym układem obciążeń przyłożonych wzdłuż linii węzłowych.

Przedstawione wyniki, a w szczególności zgodność przemieszczeń wyznaczonych w obu etapach /tab.6.2/, świadczą o przydatności zastosowanego sposobu obliczeń do analizy przęseł o przekrojach płytowo - belkowych. Duża efektywność zaproponowanego algorytmu rokuje nadzieje na upowszechnienie jego stosowania także w odniesieniu do innych typów konstrukcji.



Rys. 6.8 Rozkład naprężeń σ_z i σ_y w środku rozpiętości belki

7. UWAGI I WNIOSKI KOŃCOWE

Przejście od zagadnień dwuwymiarowych do trójwymiarowych powoduje skokowy wzrost liczby niewiadomych, co przy stosunkowo niewielkich pamięciach operacyjnych dostępnych maszyn cyfrowych powoduje konieczność wykorzystywania dodatkowych pamięci zewnętrznych, podziału programu na kilka części itp. Trudności powyższe komplikują organizację programów, ograniczają możliwości zastosowań oraz wydłużają czas obliczeń. Wymienione utrudnienia występują także w pewnym stopniu w przypadku elementów przyzmatycznych mimo znacznie ograniczonej liczby niewiadomych. Należy przypuszczać, że upowszechnienie zastosowań elementów trójwymiarowych, umożliwiających najwierniejszy opis konstrukcji, będzie ściśle związane z poziomem rozwoju ETO.

W przedstawionych w pracy przykładach stosowano prawie wyłącznie elementy o ośmiu liniach węzłowych. Ten typ elementów okazał się bardziej efektywny od elementów o czterech liniach węzłowych, przy których wymagana jest stosunkowo gęsta siatka podziału na elementy dla uzyskania poprawnych wyników. W przypadku elementów o dwunastu liniach węzłowych wzrost nakładu pracy obliczeniowej jest przeważnie większy niż poprawa dokładności wyników i w związku z tym użycie ich powinno być ograniczone do specjalnych przypadków.

Przedstawione rozwiązanie może być bezpośrednio stosowane do analizy konstrukcji, dla których liniowo - sprężysty model materiału stanowi dostatecznie dokładne przybliżenie. Można wymienić tu sprężone konstrukcje betonowe w stanie niezarysowanym, konstrukcje stalowe pracujące w zakresie sprężystym itp. W odniesieniu do innych rodzajów konstrukcji metoda może być stosowana do oceny jakościowej /np. lokalizacja miejsc koncentracji naprężeń/. Wydaje się, że przedstawiony sposób powinien okazać się szczególnie przydatny przy opracowywaniu nowych rozwiązań konstrukcyjnych, projektów typowych itp.

Efektywność przedstawionego rozwiązania zależy w dużym stopniu od liczby wyrazów rozwinięcia, które trzeba uwzględnić dla otrzymania poprawnych wyników. W przypadku obciążeń złożonych, gdy zachodzi potrzeba analizy wielu harmonicznym

wzrasta także proporcjonalnie nakład pracy obliczeniowej. W przykładach przedstawionych w rozdziale 5 poprawne wyniki otrzymano uwzględniając od 1 do 27 wyrazów rozwinięcia w zależności od typu obciążenia i rodzaju analizowanej wielkości.

Podstawowy algorytm zaprezentowany w pracy stanowi bazę dla dalszych uogólnień rozszerzających praktyczne zastosowanie metody. Stosunkowo proste modyfikacje algorytmu umożliwiają uwzględnienie nieliniowych związków fizycznych, różnego rodzaju wpływów niemechanicznych oraz zastosowanie przedstawionego rozwiązania do analizy zagadnień dynamicznych. Pryzmatyczne elementy skończone powinny okazać się szczególnie przydatne do nieliniowej analizy konstrukcji betonowych, uwzględniającej między innymi zarysowanie. Wymaga to wprowadzenia specjalnych liniowych elementów reprezentujących pręty zbrojenia lub ciągną sprężające, usytuowanych wewnątrz elementów trójwymiarowych. Podstawowe rozwiązanie można w prosty sposób rozszerzyć także na konstrukcje położone w ukosie wprowadzając ukośny układ współrzędnych. Sposób postępowania jest podobny do podejścia przedstawionego w pracy w odniesieniu do elementów zakrzywionych, dla których wprowadzono układ współrzędnych walcowych.

Należy podkreślić, że przedstawione rozwiązanie może być stosowane nie tylko do analizy przęseł mostowych, ale także ~~różnych innych konstrukcji pryzmatycznych~~ spełniających założone warunki brzegowe.

Podsumowując zawarte w pracy rozważania, poza wnioskami szczegółowymi przedstawionymi w poszczególnych rozdziałach, można sformułować następujące wnioski ogólne :

- 1/ zastosowanie pryzmatycznych elementów skończonych umożliwia efektywną trójwymiarową analizę konstrukcji nawet przy użyciu stosunkowo niewielkich maszyn cyfrowych, a przyjęcie dostatecznie gęstego podziału na elementy pozwala na ocenę wpływów typu lokalnego /np. koncentracje naprężeń/ ;
- 2/ stan przemieszczeń, odkształceń i naprężeń wyznaczony za pomocą analizy trójwymiarowej różni się od rozwiązań opartych na jedno- lub dwuwymiarowych modelach obliczeniowych,

- a szczególnie wyraźne rozbieżności występują w pobliżu miejsc przyłożenia obciążeń o charakterze skupionym i w miejscach skokowej zmiany wymiarów przekroju poprzecznego ;
- 3/ pryzmatyczne elementy skończone mogą być z powodzeniem stosowane do przestrzennej analizy przęseł mostowych, mimo występujących przeważnie różnic między warunkami brzegowymi przyjętymi w modelu obliczeniowym, a warunkami występującymi w rzeczywistej konstrukcji; zakres dopuszczalności tych różnic powinien być przeanalizowany dla poszczególnych typów przęseł ;
 - 4/ przedstawiony w pracy zestaw programów obliczeń na EMC umożliwia analizę szerokiej klasy konstrukcji pryzmatycznych o dowolnym, nawet krzywoliniowym, zarysie przekroju poprzecznego, prostych lub zakrzywionych w planie, swobodnie podpartych na obu końcach oraz posiadających dodatkowe podpory pośrednie, a także konstrukcji zespolonych z różnych materiałów ;
 - 5/ elementy pryzmatyczne, w porównaniu z tradycyjnymi elementami trójwymiarowymi, charakteryzują się znacznym zmniejszeniem liczby niewiadomych, redukcją wielkości rozwiązywanych układów równań oraz niewielką liczbą elementów wystarczającą do uzyskania poprawnego rozwiązania, co w sumie pozwala na bardzo istotne skrócenie czasu obliczeń ;
 - 6/ istnieje możliwość łączenia elementów pryzmatycznych z elementami prostszymi /np. dwuwymiarowymi/ we wspólnych rozwiązaniach; w wielu przypadkach podejście takie pozwala na znaczne zmniejszenie liczby niewiadomych bez uszczerbku dla dokładności opisu pracy konstrukcji ;
 - 7/ biorąc pod uwagę zaprezentowany algorytm, opracowane na jego podstawie programy obliczeń na EMC oraz przedstawione wyniki badań i przykłady obliczeń, można stwierdzić, że założone cele pracy zostały zrealizowane, a szerokie możliwości dalszych uogólnień przedstawionego rozwiązania świadczą o jego dużej przydatności w analizie konstrukcji inżynierskich.

L I T E R A T U R A

- [1] Ahmad S., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Curved thick shell and membrane elements with particular reference to axisymmetric problems, Proc. 2nd Conf. on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright - Patterson Air Force Base, Ohio, 1968.
- [2] Alujevic A., Three - dimensional finite element programs for stress analysis, Atomkernenergie, Vol.29, 1977, No.3, s. 189 - 191.
- [3] Argyris J.H., Matrix analysis of three - dimensional elastic media - small and large displacements, Journal AIAA, 1965, No.3, s. 45 - 51.
- [4] Argyris J.H., Three - dimensional anisotropic and inhomogeneous media - matrix analysis for small and large displacements, Ingenieur Archiv., 1965, No.34, s. 33 - 55.
- [5] Argyris J.H., Buck K.E., Fried I., Mareczek G., Scharpf D.W., Some new elements for the matrix displacement method, Proc. of 2nd Conf. on Matrix Methods in Struct. Mech., Wright - Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, 1968.
- [6] Argyris J.H., Fried I., Scharpf D.W., The TET20 and the TEA8 elements for the matrix displacement method, Aeronaut. J., Vol. 72, 1968, No.691, s. 618 - 623.
- [7] Argyris J.H., Fried I., Scharpf D.W., The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method, The Aeronautical J.R.Ae.S., Vol. 72, 1968, s. 701 - 709.
- [8] Argyris J.H., Mlejnek J.P., Bühlmeier J., Mai M.M., Metoda elementów skończonych w liniowych zagadnieniach statyki i dynamiki - podejście naturalne, Metody obliczeniowe w mechanice nieliniowej, Ossolineum, 1977.
- [9] Argyris J.H., Redshaw J.C., Three dimensional analysis of two arch dams by a finite element method, Proc. of

Symposium on Architecture of Dams, Institute of Civil Engineering, 1968.

- [10] Argyris J.H., Scharpf D.W., The curved tetrahedral and triangular element TEC and TRIC for the matrix displacement method, The Aeronautical J.R.Ae.S., Vol. 73, 1969.
- [11] Barlow J., Optimal stress locations in finite element models, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 10., 1976, s. 243 - 251.
- [12] Bazeley G.P., Cheung Y.K., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Triangular elements in bending - conforming and non - conforming solutions, Proc. Conf. Matrix Methods in Struct. Mechs., Wright - Patterson Base, Ohio, 1965.
- [13] Bell K., A refined triangular plate bending element, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 1, 1969, s. 101 - 122.
- [14] Bien J., Machelski Cz., Hybrydowy sposób analizy statycznej konstrukcji pryzmatycznych, Prace Naukowe Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Nr 26, Seria : Konferencje, Nr 8, 1978.
- [15] Boissierie J.M., Generation of two - and three - dimensional finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, No. 3, s. 327 - 347.
- [16] Böge G., Ein verträgliches finites Rechteckelement mit sechs Freiheitsgraden je Eckpunkt. Anwendung zur Berechnung von Brückenfahrbahnplatten veränderlicher Steifigkeit mit elastischen Quer- und Längsträgern, Der Stahlbau, Vol. 9, 1973, s. 277 - 283.
- [17] Branicki Cz., Wysiatycki K., Zastosowanie metody elementów skończonych do analizy statycznej lekkich jezdni mostowych, XVI Konf. Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 1970, T.1, s. 381 - 388.
- [18] Branicki Cz., Wysiatycki K., Bzowy A., Bezpośrednia metoda analizy zginanych ustrojów tarczowo - żebrowych za pomocą elektronicznej maszyny cyfrowej, Zeszyty Naukowe

- Politechniki Gdańskiej, Budownictwo Lądowe, XXIII, Nr 182, 1972, s. 147 - 161.
- [19] Brown T.G., Ghali A., Semi - analytic solution of skew plates in bending, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 57, 1974, Part 2, s. 165 - 175.
- [20] Brown T.G., Ghali A., Semi - analytic solution of skew box girder bridges, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 59, 1975, Part 2, s. 487 - 500.
- [21] Bzowy A., Jankowski A., Wysiatycki K., Wyznaczanie przemieszczeń i naprężeń w sprężystej tarczy za pomocą matematycznej maszyny cyfrowej, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Nr 162, Budownictwo Lądowe XXI, 1970.
- [22] Cantin G., An equation solver of very large capacity, Int.J.Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, s. 379 - 388.
- [23] Carroll W.E., Barker R.M., A theorem for optimum finite - element idealizations, Int. J. Solids and Structures, Vol. 9, 1973, No. 7, s. 883 - 896.
- [24] Cheung M.S., Cheung Y.K., Analysis of curved box girder bridges by finite strip method, Publ. IABSE, Vol. 31-I, 1971, s. 1 - 19.
- [25] Cheung M.S., Cheung Y.K., Ghali A., Analysis of slab and girder bridges by the finite strip method, Building Science, Vol. 5, 1970, s. 95 - 104.
- [26] Cheung Y.K., The finite strip in the analysis of elastic plates with two opposite simply supported ends, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 40, 1968, s. 1 - 8.
- [27] Cheung Y.K., Finite strip method of analysis of elastic slabs, J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 94, 1968, No. EM6, s. 1365 - 1378.
- [28] Cheung Y.K., Analysis of box girder bridges by the finite strip method, In Proceedings of the Second International Symposium on Concrete Bridge Design, American Concrete Institute, 1969, s. 357 - 378.

- [29] Cheung Y.K., The analysis of cylindrical orthotropic curved bridge decks, Publ. IABSE, Vol. 29 - II, 1969, s. 41 - 52.
- [30] Cheung Y.K., Cheung M.S., Analysis of a slab - beam bridge, 2nd Australasian Conf. Mechanics of Structures and Materials, Adelaide 1969.
- [31] Cheung Y.K., King I.P., Zienkiewicz O.C., Slab bridges with arbitrary shape and support conditions: a general method of analysis based on finite elements, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 40, 1968, s. 9 - 36.
- [32] Clough R.W., Comparison of three - dimensional finite elements, Proc. Symp. on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering, ASCE - Vanderbilt University, Nashville 1969.
- [33] Cook R.D., More on reduced integration and isoparametric elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 5, 1972, s. 141 - 142.
- [34] Cook R.D., Two hybrid elements for analysis of thick, thin and sandwich plates, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 5, 1972, s. 277 - 288.
- [35] ~~Cook W.A., Body oriented /natural/ co-ordinates for generating three - dimensional meshes, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 8, 1974, s. 27 - 43.~~
- [36] Crisfield M.A., Finite element methods for the analysis of multicellular structures, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 48, 1971, No. 3, s. 413 - 437.
- [37] Cusens A.R., Loo Y.C., Applications of the finite strip method in the analysis of concrete box bridges, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 57, 1974, s. 251 - 274.
- [38] Dacko M., Mossor A., Obliczenia prętowych struktur powtarzalnych metodą elementów skończonych, Inżynieria i Budownictwo, Nr 3, 1973.

- [39] Dacko M., Mossor A., Zastosowanie programów metody elementów skończonych w analizie konstrukcji mostowych, Konferencja Naukowo - Techniczna "Współczesne metody projektowania mostów", SITK, Gliwice, 1973, s. 130 - 144.
- [40] Dacko M., Szmelter J., Macierz sztywności elementu przestrzennego układu prętowego, Biuletyn WAT, Nr 7, 1972, s. 27 - 38.
- [41] Davies J.D., Somerville I.J., Zienkiewicz O.C., Analysis of various types of bridges by the finite element method, Proc. Int. Conf. on Developments in Bridge Design and Construction, 1971.
- [42] Demidovich B.P., Moran J.A., Computational Mathematics, MIR, Moscow 1974.
- [43] Desai C.S., Abel J.P., Introduction to the finite element method: A numerical method for engineering analysis, Van Nostrand Reinhold, New York 1972.
- [44] Dobrociński S., Szmelter J., Program rozwiązujący równania metody elementów skończonych, Biuletyn WAT, czerwiec 1971.
- [45] Doroszkiewicz R.S., Elastooptyka. Stan i rozwój polaryzacyjnooptycznych metod doświadczalnej analizy naprężeń, IPPT PAN, PWN. Warszawa - Poznań 1975.
- [46] Eimer Cz., Waszczyszyn Z., Tendencje rozwojowe mechaniki konstrukcji inżynierskich, Archiwum Inżynierii Lądowej, T. XX, Z. 1, 1974, s. 3 - 22.
- [47] Ergatoudis J.G., Quadrilateral elements in plane analysis: Introduction to solid analysis, M. Sc. thesis, University of Wales, Swansea, 1966.
- [48] Ergatoudis J., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Curved, isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis, Int. J. Solids and Structures, Vol. 4, 1968, No. 1, s. 31 - 42.

- [49] Ergatoudis J., Irons B.M., Zienkiewicz O.C., Three dimensional analysis of arch dams and their foundations, Proc. of Symposium on Architecture of Dams, Institute of Civil Engineering, 1968.
- [50] Felippa C.A., Clough R.W., The finite element method in solid mechanics, SIAM - AMS Proceedings, American Mathematical Society, Vol. 2, 1970, Providence, R. I., s. 210 - 252.
- [51] Fickel H.H., Analysis of curved girders, J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 85, 1959, No. ST 7, s. 113 - 141.
- [52] Fjeld S., Three dimensional theory of elasticity, in: Finite element methods in stress analysis, Tapir Press, Trondheim, Norway, 1969, s. 333 - 363.
- [53] Fraeijs de Venbeke B., A conforming finite element for plate bending, Int. J. Solids and Structures, Vol. 4, 1968, s. 95 - 108.
- [54] Frederick C.O., Edge F.W., Wong Y.C., Two dimensional automatic mesh generation for structural analysis, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 2, 1970, s. 133 - 144.
- [55] Fried I., Perturbation errors in the finite element method, Journal of Applied Mechanics, Transactions of the ASME, Series E, Vol. 39, 1972, No. 2, s. 629 - 631.
- [56] Fried I., Numerical integration in the finite element method, Computers and Structures, Vol. 4, 1974, s. 921 - 932.
- [57] Fuchs G., Roy J.R., Schrem E., Hypermatrix solution of large set of symmetric-positive-definite linear equation, Computer Methods in Applied Mechanics, Vol. 1, 1972, s. 197 - 216.
- [58] Gallagher R.H., Padlog J., Bijlaard P.P., Stress analysis of heated complex shapes, J. Aerospace Sci., 1962, s. 700-707.

- [59] George J.A., On the density of finite element matrices, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 5, 1972, No. 2, s. 297-300.
- [60] Ghali A., Courbon I., Analysis of bridge decks numerical methods, Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics, No. 288, s. 93 - 103.
- [61] Ghali A., Tadros G.S., On finite strip analysis of continuous plates, Publ. IABSE, Vol. 34-I, 1974, s. 25 - 34.
- [62] Glück I., Gellert M., Generalization of the finite strip method for solid continua, Publ. IABSE, Vol. 34-I, 1974, s. 95 - 106.
- [63] Grafton P.E., Strome P.R., Analysis of axisymmetric shells by the direct stiffness method, Journal AIAA, Vol. 1, 1963, s. 2342 - 2347.
- [64] Gray W.G., Pinder G.F., On the relationship between the finite element and finite difference methods, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 10, 1976, No. 4, s. 893 - 923.
- [65] Gryczmański M., Scalar algorithm of determination of stiffness matrix and of another finite element characteristics, Biulletin de l'Academie Polonaise des Sciences, No. 11, 1974.
- [66] Gupta A.K., Mohraz B., A method of computing numerically integrated stiffness matrices, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 5, 1972, s. 83 - 89.
- [67] Harden C.T., Rushton K.R., The analysis of four span skew bridge using an elektric analogue computer, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 36, 1967, s. 297 - 323.
- [68] Hellen T.K., Effective quadrature rules for quadratic solid isoparametric finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 4;1972, s. 597 - 600.

- [69] Herrman L.R., Finite - element bending analysis for plates, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 93, 1967, No. EM 5, s. 13 - 26.
- [70] Hinton E., Campbell I.S., Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 8, 1974, s. 461 - 480.
- [71] Huebner K.H., The finite element method for engineers, John Wiley and Sons, New York. 1975.
- [72] Hughes T.J.R., Taylor R.L., Kanoknukulchai W., A simple and efficient finite element for plate bending, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 11, 1977, s. 1529 - 1543.
- [73] Hutton S.G., Anderson D.L., Finite element method: a Galerkin approach, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 97, 1971, No. EM 5, s. 1503 - 1520.
- [74] Irons B.M., Engineering application of numerical integration in stiffness method, Journal AIAA, Vol. 14, 1966, s. 2035 - 2037.
- [75] Irons B.M., Economical computer techniques for numerically integrated finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 1, 1969, s. 201 - 203.
- [76] Irons B.M., A frontal solution program for finite element analysis, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 2, 1970, No. 1, s. 5 - 32.
- [77] Irons B.M., A technique for degenerating brick - type isoparametric elements using hierarchical midside nodes, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 8, 1974, s. 203 - 208.
- [78] Jensen G.H., Parks G.A., Efficient solutions for linear matrix equations, J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 96, 1970, No. ST 1, s. 49 - 64.
- [79] Kolar V. i in, Technical, physical and mathematical principles of the finite element method, Rozpravy Československe Akademie Ved, Rada Technických Ved, Vol. 81, 1971, No. 2.

- [80] Lin T.Y., Design of prestressed concrete structures, 2nd edn., Wiley, New York, 1963.
- [81] Loo Y.C., Cusens A.R., A refined finite strip method for the analysis of orthotropic plates, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 48, 1971, No.1, s. 85 - 91.
- [82] Loo Y., Cusens A.R., Developments of the finite strip method in the analysis of bridge decks, Proc. Conf. on Developments in Bridge Design and Constructing, Cardiff, March - April 1971, s. 53 - 72.
- [83] Lynn P.P., Boresi A.P., Kinds of convergence and improved convergence of conforming finite element solutions in plate bending, Nuclear Engineering and Design, Vol. 11, 1969, No. 2, s. 159 - 176.
- [84] Machelski Cz., Koncepcja rozwiązania przęseł mostowych, Komunikat nr 31/77 Instytutu Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, 1977.
- [85] Mańko Z., Analiza statyczna wybranych stalowych przęseł mostowych, praca doktorska, Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Wrocławskiej, Komunikat nr 6/75, Wrocław ~~1975.~~
- [86] Mańko Z., Analiza statyczna skrzynkowych przęseł mostowych, Archiwum Inżynierii Lądowej, T. XXIV, z. 1, 1978, s. 119 - 132 .
- [87] Mańko Z., Analiza statyczna stalowych płyt pomostowych, Inżynieria i Budownictwo, Nr 2, 1978, s. 73 - 77.
- [88] Marlon - Lambert J.R., Thompson M.V., Jessop E.L., A computer program system for three - dimensional stress analysis, Proc. Conf. on Finite Element Method in Civil Engineering, McGill University, 1972, s. 175 - 204.
- [89] Martin H.C., Plane elasticity problems and the direct stiffness method, Trend Eng. Univ. Wash., Vol. 13, 1961.

- [90] Martin H.S., Wilkinson J.H., Solution of symmetric and unsymmetric band equations and the calculation of eigenvectors of band matrices, *Numerische Mathematik*, 1967, 9, s. 279 - 301.
- [91] Mawenya A.S., The analysis of thin, thick and sandwich plates by the finite strip method, *Publ. LABSE*, Vol. 35-I, 1975, s. 159 - 168.
- [92] Mawenya A.S., A curved plate element for the analysis of thin, thick and sandwich plates, *Publ. IABSE*, Vol. 35-II, 1975, s. 133 - 140.
- [93] Mawenya A.S., Quadratic isoparametric circular plate element with strain smoothing, *J. of. Strain Analysis*, Vol. 11, 1976, No. 2, s. 132 - 134.
- [94] Mawenya A.S., Shear in isoparametric beam and plate bending elements, *Proc. Instn Civ. Engrs*, Vol. 61, 1976, Part 2, s. 197 - 204.
- [95] Melosh R.J., A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending, *J. Aeronautical Sci.*, Vol. 28, 1961, No. 6, s. 34 - 72.
- [96] Melosh R.J., Structural analysis of solids, *J. Struct. Div., Proc. ASCE*, Vol. 89, 1963, No. ST 4, s. 205 - 223.
- [97] Moffatt K.R., Lim P.T.K., Finite element analysis of composite box girder bridges having complete or incomplete interaction, *Proc. Instn Civ. Engrs*, Vol. 61, 1976, Part 2, s. 1 - 22.
- [98] Mondkar D.P., Powell G.H., Large capacity equation solver for structural analysis, *Computers and Structures*, Vol. 4, 1974, s. 699 - 728.
- [99] Nicolas V.T., Citipitioglu E., A general isoparametric finite element program SDRC SUPERB, *Computers and Structures*, Vol. 7, 1977, s. 303 - 313.

- [100] Oden J.T., A general theory of finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 1, 1969, Part I: s. 205 - 221, Part II: s. 247 - 260.
- [101] Oden J.T., Brauchli H.J., On the calculation of consistent stress distributions in finite element approximations, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, s. 317 - 325.
- [102] Oliveira E.R.A., Theoretical foundations of the finite element method, Int. J. Solids and Structures, Vol. 4, 1968, s. 929 - 952.
- [103] Olsen H., Reinizthuber F., Die zweiseitig gelagerte Platte, W. Ernst u. Sohn, Berlin 1951.
- [104] Pawsey S.F., Clough R.W., Improved numerical integration of thick shell finite elements, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, s. 575 - 586.
- [105] Petersson H., Popov E.P., Substructuring and equation system solutions in finite element analysis, Computers and Structures, Vol. 7, 1977, s. 197 - 206.
- [106] Pian T.H.H., Tong P., Basis of finite element methods for solid continua, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 1, 1969, S. 3 - 28.
- [107] Rakowski G., Metoda elementów skończonych w mechanice budowli, Inżynieria i Budownictwo, Nr 4,5,6, 1971.
- [108] Rashid Y.R., Three - dimensional analysis of elastic solids, Int. J. Solids and Structures, Part I, Vol.5, 1969, s. 1311 - 1332, Part II, Vol. 6, 1970, s. 195 - 207.
- [109] Rashid Y.R., Rockenhauser W., Pressure vessel analysis by finite element techniques, Proc. Conf. on Prestressed Concrete Pressure Vessels, Institute of Civil Engineering, 1968.

- [110] Rashid Y.R., Smith P.D., Prince N., On further application of the finite element method to three - dimensional elastic analysis, Proc. of Symposium on High Speed Computing of Elastic Structures, University of Liege, Belgia, 1970.
- [111] Ritz W., "Über eine Methode zur Lösung gewissen Variations - Probleme der mathematischen Physik, J. Reine und Angew. Math., 135, 1909, s. 1 - 61.
- [112] Roy J.R., Numerical error in structural solutions, J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 97, 1971.
- [113] Sawko F., Cope R.I., The analysis of skew bridge decks - a new finite element approach, The Structural Engineer, Vol. 47, 1969, No. 6, s. 215 - 224.
- [114] Sawko F., Cope R.I., Analysis of multi - cell bridges without transverse diaphragms - a finite element approach, The Structural Engineer, Vol. 47, 1969, No.11, s. 455 - 460.
- [115] Sawko F., Merriman P.A., An annular segment finite element for plate bending, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, s. 119 - 129.
- [116] Scordelis A.C., Lo K.S., Computer analysis of cylindrical shells, J. Am. Concrete Inst., Vol. 61, 1964, s. 539 - 559.
- [117] Severn R.T., Taylor P.R., The finite element method for flexure of slabs when stress distributions are assumed, Proc. Inst.Civ. Engrs, Vol. 34, 1966, s. 153 - 170.
- [118] Sisodiya R.G., Cheung Y.K., Ghali A., Finite element analysis of skew, curved box girder bridges, Publ. IABSE, Vol. 30 - II, 1970, s. 191 - 199.
- [119] Silvester P., Tetrahedral polynomial finite elements for the Helmholtz equation, Int. J. Numer. Methods Engng, Vol 4, 1972, No. 3, s. 405 - 413.

- [120] Sisodiya R.G., Cheung Y.K., Ghali A., New finite elements with application to box - girder bridges, Proc. Instn, Civ. Engrs, Paper No. 7479, London 1972, s. 207 - 225.
- [121] Sisodiya R.G., Ghali A., Analysis of box - girder of arbitrary shape, Publ. IABSE, Vol. 33-I, 1973, s. 203 - 217.
- [122] Sisodiya R.G., Ghali A., Cheung Y.K., Finite element analysis of skew box girder bridges, The Engineering Journal EIC, Vol. 55, 1972, No. 3, s. 45 - 50.
- [123] Skjolingstad L., Cheung Y.K., Three - dimensional field problems by higher order finite elements, Revue Roumaine des Sciences Techniques, Serie de Mecanique Appliquee, Vol. 16, 1971, No. 2, s. 359 - 373.
- [124] Smith I.M., Duncan W., The effectiveness of nodal continuities in finite element analysis of thin rectangular and skew plates in bending, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol 2, 1970, s. 253 - 258.
- [125] Somervaille I.J., Slab and girder bridge program, Computer Report CNME/CR/41, 1970, University of Wales, Swansea.
- [126] Stańko J., Język FORTRAN maszyn serii ODRA 1300, Wyd. Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1975.
- [127] Szilagyi G., Quelques applications de la methode des bandes finies, Publ. IABSE, Vol. 34-II, 1974, s. 149 - 168.
- [128] Szmelter J., Dacko M., Dobrociński S., Wieczorek M., Programy metody elementów skończonych, Arkady, Warszawa 1973.
- [129] Szmelter J., Dacko M., Pyrak S., Analiza statyczna przestrzennych układów prętowych metodą elementów skończonych, Inżynieria i Budownictwo, Nr 7, 1972.
- [130] Szmelter J., Dobrociński S., Zastosowanie metody elementów skończonych do tworzenia macierzy sztywności elementu płyty, Biuletyn WAT, kwiecień 1969.

- 111 -
- [131] Szmelter J., Dobrociński S., Pyrak S., Wieczorek M., Analiza statyczna płaskiego stanu napężeń metodą elementów skończonych, Inżynieria i Budownictwo, Nr 5, 1972.
- [132] Tadros G.S., Ghali A., Convergence of semianalytical solution of plates, J. Eng. Mech. Div., Proc. ASCE, Vol. 99, 1973, No. EM 5, s. 1023 - 1035.
- [133] Taig I.C., Structural analysis by the matrix displacement method, Engl. Electric Aviation Report, No. SO 17, 1961.
- [134] Timoshenko S., Goodier J.N., Teoria sprężystości, Arkady, Warszawa 1962.
- [135] Too J.M., Two - dimensional plate, shell and finite prism isoparametric elements and their application, Ph. D. thesis, University of Wales, Swansea, 1971.
- [136] Vallabhan C.V.G., Narayanaswami R., Error analysis for rectangular finite elements, J. Struct. Div., Proc. ASCE, Vol. 98, 1972, No. ST 1, s. 413 - 419.
- [137] Vendhan C.P., Kapoor M.P., Das Y.C., An integrated sequential solver for large matrix equations, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 8, 1974, s. 227 - 248.
- [138] Weseli J., Metody i programy do obliczeń konstrukcji inżynierskich. Część I, Skrypt Uczelniany Politechniki Śląskiej, nr 634, Gliwice 1975.
- [139] Weseli J., Metoda elementów skończonych. Programy do obliczania konstrukcji inżynierskich. Część II, Materiały XXIV Konferencji Naukowej KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1978.
- [140] Westbroo D.R., Chakraba S., Cheung Y.K., Three - dimensional or penalty finite element method for plate bending, Int. J. of Mechanical Sciences, Vol. 18, 1976, No. 7, s. 347 - 350.

- [141] Wilson E.L., Structural analysis of axisymmetric solids, Journal AIAA, Vol. 3, 1965, s. 2269 - 2274.
- [142] Wilson E.L., Solid sap, a static analysis program for three-dimensional structures, Report UC SESM 71 - 19, University of California, Berkley, 1972.
- [143] Wilson E.L., Bathe K.J., Doherty W.P., Direct solution of large systems of linear equations, Computers and Structures, Vol. 4, 1974, s. 363 - 372.
- [144] Wyatt M.I., Davies G., Snell C., A new difference based finite element method, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 59, 1975, Part 2, s. 395 - 409.
- [145] Wysiatycki K., Pola naprężeń w elementach konstrukcji budowlanych i mostowych, XI Konferencja Naukowa Komitetu Inżynierii Lądowej PAN i Komitetu Nauki PZITB, Krynica 1965, T. 1.
- [146] Wysiatycki K., Płaskie zagadnienie teorii sprężystości w budownictwie mostowym, Zeszyty Naukowe Politechniki Gdańskiej, Bud. Ląd. XIV, 1966.
- [147] Wysiatycki K., Branicki Cz., Wpływ pracy giętej żeber na rozkład naprężeń w rozciąganej jezdni pewnego mostu kratowego, Księga Komunikatów Sesji Naukowej Instytutu Budownictwa Lądowego i Instytutu Hydrotechniki Politechniki Gdańskiej, 1971.
- [148] Zienkiewicz O.C., The finite element method: from intuition to generality, Applied Mechanics Reviews, Vol. 23, 1970, s. 249 - 256.
- [149] Zienkiewicz O.C., The finite element method in engineering science, Mc Graw - Hill, 1971 /tłum. polskie, Arkady, Warszawa 1972/.
- [150] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., The finite element method for analysis of elastic isotropic and orthotropic slabs, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 28, 1964, s. 471 - 488.

- [151] Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., The finite element method in structural and continuum mechanics, Mc Graw - Hill Book Co., London 1967.
- [152] Zienkiewicz O.C., Hinton E., Reduced integration, function smoothing and non - conformity in finite element analysis /with special reference to thick plates/, Journal of The Franklin Institute, Vol. 302, Nos. 5 and 6, 1976, s. 443 - 461.
- [153] Zienkiewicz O.C., Irons B.M., Ergatoudis J., Ahmad S., Scott F.C., Iso - parameter and associated element families for two- and three - dimensional analysis, in : Finite element methods in stress analysis, Tapir Press, Trondheim, Norway, 1969, s. 383 - 432 .
- [154] Zienkiewicz O.C., Owen D.R.I., Lee K.N., Least square - finite element for elasto - static problems. Use of "reduced" integration, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 8, 1974, s. 341 - 358.
- [155] Zienkiewicz O.C., Phillips D.V., An automatic mesh generation scheme for plane and curved surfaces by isoparametric co - ordinates, Int. J. Num. Meth. Engng., Vol. 3, 1971, s. 519 - 528.
- [156] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Too I.M., Reduced integration technique in general analysis of plates and shells, Int. J. Num. Meth. Engng, Vol. 3, 1971, No. 2, s. 275 - 290.
- [157] Zienkiewicz O.C., Too I.M., The finite prism in analysis of thick simply supported bridge boxes, Proc. Instn Civ. Engrs, Vol. 53, 1972, Part 2, s. 147 - 172.

STATICAL ANALYSIS OF BRIDGE SPANS BY THE FINITE
PRISM ELEMENT METHOD

Summary

A three - dimensional statical analysis of prismatic structures with special reference to bridge spans is presented in this work. Using the finite prism element method, an algorithm of solution has been prepared and subsequently computer programs were written. Presented finite prism element method requires the operation on narrow - band matrices and the computations involved are remarkably less than in other three - dimensional methods. Prepared computer programs can be used to the study of displacement, strain and stress distribution in prismatic structures with arbitrary shape of cross - section, straight or curved in plane and with discrete internal column supports. The practical use of programs is illustrated by the analysis of chosen bridge spans and some of the results are verified by model testing.

Odbiorcy:

Egz.

1. Biblioteka Główna Politechniki Wrocławskiej	1
2. Biblioteka i Ośrodek Informacji Naukowo - Technicznej Instytutu Inżynierii Lądowej	1
3. Redakcja Wydawnictw Naukowych i Dydaktycznych Instytutu Inżynierii Lądowej	1
4. Dyrekcja Instytutu Inżynierii Lądowej	2
5. Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej	1
6. Promotor	1
7. Recenzenci	3
8. Ośrodki obce:	8
Instytut Budownictwa Politechniki Gdańskiej	
Instytut Dróg, Kolei i Mostów Politechniki Krakowskiej	
Instytut Inżynierii Lądowej Politechniki Poznańskiej	
Instytut Dróg i Mostów Politechniki Śląskiej	
Instytut Dróg i Mostów Politechniki Warszawskiej	
Instytut Badawczy Dróg i Mostów Ministerstwa Komunikacji w Warszawie	
Instytut Podstawowych Problemów Techniki PAN w Warszawie	
Biuro Projektów Budownictwa Komunalnego "Stolica" w Warszawie	
9. Autor	2

		D.N.P.R	A.N 0.3.0.103.101
	10.75		1.14.17804.7.7/15
		1.14/K-003/79	
Sygn. U. 1	624.21.095 518.6 624.042.001.5	Przęsło mostowe. Metody numeryczne. Naprężenia. Badania naukowo-techniczne.	79: Inst. Inż. Łąd. PWR MNSzWiT pol.

Opis bibliograficzny

Bien Jan

Analiza statyczna przęseł mostowych
metodą pryzmatycznych elementów
skonieczonych.

Komunikaty Inst. Inż. Łąd. PWR 1979 nr 3

173 s. 63 rys. 22 tabl. bibliogr.

157 poz. /maszyn. powiel./

Rozprawa doktorska

Politechnika Wrocławska, Instytut
Inżynierii Łądowej, Wrocław 1979

Promotor: Prof. zw dr hab. inż. Jan Kmita

Charakter pracy: podstawowa.

Rozprawach zbiorc

Bibliograficzny: A

Analiza elementarna

(1) W pracy przedstawiono metodę dyskretnej trójwymiarowej analizy statycznej konstrukcji pryzmatycznych ze szczególnym uwzględnieniem przęseł mostowych. Do dyskretyzacji konstrukcji zastosowano pryzmatyczne elementy skończone. Praca zawiera rozwiązanie analityczne oraz programy do obliczeń numerycznych. Opracowane programy umożliwiają obliczanie konstrukcji o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, prostych lub zakrzywionych w planie, jedno- i wieloprzęskowych, a także zespolonych z różnych materiałów. Podane w pracy przykłady obliczeń numerycznych oraz wyniki badań doświadczalnych pozwalają na ocenę przydatności rozwiązania.

Imię i nazwisko autora analizy

Jan Bieni

Słowa kluczowe

Przęsła mostowe, pryzmatyczne elementy skończone, trójwymiarowa analiza naprężeń.

0489 2 001 019257

004808

Wzrost	Waga	Temperatura ciała	Ciepota ciała	Ciężar ciała	Stwierdzenie przyjęcia	Wzrost ciała po dacie
					poprawki	korrekcyjnie i nie
						manipulacji.