Na prawach rękopisu

INSTYTUT BUDOWNICTWA
POLITECHNIKA WROCŁAWSKA

Raport serii PRE nr /81

ANALIZA DEFORMACJI ŻELBETOWYCH USTROJÓW PRĘTOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MACIERZY PRZENIESIENIA

Andrzej Ubysz
Praca doktorska

Promotor: prof.dr hab.inż. Augustyn Borcz

Słowa kluczowe: żelbet, belka, rysa, obliczanie przemieszczeń, macierz przeniesienia

Wrocław 1981

Mgr inż. Andrzej Ubysz
Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej
Zespół Badawczy nr 5: Mechanika Konstrukcji Zarysowanych
ul. Wybrzeże Wyspiańskiego 27, gmach C-7, p. 711
telefon 20-25-10
50-377 WROCŁAW

Raport opracowano w ramach tematu badawczego: 7003
pod kierownictwem prof.dra hab.inż. Augustyna Borcza
Raport przygotowano w języku polskim
Cel przygotowania raportu: praca doktorska

Symbol pracy: P

Raport wpłynął do Redakcji Wydawnictw Naukowych Instytutu Budownictwa dnia: ....

S P I S T R E Ś C I

1. WPROWADZENIE

W konstrukcjach inżynierskich rzadko występują proste schematy statyczne belek.
Przeważnie są to konstrukcje bardziej złożone, w których zachodzą następujące problemy:

- współpraca z innymi elementami konstrukcji, na przykład z płytami,
- potrzeba konstruowania skosów,
- pojawienie się rys konstrukcyjnych,
- występowanie zjawisk reologicznych.

Obciążenia działają statycznie, dynamicznie oraz wielokrotnie.

Celem opracowania jest jednolita metoda rozwiązywania wyżej wymienionych zadań, w której można wykorzystać elektroniczną technikę obliczeniową, oraz analiza deformacji z wykorzystaniem tej metody przeprowadzona dla wybranych elementów konstrukcji. Jedną z najpopularniejszych metod stosowanych powszechnie do obliczeń statycznych jest metoda elementów skończonych. Pewną odmianą tej metody jest wykorzystanie macierzy przeniesienia.
Charakteryzuje się ona zwartym sposobem opisu i jednolitym schematem rozwiązywania z wykorzystaniem nawet prostych kalkulatorów.

W pracy zwiększono zakres stosowania macierzy przeniesienia do przypadków rozwiązywania konstrukcji żelbetowych i prostych efektów reologicznych, a w szczególności deformacji resztkowych.

Analiza teoretyczna dotyczy deformacji konstrukcji pod obciążeniem statycznym oraz dynamicznym. Rozpatrywane są belki statycznie wyznaczalne i statycznie niewyznaczalne. W belkach występują rysy, które są rozpatrywane jako defekty konstrukcji Rozpatrzono przypadek belki o zmiennej sztywności. Pokazano również sposób obliczania słupa żelbetowego mimośrodowo ściskanego z uwzględnieniem rys w betonie.

W kolejnych rozdziałach przedstawione zostaną sposoby formułowania zadania, oraz przykłady obliczeń praktycznych.

2. KRYTYCZNY PRZEGLĄD LITERATURY

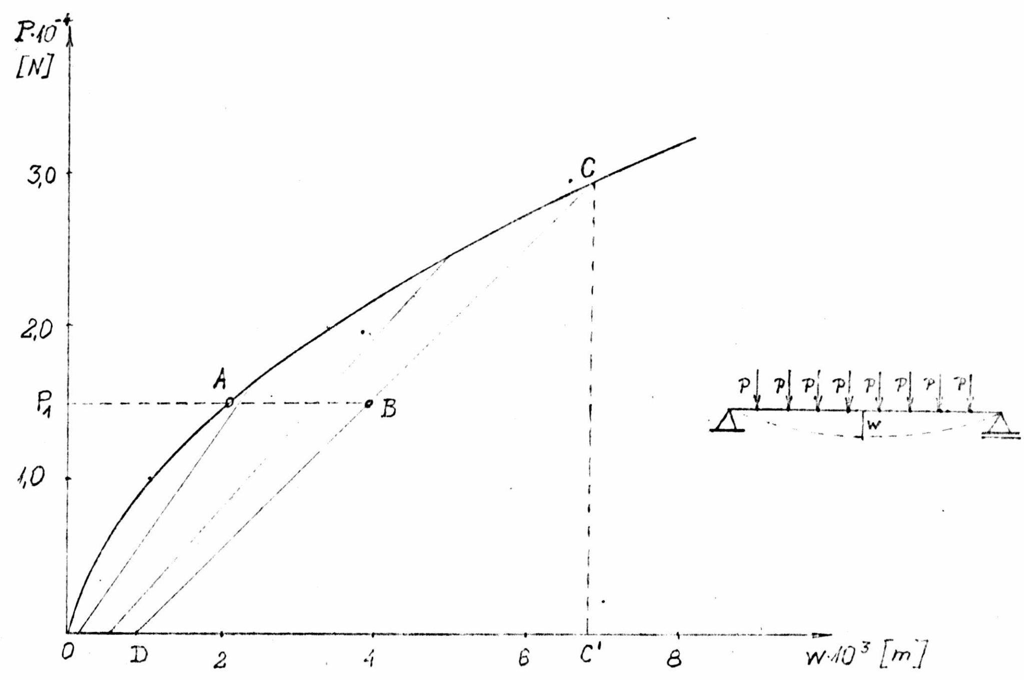
Przegląd zawiera następujące problemy:

a/. ugięcia statyczne wyznaczalnych belek żelbetowych
b/. deformacje i rozkład napięć w statycznie niewyznaczalnych belkach żelbetowych
c/. drgania belek żelbetowych
d/. nośność smukłych słupów żelbetowych ściskanych mimośrodowo.

Poza tym zaistniała także potrzeba analizy związków fizycznych występujących przy zarysowaniu elementów konstrukcji.

Zajęto się również metodami obliczania wyżej wymienionych przypadków wytrzymałościowych, koncentrując uwagę na metodzie posługującej się macierzą przeniesienia.

2.1. Ugięcie belek statycznie wyznaczalnych



Rys. 1-1.

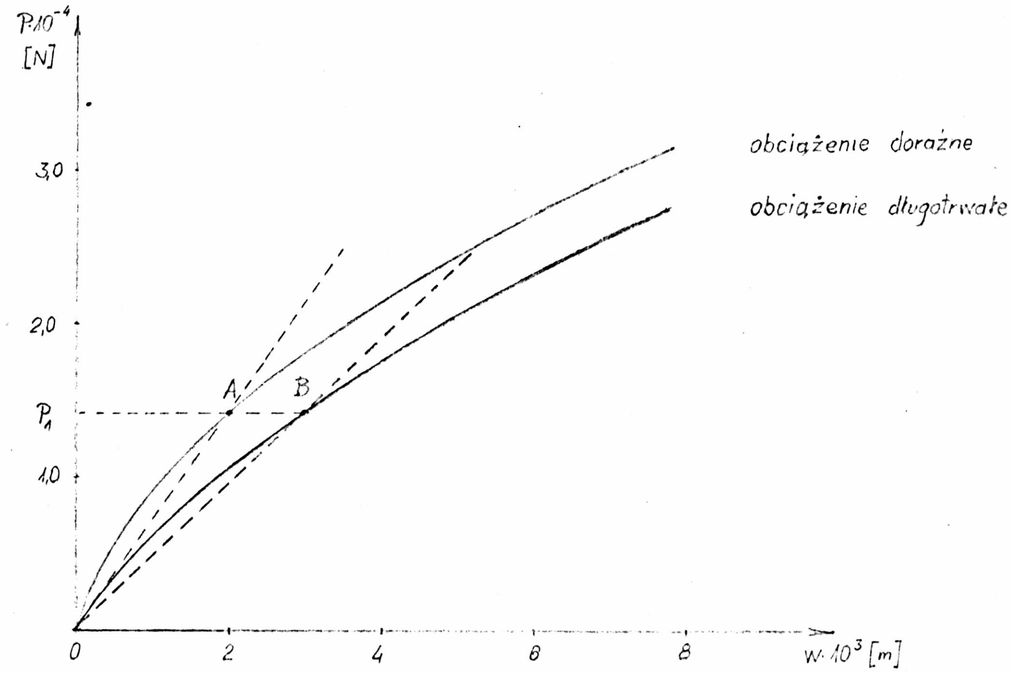
Na pełny obraz przemieszczenia w środku rozpiętości belki /rys.1-1/ składają się:

- zachowania się belki przy obciążeniu prostym to znaczy niemalejącym,
- ugięcia występujące przy odciążeniu konstrukcji,
- ugięcia pod obciążeniem długotrwałym.

Zależność ugięcia od obciążenia jest funkcją prędkości obciążenia. Przy wielokrotnym obciążeniu konstrukcji otrzymujemy różne drogi powrotu zależne od poziomu jej przeciążenia. Na poziomie obciążenia P_1 możemy uzyskać przemieszczenie oznaczone punktem A jak również przemieszczenia znajdujące się na odcinku AB. Punkt B można osiągnąć w różny sposób. Na przykład wychodząc z punktu A i pozostawiając obciążenie P_1 na tym samym poziomie obserwować będziemy pełzanie belki. Nie oznacza to jednak, że musimy osiągnąć przy tym obciążeniu punkt B ponieważ deformacje, wskutek pełzania mogą być ograniczone. Proces pełzania można przyśpieszyć, oraz można zwiększyć przemieszczenia belki wskutek wprowadzenia jej w drgania. Zachodzi wówczas zjawisko wibropełzania. Punkt B można osiągnąć również w inny sposób, na przykład po obciążeniu belki do poziomu C i odciążenia jej do punktu B. Przemieszczenie belki jest wielkością losową ponieważ zależy ona od dosyć przypadkowego sposobu jej obciążenia, które będziemy nazywali historią obciążenia. Opisane zjawisko nazywane jest "pamięcią konstrukcji".
Po odciążeniu belki osiągniemy punkt D. Odcinek OD oznacza ugięcie pozostające po odciążeniu /resztkowe/. Odcinek DC' oznacza deformacje sprężyste.

Z powyższego opisu wynika, że określenie ugięcia belki wymaga szczegółowego objaśnienia rozważanego przypadku obciążenia. W wielu przypadkach mówi się o ugięciu belki nie precyzując dokładniej, którą to wartość ma się na uwadze. E. Probst [34] proponuje zastosowanie sprężystego modelu do obliczania ugięcia belek /rys.2-2 Proponuje zastępczą sztywność belki uwzględniającą występowanie rys w strefie rozciąganej betonu.
Według tych założeń ugięcie zmienia się pod obciążeniem po linii prostej, która przecina doświadczalny wykres ugięcie-obciążenie w punkcie A. Na poziomie obciążenia P_1 otrzymamy bardzo dobrą zgodność obliczonych ugięć, z wielkością uzyskaną doświadczalnie przy określonych warunkach obciążenia. Jeżeli poziom obciążenia P_1 jest równocześnie poziomem obciążenia użytkowego, wówczas zastosowana metoda będzie przydatna dla celów praktycznych.

W przypadku obciążeń długotrwałych można zastosować również odpowiednią sztywność zastępczą belki. Obliczone w ten sposób ugięcie będzie przebiegało po linii OB. Również w tym przypadku uzyskać możemy przydatny praktycznie sposób obliczenia ugięć. Przedstawiona powyżej koncepcja obliczania ugięć została wykorzystana w



Rys. 2-2.

normach technicznych do obliczania belek żelbetowych. Podstawowym zadaniem jest wówczas określenie zastępczej sztywności belki. Muraszew [28] proponuje, ażeby przyjmować sztywność belki w pewny. określony sposób. W obszarze zarysowania proponuje przyjmować sztywność zastępczą jak dla fazy drugiej, poza tym obszarem sztywność jest jak dla fazy pierwszej bez rys. Belka ma skokowo zmienną sztywność.

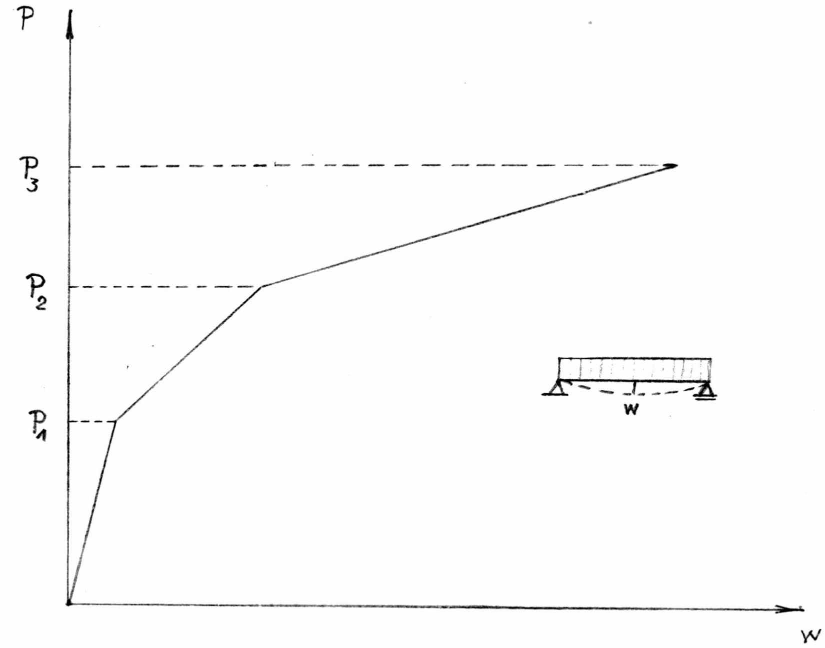
Kolejnym przybliżeniem jest opis deformacji belki aproksymujący wyniki teoretyczne do linii ugięcia - obciążenie przy założeniu obciążenia prostego.

Ugięcie to aproksymuje się dwoma albo trzema odcinkami prostymi [4,20,23,36,42,] (rys.2-3)
Do poziomu obciążenia P_1 przyjmowany jest model sprężysty jednorodny. Pomiędzy poziomem P_1 a P_2 model belki z zastępczą sztywnością. Powyżej poziomu P_2 uwzględnia się również deformacje plastyczne przekroju belki.

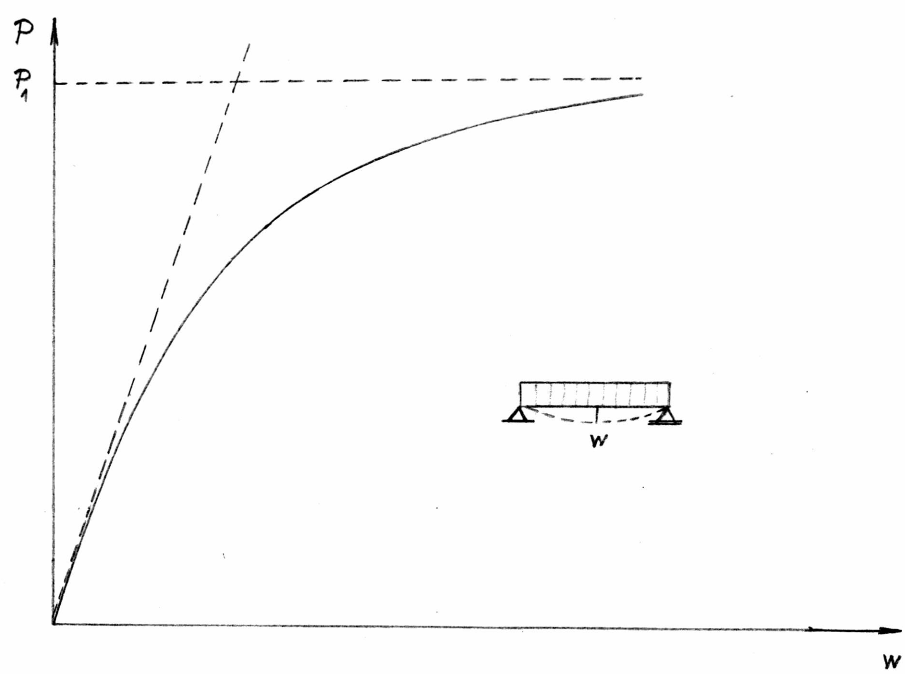
W. Kuczyński [19] przybliża linię ugięcie - obciążenie za pomocą funkcji ciągłych, sztywność jest wówczas zależna od poziomu obciążenia i wyrażona jest wzorami (rys.2-4)

$$B = B_o \;/1- \varphi \frac{M}{M_n}/ \qquad 2-1$$

$$B = B_o \;/1- \left(\frac{M}{M_n}\right)^{\psi}/$$



Rys. 2-3.



Rys. 2-4.

gdzie:

B_o - sztywność belki jednorodnej

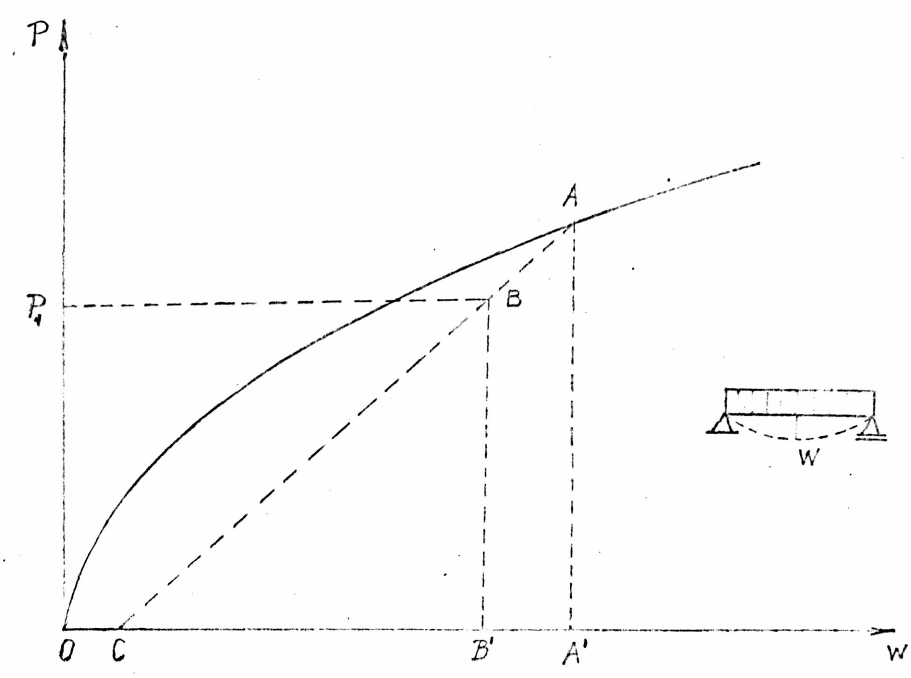
M_n - moment niszczący

φ, ψ - współczynniki opisujące mutacje zmian sztywności.

Przyjęte założenia nazywa metodą kontynualną obejmującą cały zakres obciążenia. W tym przypadku chodzi o obciążenie proste, pominięto, natomiast w tych rozważaniach pełzanie jak również zachowanie się belki przy obciążeniu wielokrotnym i dynamicznym. Nie wyznacza się również deformacji resztkowych.

J. Dubis [8] wprowadza dalsze uściślenia w przybliżeniu zależności /P↔f / przy obciążeniu prostym. Sposób ten nazywa cyfrowym modelem ugięć belki żelbetowej. Jest on tym charakterystyczny, że wprowadza sztywność lokalną, odpowiednią do stanu obciążenia. Mogą być wprowadzone kolejne możliwe stany w strefie ściskanej i rozciąganej, uwzględniające nie tylko obciążenie proste, lecz również i odciążenie belki.

Jakościowy różny od powyższych jest sposób zaproponowany przez A. Borcza [5,6]. Rozpatrywane są kolejne stany deformacji



Rys. 2.5.

belki w procesie ich obciążenia i kolejnego odciążania. Punkt B (rys.2.5) można osiągnąć po linii OC uwzględniającej ugięcia resztkowe, oraz linii CB uwzględniającej ugięcia sprężyste belki zarysowanej. Rozpatrując kolejne stany można zbadać cały proces zależności ugięcia od obciążenia. Położenie rys w belce przyjmuje się jako znane, określone za pomocą ogólnej teorii rys. Wszystkie efekty zarysowania są skupione w przekrojach w których występują rysy. Wpływ tych rys traktuje się jako defekt w konstrukcji sprężystej. W miejscu zarysowania występuje : skok kąta obrotu. Skok tego kąta obrotu $\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\zeta^-}^{\zeta^+}$ wyrażony jest za pomocą następującego związku fizycznego

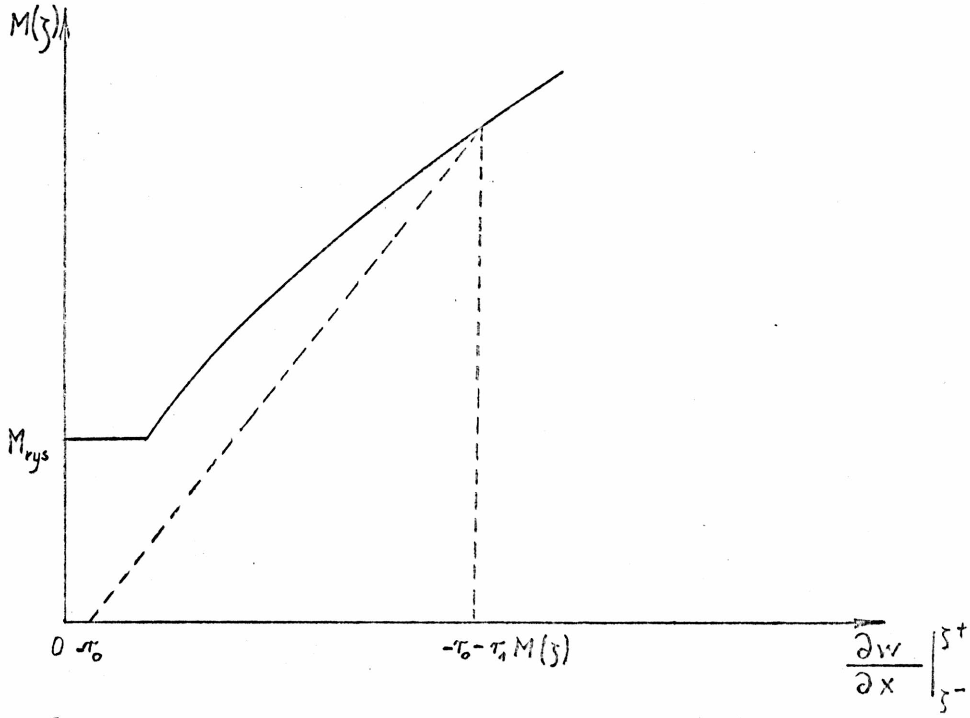
$$\left.\frac{\partial w}{\partial x}\right|_{\zeta^-}^{\zeta^+} = - r_o - r_1^M\, M(\zeta_i) ;$$

r_o, r_1^M - współczynniki zależne od wymiarów geometrycznych belki, rodzaju zbrojenia oraz cech betonu

r_o - określa deformacje resztkowe

$M(\zeta_i)$ - moment zginający w rozpatrywanym przekroju zarysowanym.

Zachowanie się rysy pod działaniem obciążenia składa się z deformacji resztkowych i sprężystych



Rys. 2-6.

Model matematyczny belki zarysowanej w przypadku stałej jej wysokości jest opisany za pomocą następującego równania różniczkowego

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = \frac{pl^3}{EJ} + \sum_i r_i\, \delta_{\xi\xi}(\xi - \zeta_i) ;$$

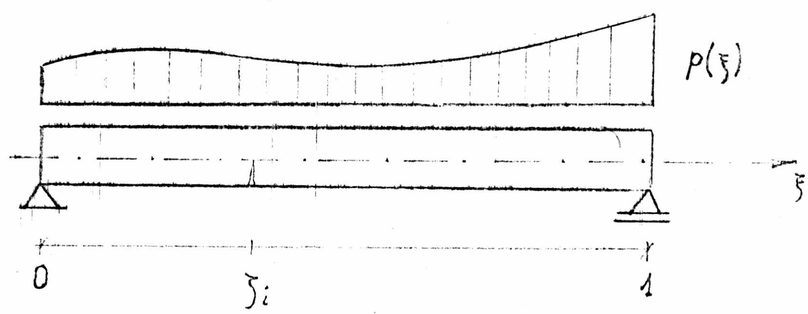
gdzie:

$$r_i = -r_{oi} + r_{1i}\, v_{\xi\xi}(\zeta_i^-)$$

$v = \frac{w}{l}$ - bezwymiarowe przemieszczenie

$\delta''_{\xi\xi}$ - druga pochodna delty Diraca względem współrzędnej bieżącej $\xi = \frac{x}{l}$;

ξ_i - miejsce występowania rysy.



Rys. 2-7.

Powyższe równanie różniczkowe jest rozwiązywanie z wykorzystaniem funkcji uogólnionych. W przekroju zarysowanym występują skoki kąta obrotu, natomiast krzywizna w tym przekroju jest nieoznaczona, którą to nieoznaczoność wyraża delta Diraca.

2.2. Statycznie niewyznaczalne belki żelbetowe

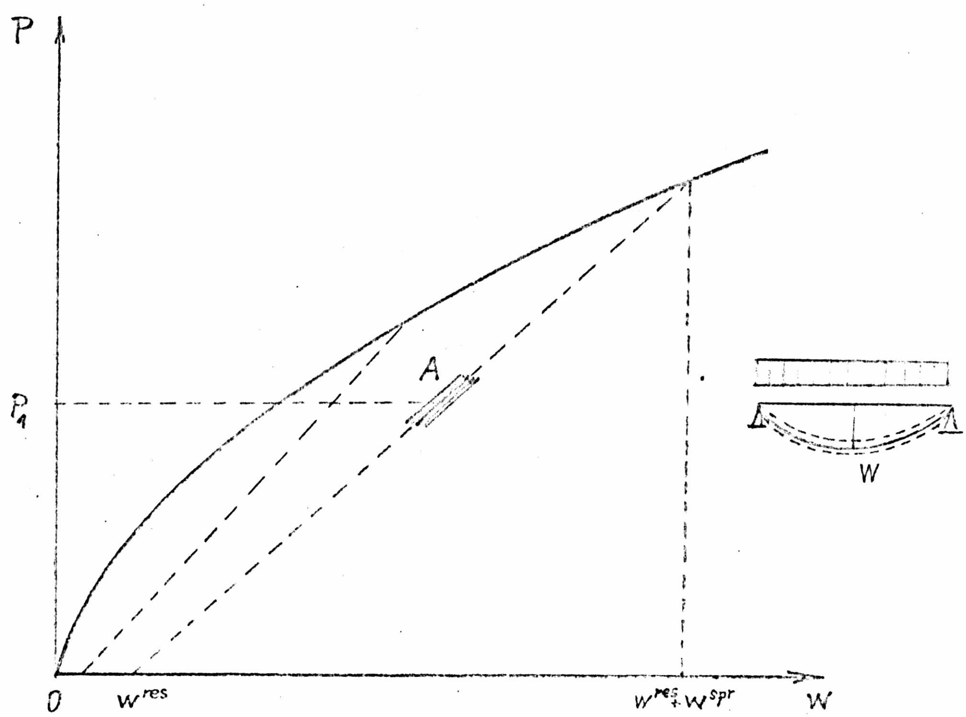
Dotychczas projektuje się statycznie niewyznaczalne belki żelbetowe przy założeniu sprężystego jednorodnego modelu ich deformacji. Wymiarowanie natomiast, czyli dobieranie ilości zbrojenia w przekrojach może być wykonane przy założeniu metody klasycznej, czyli zarysowanej ale sprężystej konstrukcji, oraz przy założeniu, że w wymiarowanym przekroju moment może przyjąć wartość graniczną. Ten ostatni przypadek oznacza równocześnie uplastycznienie betonu w strefie ściskanej oraz uplastycznienie zbrojenia. Między sposobem wyznaczania sił wewnętrznych, a sposobem wymiarowania zachodzi wewnętrzna sprzeczność. Prace badawcze z zakresu statyki hiperstatycznych belek żelbetowych zmierzają do usunięcia tej wewnętrznej sprzeczności. Rozważane belki żelbetowe zmieniają sztywność w procesie obciążenia. W tym temacie wykonano bardzo wiele prac teoretycznych i doświadczalnych. Np. Muraszew [28] proponuje obliczać statycznie niewyznaczalne belki żelbetowe przy założeniu skokowo zmiennego momentu bezwładności. W obszarach zarysowanych przyjmowany jest moment bezwładności jak dla fazy drugiej, w obszarach niezarysowanych pozostawia się sztywność jak dla fazy I. Analizę rozkładu momentów przy tych założeniach przeprowadził M. Knauff [23] . W ten sposób uzyskiwane rozkłady momentów niewiele się różnią od uzyskiwanych przy założeniu sprężystego modelu belki niezarysowanej. Musi być jednak spełniony warunek, że zbrojenie zostało zaprojektowane tak jakby momenty miały rozkład według wyników teorii jednorodnych belek sprężystych B. Bukowski [2] wysunął tezę o przystosowywaniu się konstrukcji żelbetowych do występującego w niej zbrojenia. Można by było wnioskować, że istnieje duża możliwość łatwego przegrupowania się sił wewnętrznych w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych w zależności od tego w jakich proporcjach umieścimy zbrojenie na podporze i w przęśle. Teza ta była weryfikowana za pomocą bardziej ścisłych obliczeń, a wyniki znalazły swoje odzwierciedlenie w normie CEB [45] . Według tej oceny nie można jednak całkiem dowolnie przegrupowywać zbrojenia. Jeżeli przyjąć za podstawę porównawczą ilość zbrojenia potrzebną przy założeniu sprężystego jednorodnego modelu to odchylenia od tej podstawy można dopuścić w wysokości zaledwie 15%. Można przytoczyć dużą ilość prac teoretycznych [21,47,36,21,15] i doświadczalnych [11,12] uzasadniających analizę rozkładu momentów belek statycznie niewyznaczalnych.

Zadanie sprowadza się do rozwiązania nieliniowego zwyczajnego równania różniczkowego, ponieważ w zasadzie model przyjmowany tutaj jest nieliniowo-sprężysty [19,8]. Pewnym uproszczeniem może być przyjęcie odcinkowo-liniowego modelu. We wszystkich tych przypadkach napotyka się na duże trudności rachunkowe.

Zamiarem niniejszej pracy jest opracowanie metody, która w znacznym stopniu uprości obliczenia, tak jak również będzie to metoda spójna, ponieważ umożliwia analizę nie tylko stanów sprężystych, ale również zagadnienia dynamiczne i stateczności. W metodzie tej wykorzystano ideę macierzy przeniesienia. Założenia przyjęte do obliczenia belek ciągłych będą jak w pracy A. Borcza [6] . Przyjęty został sprężysty model belki żelbetowej z defektami w miejscu rys. W przekrojach zarysowanych mogą ujawniać się również deformacje resztkowe. Równanie różniczkowe jest takie samo jak w rozdziale 2.1. Te same będą i sposoby rozwiązywania, z tą tylko różnicą że momenty w przekroju zarysowanym nie są znane i podlegają wyznaczeniu. Szczegółowy opis postępowania zamieszczono w rozdziale 4 .

2.3. Drgania belek żelbetowych

Przemiotem rozważań będą ustalone drgania wokół położenia równowagi. Na przykład przy obciążeniu stałym strzałka ugięcia belki jest opisana za pomocą punktu A /rys. 2-8/. Położenie tego punktu zależy od historii obciążenia.



Rys. 2-8.

Amplituda drgań jest mała w porównaniu do ugięcia pod obciążeniem statycznym. Przemieszczenia dynamiczne odbywają się po linii zaznaczonej grubszą kreską w otoczeniu punktu A. Mamy do czynienia z drganiami sprężystymi. Stawiane są dwa zadania obliczeniowe:

- wyznaczenie częstości drgań własnych,
- obliczenie amplitudy drgań wymuszonych.

W pracy wykorzystano analizę dynamiczną belek żelbetowych opracowaną w pracy R. Romanów [22]. Wyniki tej pracy stały się podstawą do dalszych uogólnień, a w szczególności do zastosowania macierzy przeniesienia przy obliczaniu częstości drgań własnych belek żelbetowych. Przy okazji należy wyrazić pewien pogląd o formułowaniu zadania przy obliczeniu tych drgań, Na ogół autorzy są zgodni co do tego, że drgania mają charakter sprężysty. Niektórzy uważają, że dla celów technicznych wystarczałoby posłużyć się sztywnością zastępczą belki żelbetowej, która jest miejsza od sztywności belki żelbetowej obciążonej statycznie [44,45].

Pojawia się też jednak problem obliczania sztywności ze znanych wzorów z dynamiki belek niezarysowanych. Dużym postępem jest sformułowanie przez R. Romanów równania różniczkowego, które w przypadku belki o stałej sztywności ma następującą postać

$$v_{,\xi\xi\xi\xi} + \lambda^4 v_{,tt} = \sum_i r_i \delta_{,\xi\xi}(\xi - \bar{\xi}_i) ;$$

gdzie:

$v = \frac{w}{l}$ – bezwymiarowe przemieszczenie dynamiczne

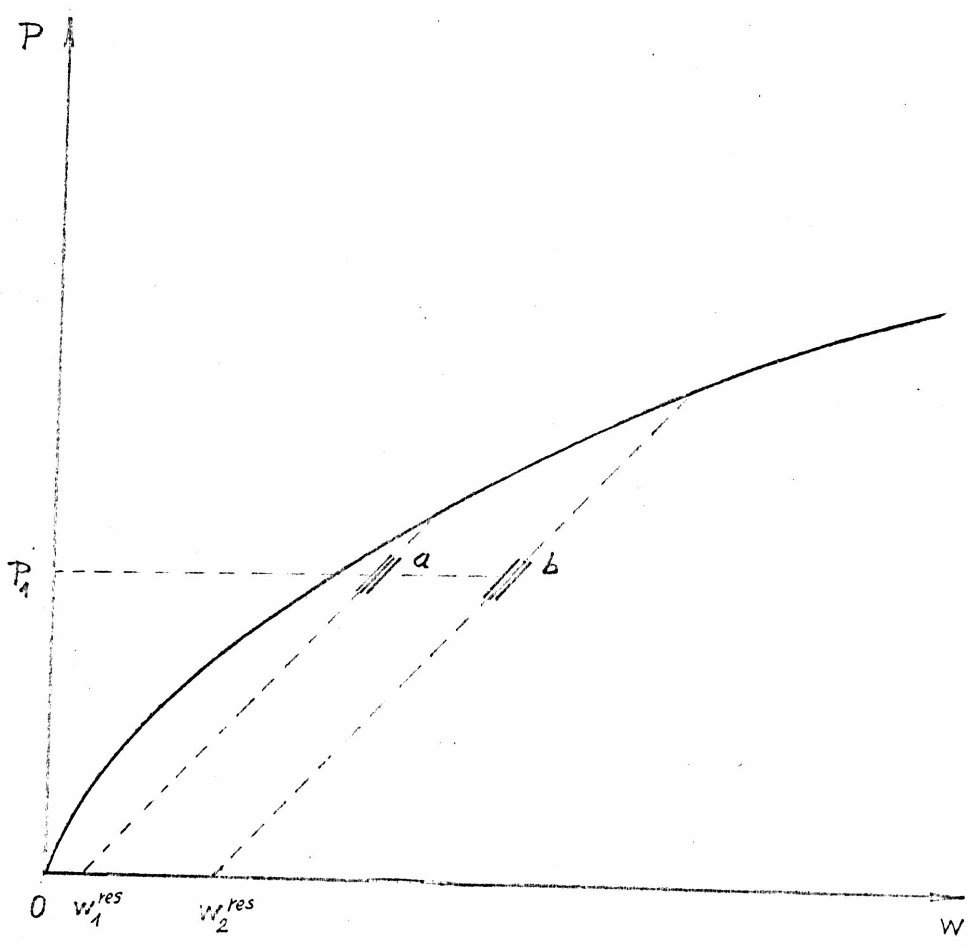
λ – charakteryzuje masę i sztywność belki jednorodnej ;

$\delta_{,\xi\xi}(\xi - \bar{\xi}_i)$ – oznacza miejsce występowania rys oraz nieciągłość deformacji kątowych w miejscu rysy .

Współczynnik r_i określa związek fizyczny opisujący deformację kątową w przekroju zarysowanym. Jest zależny od momentu zginającego oraz zmiany tego momentu w czasie. Pierwszy składnik oznacza dynamiczne deformacje sprężyste, drugi charakteryzuje tłumienie w miejscu rysy. Rozwiązanie w ten sposób postawionego zadania uzyskano w klasie funkcji uogólnionych. Wyznaczono funkcje własne belki żelbetowej zarysowanej oraz częstości drgań własnych. Wykazano również, że metoda rozwiązywania ma charakter ogólny i może być wykorzystane do analizy drgań zarysowanych belek ciągłych. Przykłady liczbowe wykazują przydatność metody, oraz duże znaczenie rys na częstości drgań własnych, co potwierdza obserwacje innych autorów. Praca nie została zweryfikowana doświadczalnie. Współczynniki przyjęto tak jak dla konstrukcji żelbetowych przy wielokrotnych obciążeniach statycznych.

Rozważania są prowadzone dla pewnych ustalonych stanów zarysowania, a więc znana jest liczba rys i ich położenie. Analizując kolejne stany zarysowania można prześledzić cały proces /rys.2-9/. W procesie drgań narastają deformacje, które nazywamy deformacjami resztkowymi. Zaznacza się to szerokością i ilością rys. Drgania są jednak dalej rozpatrywane wokół położenia równowagi "b".

Zjawisko wibropełzania charakteryzuje się tym, że wzrasta ugięcie statyczne, wokół którego odbywają się drgania sprężyste. Na przykład posługując się rysunkiem 2-9 przechodzimy z położenia "a" do położenia "b". Założenia metody nie ulegają więc zmianie.



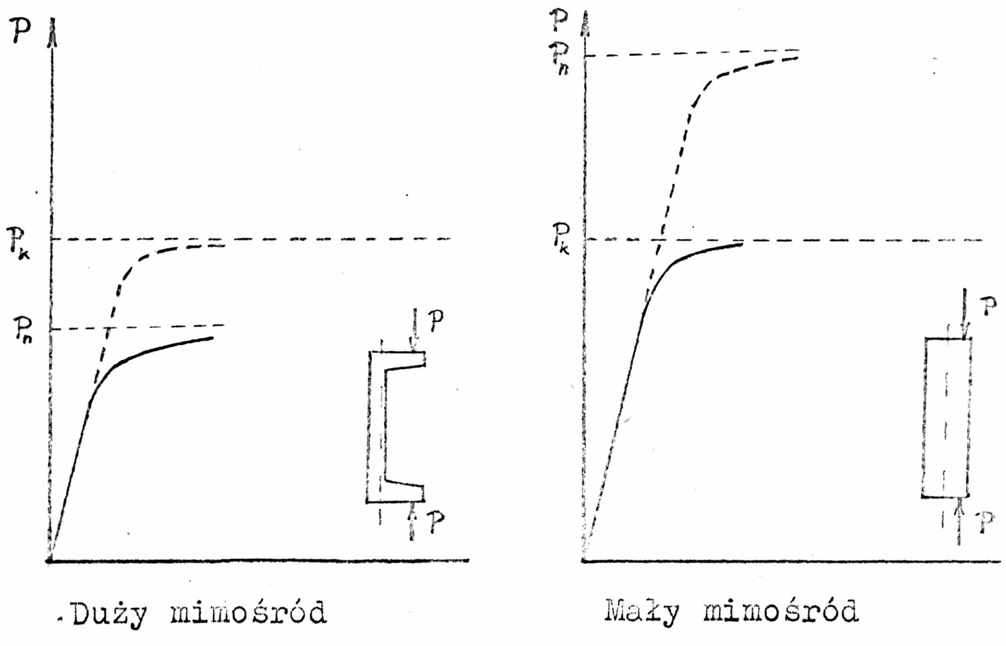
Rys. 2-9.

Zmieni się najwyżej ilość rys w belce oraz pewnej zmianie mogą ulec współczynniki r_1 i r_0 charakteryzujące sprężyste rozwieranie się rysy i tłumienie rysy.

2.4. Nośność smukłych słupów żelbetowych ściskanych mimośrodowo.

Praca nawiązuje do analizy teoretycznej przeprowadzonej przez K.Kiedroń [29] . Główne myśli zawarte w tej pracy można streścić następująco. Należy rozróżnić dwa pojęcia:

- zniszczenie słupa spowodowane warunkami wytrzymałościowymi materiału /betonu i stali/ - rys. 2-10a
- zniszczenie spowodowane wystąpieniem siły krytycznej powodującej wyboczenie słupa. - rys. 2-10b.



Rys. 2-10 a,b

Rozważmy w pierwszej kolejności smukły słup, w którym siła działa na małym mimośrodzie mieszczącym się na przykład w rdzeniu przekroju. W miarę wzrostu siły osiowej zmienia się mimośród działania tej siły ponieważ słup będzie się uginał. Zniszczenie zawsze wystąpi na skutek przekroczenia wytrzymałości betonu. Mogą tu jednak zachodzić dwa przypadki. Taki przypadek gdy siła osiowa osiągnie wartość , którą będziemy nazywali siłą krytyczną, charakteryzujący się tym, że zachwiana zostanie równowaga i może się pojawić szybki przyrost ugięć słupa nie usprawiedliwiony zwykłymi rozważaniami statycznymi. Zjawisko to będziemy nazywali wyboczeniem słupa.

W krępych słupach zniszczenie może nastąpić wcześniej, aniżeli siła osiowa osiągnie wartość siły krytycznej. W tym przypadku będziemy mówili, że mamy do czynienia z obciążeniem ograniczającym nośność słupa. Bez udziału siły krytycznej przekoroczona została wytrzymałość materiału.

W słupach, w których mimośród obciążenia jest duży, zazwyczaj zniszczenie następuje wskutek wyczerpania jego nośności wskutek wyginania się słupa, przyrostu mimośrodu i zniszczenia wytrzymałościowego materiału. Pojęcie siły krytycznej ma miejsce również w słupach mimośrodowo ściskanych. Porównajmy na przykład pracę [49]. Praca K.Kiedroń zajmuje, się określeniem siły krytycznej słupów w przypadku gdy w strefie rozciąganej betonu pojawiają się rysy. Model obliczeniowy jest przedstawiony równaniem :

$$v_{,\xi\xi\xi\xi} + \lambda^2 v_{,\xi\xi} = \sum_{i=1}^{n} r_i \delta_{,\xi\xi} (\xi - \xi_i) \quad ;$$

gdzie:

$$\lambda^2 = \frac{PL^2}{EJ} \quad ;$$

$$r_i = [v_{,\xi}]_{\xi_i^-}^{\xi_i^+} \quad .$$

Równanie to jest o współczynnikach dystrybucyjnych i rozwiązania poszukuje się w klasie funkcji uogólnionych. Obliczenia doprowadzone zostały do wyników liczbowych. Wykonano porównanie z wynikami doświadczalnymi innych autorów [40,41,43] a otrzymana zgodność wskazuje na przydatność tej metody. Uwzględniając przyjęte do obliczeń założenia uzyskano wyniki, które świadczyłyby, że zjawisko ma nieco inny charakter aniżeli się mu przypisuje w obowiązujących normach technicznych. Siła krytyczna rozumiana jako obciążenie, przy którym uzyskuje się niejednoznaczne rozwiązanie zadania nie zależy od deformacji początkowych. Nie zależy również od pełzania, które zwiększa wygięcie początkowe słupa. Wzór końcowy na siłę krytyczną wyraża się w bardzo prosty sposób

$$P_{kr} = 4,93 \frac{EJ}{l^2}$$

co stanowi ok 50% eulerowskiej siły krytycznej. Wzór stosowany w normach jest w ten sposób skonstruowany, jako gdyby siła krytyczna zależała od deformacji reologicznych słupa. Wzór normowy został wyprowadzony empirycznie i należałoby właściwie sprawdzić specjalnym doświadczeniem czy otrzymano rezultat taki jak u K. Kiedroń.

Słupy z małym mimośrodem niszczą się również pod obciążeniem siły krytycznej wyznaczonej ze wzoru K. Kiedroń. Słupy mimośrodowo ściskane niszczą się szybciej aniżeli siła osiowa osiągnie wartość krytyczną. W miarę obciążenia osiowego wygina się słup i wcześnie dochodzi do głosu wytrzymałościowe zniszczenie materiału.

Wyginanie się słupa zostało opisane prostą zależnością za pomocą współczynnika zwiększającego mimośród początkowy

$$e = e_o \cdot \eta \quad ;$$

gdzie:

e_o - mimośród początkowy

$$\eta = \frac{1}{1 - \frac{P}{P_{kr}}} \quad .$$

Według analizy przeprowadzonej przez K. Kiedroń można ten współczynnik obliczyć. Ma on budowę bardziej złożoną i zależy również od reologicznych deformacji słupa oraz ilości i rozmieszczenia rys w słupie. Współczynnik η podany w normie jest oszacowaniem zwiększonego mimośrodu z niedomiarem. Uściślenie metody obliczania słupów mimośrodowych powinno polegać na dokładniejszym obliczaniu współczynnika η.

Przedstawiona w tej pracy metoda może być uogólniona właśnie poprzez zastosowanie macierzy przeniesienia. Szczegółowe przedstawienie tej koncepcji zawarte jest w rozdziale 8 tej pracy.

2.5. Wykorzystanie macierzy przeniesienia.

Najbardziej rozpowszechnionymi sposobami stosowanymi do obliczeń konstrukcji prętowych są metody parametrów początkowych oraz elementów skończonych. Pewną odmianą metody elementów skończonych, dogodną do rozwiązywania konstrukcji jednowymiarowych ze względu na zwięzłość zapisu, jest sposób wykorzystujący tak zwaną macierz przeniesienia. S. Falk [10] zastosował ten sposób jako pierwszy do obliczania belek prostych, a także ram otwartych i zamkniętych. W połowie lat pięćdziesiątych metodę tę stosowali następnie do zagadnień w statyce budowli między innymi R. Kersten [16] i C. Petersen [33]. W kraju G. Rakowski [35] przedstawił wykorzystanie macierzy przeniesienia do statycznej i dynamicznej analizy prętów prostych i układów złożonych. Zeszyt zawiera oprócz wyprowadzenia macierzy przeniesienia, także analizę niektórych układów złożonych, oraz omówienie zagadnień programowania, ze szczególnym zwróceniem uwagi na programy do analizy dynamicznej GIER-Algol.

O. Mateja przedstawił w swoich publikacjach /m.in. [1,24,25]/ wiele praktycznych sposobów wykorzystania macierzy przeniesienia, jak między innymi do analizy dynamicznej pręta ściskanego zanurzonego w ośrodku sprężystym, do analizy skończonych ugięć sprężystych pręta, do numerycznego całkowania równania ruchu.
W niniejszej pracy rozszerzono zastosowanie macierzy przeniesienia na przypadki konstrukcji niejednorodnych.

Przegląd ten nie wyczerpuje oczywiście całokształtu zagadnienia związanego z analizą ustrojów prętowych, zwraca jednak uwagę na te problemy, które staną się przedmiotem rozważań w niniejszej pracy.

3. Koncepcja obliczeń

3.1. Belka obciążona statycznie

3.1.1. Rozwiązanie równania różniczkowego.

Obliczenia statyczne belki wykonano wykorzystując macierz przeniesienia. Na wstępie podano założenia przyjmowane do obliczeń. Zadanie statyczne jest redukowane do zagadnienia jednowymiarowego. Linia odniesienia pokrywa się z linią środków ciężkości przekrojów belki, jeżeli belka ma stały moment bezwładności. W przypadku belki o zmiennej sztywności linia utworzona przez miejsce geometrycznych środków belki nie jest prosta. W naszych założeniach utrzymujemy linię prostą jako wspólną współrzędną odniesienia. Belkę o zmiennym momencie bezwładności dzielimy na odcinki wprowadzając w każdym przedziale stałą zastępczą sztywność. Belkę o zmiennym momencie bezwładności zastępuje się belką o skokowo zmiennym momencie bezwładności. Równanie różniczkowe osi odkształconej belki ma następującą postać;

$$\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left[EJ(\xi)\,\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right] = pl^3 \quad ; \qquad 3\text{-}1$$

$v = \frac{w}{l}$ - bezwymiarowe przemieszczenie ;

$\xi = \frac{x}{l}$ - bezwymiarowa współrzędna.

W belce o skokowo zmiennej sztywności równanie przyjmuje w przedziale obliczeniowym następującą postać :

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = \frac{pl^3}{EJ_{zast.}} \qquad 3\text{-}2$$

EI_{zast} - sztywność zastępcza

Rozwiązanie tego równania różniczkowego ma następującą postać:

$$v(\xi) = a + b\xi + c\xi^2 + d\xi^3 + \bar{v}(\xi) \qquad 3\text{-}3$$

gdzie:

a,b,c,d - dowolne stałe zależne od warunków brzegowych

$\bar{v}(\xi)$ - dowolna całka szczególna równania różniczkowego spełniająca zerowe warunki początkowe.

Otrzymane rozwiązanie można przedstawić również w innej postaci za pomocą parametrów początkowych, na przykład:

$$v(\xi) = \frac{1}{l}\delta_o + \xi\varphi_o - \frac{\xi^2 l}{2EJ}M_o - \frac{\xi^3 l^2}{6EJ}T_o + \bar{v}(\xi) \qquad 3\text{-}4$$

Podstawiając $\xi = 0$ otrzymamy:

$$v(0) = \delta_o \quad ; \qquad - EJv_{,\xi\xi}(0) = M_o \quad ; \qquad \text{3-5}$$
$$v_{,\xi}(0) = \varphi_o \quad ; \qquad - EJv_{,\xi\xi\xi}(0) = T_o \quad .$$

Wprowadzono dalej następujące oznaczenia:

$$\bar{v}(\xi) = \bar{\delta}(\xi) \quad ; \qquad - EJ\bar{v}_{,\xi\xi}(\xi) = \bar{M}(\xi); \qquad \text{3-6}$$
$$\bar{v}_{,\xi}(\xi) = \bar{\varphi}(\xi) \quad ; \qquad - EJ\bar{v}_{,\xi\xi\xi}(\xi) = \bar{T}(\xi).$$

Wówczas rozwiązanie ogólne, wraz z pochodnymi wykorzystujące parametry początkowe, przyjmuje postać:

$$
\begin{array}{lcccccccccc}
v(\xi) = & \frac{1}{1}\delta_o & + & \xi\varphi_o & - & \frac{\xi^2 l}{2EJ} M_o & - & \frac{\xi^3 l^2}{6EJ} T_o & + & \bar{\delta}(\xi) & \\
v_{,\xi}(\xi) = & & & \varphi_o & - & \frac{1}{EJ} M_o & - & \frac{\xi^2 l^2}{2EJ} T_o & + & \bar{\varphi}(\xi) & \\
M(\xi) = & & & & & 1 \cdot M_o & + & \xi l^2 T_o & + & \bar{M}(\xi) & \text{3-7} \\
T(\xi) = & & & & & & & l^2 T_o & + & \bar{T}(\xi) & \\
\hline
q(\xi) = & & & & & & & & & q(\xi) &
\end{array}
$$

Tę tablicę można przedstawić krócej w postaci macierzowej

$$\{u(\xi)\} = [F(\xi)]\{u_o\} + \{\bar{u}(\xi)\} \quad ; \qquad \text{3-8}$$

gdzie:

$$\{u(\xi)\} = \{v(\xi) \; ; \; v_{,\xi}(\xi) \; ; \; M(\xi) \; ; \; T(\xi) \; ; \; 1\}^T$$
$$\{u_o\} = \{\delta_o \; ; \; \varphi_o \; ; \; M_o \; ; \; T_o \; ; \; 1\}^T$$
$$\{\bar{u}\} = \{\bar{\delta}(\xi) ; \; \bar{\varphi}(\xi) \; ; \; \bar{M}(\xi) ; \; \bar{T}(\xi) \; ; \; 1\}^T$$

natomiast

$$
F = \left[\begin{array}{cccc|c}
\frac{1}{1} & \xi & -\frac{\xi^2 l}{2EJ} & -\xi^3 l^2 & \bar{\delta}(\xi) \\
0 & 1 & -\frac{\xi l}{EJ} & -\frac{\xi^2 l^2}{2EJ} & \bar{\varphi}(\xi) \\
0 & 0 & 1 & \xi l^2 & \bar{M}(\xi) \\
0 & 0 & 0 & l^2 & \bar{T}(\xi) \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right] .
$$

Przedstawione macierzowo wyrażenie $\{u(\xi)\}$ przedstawia ugięcie, kąt obrotu, moment zginający, siłę poprzeczną w dowolnym miejscu na długości belki, jako zależne od parametrów początkowych.

W zadaniach statycznych znane są na początku belki zazwyczaj tylko dwa warunki. Następne dwa warunki pozostają niewiadomymi. W tej metodzie wygodnie jest pozostawić niewiadomymi warunki na początku belki.

3.1.2. Macierz przeniesienia.

Wykorzystując macierzowe przedstawienie deformacji (3-8) można wyrazić wartości $\{u_1\}$:

$$\{u_1\} = \{\delta_1, \varphi_1, M_1, T_1\} ;$$

oznaczające deformacje i siły na końcu belki za pomocą deformacji i sił na początku belki. Wystarczy w równaniu 3-8 podstawić $\xi = 1$. Otrzymamy w postaci macierzowej

$$\{u_1\} = [F]\{u_o\} + \{\bar{u}\} ; \qquad 3\text{-}9$$

gdzie:

$$F = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & \frac{l}{2EJ} & -\frac{l^2}{6EJ} & \bar{\delta} \\ 0 & 1 & -\frac{l}{EJ} & \frac{l^2}{2EJ} & \bar{\varphi} \\ 0 & 0 & 1 & l^2 & \bar{M} \\ 0 & 0 & 0 & l^2 & \bar{T} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] .$$

Macierz $[F]$ jest nazwana macierzą przeniesienia dla przęsła.

3.1.3. Macierz przeniesienia w miejscu łączenia prętów.

W miejscu łączenia pręta musi być zachowany warunek ciągłości. Oznacza to, że ugięcia, kąty obrotu, momenty i siły tnące w miejscach łączenia muszą być sobie równe. Warunek ciągłości można wyrazić również w postaci macierzowej

$$\{u_1\}^n = \{u_o\}^{n+1} . \qquad 3\text{-}10$$

Ten warunek można przedstawić ogólniej w postaci iloczynu

$$\{u_o\}^{n+1} = [H]\{u_1\}^n ; \qquad 3\text{-}11$$

i wtedy macierz $[H]$ jest nazywana macierzą ciągłości, która ma postać:

$$H = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad 3\text{-}12$$

Taka postać tej macierzy zapewnia ciągłość przejścia z jednego odcinka na drugi.

3.1.4. Macierz przeniesienia na podporze.

Przy przejściu przez podporę musi być zachowana ciągłość przemieszczania, kąta obrotu, momentu, natomiast nie ma ciągłości siły tnącej. Jeżeli przez ΔQ oznaczamy reakcję prostopadłą do osi belki wówczas

$$\{u_0\}^{n+1} = [H]\{u_1\}^{n} \quad ; \qquad 3\text{-}13$$

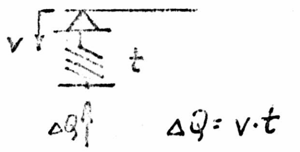
gdzie:

$$H = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} V_0 & \varphi_0 & M_0 & T_0 & 1 & \Delta Q \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|c|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \end{array} ;$$

macierz ta jest rozszerzona o kolumnę wyrazów wolnych.

W wierszu opisującym siłę tnącą wprowadzono reakcję, która może być nawet niewiadomą w zadaniu. Gdyby była to podpora sprężysta, w której przemieszczenie jest proporcjonalne do reakcji podporowej, wówczas macierz przeniesienia przyjmie postać:

$$H = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad 3\text{-}14$$



t - współczynnik sprężynowania podpory

W przypadku wystąpienia podpory sprężystej na przesunięcie i obrót macierz ciągłości ma postać:

$$H = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m & 1 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] ; \qquad 3\text{-}15$$

t,m - współczynniki sprężynowania podpory na obrót i na przesunięcie.

3.1.5. Macierz przeniesienia dla konstrukcji.

Kolejne przedstawianie warunków na początku belki z uwzględnieniem również podpór uzyskuje się przez kolejne mnożenie macierzy:

$$\{u_1\}^n = [F]^n [H]^{n-1} \ldots\ldots [H]^{1,2} [F]^1 \{u_0\}^1 ; \qquad 3\text{-}16$$

n - ilość odcinków ;

$[F]^i$ - macierz przeniesienia dla i-tego odcinka ;

$[H]^{i-1,i}$ - macierz ciągłości pomiędzy odcinkami i-1, i .

Można to wyrażenie przedstawić krócej :

$$\{u_1\}^n = [G] \{u_0\}^1 ; \qquad 3\text{-}17$$

$[G]$ - macierz przeniesienia dla konstrukcji .

3.1.6. Wyznaczenie niewiadomych.

Rozważamy dwa przypadki. Pierwszy przypadek dotyczy takiej belki, która jest podzielona na odcinki z różnych powodów /np. z powodu zmiennej sztywności/ ale pozostaje belką jednoprzęsłową. W wyrażeniu /3-17/ niewiadomymi w zadaniu są te dwie wartości, których nie można było określić na początku belki. Znane natomiast są dwa warunki na końcu belki, które służą do wyznaczenia niewiadomych.

W drugim przypadku, gdy belka jest wieloprzęsłowa wówczas dochodzą jeszcze dodatkowe niewiadome, którymi są reakcje podporowe. Warunki na końcu belki nie wystarczają do wyznaczenia niewiadomych. Należy wówczas postawić również warunki dodatkowe, charakteryzujące podpory pośrednie takie na przykład, jak niepodatność podpory w przypadku podpory stałej lub zerowanie się momentu w miejscu przegubu.

W przypadku podpory sprężystej wykorzystuje się znajomość cech fizycznych podpory. Na przykład :

$$v_1^{\,n} = v_0^{\,n+1} = t \cdot V^{n,n+1} ; \qquad 3\text{-}18$$

$$v_{1,\xi}^{\,n} = v_{0,\xi}^{\,n+1} = m\, M^{n,n+1} ;$$

t, m - współczynniki sprężynowania podpór.

3.1.7. Podział belki na odcinki.

Wykorzystując funkcje uogólnione, do przedstawienia całki szczególnej zadania, jak również przedstawiając za pomocą funkcji uogólnionych efekty zarysowania belki będzie pokazane, że podział belki na odcinki może być wyłącznie wynikiem podziału belki na odcinki o zmiennym momencie bezwładności, lub punktowym przyłożeniem niewiadomego przemieszczenia /skok kąta obrotu w przegubie/ czy siły /reakcja podpory/.

4. MACIERZ PRZENIESIENIA BELKI Z RYSĄ.

Celem rozdziału jest rozszerzenie stosowalności macierzy przeniesienia na przypadki belek zarysowanych. Jest to możliwe przez wprowadzenie do równania różniczkowego osi odkształconej belki efektów związanych z zarysowaniem.
Można to uczynić albo przez wprowadzenie zastępczej sztywności albo przez wprowadzenie rysy jako defektu lokalnego. W pracy przyjęto drugi wariant. Równanie różniczkowe belki obciążonej statycznie przyjęto za A. Borczem [7] w postaci:

$$\frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{EJ}{l}\frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2}\right) = p(\xi) + \sum_i r_i \delta_{\xi\xi}\left(\xi - \bar{\xi}_i\right); \qquad 4\text{-}1$$

$\bar{\xi}_i$ - współrzędna występowania rysy

Rozwiązanie tego równania składa się z części opisującej ugięcia sprężyste belki i części opisującej defekt pochodzący od rysy. We współczynniku r_i mogą być uwzględnione deformacje trwałe, reologiczne i sprężyste. Jeżeli odkształcenia trwałe i reologiczne rozpatrywałoby się łącznie, a sprężyste uzależniałoby się od momentu zginającego działającego w zarysowanym przekroju wówczas deformacje w tym przekroju można opisać równaniem:

$$r = -r_o - r_1 M\left(\bar{\xi}_i\right); \qquad 4\text{-}2$$

r_o - deformacje trwałe w rysie;
$r_1 M(\bar{\xi}_i)$ - deformacje sprężyste w rysie.

Moment zginający jest wielkością ciągłą. Jeżeli jednak zostanie on wyrażony jako iloczyn krzywizny i sztywności wówczas wyrażenie traci sens, gdyż krzywizna jest w tym miejscu nieoznaczona. Krzywiznę należy więc wyrazić za pomocą jej jednostronnej granicy

$$r = -r_o + r_1 v_{,\xi\xi}\left(\bar{\xi}_i\right) \qquad 4\text{-}3$$

Całkę ogólną równania różniczkowego otrzymuje się w postaci:

$$v(\xi) = \frac{1}{l}\delta_o + \xi\varphi_o - \frac{\xi^2 l}{2EJ}M_o - \frac{\xi^3 l^2}{6EJ}T_o + \bar{v}(\xi) + \sum_i r_i\left(\xi - \bar{\xi}_i\right)\cdot h\left(\xi - \bar{\xi}_i\right) \qquad 4\text{-}4$$

Po wyznaczeniu wyrażenia na krzywiznę $v_{,\xi\xi}(\xi)$

$$v_{,\xi\xi}(\xi) = -\frac{l}{EJ}\cdot M_o - \frac{\xi l^2}{EJ}T_o + \bar{v}_{,\xi\xi}(\xi) + \sum_i\left\{\left[r_{oi} + r_{1i}v_{,\xi\xi}(\bar{\xi}_i -)\right]\right\}\delta\left(\xi - \bar{\xi}_i\right) \qquad 4\text{-}5$$

i podstawieniu do niego współrzędnych rysy

$$v_{,\xi\xi}(\xi_i^-) = -\frac{1}{EJ} M_o - \frac{\xi_i l^2}{EJ} T_o + \bar{v}_{,\xi\xi}(\xi_i^-) \; ; \qquad 4\text{-}6$$

a następne podstawieniu wyrażenia 4-6 do równania 4-4 i pogrupowaniu wyrazów przy odpowiednich parametrach początkowych otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned} v(\xi) = {} & \frac{1}{l}\,\delta_o + \xi\varphi_o + \left[-\frac{\xi^2 l}{2EJ} - \sum_i r_{1i}\frac{l}{EJ}(\xi-\xi_i)\cdot h(\xi-\xi_i)\right] M_o + \\ & + \left[-\frac{\xi^3 l^2}{6EJ} - \sum_i r_{1i}\,\xi_i\,\frac{l^2}{EJ}(\xi-\xi_i)\cdot h(\xi-\xi_i)\right] T_o + \\ & + \left[\bar{v}(\xi) + \sum_i r_{1i}\bar{v}_{,\xi\xi}(\xi_i)(\xi-\xi_i)\cdot h(\xi-\xi_i) + \sum_i r_{oi}(\xi-\xi_i)\cdot h(\xi-\xi_i)\right] \end{aligned} \qquad 4\text{-}7$$

Różniczkując otrzymane przemieszczenie względem ξ otrzymuje się wektor $\{u(\xi)\}$. Rozwiązanie to można zapisać także w postaci macierzowej jako sumę rozwiązania modelu konstrukcji jednorodnej i zarysowanej:

$$\{u(\xi)\} = \left[\begin{array}{cc|c|c||c} \frac{1}{l} & \xi & -\frac{\xi^2}{2}\cdot\frac{l}{EJ} & -\frac{\xi^3}{6}\cdot\frac{l^2}{EJ} & \bar{\delta}_o(\xi) \\ 0 & 1 & -\xi\frac{l}{EJ} & -\frac{\xi^2}{2}\cdot\frac{l^2}{EJ} & \bar{\varphi}_o(\xi) \\ 0 & 0 & +1 & +\xi l^2 & \bar{M}(\xi) \\ 0 & 0 & 0 & l^2 & \bar{T}(\xi) \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] +$$

$$+ \left[\begin{array}{cc|c|c||c} 0 & 0 & -\sum_i r_{1i}(\xi-\xi_i)h(\xi-\xi_i) & -\sum_i r_{1i}\xi_i(\xi-\xi_i)h(\xi-\xi_i) & \sum_i r_{oi}(\xi-\xi_i)h(\xi-\xi_i)+\sum_i r_{1i}v_{o,\xi\xi}(\xi_i)h(\xi-\xi_i) \\ 0 & 0 & -\sum_i r_{1i}h(\xi-\xi_i) & -\sum_i r_{1i}\xi_i h(\xi-\xi_i) & \sum_i r_{oi}h(\xi-\xi_i)+\sum_i r_{1i}v_{o,\xi\xi}(\xi_i)h(\xi-\xi_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad 4\text{-}8$$

$$\{u(\xi)\} = \left[[F(\xi)] + [R(\xi)]\right]\cdot\{u_o\} = [C(\xi)]\cdot\{u_o\} \; ; \qquad 4\text{-}9$$

$[C(\xi)]$ - macierz dla konstrukcji zarysowanych ;

$[F(\xi)]$ - macierz dla konstrukcji bez rys ;

$[R(\xi)]$ - macierz dla konstrukcji - część pochodząca od zarysowania.

Podstawiając ξ =1 otrzymuje się, podobnie jak w przypadku belki jednorodnej, macierz przeniesienia [C]. Macierz [F] dla przęsła konstrukcji jednorodnej jest identyczna jak w p. 3.1.2. /3-9/.

Macierz [R] wynikająca z zarysowania przyjmuje wówczas postać:

$$R = \left[\begin{array}{c|c|c|c|c} 0 & 0 & -\sum\limits_i r_{1i}(1-\zeta_i) & -\sum\limits_i r_{1i}\zeta_i(1-\zeta_i) & \sum\limits_i -r_{oi}(1-\zeta_i)+\sum\limits_i r_{1i}\bar{v}_{,\zeta\zeta}(\zeta_i) \\ 0 & 0 & -\sum\limits_i r_{1i} & -\sum\limits_i r_{1i}\zeta_i & \sum\limits_i -r_{oi} + \sum\limits_i r_{1i}v_{,\zeta\zeta}(\zeta_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad 4\text{-}12$$

W tak sformułowanym zadaniu, punkty nieciągłości, jakimi są rysy, nie muszą być punktami podziału. Funkcja dystrybucyjna opisująca linię ugięcia wewnątrz przedziału pozwala na wyznaczenie wszystkich wielkości statycznych z uwzględnieniem nieciągłości spowodowanych dyslokacją kątową.

Macierz przeniesienia na podporze musi spełniać warunki ciągłości przemieszczeń i sił uogólnionych po lewej i prawej stronie podpory. Przy założeniu, że rysy nie występują dokładnie w teoretycznym punkcie podparcie, lecz po jego lewej lub prawej stronie, macierz ciągłości buduje się dokładnie tak jak dla belki jednorodnej /por. 3.1.3./.

Jeżeli belka podzielona jest na "n" przedziałów wyznaczenie warunków na końcu belki za pomocą warunków na jej początku uzyskuje się przez kolejne mnożenie macierzy

$$\{u_1\}^n = [C]^n [H]^{n-1,n} \ldots [H]^{1,2} [C]^1 \{u_o\}^1 \qquad 4\text{-}13$$

Wyznaczanie niewiadomych jak i podział belki na odcinki wykonuje się identycznie jak w przypadku belki jednorodnej /por. 3.2.6 ; 3.2.7/.

5. MODEL KĄTA ROZWARCIA RYSY

5.1. Współczynnik charakteryzujący odkształcenia sprężyste - r_1.

Rozwieranie się rysy składa się z dwu części; resztkowej ujawniającej się po odciążeniu oraz sprężystej, proporcjonalnej do momentu w przekroju zarysowanym

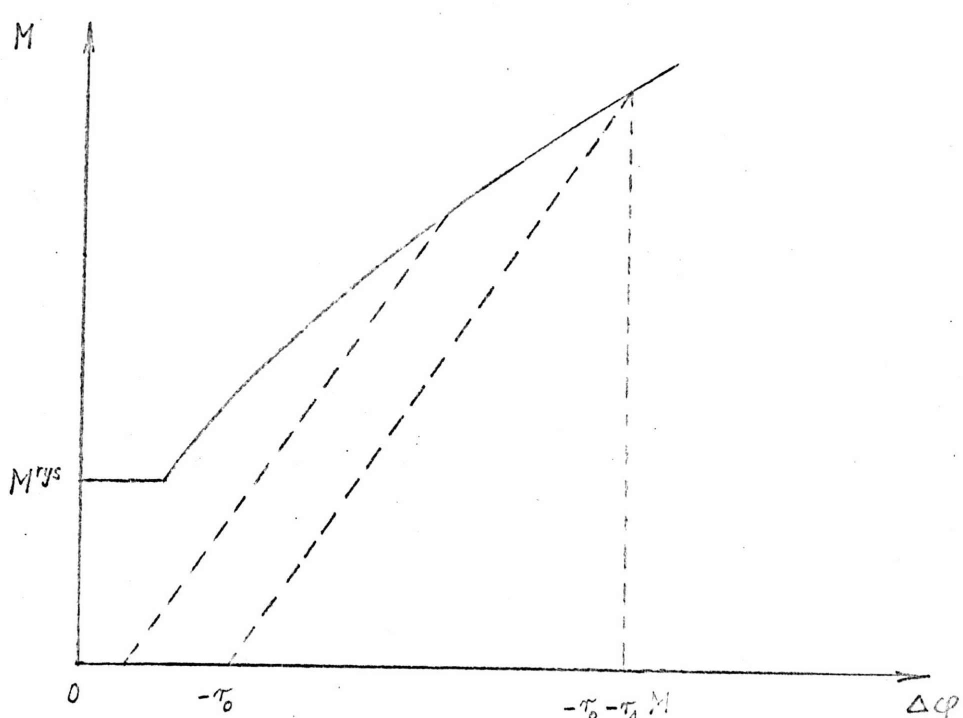
$$\Delta\varphi = -r_o - r_1^M \cdot M(\xi_i) \qquad 5\text{-}1$$

r_o - wartość kąta rozwarcia rysy reprezentująca odkształcenia trwałe,

r_1^M - współczynnik proporcjonalności pomiędzy sprężystą częścią kąta rozwarcia rysy, a momantem zginającym w miejscu zarysowania.

$M(\xi_i)$ - moment w miejscu zarysowania.

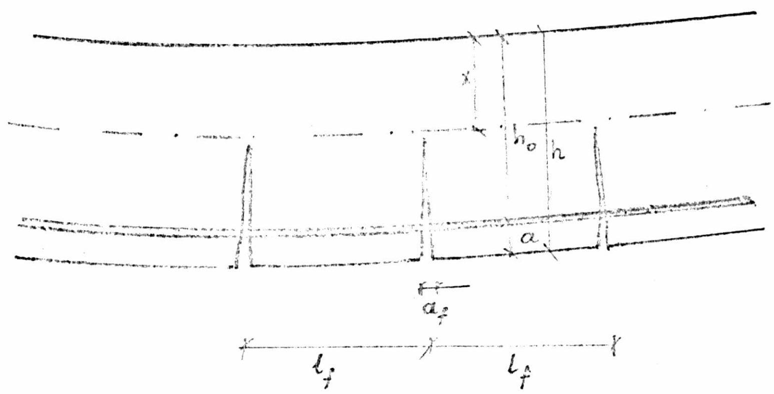
Założenie to zaczerpnięte zostało z pracy A. Borcza [7], nie zostało ono jednak poparte ścisłymi badaniami doświadczalnymi przeprowadzonymi na modelach belek żelbetowych. Poglądowe wyniki takich badań przedstawiono na rys. 5-1 w formie zależności $M \leftrightarrow \Delta\varphi$



Rys. 5-1.

Po osiągnięciu momentu rysującego następuje skokowy przyrost kąta obrotu w miejscu pęknięcia. Dalszy wzrost momentu powoduje prawie liniowy przyrost kąta obrotu. Odciążenie natomiast odbywa się po liniach prawie równoległych. Pełny przebieg wykresu wymaga jednak potwierdzenia doświadczalnego.

Wyprowadzenie wzoru do wyznaczania wartości współczynnika r_1 można pokazać następująco. Kąt rozwarcia rysy /rys. 5-2/ jest w przybliżeniu stosunkowi szerokości rozwarcia rysy do jej głębokości:



Rys. 5-2.

$$\Delta\varphi = \frac{a_f}{h-x-a} \quad ; \qquad 5\text{-}2$$

a_f - szerokość rozwarcia rysy na poziomie zbrojenia rozciąganego ;
a - odległość środka ciężkości zbrojenia F_a od krawędzi rozciąganej.

Jeżeli odstęp pomiędzy rysami przyjmiemy równy l_f wówczas:

$$a_f = \frac{\sigma_a^{śr}}{E_a} \, l_f \quad ; \qquad 5\text{-}3$$

$\sigma_a^{śr}$ - średnia wartość naprężenia w zbrojeniu na odcinku między rysami.

$$\sigma_a^{śr} = \psi_a \cdot \sigma_a^{II} \quad ; \qquad 5\text{-}4$$

gdzie: σ_a^{II} - naprężenie w zbrojeniu w fazie II w przekroju rozważanej rysy;

ψ_a - współczynnik wyrażający stosunek średnich naprężeń w zbrojeniu do naprężeń w zbrojeniu w przekroju przez rysę.

Przyjęto założenie o hipotezie płaskich przekrojów i naprężeń jak dla fazy II. Naprężenia w stali wynikają z warunków równowagi w tak przyjętym modelu.

$$M = \sigma_a^{II} F_a h \left(1 - \frac{\xi^{II}}{3} - \frac{a}{h}\right); \qquad 5\text{-}5$$

ξ^{II} - wysokość strefy ściskanej przekroju zarysowanego.
Wykorzystując warunek 5 - 5 oraz podstawiając do 5-2 wyrażenia 5-3 i 5-4 otrzymuje się wzór na sprężyste rozwarcie rysy

$$\Delta\varphi^{spr} = \frac{\psi_a l_f}{E_a F_a h^2 \left(1 - \frac{\xi^{II}}{3} - \frac{a}{h}\right)\left(1 - \xi^{II} - \frac{a}{h}\right)} M . \qquad 5\text{-}6$$

We wzorze tym można przedstawić:

$$r_1 = \frac{\psi_a l_f}{E_a F_a h^2 \cdot \left(1 - \frac{\xi^{II}}{3} - \frac{a}{h}\right)\left(1 - \xi^{II} - \frac{a}{h}\right)} = \psi_a r_1^* \qquad 5\text{-}7$$

Wzory te zawierają współczynnik ψ_a wyrażający stosunek średnich naprężeń w zbrojeniu do naprężeń w przekroju zarysowanym. Jest to wielkość wyznaczona na podstawie wzorów doświadczalnych i zależy między innymi od stopnia naruszenia współpracy betonu i stali. Najbardziej rozpowszechniła się postać wprowadzona przez Niemirowskiego [30]:

$$\psi_a = 1{,}3 - s \frac{M_r}{M} ; \qquad 5\text{-}8$$

M_r - moment rysujący ;
M - moment, do którego maksymalnie obciążono belkę w przekroju zarysowanym;
s - współczynnik zależny od czasu trwania obciążenia. i od rodzaju prętów zbrojeniowych.

Polska norma żelbetowa [46] także zaleca wykorzystywać ogólną postać tego wzoru do wyznaczania szerokości rozwarcia rys i ugięć zginanych i rozciąganych osiowo elementów 3 kategorii rysoodporności, wprowadzając do składników wzoru zmienne współczynniki liczbowe. Przeprowadzone przez niektórych eksperymentatorów badania podstawowe /m.in. Kozłowski - [18] wykazują, że współczynnik ψ_a przyjmują wartości niższe od wyliczonych wg wzoru 5-8. Dysponując badaniami doświadczalnymi C. Bacha [3] przeprowadzono analizę wartości tego współczynnika w zależności od poziomu obciążenia.

5.2. Przykład.

Wykres charakteryzujący zależność $M \leftrightarrow \Delta\varphi$ powinien być sprawdzony doświadczalnie. Jak dotychczas nie ma takiej eksperymentalnej weryfikacji. Zazwyczaj mierzy się ugięcia belki. W tym przypadku można znaleźć wiele dokładnie wykonanych badań doświadczalnych. W dalszej części pracy będą potrzebne wartości r_0 i r_1 sprawdzone doświadczalnie. Będą one wyznaczone pośrednio na podstawie badań ugięć belki. Wzór opisujący ugięcie ma następującą postać /wzór 4-7, w którym pozostawiono człony opisujące sprężysty przyrost ugięć/:

$$v(\xi) = \left[-\sum_n r_{1n} \frac{1}{EJ}(\xi - \xi_n) h(\xi - \xi_n)\right] M_0 + \left[-\sum_n r_{1n} \xi_n \frac{l^2}{EJ}(\xi - \xi_n)\right] T_0 + \\ + \sum_n r_{1n} \bar{v}_{,\xi\xi}(\xi_n)(\xi - \xi_n) h(\xi - \xi_n) \quad ; \qquad 5\text{-}9$$

n - ilość rys .

Współczynnik r_1 będzie wyznaczony w taki sposób aby uzyskać zgodność rozwiązania analitycznego z doświadczeniem. Posłużono się badaniami C. Bacha [3]. W doświadczeniu zmierzono ugięcia w 9 punktach. Współczynniki r_1 należy natomiast wyznaczyć w 21 miejscach zarysowania. Ilość informacji jest mniejsza od ilości niewiadomych. Wartości r_1 wyznaczono w przybliżeniu z warunku najmniejszego odchylenia kwadratowego

$$J = \sum_i \left(v_{i\,spr}^{\,dośw} - v_{i\,spr}^{\,teor}\right)^2 \quad ; \qquad 5\text{-}10$$

$v_{i\,spr}^{dośw}$ - pomierzona wartość sprężystego ugięcia w i-tym punkcie ;

$v_{i\,spr}^{teor}$ - ugięcie sprężyste wyznaczone analitycznie w miejscu pomiaru deformacji.

$$\frac{\partial J}{\partial r_{1n}} = 0 \quad ; \qquad 5\text{-}11$$

n - ilość rys.

Korzystając z 5-11 otrzymamy zgodną ilość niewiadomych i równań. Przeprowadzona w rozdziale 6.2 analiza współczynnika r_0 wykazała, że przy nieodbiegających od siebie zbytnio wartościach momentów zginających, nie różnią się także wiele uśrednione wartości współczynników. Ponieważ można przyjąć, że stosunek deformacji trwałych do sprężystych jest w przedziale użytkowym prawie stały /zostanie to pokazane w rozdziale 5.4. /, dlatego wygodnie jest do obliczeń praktycznych wprowadzić uproszczenie:

$$r_{11} = r_{12} = \dots = r_{1i} .$$

Teraz zadanie sprowadza się do rozwiązania jednego równania z jedną niewiadomą.

Otrzymane w wyniku obliczeń numerycznych zależności pomiędzy współczynnikiem r_1 a stosunkiem $M{:}M_{niszcz}$ przedstawiono w tabeli 5-1.

Na podstawie wzorów 5-7 i 5-9 można wyznaczyć wprost wartości współczynnika ψ_a

$$\psi_a = \frac{r_1}{r_1^*} . \qquad 5\text{-}12$$

Dla analizowanej belki

$l_f = 0{,}16$ m	$\xi^{II} = 0{,}3852$
$h = 0{,}40$ m	$E_a = 210$ MPa
$a{:}h = 0{,}1175$	$F_a = 0{,}002512\ m^2$
$I_{bi} = 2{,}35 \cdot 10^{-3} m^4$	$E_b = 32854$ MPa

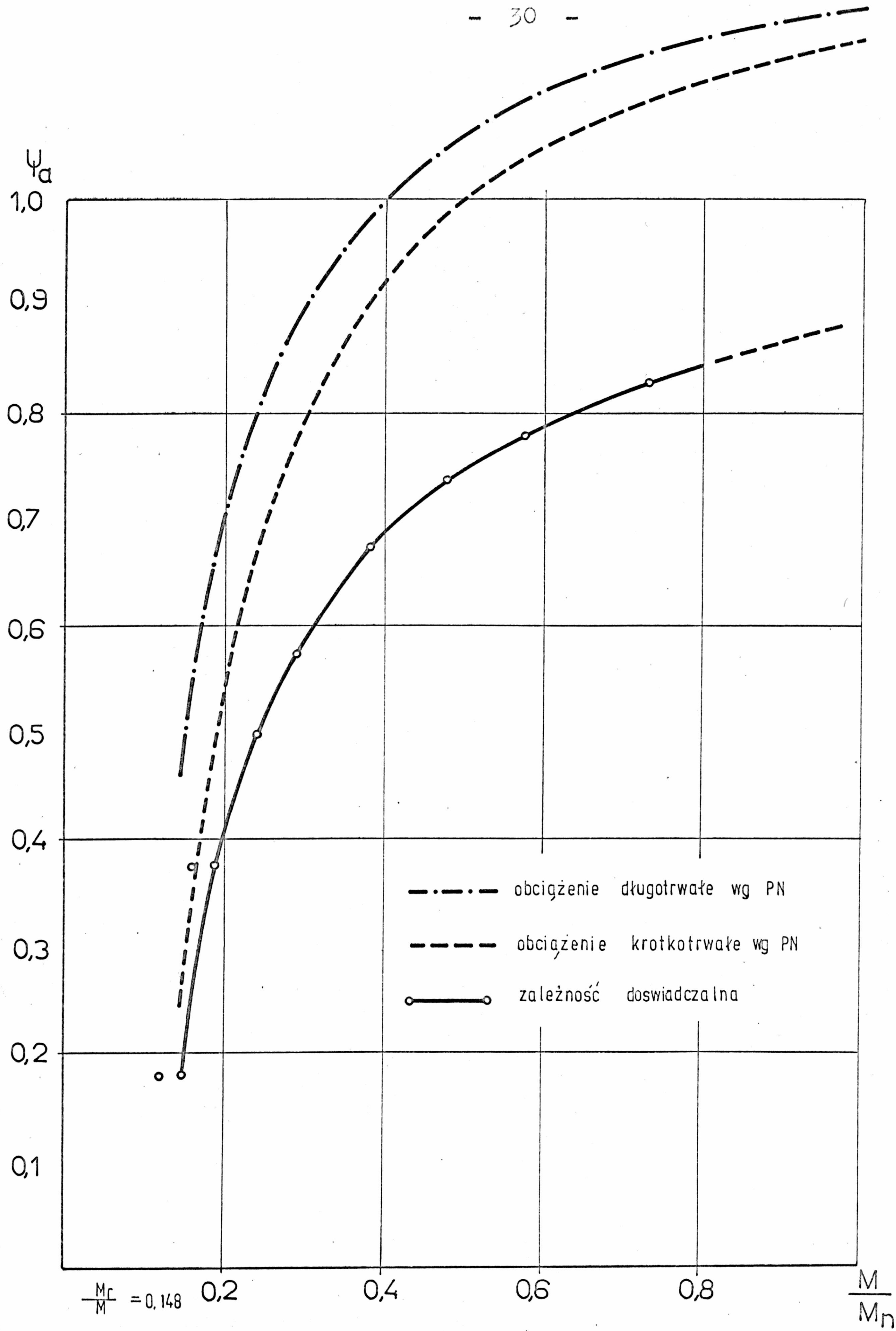
Stąd ψ_a wynosi dla tej konkretnej belki:

$$\psi_a = 2{,}357\ r_1 ,$$

Tabela 5-1.

$\frac{M}{M_n}$	0,15	0,19	0,24	0,29	0,38	0,48	0,58	0,73
r_1 [1:Nm]	0,076	0,162	0,208	0,245	0,286	0,313	0,331	0,353
ψ_a	0,180	0,383	0,491	0,577	0,675	0,737	0,779	0,832

Współczynnik ψ_a, jako funkcje $M{:}M_{niszcz}$, porównano z wielkością normową. Relację tą przedstawiono graficznie /rys. 5-3/. Zależność doświadczalną otrzymano na podstawie badań podczas obciążenia krótkotrwałego. Z wykresu wynika, że w początkowej fazie obciążenia uzyskuje się dobrą zgodność z normą [46]. Począwszy od wartości $M{:}M_{niszcz} \cong 0{,}3$ można zaobserwować rosnącą rozbieżność pomiędzy wynikami eksperymentu, a obliczeniami normowymi.



ψ_a
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
obciążenie długotrwałe wg PN
obciążenie krotkotrwałe wg PN
zależność doswiadczalna
$\frac{M_r}{M} = 0,148$
0,2
0,4
0,6
0,8
$\frac{M}{M_n}$

Rys. 5 - 3

5.3. Współczynnik r_o charakteryzujący odkształcenia trwałe.

Przyjęty do analizy model zakłada, że odkształcenia rezydualne powstają na skutek ugniotu betonu w strefie ściskanej oraz z powodu wyciągnięcia z betonu stali rozciąganej, deformacji przekroju w otoczeniu pręta, oraz niemożności powtórnego zamknięcia się przekroju.

Celem niniejszych obliczeń jest wyznaczenie współczynnika r_o, który charakteryzuje deformacje resztkowe w miejscu rysy. W badaniach Bacha [3], które posłużyły do rozważań w niniejszym przykładzie, ugięcia mierzone były w 9 punktach rozłożonych równomiernie na długości belki. Brak było natomiast wyników pomiaru w punkcie zarysowania. Wyznaczenie współczynników r_{oi} może być wyliczone w sposób pośredni przez dobranie w równaniu linii ugięcia takich wartości współczynnika, aby ugięcia wyliczone teoretycznie i otrzymane doświadczalnie pokrywały się. Równanie opisujące ugięcie resztkowe wynika ze wzoru 4-7:

$$v(\xi) = -\sum_n r_{on} (\xi - \zeta_n) \cdot h(\xi - \zeta_n) . \qquad 5\text{-}13$$

Do wyznaczenia wartości r_{oi} wykorzystano ugięcia trwałe w 9 punktach belki, analizowano natomiast stan, w którym belka miała 21 rys. W równaniu 5-13 występuje zatem 21 niewiadomych r_{on} /n=1, 21/, natomiast ilość równań możliwych do wykorzystania wynosi 9. Otrzymany w ten sposób układ równań jest nieoznaczony. Współczynniki r_{on} dobrane są także i w tym przypadku z warunku najmniejszego odchylenia kwadratowego:

$$J = \sum_i \left(v_{ires}^{dośw} - v_{ires}^{teor} \right)^2 \qquad i = 1 \dots 9 ; \qquad 5\text{-}14$$

$$\frac{\partial J}{\partial r_{on}} = 0 ;$$

n - ilość rys .

Wyniki uzyskane z rozwiązania przedstawiono graficznie na rys. 5-4. Charakter wykresu wskazuje na małą różnicę wartości współczynnika r_o na długości belki. Z tego powodu do dalszych obliczeń przyjęto średnią wartość współczynnika r_{on} :

$$r_{o1} = r_{o2} = \dots = r_{o21} = r_o .$$

Pozwala to zredukować układ "n" - równań z "n" niewiadomymi /5-14/ do jednego równania z niewiadomą r_o.
Wykorzystując wzór 5-13, do obliczenia funkcjonału J /5-14/ można wyznaczyć z pochodnej $\frac{\partial J}{\partial r_o} = 0$ wartość współczynnika r_o.
W analizowanym zadaniu bezwymiarowe rzędne pomiaru ugięć ξ_i i występowania rys ζ_n wynoszą:

$\xi_1 = 0,056$	$\xi_4 = 0,389$	$\xi_7 = 0,722$
$\xi_2 = 0,167$	$\xi_5 = 0,500$	$\xi_8 = 0,833$
$\xi_3 = 0,278$	$\xi_6 = 0,611$	$\xi_9 = 0,944$
$\zeta_1 = 0,125$	$\zeta_8 = 0,3875$	$\zeta_{15} = 0,650$
$\zeta_2 = 0,1625$	$\zeta_9 = 0,425$	$\zeta_{16} = 0,6875$
$\zeta_3 = 0,200$	$\zeta_{10} = 0,4625$	$\zeta_{17} = 0,725$
$\zeta_4 = 0,2375$	$\zeta_{11} = 0,500$	$\zeta_{18} = 0,7625$
$\zeta_5 = 0,275$	$\zeta_{12} = 0,5375$	$\zeta_{19} = 0,800$
$\zeta_6 = 0,3125$	$\zeta_{13} = 0,575$	$\zeta_{20} = 0,8375$
$\zeta_7 = 0,350$	$\zeta_{14} = 0,6125$	$\zeta_{21} = 0,875$

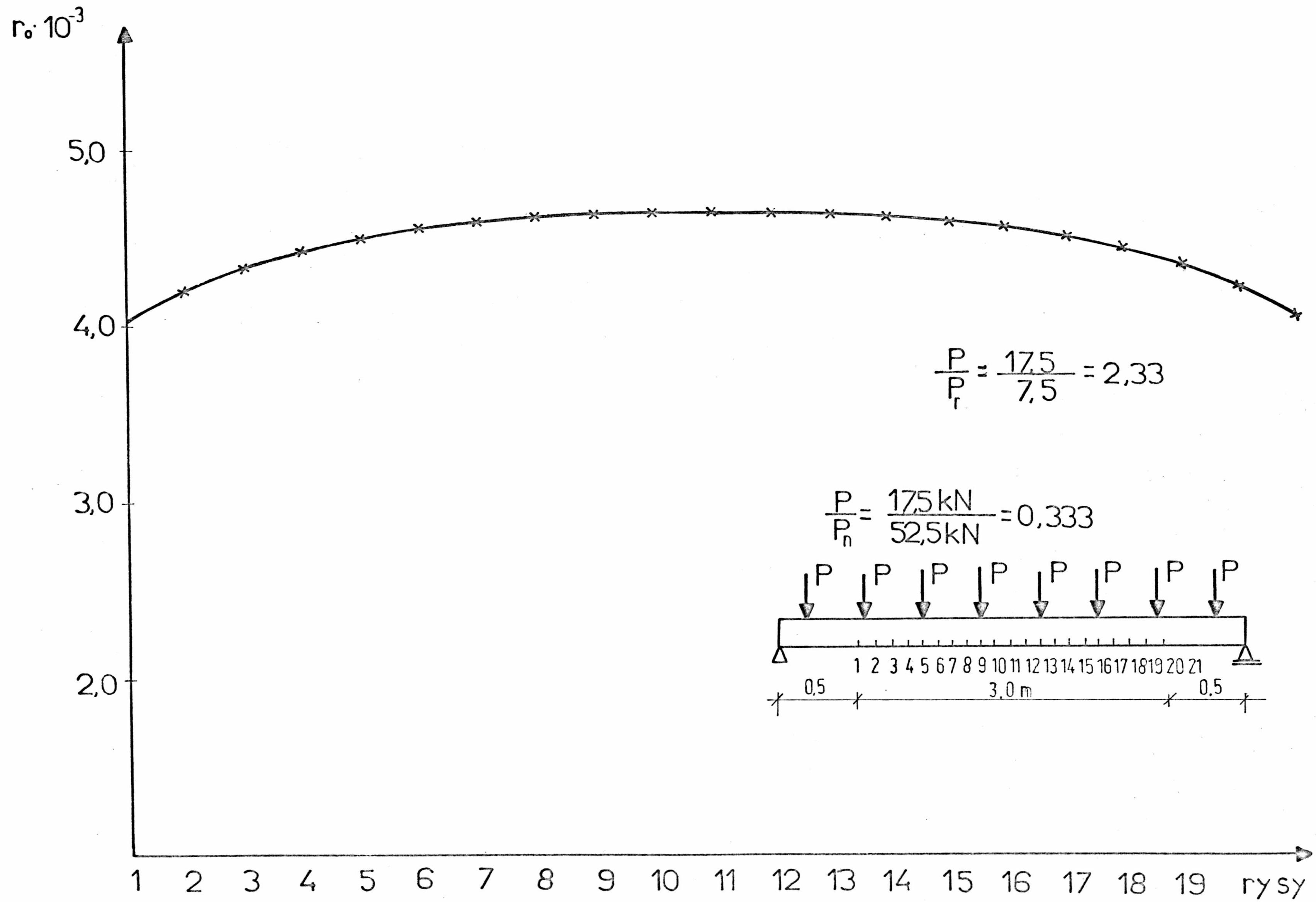
a wyznaczony na ich podstawie współczynnik r_o zostanie opisany równaniem :

$$r_o = \frac{1}{47,70}\Big[0,5833\left(v_{1res}+v_{9res}\right) + 1,704\left(v_{2res}+v_{8res}\right) + 2,528\left(v_{3res}+v_{7res}\right) + 3,022\left(v_{4res}+v_{6res}\right) + 3,188\, v_{5res}\Big] \; ; \qquad 5\text{-}15$$

v_{ires} - doświadczalne wartości ugięć dla wybranego poziomu obciążenia.

Wartości współczynnika r_o otrzymano podstawiając za v_{ires} wartości ugięć /tabela 5-2/ dla kilku wybranych kolejno obciążeń, do których przeciążana była belka. Otrzymaną w ten sposób zależność pomiędzy r_o , a poziomem obciążenia $r_o = f\left(P:P_{rys}\right)$ przedstawia rys. 5-5,

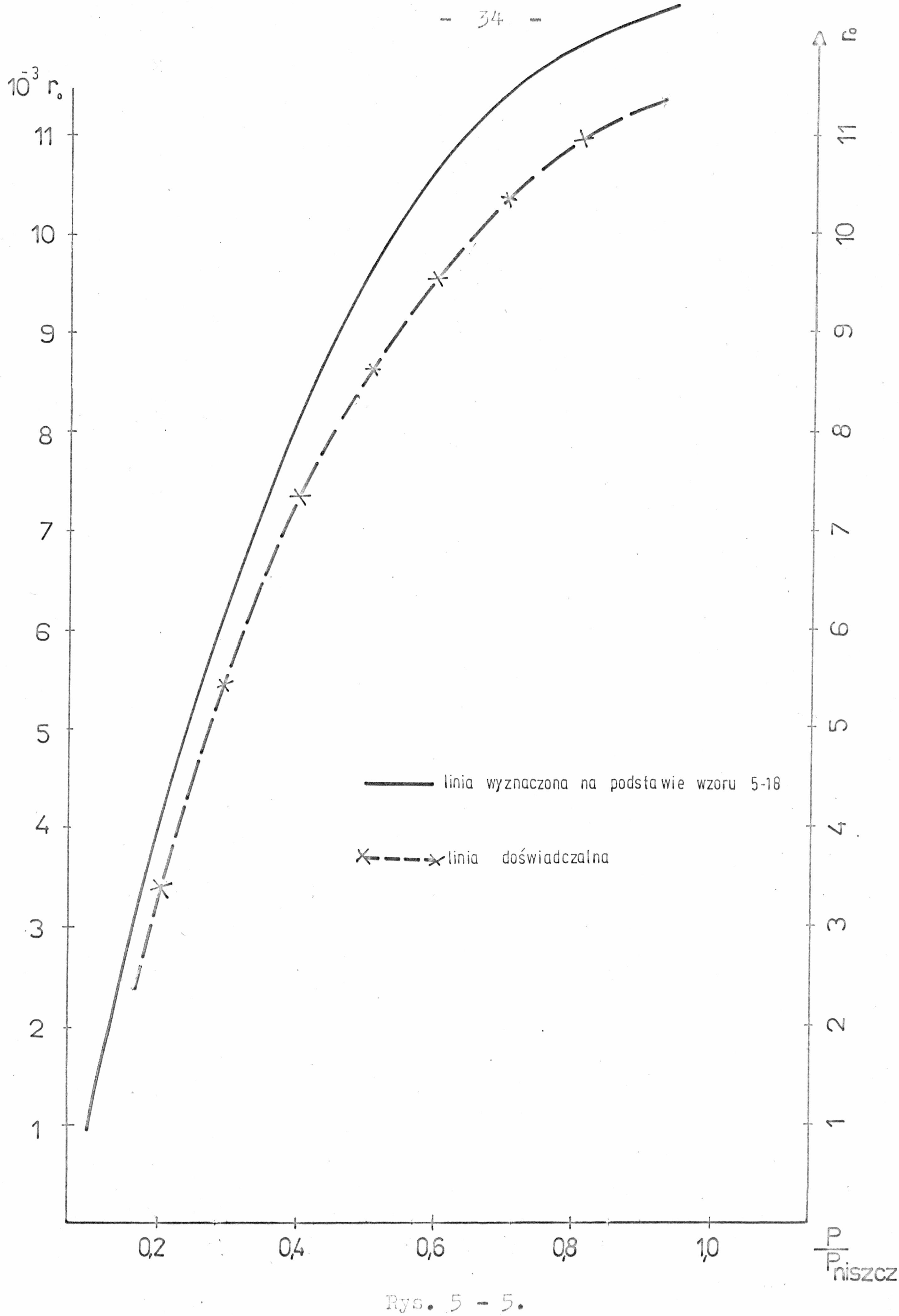
Zebrane informacje dotyczą obciążeń doraźnych. Należałoby wzbogacić je dodatkowo analizą efektów długotrwałych. W celu oszacowania tych efektów przeprowadza się następujące rozumowanie. Dla poziomu obciążenia P=30 kN /rys. 5-6/ ugięcia doraźne są oznaczone punktem A_2. Stosunek deformacji trwałych do sprężystych $w_{res} : w_{spr}$ wynosi około 0,12. Pozostawiając obciążenie na tym samym poziomie przez dłuższy okres czasu można osiągnąć na skutek pełzania


$r_o \cdot 10^{-3}$
5,0
4,0
3,0
2,0
$\frac{P}{P_r} = \frac{17,5}{7,5} = 2,33$
$\frac{P}{P_n} = \frac{17,5\,kN}{52,5\,kN} = 0,333$
P P P P P P P P
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21
0,5
3,0 m
0,5
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 rysy

Rys. 5 - 4.

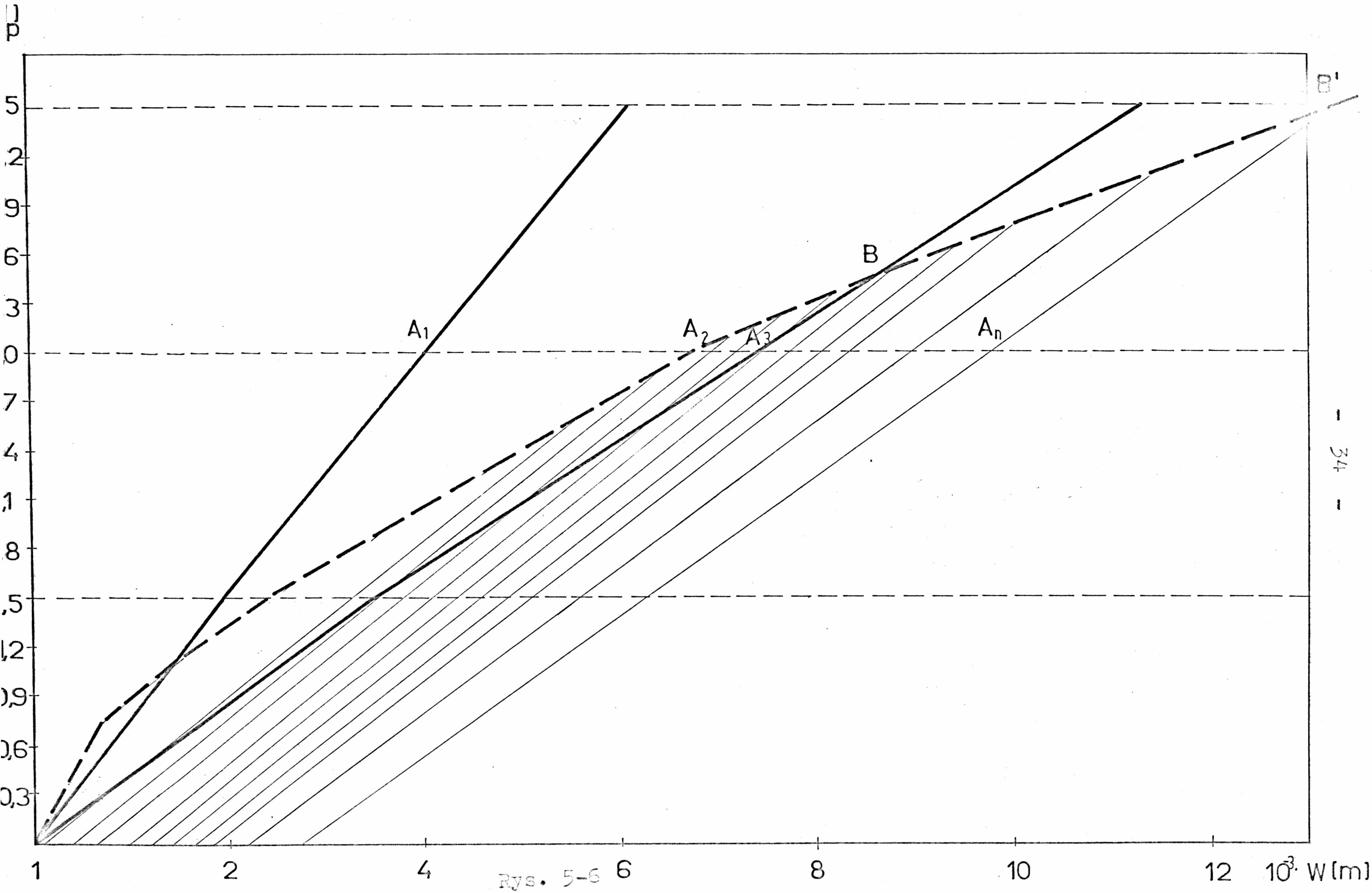
TABELA 5-2.

P kN	V_{1res}	V_{2res}	V_{3res}	V_{4res}	V_{5res}	V_{6res}	V_{7res}	V_{8res}	V_{9res}
7,5 (P_{rys})	0,010	0,035	0,070	0,100	0,100	0,090	0,070	0,035	0,005
10,0	0,020	0,075	0,130	0,160	0,170	0,170	0,130	0,075	0,020
15,0	0,055	0,150	0,240	0,315	0,325	0,305	0,250	0,145	0,045
20,0	0,120	0,280	0,425	0,510	0,540	0,500	0,415	0,245	0,080
25,0	0,145	0,365	0,565	0,685	0,720	0,680	0,565	0,345	0,105
30,0	0,180	0,485	0,770	0,830	0,980	0,930	0,770	0,465	0,140
35,0	0,225	0,660	1,095	1,335	1,410	1,335	1,095	0,655	0,195
40,0	0,295	0,930	1,655	2,020	2,110	1,990	1,580	0,915	0,275
45,0	0,400	1,290	2,330	2,935	3,055	2,845	2,190	1,255	0,385
50,0	0,860	2,725	4,755	6,145	6,415	5,955	4,585	2,690	0,860



10^{-3} r₀
r₀
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
P/P niszcz
linia wyznaczona na podstawie wzoru 5-18
linia doświadczalna

Rys. 5 - 5.

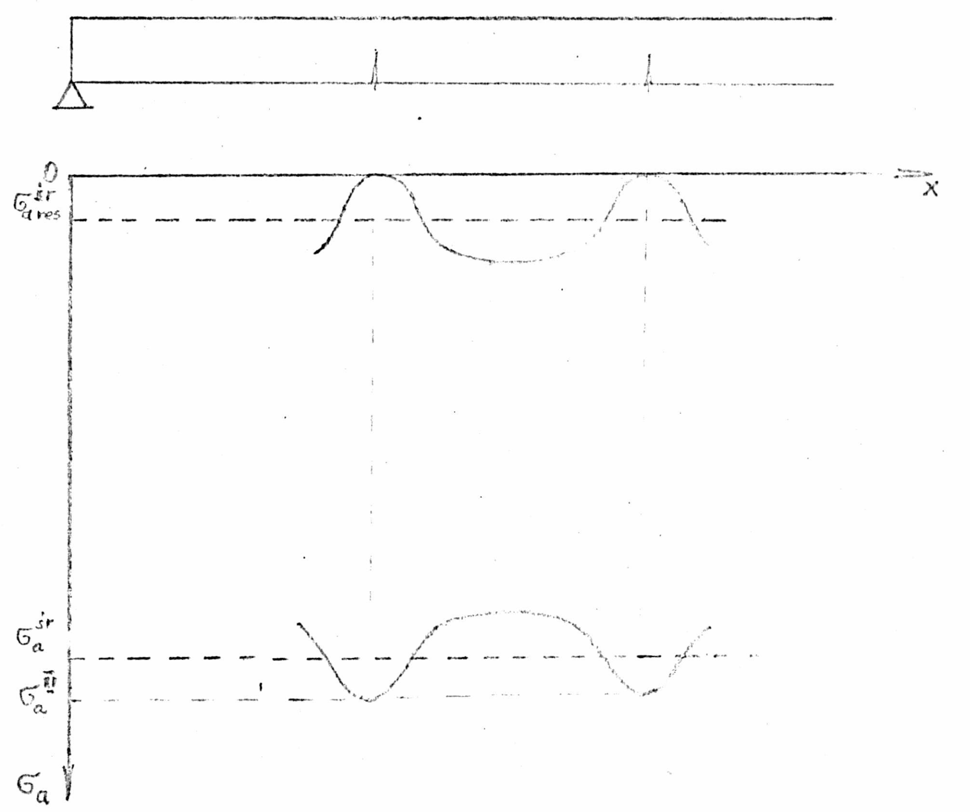


Rys. 5-6

punkt A_n, a więc miejsce do którego doszłoby się odciążając belkę obciążoną doraźnie do punktu B' /P= 4,5 kN/. Punktowi A_n odpowiadają zwiększone ugięcia resztkowe. W tym przypadku stosunek $w_{res}:w_{spr}$ wzrośnie i dla przykładu jak na rysunku 5-6 będzie wynosić około 0,4.

Tak duże deformacje resztkowe można objaśnić nie tylko za pomocą resztkowych naprężeń w zbrojeniu, które przeszkadzają w zamknięciu się rysy, ale również ugniotem betonu w strefie rozciąganej. W pracy nie zajmowano się jednak szczegółowo wpływem czasu na deformacje resztkowe.

Dotychczas brak jest wzoru, na obliczenie deformacji trwałych. Propozycja takiego wzoru zostanie zilustrowana rysunkiem.



Rys. 5-7.

Po odciążeniu, zarysowanej uprzednio, belki pozostaną w niej odkształcenia i naprężenia resztkowe. Rysa nie ulegnie zamknięciu a w stali na odcinku między rysami pozostaną naprężenia uwięzione.

W rysie natomiast można przyjąć, że są one bliskie zeru. Wartości naprężeń w stali były wyznaczone między innymi przez Jankowiaka [14] /rys. 5-7/ i Kozłowskiego [18]. Kąt rozwarcia się rysy określony jest, podobnie jak w przypadku deformacji sprężystych, jako stosunek przyrostu długości stali na odcinku między rysami do głębokości rysy. Wydłużenie stali wyrażone jest za pomocą tzw. średniego naprężenia resztkowego. Przyjęto że:

$$\sigma_{ares}^{śr} \approx \sigma_a^{II} - \sigma_a^{śr} = \left(1 - \psi_a\right) \cdot \sigma_a^{II} \quad . \qquad 5\text{-}16$$

Resztkowy kąt rozwarcia rysy wynosi:

$$r_o = \Delta \varphi_{res} = \frac{\sigma_{ares}^{śr}}{E_a} l_f \cdot \frac{1}{(h-a-x)} \quad ; \qquad 5\text{-}17$$

lub wykorzystując 5-5 :

$$r_o = \left(1 - \psi_a\right) \frac{l_f}{E_a F_a h^2 \cdot \left(1 - \frac{\xi''}{3} - \frac{a}{h}\right)\left(1 - \xi'' - \frac{a}{h}\right)} M \quad ; \qquad 5\text{-}18$$

M - moment, do którego belka była przeciążona .

Obliczone za pomocą wzoru 5-18 wartości r_o przyjmują następujące wartości:

TABELA 5-3

$\frac{P}{P_{niszcz}}$	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8
$r_o \cdot 10^{-3}$	3,397	5,441	7,342	8,645	9,551	10,372	10,943

W obliczeniach wykorzystano wartości parametru ψ_a wyznaczonego z doświadczenia /wzory 5-7 i 5-12/. Zależność między wynikami doświadczalnymi i wyliczonymi teoretycznie przedstawia rys. 5-5.

Wzory na obliczanie współczynników r_o i r_1 są teoretyczno-doświadczalne. Występujące w nich parametry są weryfikowane na wynikach znanych z doświadczenia. Głównym celem tego przedsięwzięcia jest ustalenie wzorów, które pozwoliłyby w miarę dokładnie określić wartości deformacji sprężystych i resztkowych w szerszej klasie konstrukcji belkowych.

W dalszych rozdziałach przedstawione zostaną przykłady, w których współczynniki r_0 i r_1 są wykorzystane do analizy statycznej i dynamicznej, statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych, zarysowanych belek żelbetowych.

5.4. Analiza stosunku deformacji trwałych do sprężystych

Doświadczenia wykazują, że istnieje pewna zależność pomiędzy deformacjami trwałymi i sprężystymi. Najłatwiejszymi do pomiaru są ugięcia. Dla nich właśnie przeprowadzono, na podstawie badań Bacha [3], analizę stosunku ugięć trwałych do sprężystych. Jako zmienną niezależną przyjęto poziom obciążenia $M:M_{rys}$ /rys. 5-8/, oraz pomocniczo rzędną długość belki /rys. 5-9, 5-10/.

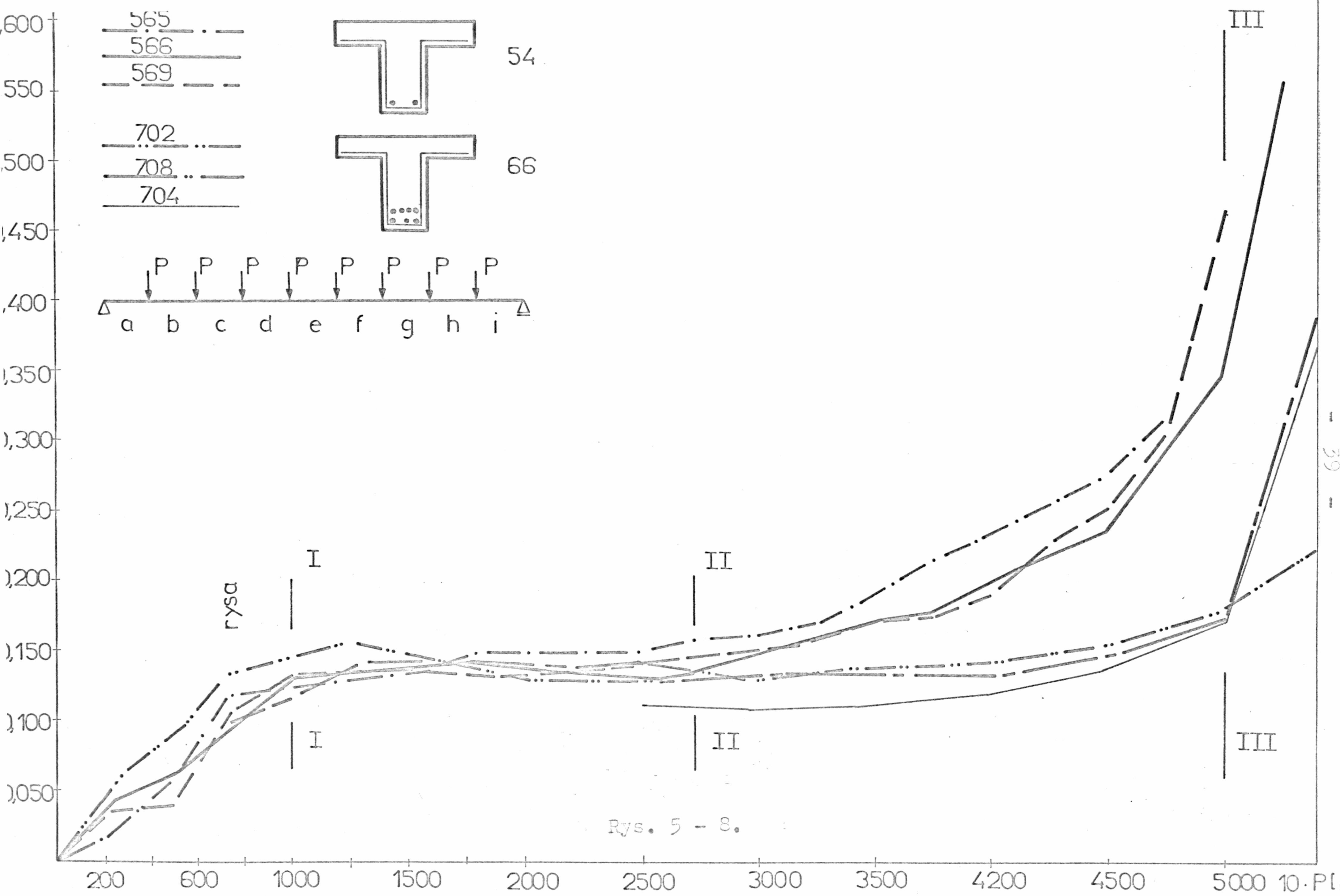
Analizując stosunek ugięć trwałych do sprężystych spowodowanych zarysowaniem belki, jako funkcję poziomu obciążenia, można na przykładzie przekroju środkowego zaobserwować, że stosunek ten wzrasta do poziomu momentu rysującego proporcjonalnie. Po powstaniu rysy zależność ta ustala się na określonym poziomie $w_{res} : w_{spr} \approx 0,13 \div 0,15$. Prawidłowość ta przebiega w przedziale użytkowym obciążenia belki /$M : M_{rys} < 0,5$/. Przy dalszym narastaniu obciążenia /$M \to M_{niszcz}$/ występuje coraz większa rozbieżność proporcji ugięć trwałych do sprężystych. Charakter zależności potwierdził się na całej długości belki /rys. 5-9, 5-10/.

Z braku badań nie jest możliwa taka analiza wprost dla deformacji kątowych. Przeprowadzono ją pośrednio, wykorzystując wyznaczone wcześniej z doświadczenia, współczynniki r_o i r_1. Przeanalizowano stosunek trwałych do sprężystych deformacji kątowych w rysie na różnych poziomach obciążenia /tab. 5-4/.

Tabela 5-4

$M : M_{niszcz}$	0,20	0,30	0,40	0,50	0,60
$r_o : r_1$ M	0,173	0,151	0,131	0,115	0,102

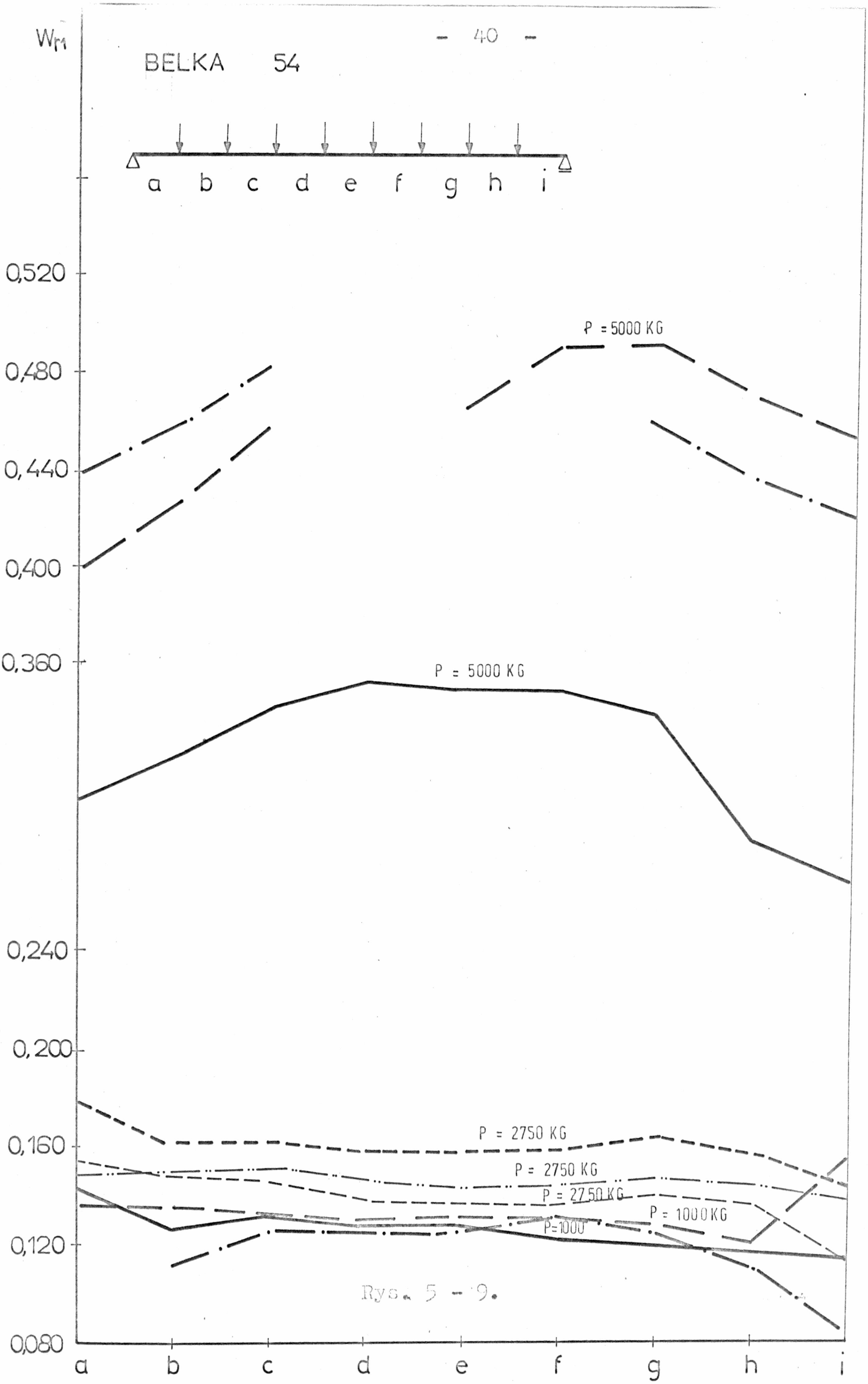
Otrzymane wartości stosunku deformacji kątowych, odbiegają wprawdzie od stosunku ugięć, jednak charakter obu zależności jest podobny /rys. 5-11/. Większą zgodność można byłoby zapewnić uściślając wartości parametrów występujących we wzorach 5-7 i 5-18, a mianowicie odstępu między rysami l_r oraz współczynnika Ψ_a.



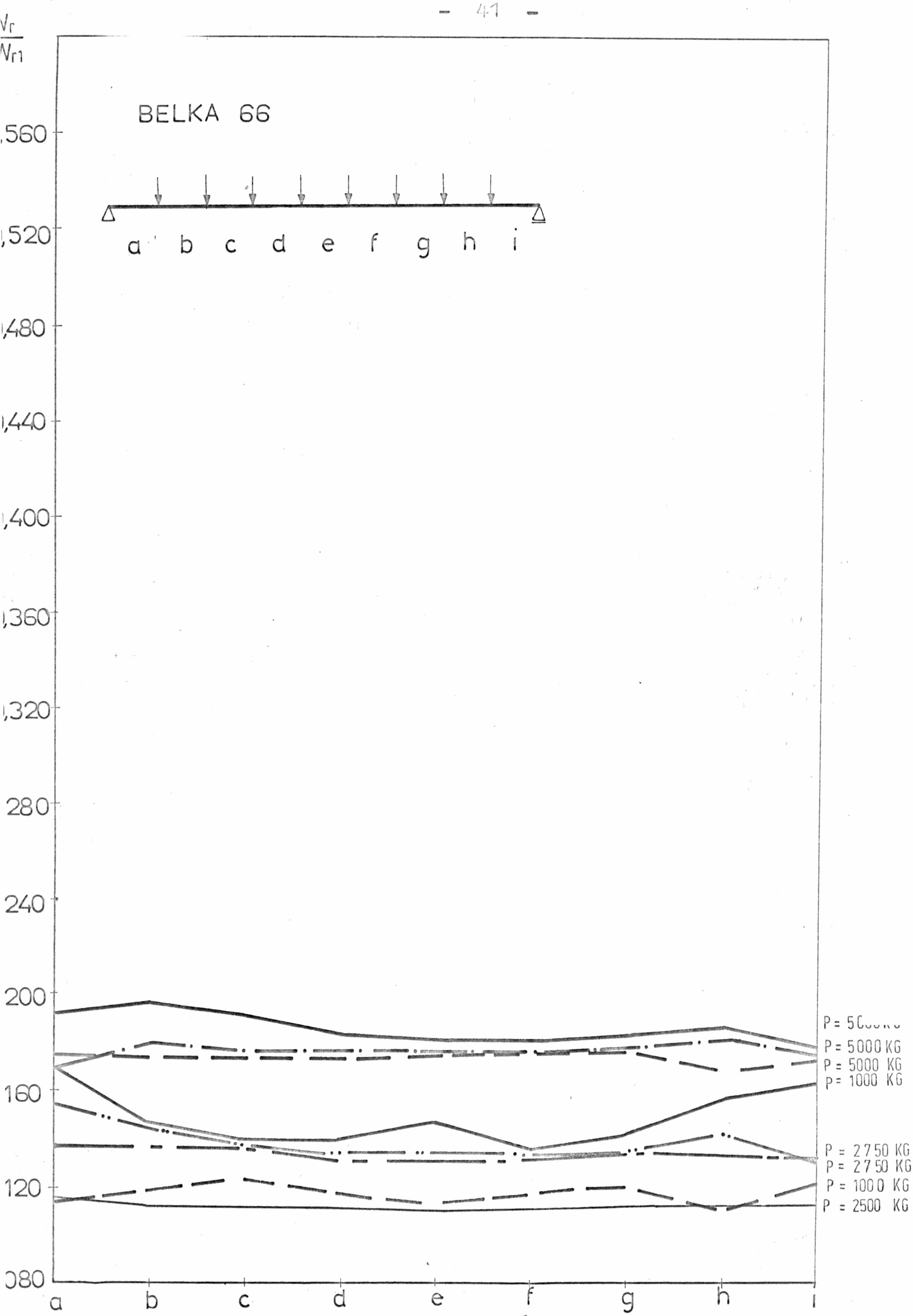
565
566
569
702
708
704
54
66
P
a b c d e f g h i
rysa
I
II
III
,600
550
,500
,450
,400
,350
,300
,250
,200
,150
,100
,050
200
600
1000
1500
2000
2500
3000
3500
4200
4500
5000
10·P

Rys. 5 - 8.

- 39 -

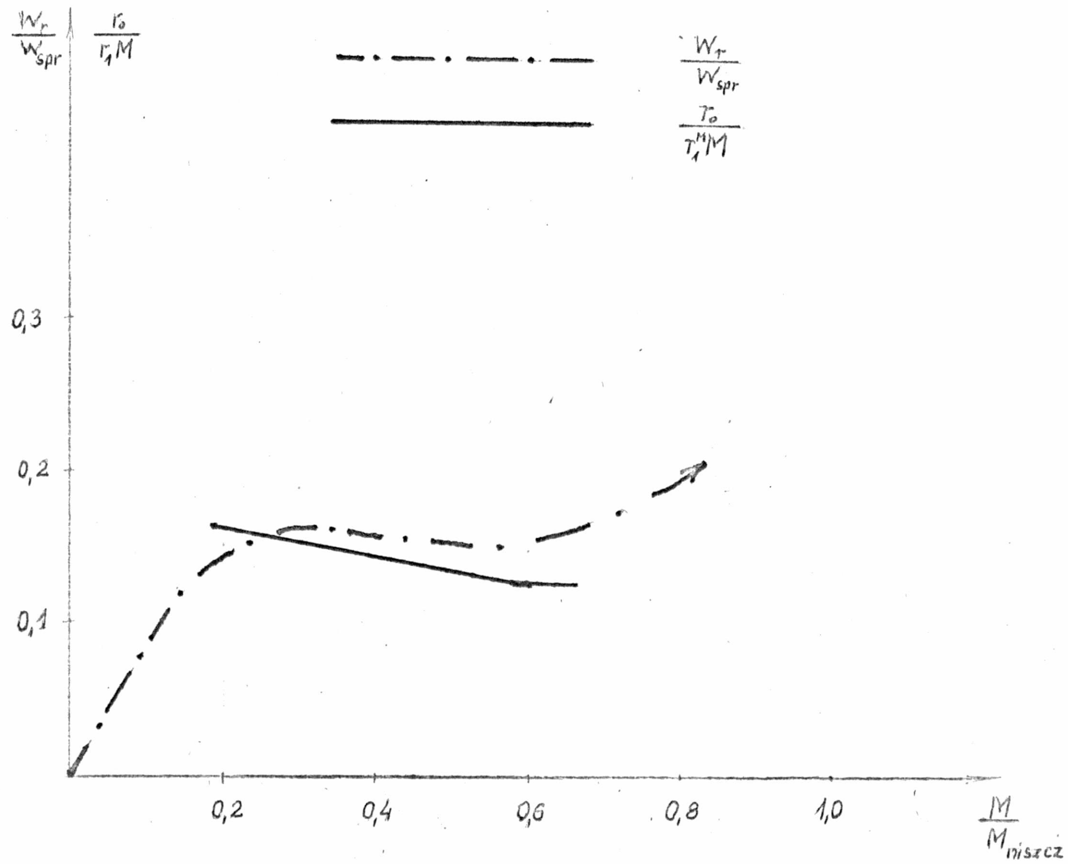

Wm
BELKA 54
a b c d e f g h i
0,520
0,480
0,440
0,400
0,360
0,240
0,200
0,160
0,120
0,080
P = 5000 KG
P = 5000 KG
P = 2750 KG
P = 2750 KG
P = 2750 KG
P = 1000 KG
P=1000
a b c d e f g h i

Rys. 5 - 9.



Vr/Vr1
BELKA 66
a b c d e f g h i
,560
,520
,480
,440
,400
,360
,320
280
240
200
160
120
080
P = 5000 KG
P = 5000 KG
P = 1000 KG
P = 2750 KG
P = 2750 KG
P = 1000 KG
P = 2500 KG

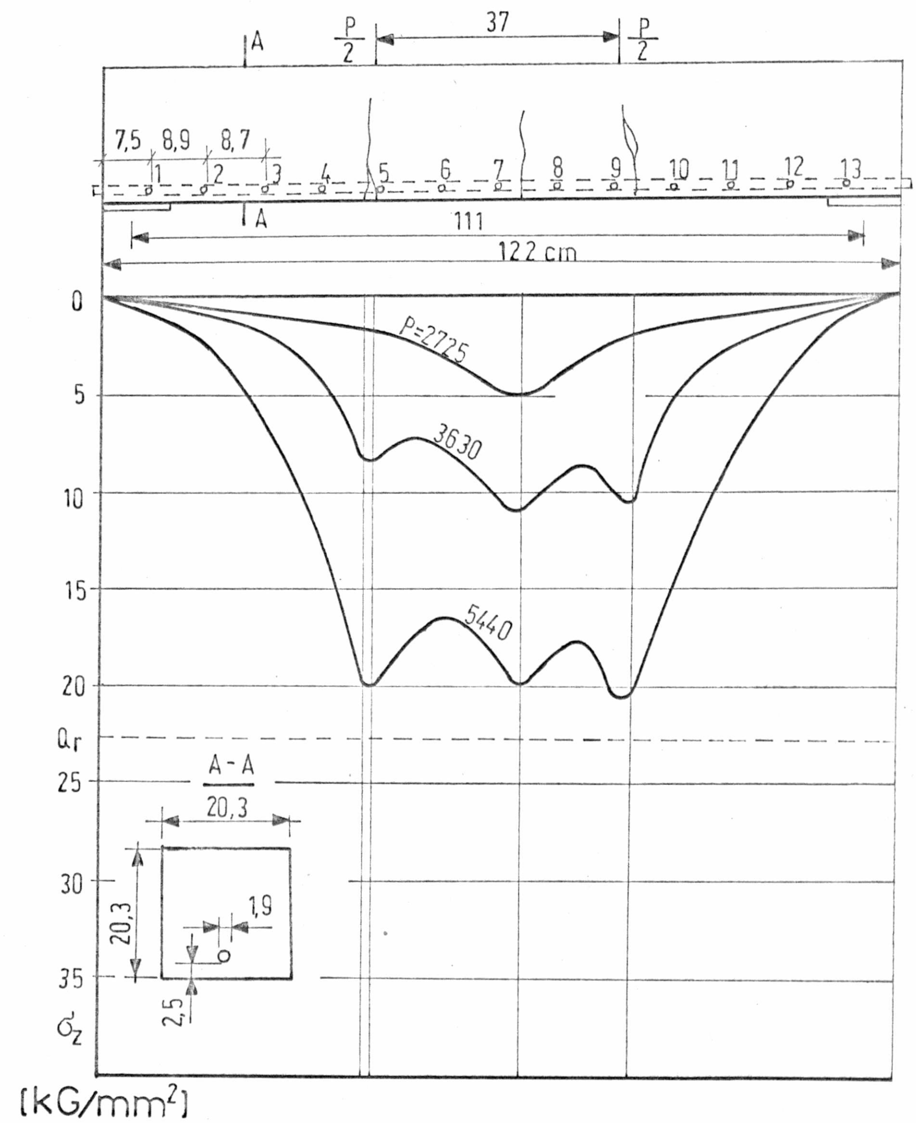
Rys. 5-10.



Rys. 5-11

5.5. Wyznaczanie średniego odstępu między rysami

Schemat powstawania rys w belce pokazuje rys. 5-12. Pierwsza rysa powstaje w miejscu największego momentu lub też najsłabszego miejsca wynikającego z niejednorodności materiału, wskutek przekroczenia w strefie rozciąganej betonu, jego wytrzymałości na rozciąganie. Wskutek zarysowania otoczenie zostaje odciążone, natomiast na powierzchniach rys znikają naprężenia prostopadłe i styczne. Ponieważ nadal muszą być spełnione warunki równowagi, rozciąganie przenoszone przez beton przekaże się teraz na zbrojenie. W porównaniu do stanu poprze-


A
P/2
37
P/2
7,5
8,9
8,7
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
A
111
122 cm
0
5
10
15
20
Q_r
25
30
35
σ_z
[kG/mm²]
P=2725
3630
5440
A - A
20,3
20,3
1,9
2,5

Rys. 5-12

dzającego zarysowanie naprężenia w zbrojeniu wyraźnie zwiększają się. Przyczepność zbrojenia do betonu w otoczeniu rysy zostaje naruszona. Pręty są wyciągane, a wydłużenie uzewnętrznia się w miejscu rysy. Otulający zbrojenie beton przeciwstawia się przesunięciom. W odległości l_f od rysy naprężenia w zbrojeniu i w betonie współdziałają ze sobą w nienaruszonej fazie I, a naprężenia w betonie mogą osiągnąć granicę wytrzymałości na rozciąganie. Następna rysa może powstać w odległości nie mniejszej niż l_f, w zależności od rozkładu momentów na długości belki. Jeżeli w otoczeniu rysy moment szybko maleje, wówczas w odległości l_f może powstać moment mniejszy od rysującego. Oznacza to, że powstanie pierwszej rysy nie powoduje natychmiastowego utworzenia się następnych, a dalsze zarysowanie może zostać spowodowane dopiero wzrostem obciążenia. Przy zwiększonym w miejscu zarysowania momencie, wzrasta naprężenie w zbrojeniu i w konsekwencji przedział l_f, w którym współpraca betonu ze zbrojeniem zostaje naruszona, wydłuża się.

Przyjętym punktem wyjścia do wyznaczania wzoru na odstęp między rysami jest określenie odległości, na której następuje naruszenie współpracy zbrojenia z betonem /rys. 5-13/. Przyrost siły w zbrojeniu między fazą drugą a pierwszą jest przenoszony przez siły współdziałania betonu ze zbrojeniem. Współdziałanie to określa się za pomocą naprężeń stycznych τ występujących na obwodzie pręta. Z warunku równowagi otrzymuje się zależność:

$$\Delta\sigma F_a = \tau_{śr} \cdot U l_f \quad ; \qquad 5\text{-}19$$

w którym

$\Delta\sigma = \sigma_a^{II} - \sigma_a^{I}$ - przyrost naprężeń normalnych w stali na odcinku pomiędzy rysą a miejscem, w którym przywrócona jest pełna współpraca betonu i stali /rys. 5-13/ ;

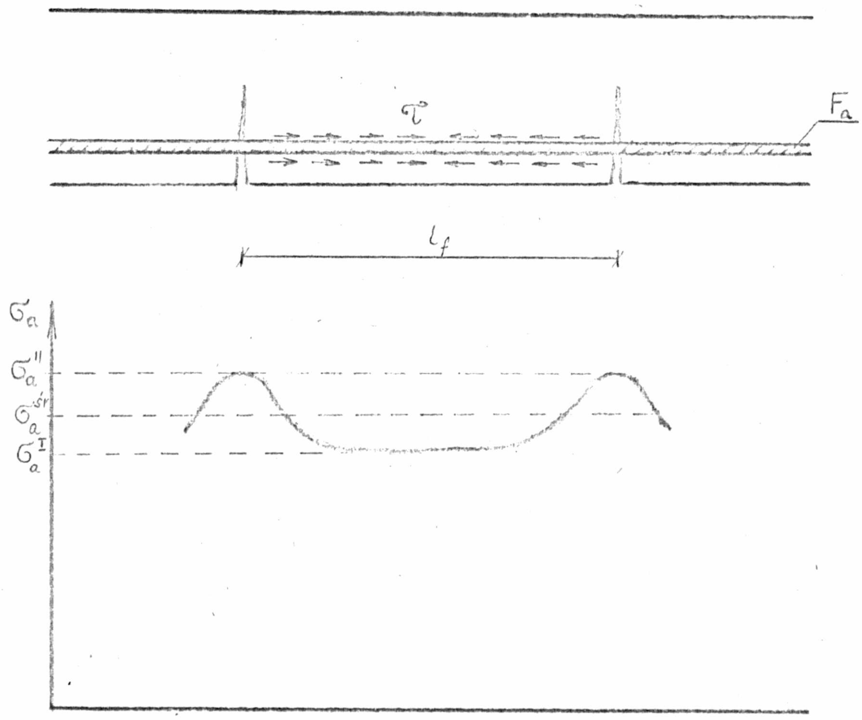
F_a - pole powierzchni stali ;

$\tau_{śr}$ - średnie naprężenie styczne na odcinku między rysami ;

U - obwód zbrojenia w strefie rozciąganej ;

l_f - rozstaw rys.

Do wyznaczenia naprężeń w zbrojeniu w fazie drugiej posłużono się warunkiem równowagi w przekroju zarysowanym.



Rys. 5-13

$$\sigma_a = \frac{M_r}{F_a \cdot h \cdot \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{\xi''}{3}\right)} \quad ; \qquad 5\text{-}20$$

M_r - moment rysujący ;

$\frac{a}{h}$ - bezwymiarowa odległość krawędzi rozciąganej od środka ciężkości zbrojenia rozciąganego ;

ξ'' - bezwymiarowa wysokość strefy ściskanej betonu w II fazie pracy.

W celu wyznaczania naprężeń normalnych w zbrojeniu w fazie I przyjęto liniowy wykres naprężeń oraz wykorzystano zależność wiążącą warunki geometryczne, równowagi i prawo fizyczne.

$$\sigma_a{}^I = n\,\frac{M_r h\cdot\left(1 - \frac{a}{h} - \xi^I\right)}{J_{ab}} \quad ; \qquad 5\text{-}21$$

$$n = \frac{E_a}{E_b} \quad ;$$

J_{ab} - moment bezwładności przekroju sprawdzonego ;

ξ^I - bezwymiarowa wysokość strefy ściskanej betonu w I fazie pracy.

Ponieważ wzory 5-20 i 5-21 wyprowadzono przy założeniu hipotezy płaskich przekrojów, dlatego postępowaniem konsekwentnym będzie wyznaczenie względnej wysokości strefy ściskanej przekroju z zależności otrzymanej przy tym samym założeniu. Dla przekroju prostokątnego wyraża się ona wzorami:

$$\xi^I = \frac{0{,}5 + n\mu\left(1 - \frac{a}{h}\right)}{1 + n\mu} \qquad 5\text{-}22$$

$$\xi^{II} = -\mu n + \sqrt{(\mu n)^2 + 2\mu n\left(1 - \frac{a}{h}\right)} \qquad 5\text{-}23$$

$$n = \frac{E_a}{E_b}$$

$$\mu = \frac{F_a}{b\cdot(h - a)}$$

b - szerokość przekroju

a - odległość środka ciężkości zbrojenia rozciąganego od krawędzi rozciąganej

Uwzględniając wzory 5-19, 5-20 i 5-21 otrzymuje się wyrażenie na odstęp rys:

$$l_f = \frac{M_r}{\tau_{śr}\cdot Uh\cdot\left(1 - \frac{a}{h} - \frac{\xi''}{3}\right)} - \frac{n\,M_r(h - a)\,F_a}{\tau_{śr}\cdot U\cdot J_{ab}} \qquad 5\text{-}24$$

Do celów praktycznych wygodnie jest wykorzystać relację postulowaną przez Muraszewa.

- dla prętów okrągłych

$$\frac{R_{bzk}}{\omega'\cdot\tau_{śr}} = 0{,}8 \div 1 \quad ,$$

ω' - współczynnik doświadczalny

R_{bzk} - wytrzymałość charakterystyczna betonu na rozciąganie
- dla prętów zebrowanych

$$\frac{R_{bzk}}{\tau_{śr}} = 0,6 \div 0,8$$

Jeżeli przyjmie się

$$\frac{R_{bzk}}{\tau_{śr}} \cong 1,4 \quad \text{/dla prętów okrągłych/}$$

oraz

$$M_r = 1,7\, R_{bzk} \frac{J_{ab}}{h\left(1 - \frac{a}{h}\right)}$$

Wówczas równanie 5-24 przyjmie postać

$$l_f = 2,38 \left(\frac{J_{ab}}{Uh \cdot \left(1 - \frac{a}{h} - \frac{\xi''}{3}\right)\left(1 - \frac{a}{h} - \xi''\right)} - \frac{nF_a}{U} \right) \qquad 5\text{-}25$$

Badania [3] pokazały, że odstęp rys jest wielkością losową. Pomimo dużej staranności w przygotowaniu próbek w warunkach laboratoryjnych można stwierdzić dużą nieregularność w pojawianiu się rys. Błąd względny, przez który rozumiany jest stosunek błędu pojedynczego pomiaru do wartości średniej doświadczalnej, lub stosunek różnicy, wyniku teoretycznego i średniej wartości doświadczalnej do tejże wartości średniej, przekracza niekiedy przy pomiarach na identycznych próbkach 10 procent.

Z tego powodu często stosowane jest pojęcie średniego odstępu między rysami. Wzory normowe jak i wzór 5-25 mają na celu wyznaczenie średniej odległości pomiędzy rysami.

Wzór 5-25 różni się od wzorów normowych przede wszystkim tym, że nie uzależnia rozstawu rys od poziomu obciążenia. Zestawienie wyników otrzymanych z obliczeń według wzorów normowych oraz według wzoru 5-25 i porównanie ich z wynikami doświadczalnymi /numerację próbek przyjęto jak u Bacha [3]/ przedstawia tabela 5-5. Rozstaw liczony według normy pokazano dla dwu poziomów obciążenia: dla momentu zginającego

Tabela 5 - 5

nr próbki	odstęp między rys.				błąd względny %			
	dośw. /cm/	wg normy $M=M_r$	wg normy $M=5M_r$	wg wzoru w pracy	dośw.	wg normy $M=M_r$	wg normy $M=5M_r$	wg wzoru w pracy
623	15,1	15,0	14,4	15,9	6,0%	-0,7	-4,6	+5,3%
622	16,0	15,0	14,4	15,9		-6,2	-10,0	-0,6%
614	16,0	15,0	14,4	15,9		-6,2	-10,0	-0,6%
621	15,8	15,0	14,4	15,9	4,6%	-5,1	-8,9	+0,6%
620	15,5	15,0	14,4	15,9		-3,2	-7,1	+2,6%
615	15,1	15,0	14,4	15,9		-0,7	-4,6	+5,3%
606	15,9	15,0	14,4	15,9	8,8%	-5,7	-9,4	0 %
596	16,4	15,0	14,4	15,9		-8,5	-12,2	-3,0%
593	17,3	15,0	14,4	15,9		-13,3	-16,8	-8,1%
569	12,6	15,0	14,4	15,9	19,0	+19,0	+14,3	+26,2%
566	15,0	15,0	14,4	15,9		0	-4,0	+6,0%
565	15,0	15,0	14,4	15,9		0	-4,0	+6,0%
585	9,5	8,9	8,8	9,3	9,5%	-6,3	-7,4	-2,1%
663	10,4	8,9	8,8	9,3		-14,4	-15,4	-10,6%
662	10,1	8,9	8,8	9,3		-11,9	-12,9	-7,9%
692	9,6	8,9	8,8	9,3	11,6	-7,3	-8,3	-3,1%
691	8,6	8,9	8,8	9,3		+3,5	+2,6	+8,1%
688	9,5	8,9	8,8	9,3		-6,3	-7,4	-2,1%
700	9,3	8,9	8,8	9,3	3,2%	-4,3	-5,4	0 %
699	9,6	8,9	8,8	9,3		-7,3	-8,3	-3,1%
696	9,5	8,9	8,8	9,3		-6,3	-7,4	-2,1%
708	9,7	8,9	8,8	9,3	7,8%	-8,2	-9,3	-4,1%
702	9,0	8,9	8,8	9,3		-1,1	-2,2	+3,3%

odpowiadającego momentowi rysującemu, oraz dla momentu pięciokrotnie większego.

Analizując tabelę 5-5 można zaobserwować, że odstęp między rysami liczony według wzorów normowych daje wartości zaniżone o kilka procent w porównaniu z wynikami doświadczalnymi. Wyniki otrzymane według wzoru zaproponowanego w pracy mają wprawdzie również duży błąd względny, jednak średnia wartość błędu względnego bliższa jest wartości zerowej.

5.6. Uwagi dotyczące weryfikacji doświadczalnej współczynników r_o^o i r_1.

Istotą rozdziału 5 jest określenie przydatności wzorów stosowanych do obliczenia części sprężystej jak i resztkowej deformacji belki żelbetowej zarysowanej. Otrzymany wynik zależy właściwie tylko od dwóch parametrów,które są zmiennymi losowymi. Jeden z tych parametrów określa współdziałanie betonu ze zbrojeniem i wyraża się za pomocą współczynnika Ψa. Weryfikacja doświadczalna tego współczynnika przeprowadzona została dla 6 belek obciążonych doraźnie.
Z powodu braku materiału nie wykonano weryfikacji współczynnika Ψa dla obciążeń długotrwałych.

Drugim parametrem występującym w tych wzorach jest odstęp między rysami. Jest to również zmienna losowa. Wydawałoby się, że posiada ona dosyć istotny wpływ w obliczeniach. Jednak z badań K. Kiedroń [29] wynika, że ten parametr l_f można dosyć dowolnie zmieniać losowo w dość dużym przedziale nie powodując większych zmian w ugięciach. Ważny natomiast jest obszar, na którym rysy te występują. Pozostałe parametry występujące w tych równaniach mogą być przyjmowane tak, jak się to praktykowano dotychczas dla zginanych elementów żelbetowych pracujących w I i II fazie. Współczynnik sprężystości betonu występuje w tych wzorach w połączeniu ze współczynnikiem sprężystości zbrojenia i wyraża się za pomocą proporcji $n = E_a : E_b$, a nawet występuje w połączeniu ze wskaźnikiem zbrojenia $\mu = F_a : F_b$ w postaci iloczynu μn. Wynik nie jest zbyt czuły na zmianę tego parametru, choć wpływa w pewnym stopniu na jego zmianę. Przy obliczaniu sprężystych ugięć belki jednorodnej bez rys istotną rolę odgrywa współczynnik sprężystości betonu. Jest on tutaj rozumiany zgodnie z normą [45] jako wartość stosunku przyrostu naprężeń do przyrostu odkształceń w przedziale naprężeń 0,10-0,30 średniej wytrzymałości betonu na ściskanie.

Sprawdzenie doświadczalne tych wzorów dotyczyło zarysowania pochodzącego od zginania. Deformacja belki spowodowana rysami w strefie przypodporowej wymaga osobnych rozważań.

6. PRZYKŁADY

6.1. Analiza wpływu włości zbrojenia na redystrybucję momentów w zarysowanych żelbetowych belkach statycznie niewyznaczalnych na przykładzie belki dwuprzęsłowej.

Przedmiotem analizy jest bezwymiarowy moment podporowy, będący funkcją obciążenia. Badania doświadczalne [12] pokazały, że rozmieszczenie zbrojenia na długości belki ma istotny wpływ na przegrupowanie sił wewnętrznych w konstrukcji. Zwracany również uwagę na fakt, że redystrybucja tych sił jest mniejsza, gdy zbrojenie odpowiada rozkładowi momentów w jednorodnej konstrukcji sprężystej.

Zaprezentowana w pracy metoda stwarza możliwość dość wnikliwej analizy przegrupowania się wewnętrznych, jak również określenia wagi wykorzystywanych w obliczeniach parametrów, głównie dzięki weryfikacji z eksperymentem [12].

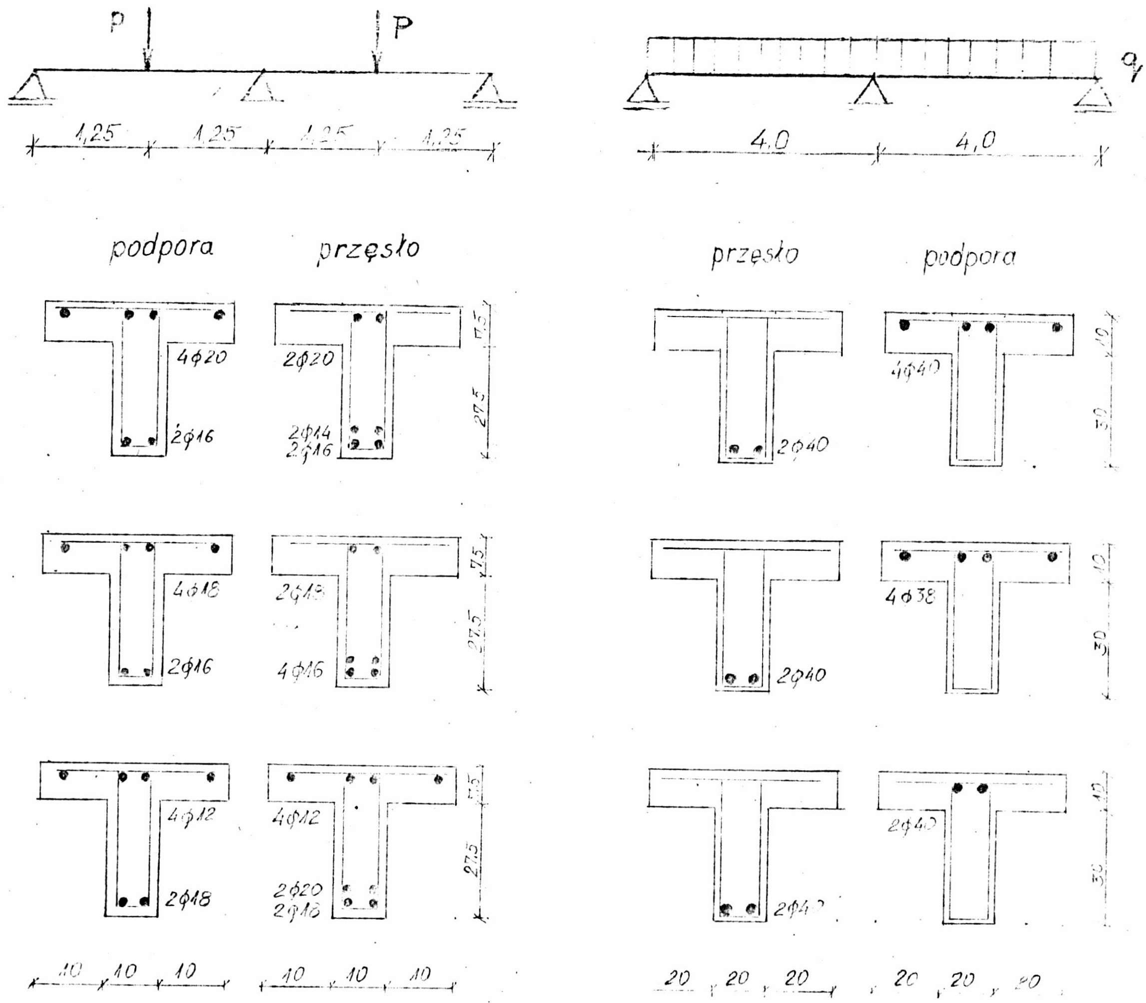
W obliczeniach występują parametry ψ_a i l_f, które mają charakter losowy. Ich wartości przyjęte są na podstawie analiz przeprowadzonych w rozdziale 5. Przykład służy również do zaprezentowania ciekawszych fragmentów algorytmu przedstawionej w pracy metody wykorzystującej macierz przeniesienia, oraz ma za zadanie zademonstrować wykorzystanie tej metody w celu ukierunkowania dalszych rozważań.

Przedstawiony problem należy do nieliniowej analizy belek ciągłych w przedziale użytkowym. Analiza ta może w ogólności obejmować stan pracy nie przekraczający nośności granicznej, jak również stan pozakrytyczny. Sztywność i moment rysujący zależą w znacznym stopniu od ilości zbrojenia i dlatego też rozmieszczenie jego na długości wybrano jako podstawowy parametr w postawionym zadaniu.

O wymiarach i kształcie wybranych do przykładu belek zadecydowała możliwość porównania wyników z doświadczeniem oraz wykorzystania, wyznaczonych uprzednio z innego eksperymentu, współczynników ψ_a i l_f.

Rozważono dwa schematy statyczne belek dwuprzęsłowych /rys. 6 - 1a,b/.

Przedmiotem doświadczenia było pomierzenie całkowitych ugięć doraźnych podczas obciążania, ugięć resztkowych po od-



a/

b/

Rys. 6.1

ciążeniu, wyznaczenie reakcji podporowych w procesie narastanie obciążenia, oraz określenie siły rysującej, rejestracja miejsca, rozstawu i głębokości rys. Geometria przekrojów podporowych i przęsłowych zgodna jest z rysunkiem 6 - 1, Cykle pomiarowe dla belki obciążanej równomiernie przedstawione zostały na rys. 5 - 6. Dla belki obciążonej siłami skupionymi obciążenie przyrastało co 5 kN a następnie także odciążano belkę całkowicie.

Analizę przeprowadzono w ten sposób, że przyjmowano zbrojenie odpowiadające rozkładowi momentów w jednorodnej konstrukcji sprężystej nazywane zbrojeniem sprężystozgodnym /stosunek ilości zbrojenia na podporze do ilości zbrojenia w przęśle wynosi 2 : 1.6 /.

W następnych belkach zmieniano rozkład zbrojenia na podporze i w przęśle. W przypadku serii belek przedstawionych na rys. 6 - 1a stosunek ilości zbrojenia podporowego do przęsłowego $F_a^{pod} : F_a^{prz}$ wynosił kolejno 2,4 : 1,4 oraz 1,4 : 1,8. W jednym z tych przypadków podpora była przezbrojona, w drugim niedozbrojona. W serii belek na rysunku 6 - 1 b zachowano stałą ilość zbrojenia w przęśle μ = 0,02 a zwiększano lub zmniejszano jego ilość w przęśle.

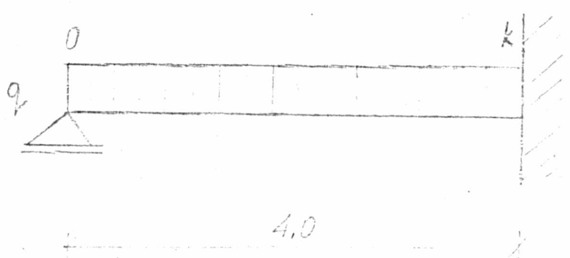
W programie przygotowanym do wykonywania obliczeń na maszynach cyfrowych, zmiennymi są dane opisujące schemat statyczny, geometrię przekroju betonowego, rozmieszczenie zbrojenia /ten fragment algorytmu opisano szczegółowiej w przykładzie w rozdziale 6.4 prezentującym obliczanie belki o zmiennym momencie bezwładności/. W bezpośrednim związku z geometrią przekroju pozostaje wyznaczenie parametrów służących do modelowania sprężystego i resztkowego rozwarcia rys, a także wyliczenie rozstawu pomiędzy nimi. W tym celu wykorzystano wzory przedstawione w rozdziale 5 / wzory: 5-6, 5-17, 5-25/. Wartość momentu rysującego przyjęto na podstawie zaleceń normy [46].

Przyjęto, że pojawienie się pierwszej rysy uwarunkowane jest momentem zginającym w rozwiązaniu sprężystym.

Analiza teoretyczna przeprowadzona na EMC obejmowała:
- wyznaczenie momentów belki sprężystej,
- wyznaczenie momentu rysującego,
- rozkład rys na długości elementu,
- wyznaczenie momentu niszczącego,
- określenie mechanizmu zniszczenia,
- wyznaczenie momentów belki zarysowanej.

Obliczenia wykonywano na współrzędnych bezwymiarowych, jednak ze względów rachunkowych a także w celu ułatwienia śledzenia wykonywanych operacji fragmenty algorytmu prezentowane w pracy przeprowadzono na wielkościach mianowanych. Poniżej zaprezentowano fragment obliczeń dotyczący rozwiązania zadania sprężystego belki dwuprzęsłowej o stałej sztywności, obciążonej równomiernie na całej długości siłami q /rys. 6-1b/. Pokazuje on między innymi sposób wykorzystania macierzy przeniesienia do wyznaczenia brzegowych i węzłowych wielkości statycznych.

W przykładzie rozpatrzono przypadek, gdy oba przęsła są obciążane równomiernie i w tym przypadku wprowadzono schemat zastępczy jak na rys. 6-2.



Rys. 6.2

Przykładowo podano obliczenia na poziomie obciążenia $q : q_{niszcz} = 0{,}160$, które w przypadku tej belki jest równocześnie obciążeniem rysującym konstrukcję w przęśle $/q_{rys} = 0{,}02987 \cdot 10^6$ N/m/.

Ogólna postać macierzy przeniesienia przed zarysowaniem jest następująca:

$$F = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & l & \frac{-l^2}{2EJ} & \frac{-l^3}{6EJ} & \frac{ql^4}{24EJ} \\ 0 & 1 & \frac{-l}{EJ} & \frac{-l^2}{2EJ} & \frac{ql^3}{6EJ} \\ 0 & 0 & 1 & l & -ql^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -ql \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

W macierzy występują wielkości wymiarowe.

Elementy macierzy przyjmują postać:

$$\frac{ql^4}{24\ EI} = \frac{0,02987\ .\ 10^6\ .\ 4^4}{24\ .\ 83,9\ .\ 10^6} = 0,003796\ m$$

$$\frac{ql^3}{6EI} = \frac{0,02987\ .\ 10^6\ .\ 4^3}{6\ .\ 83,9\ .\ 10^6} = 0,003796$$

$$-\ 0,5ql^2 = -0,02987\ .\ 10^6\ .\ 4^2\ .\ 0,5 = -\ 0,2390\ .\ 10^6\ Nm$$

$$-\ ql = -\ 0,02987\ .\ 10^6\ .\ 4 = -\ 0,1195\ .\ 10^6\ \ N$$

$$-\ \frac{l^2}{2EI} = -\ 0,09535\ .\ 10^{-6}\ \ \frac{1}{N}$$

$$-\ \frac{l^3}{6EI} = -\ 0,1271\ .\ 10^{-6}.\ \ \frac{m}{N}$$

W stanie poprzedzającym zarysowanie rozwiązanie przyjmuje postać:

					φ_0	T_0	1				
					0	0	0	δ_0^*	0	δ_0	0
					1	0	0	φ_0^*	0,0004137	φ_0	0,02[illegible]
					0	0	0	M_0^*	0	M_0	0
					0	1	0	T_0^*	$-0,004478 \cdot 10^6$	T_0	-0,3[illegible]5
					0	0	1	1	1	1	1
	4		$-0,1271 \cdot 10^{-6}$	0,003796	4	$-0,1271 \cdot 10^{-6}$	0,003796	δ_k^*	0	δ_k	0
	1		$-0,09535 \cdot 10^{-6}$	0,003796		$-0,09535 \cdot 10^{-6}$	0,003796	φ_k^*	0	φ_k	0
	0		4	$-0,2390 \cdot 10^6$				M_k^*	$-0,05988 \cdot 10^6$	M_k	-0,125
	0		1	$-0,1195 \cdot 10^6$				T_k^*	$-0,07472 \cdot 10^6$	T_k	-0,625
	0		0	1				1	1	1	1

Opis algorytmu objaśnić można na schemacie:

	H	u_o^*	u_o
F	G	u_k^*	u_k

H - macierz opisująca warunki brzegowe ;

F - macierz przeniesienia dla przęsła ;

G - macierz przeniesienia dla całej konstrukcji ;

u_o^*, u_k^* - wymiarowe wielkości statyczne ;

u_o, u_k - bezwymiarowe wielkości statyczne.

W pierwszym etapie rozwiązania poszukuje się paremetrów początkowych $\{u_o\}$. Dwa z nich dane wprost $\delta_o = M_o = 0$ eliminuje się z algorytmu, gdyż w macierzy H opisywane są przez kolumny zerowe. Do wyznaczenia pozostałych dwóch wykorzystuje się znane warunki brzegowe na końcu belki $\delta_k = \varphi_k = 0$. Elementy macierzy G otrzymane w wyniku mnożenia F . H są współczynnikami układu równań:

$$4\ \varphi_o^* - 0{,}1271 \cdot 10^{-6}\ T_o^* + 0{,}003796 = 0$$
$$1\ \varphi_o^* - 0{,}09535 \cdot 10^{-6}\ T_o^* + 0{,}003796 = 0$$

Z rozwiązania układu równań otrzymuje się

$$\varphi_o^* = 0{,}0004737 \quad ;$$
$$T_o^* = 0{,}004478 \cdot 10^6 \quad N .$$

Z transformowania wektora $\{u_o\}$ za pomocą macierzy przeniesienia F otrzymuje się wielkości statyczne na końcu belki $\{u_k\}$.

W celu znalezienia bezwymiarowych wielkości statycznych można wykorzystać zależności:

$$\delta_o = \frac{\delta_o^* \, EJ}{ql^4} ; \qquad \varphi_o = \frac{\varphi_o^* \, EJ}{ql^3} ;$$

$$M_o = \frac{M_o^*}{ql^2} ; \qquad T_o = \frac{T_o^*}{ql} .$$

Wielkości statyczne innych, dowolnie wybranych punktów wewnątrz przedziału można znaleźć, wykorzystując rozwiązanie równania różniczkowego osi o kształconej belki i jego pochodne

$$v(\xi) = \frac{1}{l} \quad \delta_o + \xi\varphi_o - \frac{\xi^2 l}{2EJ} \quad M_o - \frac{\xi^3 l^2}{6EJ} \quad T_o + \frac{ql^3 \xi^4}{24EJ} ;$$

$$v_{,\xi}(\xi) = \varphi_o - \frac{l\xi}{EJ} \quad M_o - \frac{\xi^2 l^2}{2EJ} \quad T_o + \frac{ql^3 \xi^3}{6EJ} ;$$

$$M(\xi) = l \cdot M_o + l^2 \cdot T_o - \frac{ql^3 \xi^2}{2} ;$$

$$T(\xi) = l^2 \cdot T_o - ql^3 \xi . ;$$

Przedstawiony algorytm powtarzany jest wielokrotnie przy dowolnie przyrastającym obciążeniu aż do momentu osiągnięcia przez najbardziej wytężony przekrój poziomu obciążenia rysującego. Po zarysowaniu zostają określone, na podstawie wyliczonego uprzednio rozstawu rys, miejsca w których spodziewane są następne dyslokacje kątowe. W realizowanym modelu przyjęto, że w tych właśnie miejscach uwzględniane są wszystkie efekty związane z zarysowaniem. Efekt zarysowania ingeruje w te wyrazy macierzy przeniesienia, z którymi sprzężony jest parametrami początkowymi /por. rozdz.4 wzór 4-8/. Wpływ rys obliczany jest oddzielnym algorytmem, a następnie dodawany do odpowiednich elementów macierzy.

Wyliczone uprzednio momenty rysujące w przęśle i na podporze dają odpowiednio następujące wartości:

$$M_{rys}^{prz} = 0{,}0336 \cdot 10^6 \ \text{Nm} ;$$
$$M_{rys}^{pod} = 0{,}0603 \cdot 10^6 \ \text{Nm} .$$

Przy tak przyjętym schemacie statycznym wynika natomiast, że maksymalne wartości tych momentów wynoszą odpowiednio:

$$M^{prz}_{max} \,/ \xi = 0,375/ = 0,0703 \; ql^2$$

$$M^{pod}_{max} \,/ \xi = 0,975/ = -\,0,110 \; ql^2$$

Dla wartości $q = 0,02987 \,.\, 10^6$ N/m

$$M^{prz}_{max} = 0,0336 \,.\, 10^6 \; \mathrm{Nm} = M^{prz}_{rys}$$

$$M^{pod}_{max} = 0,05257 \,.\, 10^6 \; \mathrm{N_m} < M^{pod}_{rys} \,.$$

Z porównania momentów zginających w przęśle i na podporze z analogicznymi momentami rysującymi w przekrojach najbardziej wytężonych można stwierdzić, że w tak założonym modelu pierwsza rysa powstanie w przęśle. Jej wpływ uwzględniony jest w obliczeniach zgodnie ze wzorem 4 - 8:

$$q = 0,02987 \,.\, 10^6 \; \mathrm{N/m} \;;$$

$$r_1 = \frac{\psi_a \cdot l_f}{E_a F_a h^2 / 1 - \frac{a}{h} - \xi^{\overline{II}} / \cdot / 1 - \frac{a}{h} - \frac{\xi^{II}}{3} /} =$$

$$= \frac{0,159}{210\,000 \,.\, 10^6 \,.0,002512.0,4^2/1-0,1175-\frac{0,3851}{3}//1-0,1175-0,3851} =$$

$$= 0,005028 \,.\, 10^{-6} \; \frac{1}{Nm}$$

$$r_{1i} \, \xi_i \,/1- \xi_i/ = 0,005028 \,.\, 10^{-6} \,.\, 0,375 \,.\, /1-0,375/ =$$

$$= 0,001178 \,.\, 10^{-6} \; \frac{m}{N}$$

$$r_{1i} \, \xi_i = 0,005028 \,.\, 10^{-6} \,.\, 0,375 = 0,001886 \,.\, 10^{-6} \; \frac{1}{N}$$

$$r_{1i} \,/1 - \xi_i/ \, M_o \,/ \xi_i/ = -\, 0,005028 \,.\, 10^{-6} \,.\, /1-0,375/ \,.$$

$$.\, 0,02987 \,.\, 10^6 \,.\, 0,375^2 \,.\, 0,5 =$$

$$= -\, 0,0000065 \; m$$

$$r_{1i} \, M_o / \xi_i/ = -\, 0,005028 \,.\, 10^{-6} .\, 0,02987 \,.\, 10^6 \,.\, 0,375^2 \,.\, 0,5 =$$

$$= -\, 0,0000105$$

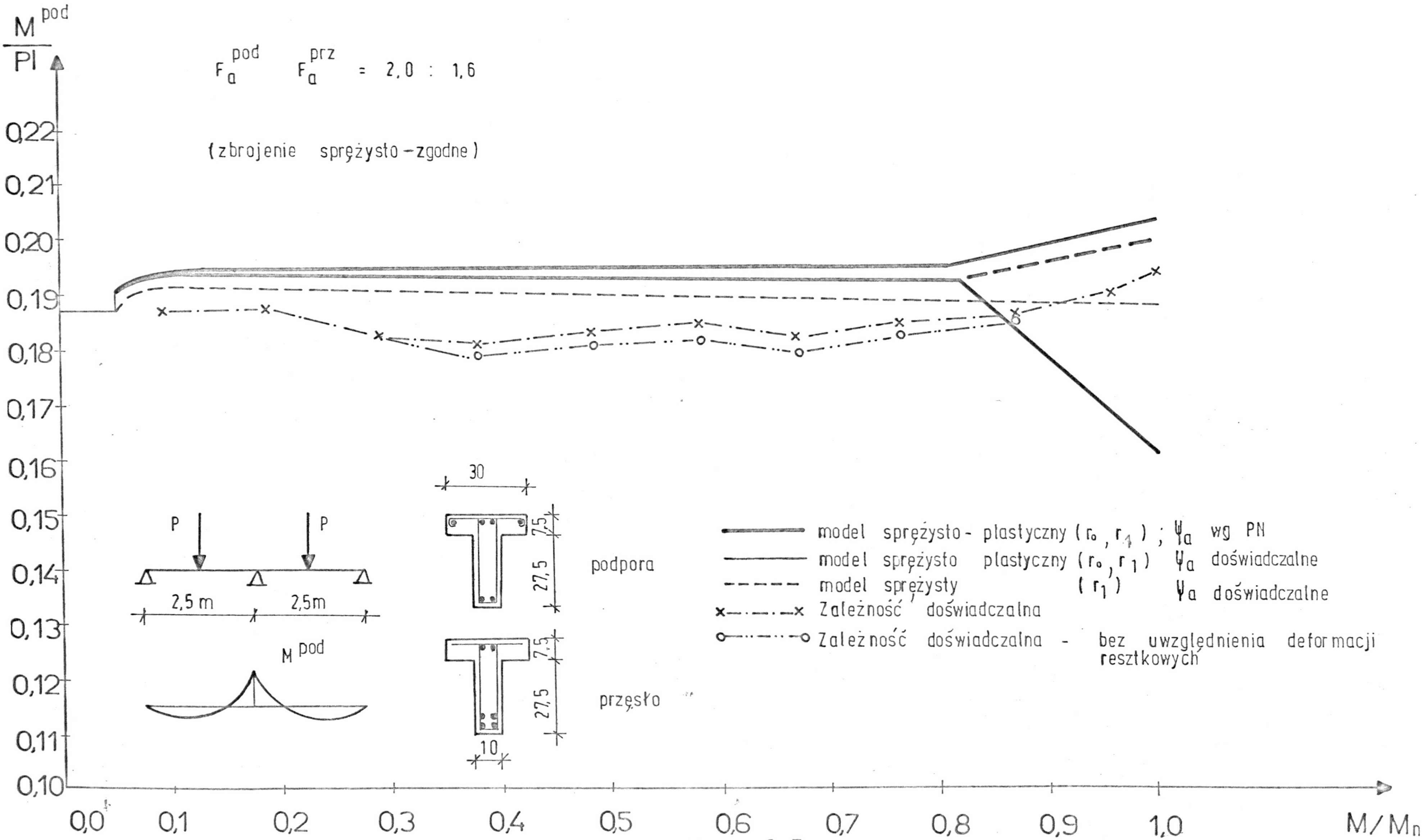
					0	0	0	w_o^*	0	w_o	0
					1	0	0	φ_o^*	0,0004493 ·	φ_o	0,0197
					0	0	0	M_o^*	0	M_o	0
					0	1	0	T_o^*	$0{,}04356 \cdot 10^{6}$	T_o	0,365
					0	0	1	1	1	1	1
	4		$(-0{,}1271-0{,}0012) \cdot 10^{-6}$	0,003796+0,000007	4	$-0{,}1283 \cdot 10^{-6}$	0,003789	w_k^*	0	w_k	0
	1		$(-0{,}03535-0{,}00189) \cdot 10^{-6}$	0,003796+0,000010	1	$-0{,}03724 \cdot 10^{-6}$	0,003786	φ_k^*	0	φ_k	0
	0		4	$-0{,}2390 \cdot 10^{6}$				M_k^*	$-0{,}06476 \cdot 10^{6}$	M_k	-0,136
	0		1	$-0{,}1195 \cdot 10^{6}$				T_k^*	$-0{,}07594 \cdot 10^{6}$	T_k	-0,636
	0		0	1				1	1	1	1

W miarę wzrostu obciążenia moment rysujący zostaje osiągnięty na coraz większym obszarze a coraz większa ilość rys wprowadzana jest do algorytmu.

Obliczone na maszynach cyfrowych wyniki opracowano w postaci wykresów przedstawiających wpływ względnego przyrostu obciążenia na bezwymiarowy moment podporowy /rys. 6-3, 6-4/.

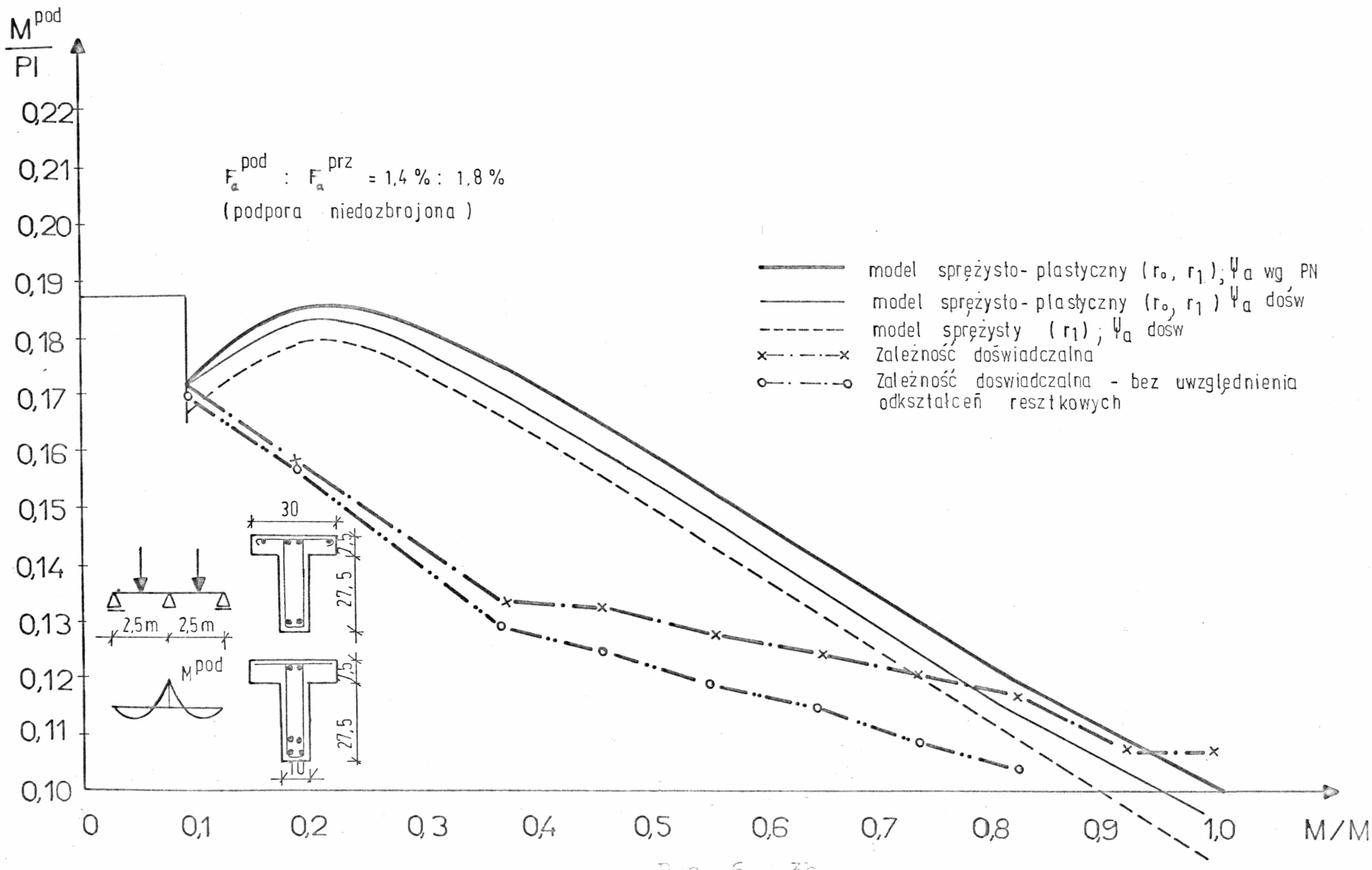
Na wykresach zaprezentowano wyniki najbardziej charakterystycznych przykładów:

- rozmieszczenie zbrojenia jest dostosowane do rozkładu momentów w konstrukcji jednorodnej 1
- konstrukcja jest niedozbrojona na podporze 2
- konstrukcja jest przezbrojona na podporze 4



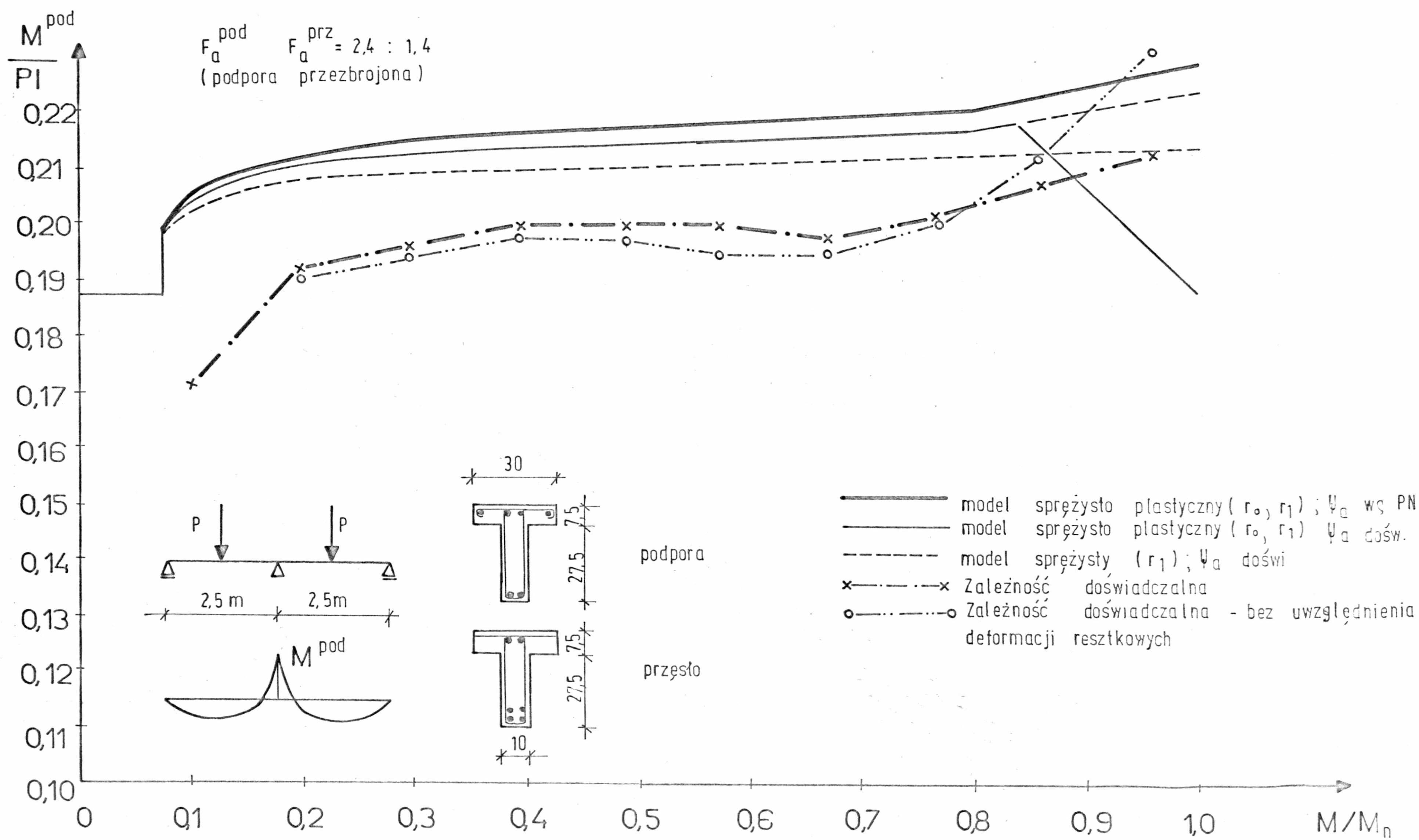
M pod / Pl
F_a pod F_a prz = 2,0 : 1,6
(zbrojenie sprężysto-zgodne)
0,22
0,21
0,20
0,19
0,18
0,17
0,16
0,15
0,14
0,13
0,12
0,11
0,10
0,0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
M/Mn
P
P
2,5 m
2,5m
M pod
30
7,5
27,5
podpora
7,5
27,5
10
przęsło
model sprężysto-plastyczny (r₀, r₁) ; ψa wg PN
model sprężysto plastyczny (r₀, r₁) ψa doświadczalne
model sprężysty (r₁) ψa doświadczalne
Zależność doświadczalna
Zależność doświadczalna - bez uwzględnienia deformacji resztkowych

Rys. 6-3a



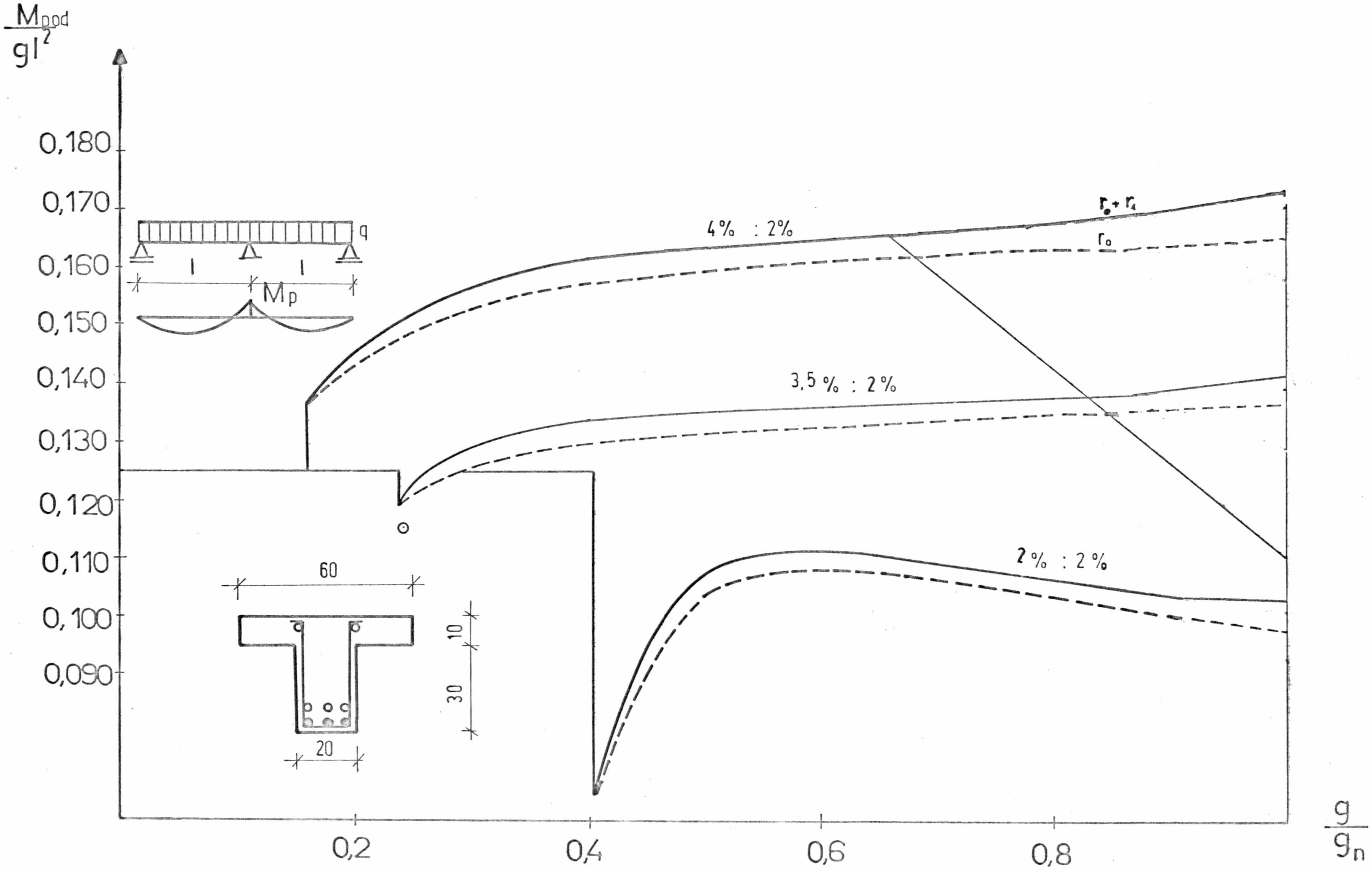
$\frac{M^{pod}}{Pl}$
$F_a^{pod} : F_a^{prz}$ = 1,4 % : 1,8 %
(podpora niedozbrojona)
model sprężysto-plastyczny (r_o, r_1); ψ_a wg PN
model sprężysto-plastyczny (r_o, r_1) ψ_a dośw
model sprężysty (r_1); ψ_a dośw
Zależność doświadczalna
Zależność doswiadczalna - bez uwzględnienia odkształceń resztkowych
2,5m 2,5m
M^{pod}
30
7,5
27,5
10
0,10
0,11
0,12
0,13
0,14
0,15
0,16
0,17
0,18
0,19
0,20
0,21
0,22
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
M/M_n

Rys. 6 - 3b



$\frac{M^{pod}}{Pl}$
F_a^{pod} F_a^{prz} = 2,4 : 1,4
(podpora przezbrojona)
0,22
0,21
0,20
0,19
0,18
0,17
0,16
0,15
0,14
0,13
0,12
0,11
0,10
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1,0
M/M_n
P
P
2,5 m
2,5m
M^{pod}
30
7,5
27,5
10
podpora
przęsło
model sprężysto plastyczny (r_o, r_1) ; ψ_a wg PN
model sprężysto plastyczny (r_o, r_1) ψ_a dośw.
model sprężysty (r_1) ; ψ_a dośw
Zależność doświadczalna
Zależność doświadczalna - bez uwzględnienia deformacji resztkowych

Rys. 6 - 3 c



$\frac{M_{pod}}{gl^2}$
0,180
0,170
0,160
0,150
0,140
0,130
0,120
0,110
0,100
0,090
q
l
l
M_p
4% : 2%
$r_o + r_1$
r_o
3,5 % : 2 %
2 % : 2 %
60
10
30
20
0,2
0,4
0,6
0,8
$\frac{g}{g_n}$

Rozwiązanie sprężyste wykorzystano jako wielkość porównawczą do analizy momentów zginających na podporze. Analizowano wpływ rozmieszczenia zbrojenia na redystrybucję momentów. Proces ten prześledzono zakładając:

- model idealnie sprężystego rozwierania się rysy, wyrażony parametrem r_1 ,
- model sprężysto-plastycznego rozwierania się rysy, przedstawiony za pomocą parametrów r_o i r_1.

Na podstawie obu tych rozwiązań analizowano pośrednio wpływ odkształceń resztkowych na redystrybucję momentów.

W przykładzie przedstawionym na rys. 6-3 porównano wyniki otrzymane analitycznie z danymi doświadczalnymi, a także z rozwiązaniem analitycznym otrzymanym przy przyjęciu normowych wartości współczynnika ψ_a .

Na podstawie otrzymanych z obliczeń wyników, oraz danych doświadczalnych można przedstawić następujące spostrzeżenia:

- na redystrybucję momentów wpływa w istotny sposób rozmieszczenie prętów zbrojeniowych na długości elementu; redystrybucja jest tym mniejsza im zbrojenie odpowiada bardziej zbrojeniu sprężystozgodnemu,
- model, w którym efekty związane z zarysowaniem skupione są w miejscu rysy, daje dość dobrą zgodność jeśli chodzi o charakter wykresu; jednak wyniki otrzymane analitycznie są kilka a niekiedy nawet kilkanaście procent wyższe od wartości doświadczalnych; przyczyną rozbieżności może być nieuwzględnione w obliczeniach przegrupowanie sił wewnętrznych na wysokości przekroju, oraz losowy charakter współczynnika ψ_a,
- przyjęty do obliczeń model opisujący odkształcenia resztkowe daje w przypadku przeanalizowanych przypadków dość dobrą zgodność z doświadczeniem,
- odkształcenia spowodowane deformacjami resztkowymi w rysie nie wpływają istotnie , zarówno w przypadku obliczeń, jak w przypadku doświadczenia, na redystrybucję momentów zginających.

Na rysunkach 6-3, 6-4 zaznaczono obciążenie, przy którym następuje zniszczenie na podporze. Metoda pozwala również na analizę stanów plastycznych. Płynięcie stali odpowiada lokalnemu zwiększeniu się współczynnika r_0. Po osiągnięciu w zbrojeniu na podporze granicy plastyczności następuje, w miarę dalszego obciążania uplastycznienie zbrojenia w przęśle. Szczegółowa analiza tego zjawiska wykracza poza założony zakres pracy.

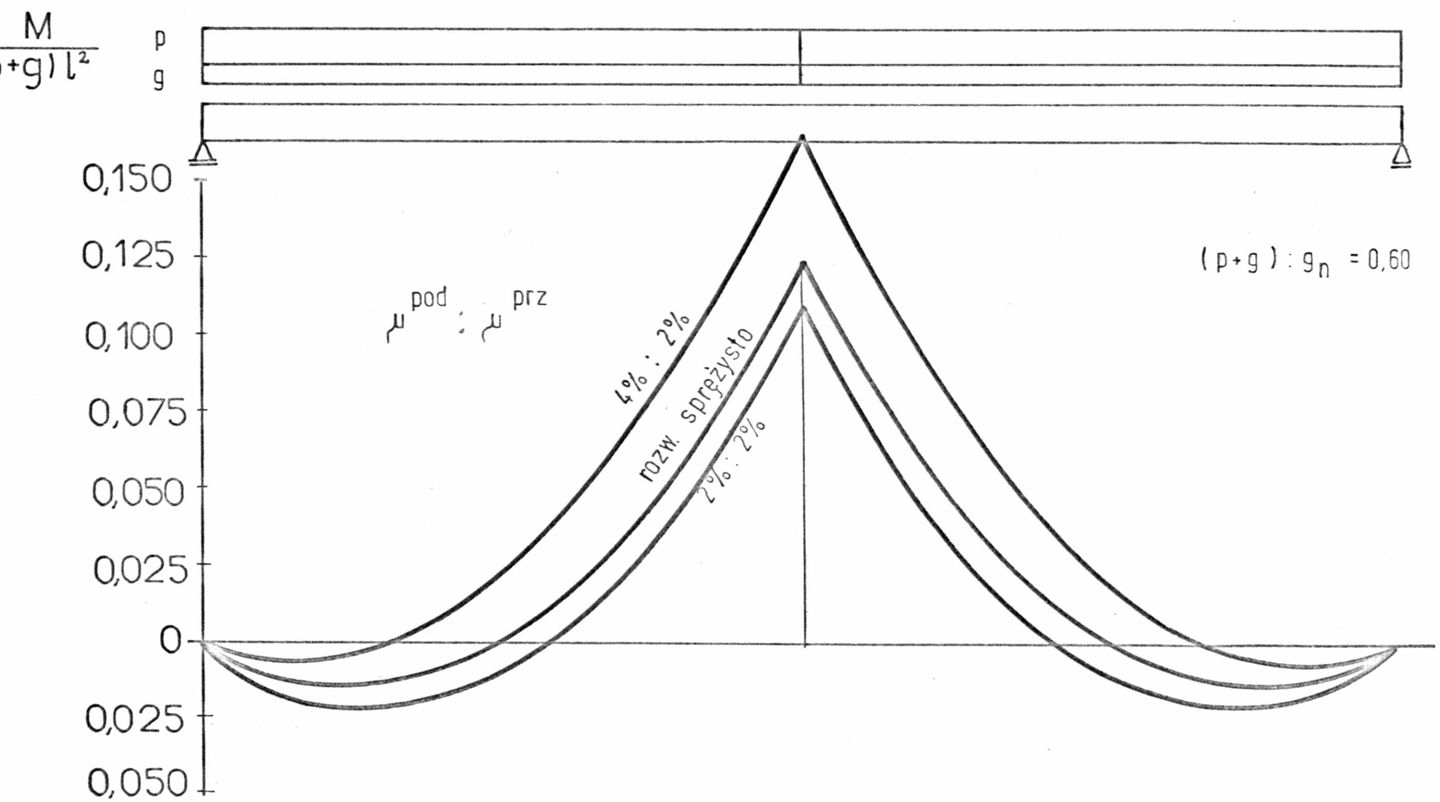
Zagadnieniem, któremu nie poświęcano dotychczas większej uwagi jest wyznaczenie obwiedni momentów w zarysowanych belkach wieloprzęsłowych. Momenty zginające wyznacza się z superpozycji dwóch schematów statycznych, w których obciążenie jest w pierwszym przypadku równomiernie rozłożone, w drugim natomiast przęsła obciążone są tak, aby momenty przyjmowały wartości ekstremalne.

W przypadku konstrukcji niejednorodnej wyznaczanie sił wewnętrznych na zasadzie superpozycji nie będzie poprawne. Obszar zarysowania i kąt rozwarcia rysy zależą od poziomu obciążenia oraz od stosunku obciążenia stałego "g" do zmiennego "p".

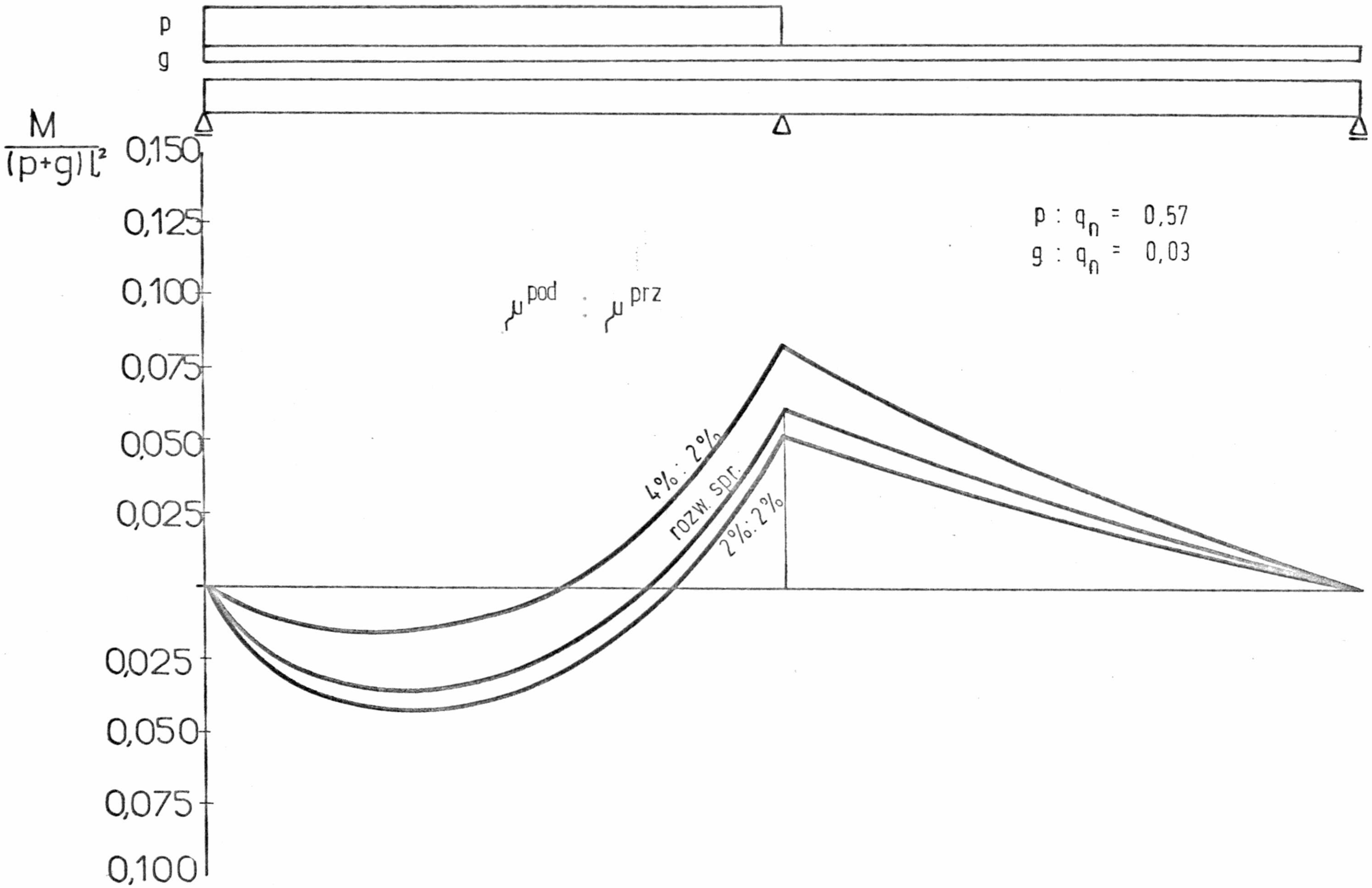
W pracy wykonano przykład dla tej samej belki przęsłowej na poziomie obciążenia /p + g/ : q_n = 0,6. Otrzymane wyniki skonfrontowano z rozwiązaniem sprężystym /rys.6-5/.

Z analizy wynika, że można sporządzić obwiednię momentów zginających w belce, uwzględniając historię obciążenia. Otrzymane rozwiązanie /rys.6-5 d/ pokazuje bardziej niekorzystny przebieg obwiedni w belce z rysami w porównaniu z rozwiązaniem jednorodnym. Podobną analizę można przeprowadzić także i dla innych wielkości statycznych - ugięć, kątów obrotu i sił poprzecznych. Rozwiązanie wyglądałoby analogicznie, gdyby wielkością wymuszającą były deformacje /np. osiadanie podpór/.

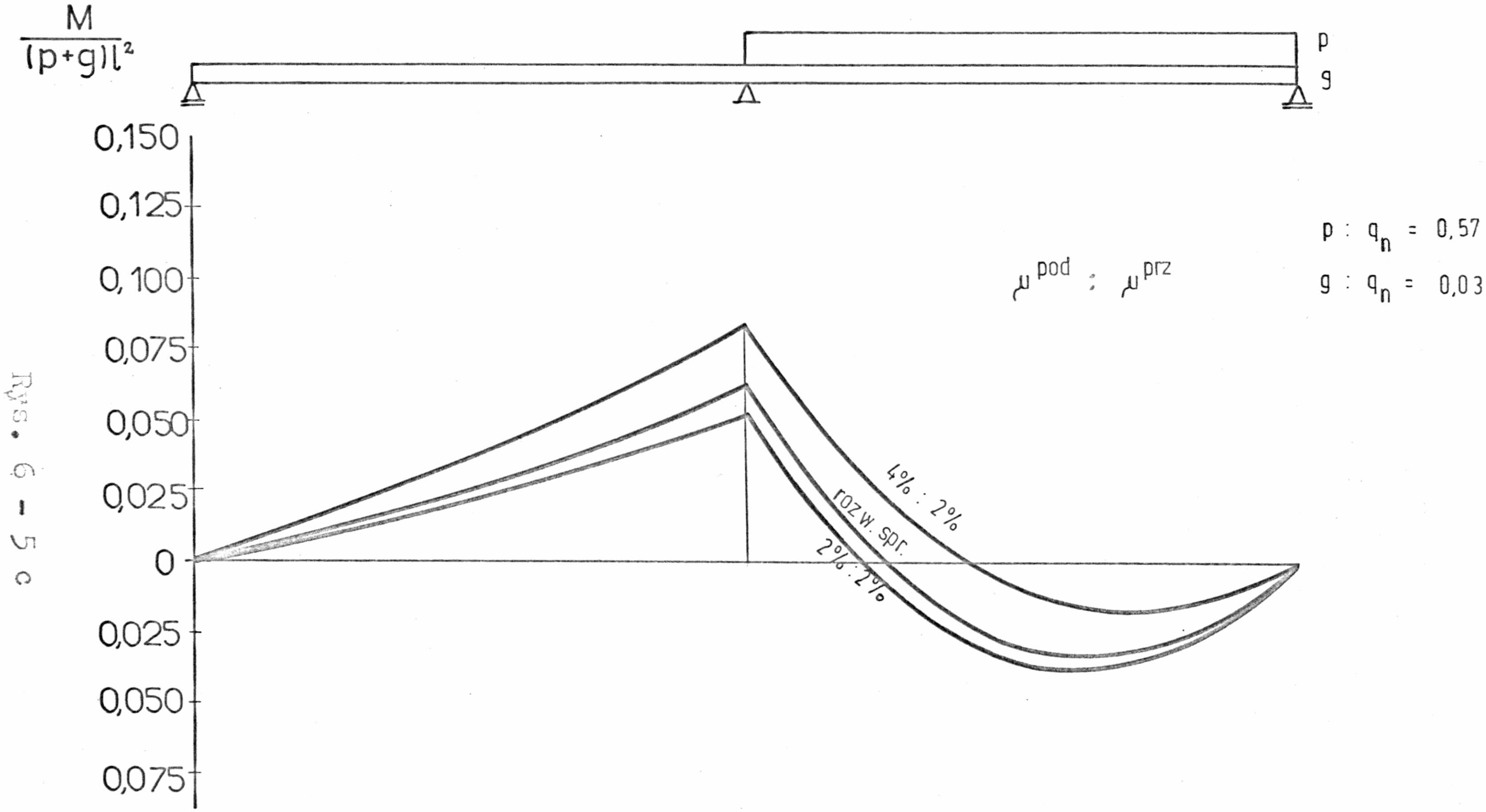
W analizie tej pominięto obciążenia długotrwałe, nie znaczy to jednak, że metoda nie pozwala na taką analizę. Brak dostępu do obszerniejszych doświadczeń uniemożliwił jednak wnikliwszą analizę współczynników r_0 i r_1 charakteryzujących sprężyste i trwałe deformacje w rysie. Spostrzeżenia poczynione w niniejszej pracy skłaniają do przypuszczeń, że przyrost deformacji trwałych /r_0/ będzie miał wpływ na wartości prze-


M / (p+g) l²
p
g
0,150
0,125
0,100
0,075
0,050
0,025
0
0,025
0,050
μ pod : μ prz
4% : 2%
rozw. sprężysto
2% : 2%
(p+g) : gn = 0,60

Rys. 6-5a


p
g
M / (p+g)l²
0,150
0,125
0,100
0,075
0,050
0,025
0,025
0,050
0,075
0,100
p : qn = 0,57
g : qn = 0,03
μpod : μprz
4% : 2%
rozw. spr.
2% : 2%

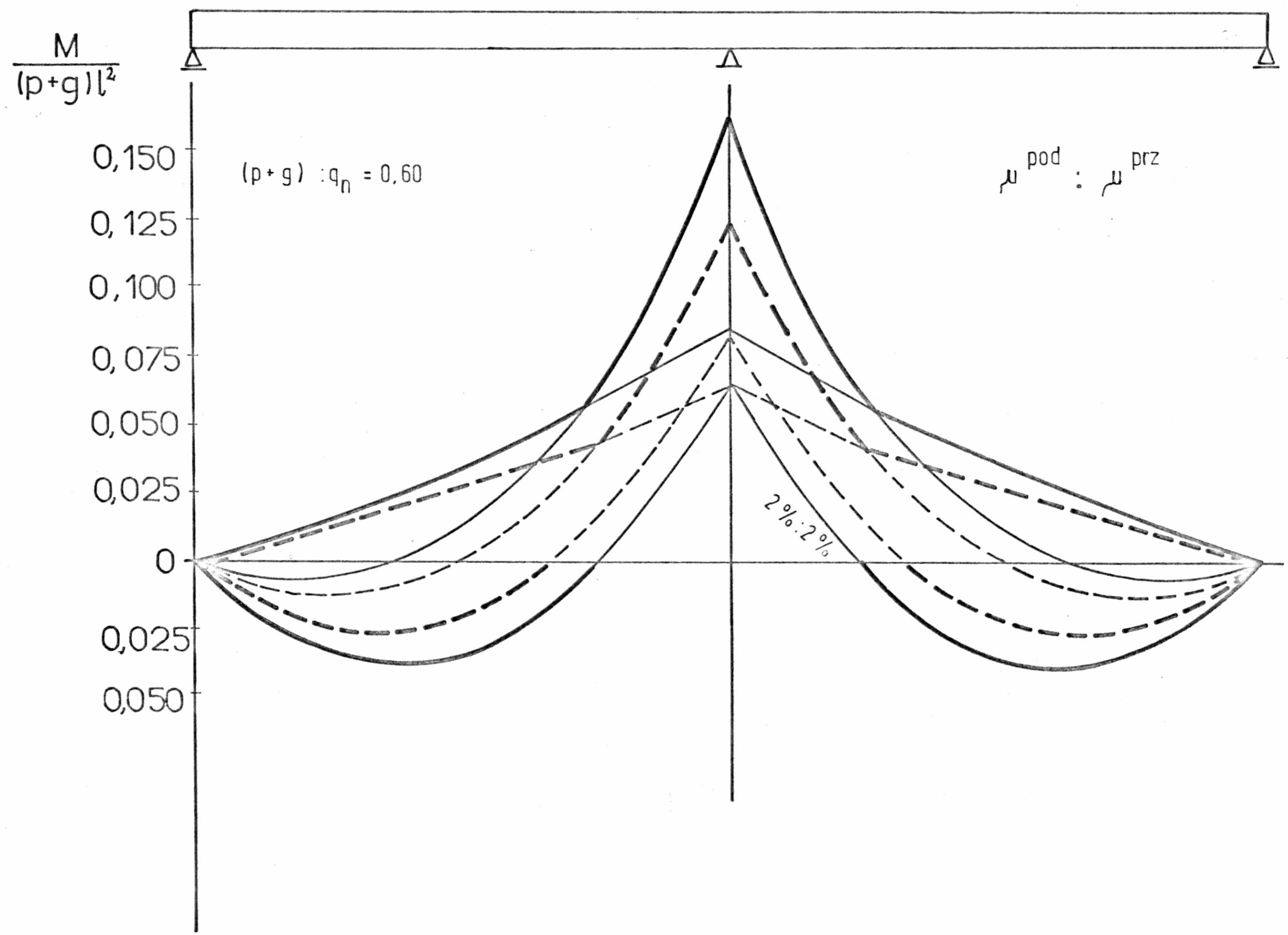
Rys. 6 - 5 b



M / (p+g)l²
p
g
0,150
0,125
0,100
0,075
0,050
0,025
0
0,025
0,050
0,075
μ pod : μ prz
p : qn = 0,57
g : qn = 0,03
4% : 2%
rozw. spr.
2% : 2%

Rys. 6-5c

OBWIEDNIA MOMENTÓW



Rys. 6 - 5 d

mieszczeń, natomiast małą rolę będzie odgrywał przy przegrupowywaniu momentów. Można przypuszczać, że także w przypadku obciążeń długotrwałych, dominującą rolę przy wyznaczaniu wielkości statycznych będzie posiadał współczynnik Ψ_a. Należy jednak oczekiwać, że stosunek naprężeń średnich do naprężeń w rysie $\sigma_a^{śr} : \sigma_a^{II}$ będzie się zmieniał w miarę upływu czasu. Przyczyn należałoby szukać w większym niż przy obciążeniach doraźnych uwidocznieniu się efektów reologicznych, oraz w naruszaniu się współpracy betonu i stali /m.in.wskutek wyciągania się zbrojenia z betonu/ , któta wpływa na zmianę wartości naprężeń $\sigma_a^{śr}$.

Szczegółowe przeanalizowanie tego zagadnienia byłoby istotnym uzupełnieniem tematu dotyczącego wyznaczania trwałych deformacji kątowych w rysie.

6.2. Analiza belki dwuprzęsłowej o zmiennej wysokości

Rozdział przedstawia analizę belki dwuprzęsłowej o zmiennej wysokości /rys.6-8 a,b/ i skrzynkowym przekroju poprzecznym. Wymiary i schemat statyczny przyjęto jak w pracy [50]. Ze względu na kształt przekroju belkę należałoby analizować jako cienkościenną. W ogólnym przypadku równanie osi odkształconej belki o stałej sztywności /rys.6-9/ opisane jest przez układ równań różniczkowych.

$$\frac{EJ}{l^3}\frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} = p(\xi) \quad ;$$

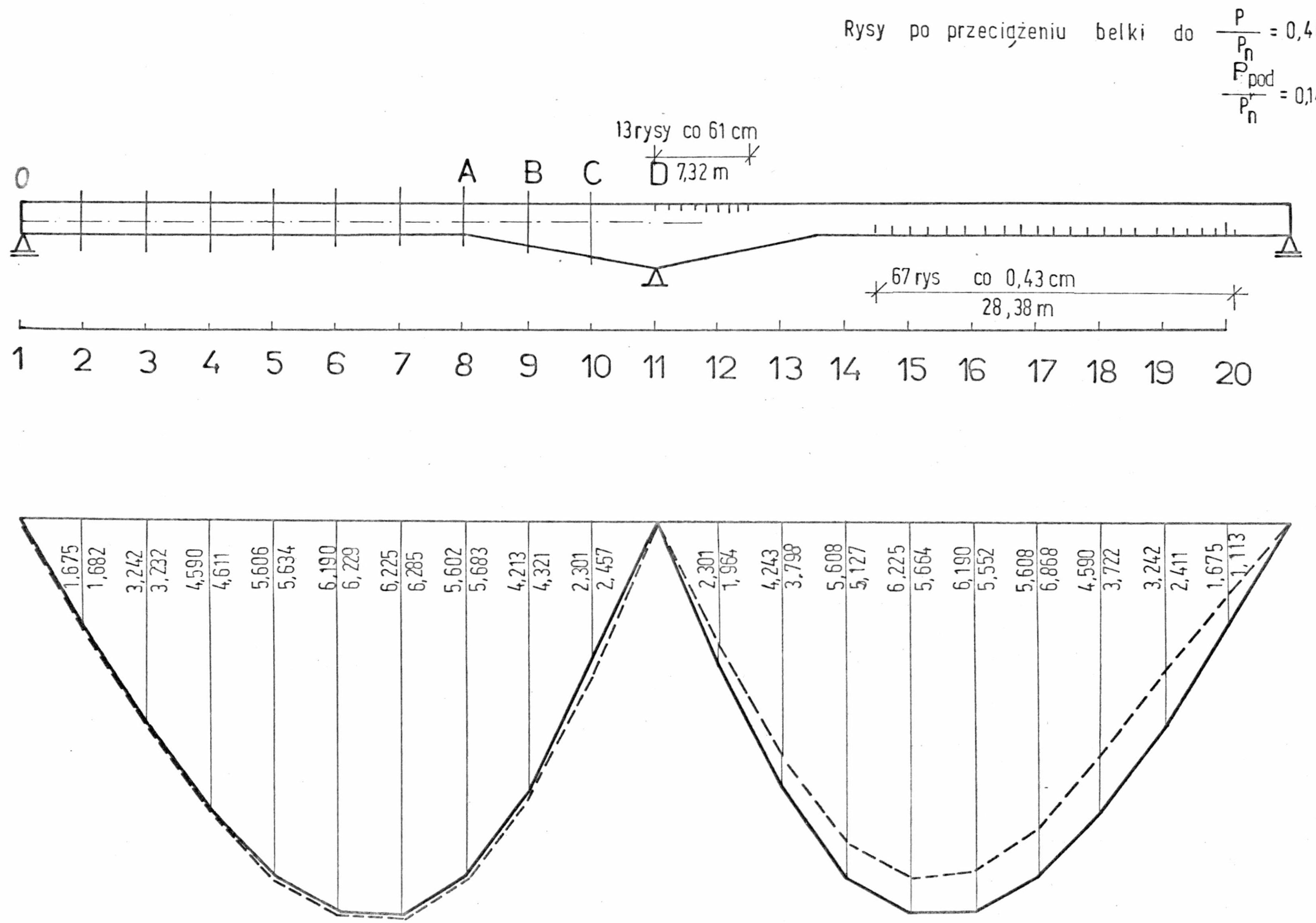
$$\frac{EJ_\omega}{l^3}\frac{\partial^4 \Theta}{\partial \xi^4} - \frac{GJ_{ox}}{l}\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} = ep(\xi) + cp(\xi) \quad ; \qquad 6\text{-}1$$

EJ - sztywność giętna przekroju względem osi y ;

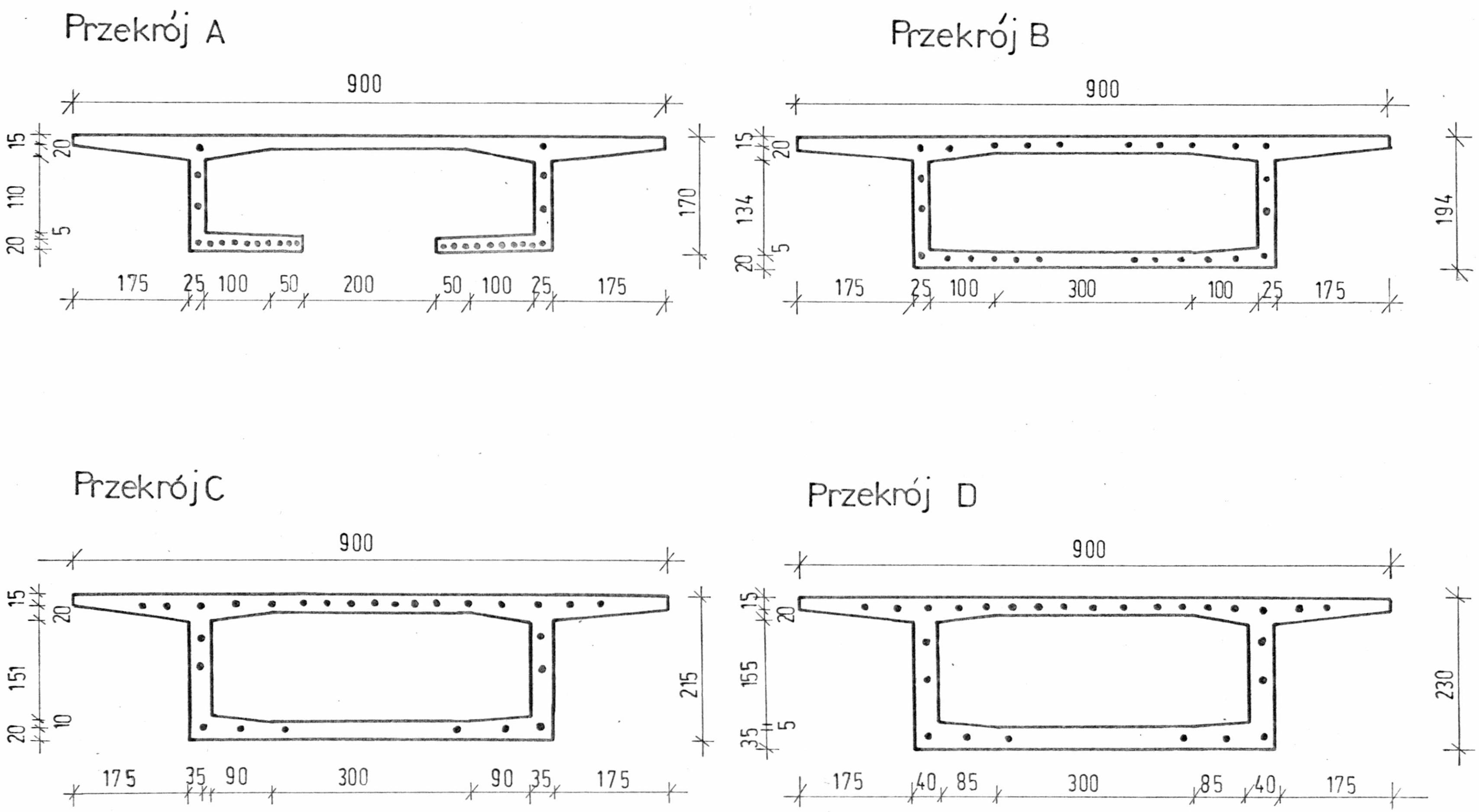
J_ω - główny wycinkowy moment bezwładności ;

GJ_{ox} - sztywność skrętna przekroju ;

c - odległość środka ścinania od środka ciężkości przekroju.

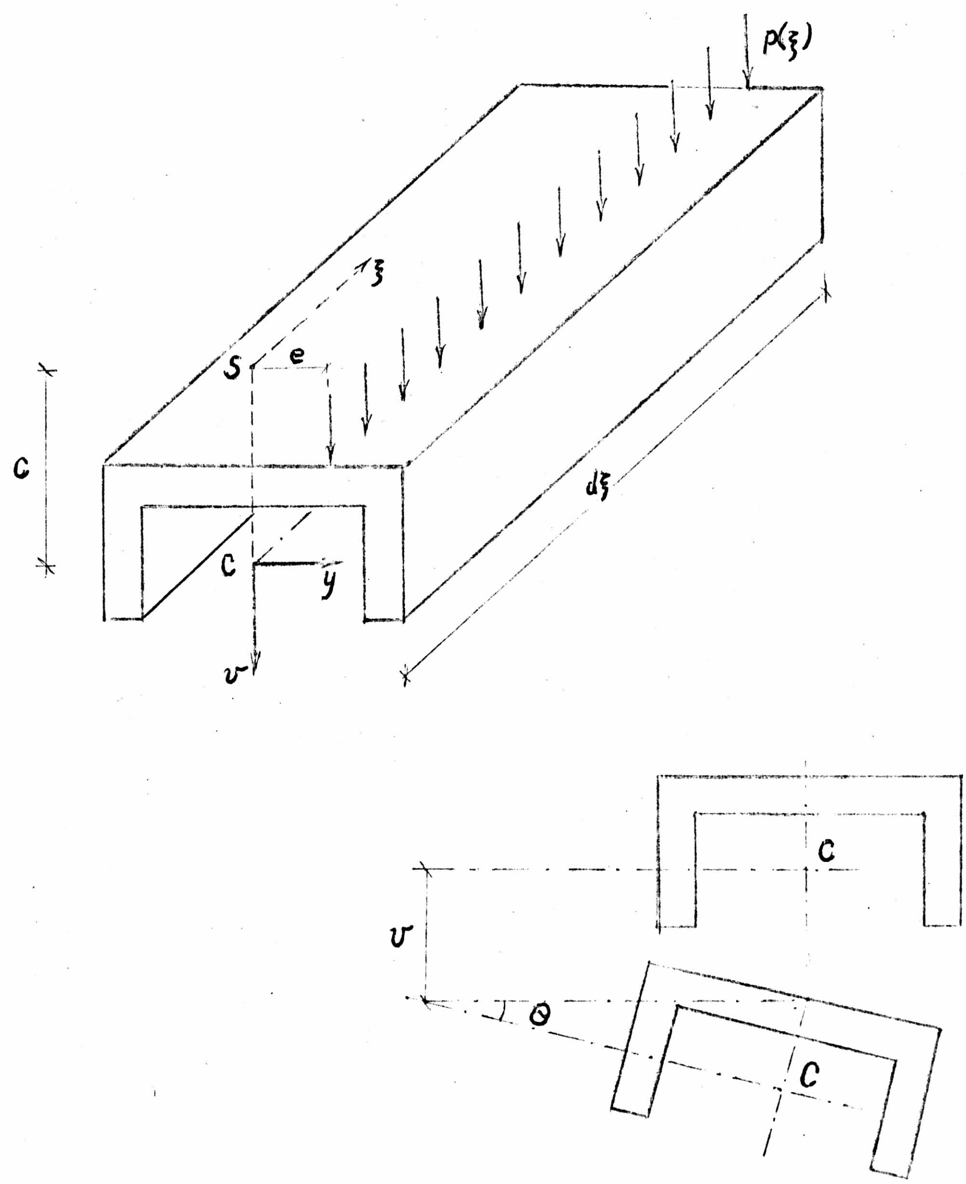

Rysy po przeciążeniu belki do $\frac{P}{P_n} = 0,40$
$\frac{P_{pod}}{P_n^r} = 0,14$
13 rysy co 61 cm
7,32 m
0
A
B
C
D
67 rys co 0,43 cm
28,38 m
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20
1,675
1,682
3,242
3,232
4,590
4,611
5,606
5,634
6,190
6,229
6,225
6,285
5,602
5,683
4,213
4,321
2,301
2,457
2,301
1,964
4,243
3,798
5,608
5,127
6,225
5,664
6,190
5,552
5,608
6,868
4,590
3,722
3,242
2,411
1,675
1,113

Rys. 6-8a



Pole powierzchni pojedynczego pręta zbrojenia $F_a = 4,57\ cm^2$

Rys. 6 - 8 b



S - środek ścinania

C - środek ciężkości

Rys.6-9

Pozostałe oznaczenia jak na rys. 6-9.

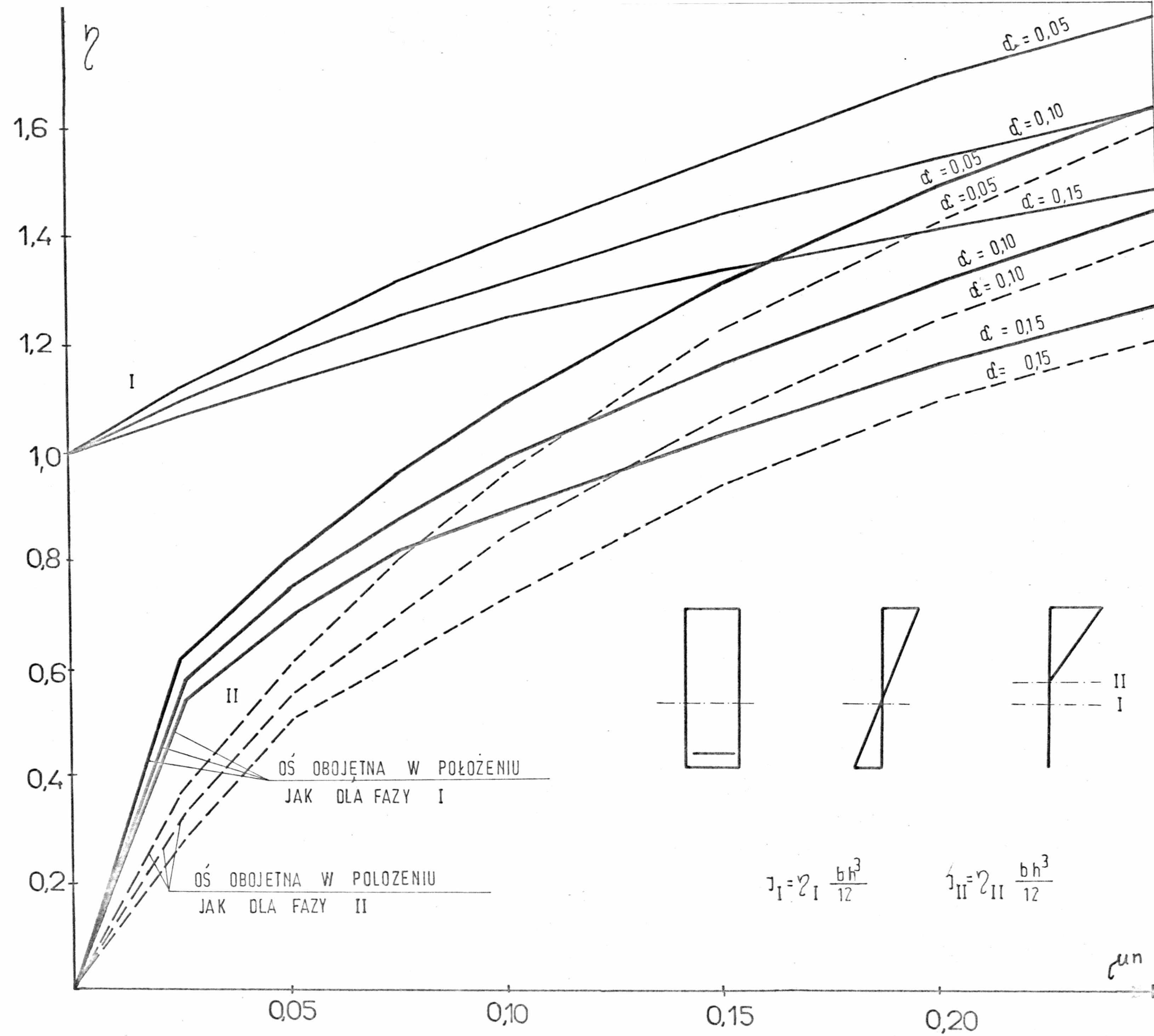
Pierwsze równanie różniczkowe opisuje ugięcie pręta, drugie równanie opisuje skręcanie. Zmienne $v(\xi)$, $\theta(\xi)$ są rozdzielone. W ogólnym przypadku można zbudować na podstawie rozwiązania obu tych równań macierz przeniesienia dla prętów o przekroju cienkościennym. Rozwiązywany przykład ma jednak na celu ilustrację analizy belek o zmiennej wysokości i z tego powodu uproszczono zadanie. Przyjęto obciążenie osiowo-symetryczne, nie powodujące skręcania. Zagadnienie to można opisać za pomocą równania różniczkowego ugięć osi pręta. Przykład szczegółowy ma na celu ilustrację metody.

Rozwiązanie dotyczy wyznaczenia linii wpływu. Przypadek ten może być zastosowany do belki uprzednio przeciążonej, w której rozstaw rys zotsał już ustalony. Obliczenia mogą być wykorzystane w statyce przęsła mostowego po obciążeniu próbnym.

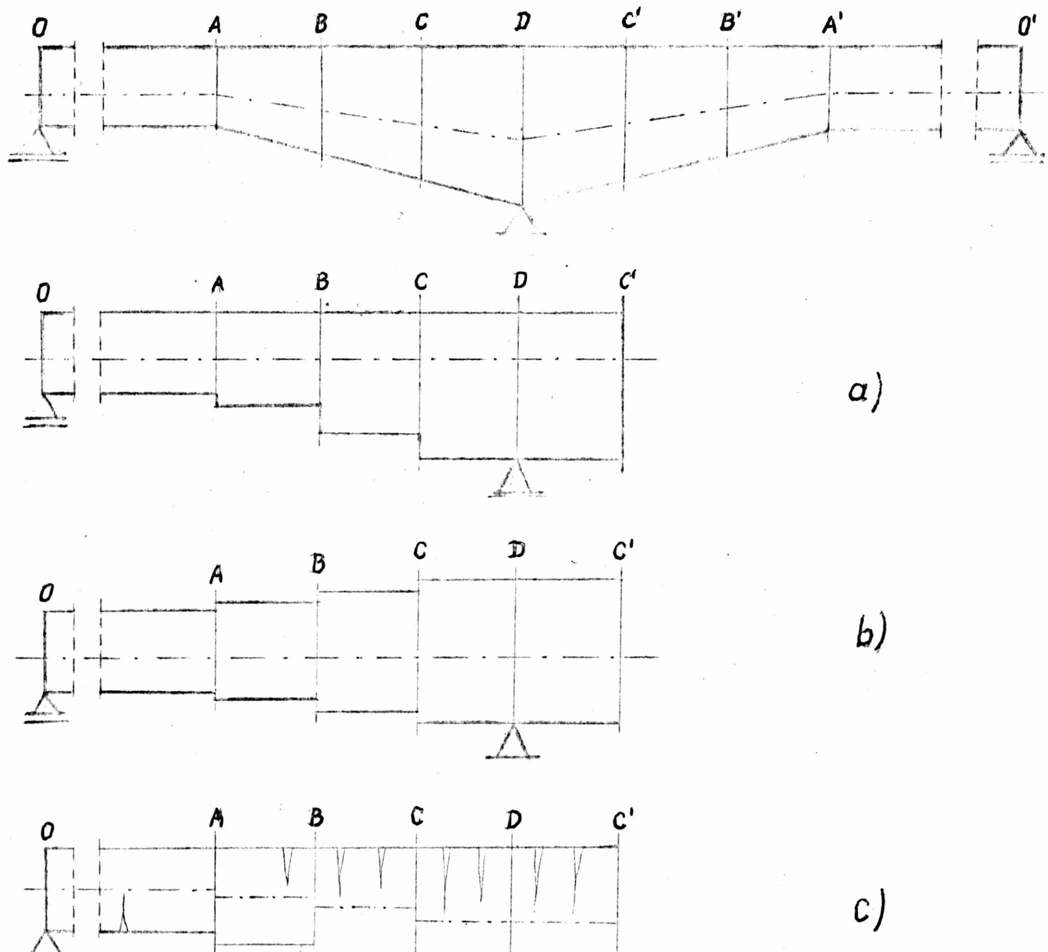
Stan naprężeń i odkształceń w konstrukcjach prętowych jest w rzeczywistości zadaniem przestrzennym zredukowanym do zadania jednowymiarowego względem przyjętej osi odniesienia. W belce o stałym momencie bezwładności wygodnie jest przyjmować oś odniesienia zgodnie z osią obojętną. W belce o zmiennym momencie bezwładności oś obojętna będzie linią zakrzywioną, do obliczeń natomiast wygodnie jest gdy oś redukcji jest linią prostą. W przypadku analizowanego zadania mogłoby to być przedłużenie osi obojętnej odcinka O - A o stałej wysokości przekroju rys. 6-8a .

Moment bezwładności przekroju należy obliczać względem układu odniesienia, a nie względem osi obojętnej, która jest względem niego przesunięta. W niniejszym zadaniu oszacowano wpływ na momenty wynikający z różnicy położenia obu tych osi i różnicy momentów bezwładności przekrojów.

Wpływ przyjęcia położenia osi obojętnej na moment bezwładności belki przedstawia rysunek 6-10. Analiza ta przeprowadzona dla przekroju prostokątnego w zależności od ilości zbrojenia μn i położenia środka ciężkości zbrojenia rozciąganego a/h. Położenie osi obojętnej dla fazy I i II wyznaczono jak w klasycznej teorii żelbetu. Współczynnik η_I charakteryzuje przekrój prostokątny w fazie I. Współczynniki charakteryzuje moment bezwładności belki w fazie II. Wykres zaznaczony linią przerywaną dotyczy obliczenia momentu bez-


η
1,6
1,4
1,2
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0,05
0,10
0,15
0,20
μn
α = 0,05
α = 0,10
α = 0,05
α = 0,05
α = 0,15
α = 0,10
α = 0,10
α = 0,15
α = 0,15
I
II
OŚ OBOJĘTNA W POŁOŻENIU
JAK DLA FAZY I
OŚ OBOJETNA W POLOZENIU
JAK DLA FAZY II
II
I
J_I = η_I bh³/12
J_II = η_II bh³/12

władności względem osi obojętnej jak dla fazy II. Współczynnik ϱ_{II}^{r} uwzględnia przesunięcie osi fazy I względem osi fazy II. Wpływ redukcji układu odniesienia w analizowanej belce na wartości linii wpływu pokazano na trzech przykładach /rys. 6-11 abc/, w których belkę podzielono na części, tworząc w ten sposób zastępcze schematy obliczeniowe.



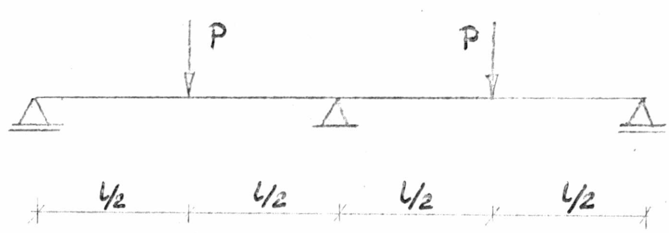
Rys. 6-11

Metoda macierzy przeniesienia przystosowana jest do obliczania belek o wysokości stałej przedziałami, dlatego skosy przypodporowe zostały podzielone na trzy równe odcinki A-B, B-C, C-D i dla każdego z nich przyjęto stałą sztywność zastępczą. Podział na odcinki przyjęto podobnie jak w pracy Z. Bzymka [50],co umożliwiło kontrolę otrzymanych wyników. Przedziałem czwartym jest odcinek O - A, na którym wysokość belki jest stała.

W przykładzie przedstawionym na rysunku 6-11a sztywność obliczano dla wszystkich przedziałów względem osi będącej przedłużeniem osi obojętnej na odcinku O - A. Na rysunku 6-11 b sztywność wyznaczano dla każdego przekroju przedziału względem jego osi obojętnej. W trzecim przypadku /rys.6-11 c/ przyjmowano jako linię odniesienia oś obojętną zarysowanego przekroju zastępczego.

Dla uproszczenia obliczeń przyjęto stan zarysowania jako efekt przeciążenia belki dwoma siłami skupionymi o wartości $P = 0,4\ P_n$ /rys.6-12/. Ustalono w ten sposób ilość i miejsce występowania rys.

$P = 0,4\ P_n$



Rys.6-12

Istotną rzeczą jest spełnienie warunków ciągłości po obu stronach granicy przedziałów. Są one spełnione dla ugięć i kątów obrotu. Jednak w przypadku różnej sztywności sąsiadujących przedziałów nie jest spełniony warunek równości krzywizn i trzecich pochodnych linii ugięcia.

$$v_{,\xi\xi}^{L} \neq v_{,\xi\xi}^{P}$$

$$v_{,\xi\xi\xi}^{L} \neq v_{,\xi\xi\xi}^{P}$$

Na granicy przedziałów zachodzi warunek ciągłości momentów zginającej siły tnącej.

Rozwiązanie otrzymano w ten sposób, że przy ustalonym stanie zarysowania obciążano belkę siłą jedostkową, ustawiając ją kolejno w przekrojach co ξ = 0,1 l. Algorytm postępowania przedstawia schemat. Przykład dotyczy linii wpływowej momentu na podporze środkowej.
Otrzymane wyniki reprezentują położenie siły ξ = 0,1 l.

	H^{O}	$v(0)=0$ $v_{,\xi}(0)=0,0054$ $M(0)=0$ $T(0)=0,8665$
F^{OA}		$\vartheta^{OA}(1)$
H^{A}		$\vartheta^{AB}(0)$
F^{AB}		$\vartheta^{AB}(1)$
H^{B}		$\vartheta^{BC}(0)$
F^{BC}		$\vartheta^{BC}(1)$
H^{C}		$\vartheta^{CD}(0)$
F^{CD}		$v(1)=0$ $v_{,\xi}(1)=-0,0019$ $M(1)=-0,0335$ $T(1)=0,1335$
H^{D}		$v(0)=0$ $v_{,\xi}(0)=-0,0019$ $M(0)=-0,0335$ $T(1)=-0,0335$
$F^{DC'}$		$\vartheta^{DC'}(1)$
$H^{C'}$		$\vartheta^{C'B'}(0)$
$F^{C'B'}$		$\vartheta^{C'B'}(1)$

c.d.

c.d.

$H^{B'}$		$\vartheta^{B'A'}(0)$
$F^{B'A'}$		$\vartheta^{B'A'}(1)$
$H^{A'}$		$\vartheta^{A'O'}(0)$
$F^{A'O'}$	G	$v(1)=0$ $v_{,\xi}(1)=0{,}0006$ $M(1)=0$ $T(1)=-0{,}0335$

Mnożąc macierze przeniesienia przęsła F^{ij} i macierze ciągłości H^{k} we wszystkich przedziałach otrzymuje się macierz przeniesienia konstrukcji G:

$$G = F^{A'O'}H^{A'}F^{B'A'}\dots F^{OA}H^{O}$$

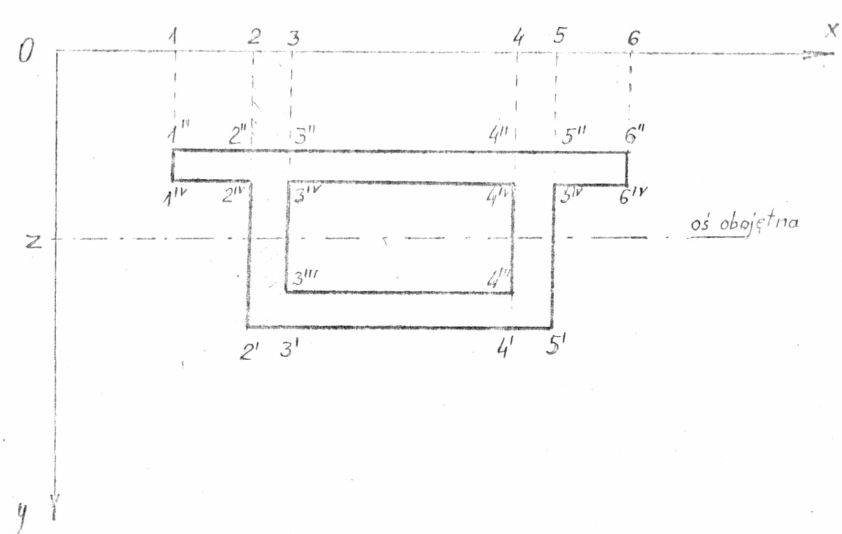
Wiersze tej macierzy odpowiadające znanym warunkom brzegowym na końcu przedziału, w tym przypadku wiersz pierwszy i trzeci, dostarczają współczynników do układu równań, z którego wyznacza się niewiadome $v_{,\xi}(0)$, $T(0)$. Nieznaną reakcję na podporze wyznacza się z dodatkowego warunku, że ugięcie na podporze jest równe zero. Wartości przemieszczeń i sił na początku belki $\vartheta^{OA}(0)$ mnożone kolejno przez macierze przemieszczenia i ciągłości pozwalają wyznaczyć poszukiwane wartości wektorów $\vartheta^{CD}(1), \vartheta^{DC'}(0)$. W przypadku kolejnych położeń siły $P = 1$ należy wprowadzać inne rzędne położenia siły i algorytm powtarzać.

Przykłady obliczone na maszynach cyfrowych /rys.6-8/ pozwoliły oszacować różnicę wynikającą z uwzględnienia przesunięcia osi redukcji przy zmiennej wysokości belki, jak również zaobserwować wpływ zmiany sztywności wskutek zarysowania na wartości momentów linii wpływowej w wybranym - w tym przypadku podporowym - przekroju. Analiza wyników przykładu prowadzi do wniosku, że nieznaczne przesunięcie osi obojętnej wynikające z konstrukcji elementu, jak również z zarysowania nie wpływa w istotny sposób na wartości momentu zginającego.

Wykonany przykład miał na celu głównie ilustrację metody wykorzystującej macierz przeniesienia. Otrzymanych wyników nie należy jednak uogólniać, gdyż otrzymano je dla konkretnego stanu obciążenia przy ustalonym stanie zarysowania. Przy dalszej analizie można prześledzić inne stany zarysowania, uwzględniając przy tym losowość pojawiania się rys i na podstawie otrzymanych rozwiązań wyznaczyć stany najbardziej niekorzystne.

6.3. Załącznik - algorytm do wyznaczania parametrów geometrycznych i wytrzymałościowych przekroju poprzecznego

W celu wyznaczenia parametrów geometrycznych i wytrzymałościowych przekroju poprzecznego posłużono się algorytmem obliczeń przedstawionym przez Z. Bzymka [50]. Pozwala on obliczyć pola powierzchni, współrzędne środka ciężkości, momenty bezwładności względem osi obojętnej oraz wskaźników wytrzymałości przekrojów poprzecznych belek o kształcie wieloboku. Współrzędne punktów załamania konturu przekroju, nazwane punktami węzłowymi, służą do opisania kształtu przekroju. Umożliwia to uwzględnienie wycięć wewnątrz przekroju bez wprowadzania dodatkowych informacji. Oś pdciętych przyjęta jest tak, aby przebiegała równolegle do osi przekroju.



Rys.6-13

W celu obliczenia wielkości pomocniczych - pole przekroju F, moment statyczny względem osi x S_x, moment bezwładności I_x - przyjęto, że przekrój jest podzielony liniami pionowymi na przylegające do siebie wieloboki rys. 6-13

$$A_{2',3',3'',2''} = A_{2,3,3',2'} - A_{2,3,3'',2''}$$

$$S_{2',3',3'',2''} = S_{2,3,3',2'} - S_{2,3,3'',2''}$$

$$I_{2',3',3'',2''} = I_{2,3,3',2'} - I_{2,3,3'',2''}$$

Następnie opisano geometrię przekroju względem osi obojętnej:

$$z = \frac{S_x}{A} \quad ;$$

$$I_s = I_x - Az^2 \quad ; \qquad 6\text{-}2$$

$$W_{si} = \frac{I_s}{y_i - z} \quad ;$$

y_i - rzędne punktu, w którym obliczony jest wskaźnik wytrzymałości - $i = 1, \ldots , 10$.

Jeśli numeracja punktów węzłowych konturu zewnętrznego przebiega w kierunku zgodnym z ruchem wskazówwek zegara, a obrysu wewnętrznego w kierunku przeciwnym, wówczas ze wzorów 6-2 otrzymuje się wynik dodatni. Punkt od którego rozpoczynamy numerację jest równocześnie punktem końcowym. Łuki konturu należy aproksymować odcinkami prostymi. Wskaźniki wytrzymałości mogą być obliczane w punktach węzłowych, w środkach ciężkości pojedynczego pręta zbrojenia, bądź też w środkach ciężkości grup prętów. W przypadku konieczności policzenia wskaźnika wytrzymałości w innym miejscu można przyjąć środek ciężkości w dowolnym miejscu, przyjmując w tym punkcie zbrojenie o bardzo małej powierzchni, różnej jednak od zera. Przy obliczaniu wskaźników wytrzymałości, które mają zostać wykorzystane do wyznaczania naprężeń w przekrojach belki, istotną rolę odgrywa kolejność występowania tychże wskaźźników w danych. Pierwszy powinien zostać podany wskaźnik służący do wyznaczenia górnego naprężenia brzegowego, drugi - do wyliczenia dowolnego naprężenia brzegowego. Inne wskaźniki wytrzymałości mogą być wprowadzane w dowolnym porządku.

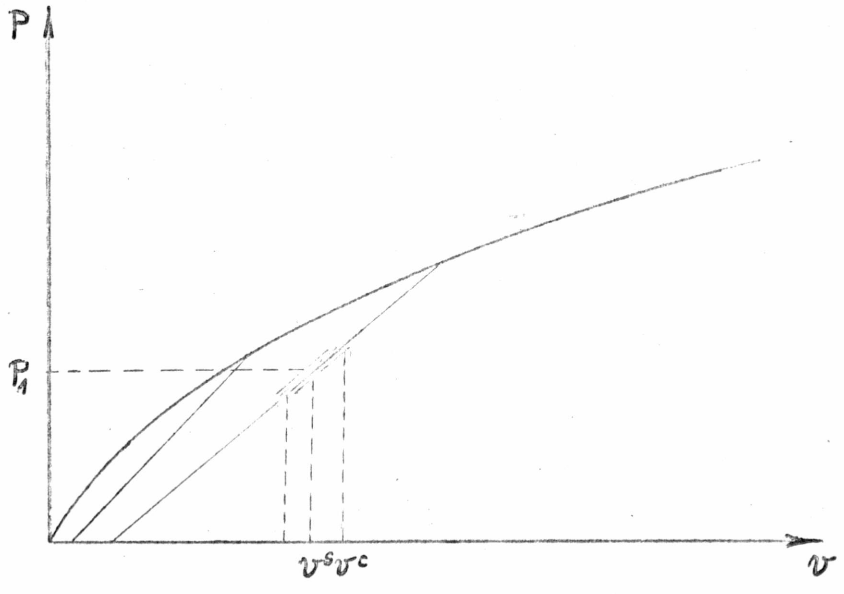
Pewnym ograniczeniem w stosowalności programu jest liczba kształtów przekroju poprzecznego do 60; każdy z punktów przekrojów może posiadać co najwyżej 99 naroży i 31 punktów opisujących środki ciężkości zbrojenia; możliwy jest także wydruk nie więcej niż dziesięciu wskaźników wytrzymałości dla każdego przekroju. Dla większości praktycznych przypadków liczby te nie stanowią jednak istotnego ograniczenia.

7. MACIERZ PRZENIESIENIA W OBLICZANIACH DRGAŃ BELKI

7.1. Belka bez rys

Celem rozdziału jest rozszerzenie zastosowania macierzy przeniesienia na zagadnienia dynamiczne belek żelbetowych, ulegających zarysowaniu.

W zadaniu rozpatrywane są drgania ustalone wokół osi ugiętej pod obciążeniem statycznym. Amplituda drgań jest znacznie mniejsza niż przemieszczenie statyczne.



Rys.7-1

Założenia ogólne i tok postępowania przy formułowaniu macierzy przeniesienia są podobne, jak w zadaniu statycznym. Równanie ruchu przedstawione jest następująco:

$$M\ddot{v}^c + C\dot{v}^c + Kv^c = P^c \quad ; \tag{7 - 1}$$

$v^c = v^s(\xi) + v(\xi, t)$ - całkowite ugięcie pręta ;

$v^s(\xi)$ - statyczna część ugięcia pręta ;

$v(\xi, t)$ - dynamiczna część ugięcia pręta ;

$$P^c = P^s(\xi) + P(\xi,t) \quad ;$$

gdzie $P(\xi,t)$ - siła wymuszająca drgania ,

Ponieważ drgania są ustalone wokół położenia równowagi, zależność 7 - 1 można rozdzielić na dwa równania. Pierwsze z nich, opisujące przemieszczenia statyczne, wyraża się wzorem 3 - 1. Jego rozwiązanie zostało omówione obszerniej w poprzednich rozdziałach. Równanie różniczkowe osi odkształconej drgającej belki ma natomiast postać:

$$M\ddot{v}(\xi,t) + C\dot{v}(\xi,t) + Kv(\xi,t) = P(\xi,t) \, . \qquad 7 - 2$$

W przypadku wyznaczania nietłumionych drgań giętnych, swobodnych belki ciągłej, współczynniki tego równania przyjmą wartości:

M = m - gęstość belki na jednostkę długości ;

C = 0 ; 7 - 3

$$K = \frac{1}{l^2}\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \cdot \frac{EJ}{l^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad \text{lub} \quad \text{dla } EJ = \text{const} \quad K = \frac{EJ}{l^4} \cdot \frac{\partial^4}{\partial \xi^4} \, .$$

Równanie przyjmuje wówczas postać:

$$m\ddot{v} + \frac{EJ}{l^4} v_{,\xi\xi\xi\xi} = 0 \, . \qquad 7 - 4$$

Równanie drgań giętnych dla dowolnie wybranego odcinka przyjmie postać:

$$m\ddot{v} + \frac{EJ}{l^4} v_{,\xi\xi\xi\xi} \Big|^e = 0 \, . \qquad 7 - 5$$

Zapis ten wyraża symbolicznie równanie drgań dla pojedynczego elementu "e".

W przypadku drgań ustalonych można przyjąć, że rozwiązanie jest w postaci iloczynu i założenie to umożliwia rozdzielenie zmiennych w równaniu różniczkowym.

$$v^{e}(\xi,t)=T(t)\,V(\xi) \qquad 7-6$$

Przy drganiach harmonicznych ;

$$T(t)=e^{i\omega t} \qquad 7-7$$

ω - częstość kołowa drgań harmonicznych belki, która będzie obliczona poniżej.

Równanie 7 - 5 można wówczas przedstawić:

$$\frac{EJ}{l^4}V_{,\xi\xi\xi\xi}-m\omega^2 V\Big|^{e}=0 \quad ; \qquad 7-8$$

lub

$$V_{,\xi\xi\xi\xi}-k^4 V\Big|^{e}=0 \quad ; \qquad 7-9$$

gdzie:

$$k^4=\omega^2\frac{ml^2}{EJ} \qquad 7-9a$$

Całka ogólna równania różniczkowego ma postać

$$V^{e}(\xi)=A\cos k\xi+B\sin k\xi+C\,ch\,k\xi+D\,sh\,k\xi\Big|^{e} \qquad 7-10$$

Na podstawie tego rozwiązania można zbudować funkcję, która również będzie rozwiązaniem równania różniczkowego 7 - 9 . Rozwiązanie można otrzymać metodą przemieszczeń, metodą sił lub metodą mieszaną. W zadaniu statycznym przedstawiono całkę równania różniczkowego wyrażoną za pomocą parametrów początkowych. Teraz pokazano rozwiązanie metodą przemieszczeń. Stałe równanie 7 - 10 są wówczas kinematycznymi warunkami brzegowymi:

$$V^{e}(\xi)=\delta_i Z_1(k\xi)+\varphi_i Z_2(k\xi)+\delta_j Z_3(k\xi)+\varphi_j Z_4(k\xi) \quad ; \qquad 7-11$$

gdzie:

$$\delta_i = V^e(0) \quad ; \qquad \delta_j = V^e(1) \quad ;$$
$$\varphi_i = V^e_{,\xi}(0) \quad ; \qquad \varphi_j = V^e_{,\xi}(1) \quad .$$

Rozwiązanie równania amplitud wraz z pochodnymi można przedstawić macierzowo:

$$\{\mathcal{V}(\xi)\}^e = [Z(k\xi)]\{\delta\}^e \quad ; \qquad 7 - 12$$

gdzie :

$$\{\mathcal{V}(\xi)\}^e = \{ V(\xi) \; ; \; V_{,\xi}(\xi) \; ; \; M(\xi) \; ; \; T(\xi) \}^e \quad ;$$
$$\{\delta\}^e = \{ \delta_i \; ; \; \varphi_i \; ; \; \delta_j \; ; \; \varphi_j \}^e \quad .$$

Macierz kształtu można przedstawić w formie:

$$Z(k\xi) = \begin{bmatrix} Z^1(k\xi) & Z^2(k\xi) & Z^3(k\xi) & Z^4(k\xi) \\ Z^1_{,\xi}(k\xi) & Z^2_{,\xi}(k\xi) & Z^3_{,\xi}(k\xi) & Z^4_{,\xi}(k\xi) \\ -EJZ^1_{,\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^2_{,\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^3_{,\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^4_{,\xi\xi}(k\xi) \\ -EJZ^1_{,\xi\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^2_{,\xi\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^3_{,\xi\xi\xi}(k\xi) & -EJZ^4_{,\xi\xi\xi}(k\xi) \end{bmatrix} \quad ; \qquad 7 - 13a$$

gdzie:

$$Z^1(k\xi) = S(k\xi) + \frac{K^2-SU}{U^2-KT} \cdot U(k\xi) + \frac{KU-ST}{KT-U^2} \cdot K(k\xi) \quad ;$$
$$Z^2(k\xi) = \frac{1}{k} T(k\xi) + \frac{SK-TU}{U^2-KT} \cdot U(k\xi) + \frac{SU-T^2}{KT-U^2} K(k\xi) \qquad 7.-13b$$
$$Z^3(k\xi) = \frac{U}{U^2-KT} U(k\xi) + \frac{T}{KT-U^2} K(k\xi) \quad ;$$
$$Z^4(k\xi) = - \frac{K}{U^2-KT} U(k\xi) - \frac{U}{KT-U^2} K(k\xi) \quad ;$$

$$Z^1_{/\xi}(k\xi) = k\left[K(k\xi) + \frac{K^2-SU}{U^2-KT} T(k\xi) + \frac{KU-ST}{KT-U^2} U(k\xi)\right] ;$$

$$Z^2_{/\xi}(k\xi) = k\left[\frac{1}{k} S(k\xi) + \frac{SK-TU}{U^2-KT} T(k\xi) + \frac{SU-T^2}{KT-U^2} U(k\xi)\right] ;$$

....

....

....

$$Z^4_{/\xi\xi\xi}(k\xi) = k^3\left[- \frac{K}{U^2 - KT} K(k\xi) - \frac{U}{KT-U^2} S(k\xi)\right] ;$$

natomiast :

$$\begin{aligned} K(k\xi) &= 0{,}5\,(\mathrm{sh}\, k\xi - \sin k\xi) & K &= K(k) \\ U(k\xi) &= 0{,}5\,(\mathrm{ch}\, k\xi - \cos k\xi) & U &= U(k) \\ T(k\xi) &= 0{,}5\,(\mathrm{sh}\, k\xi + \sin k\xi) & T &= T(k) \\ S(k\xi) &= 0{,}5\,(\mathrm{ch}\, k\xi + \cos k\xi) & S &= S(k) \end{aligned} \qquad 7 - 13c$$

Funkcje Kryłowa $K(k\xi)$, $U(k\xi)$, $T(k\xi)$, $S(k\xi)$ są stabelaryzowane i posiadają ponadto następujące własności:

$$\begin{aligned} &K(0) = U(0) = T(0) = 0 \quad ; \\ &S(0) = 1 \quad ; \end{aligned} \qquad 7 - 13d$$

$$K_{/\xi\xi\xi\xi}(k\xi) = kU_{/\xi\xi\xi}(k\xi) = k^2 T_{/\xi\xi}(k\xi) = k^3 S_{/\xi}(k\xi) = k^4 K(k\xi) .$$

Macierz przeniesiona w zadaniu statycznym /p.3.1.2./ pozwalała wyznaczyć deformacje i siły na końcu przedziału za pomocą parametrów początkowych, tutaj natomiast wielkości statyczne w dowolnym punkcie przedziału są wyrażone za pomocą deformacji na jej końcach. Ażeby utrzymać jednolitą formę rozwiązania należy wyznaczyć deformacje i siły uogólnione na końcach przedziału i znaleźć wzajemną relację między nimi:

$$\{v(0)\}^e = [Z(0)]\{\delta\}^e \quad ; \qquad 7 - 14a$$

$$\{v(1)\}^e = [Z(k)]\{\delta\}^e \quad . \qquad 7 - 14b$$

Wyznaczając ze wzoru 7 - 14a wektor $\{\delta\}$ i podstawiając do równania 7 - 14b otrzymuje się:

$$\{\delta\}^e = [Z(0)]^{-1}\{\vartheta(0)\}^e \quad ;$$

$$\{\vartheta(1)\}^e = [Z(k)][Z(0)]^{-1}\{\vartheta(0)\} \quad ; \qquad 7 - 15$$

Macierz przeniesienia wyraża się iloczynem

$$[F] = [Z(k)][Z(0)]^{-1} \quad ; \qquad 7 - 16$$

$$[F] = \begin{bmatrix} S & \frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 V \\ \frac{k}{\beta}V & S & -\frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}\cdot T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U \\ -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & -\alpha\frac{k}{\beta}V & S & \frac{\beta}{k}T \\ -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^3 T & -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & \frac{k}{\beta}V & S \end{bmatrix} \quad ; \qquad 7 - 17$$

gdzie :

$$\alpha = \frac{EJ^e}{\overline{EJ}} \quad ; \quad \beta = \frac{l^e}{\overline{l}} \quad ;$$

$\overline{EJ}$, $\overline{l}$ - sztywność i długość porównawcza.

Macierz ciągłości sformułowana jest tak, jak w zadaniu statycznym uzupełniona o przypadki, w których występują człony bezwładnościowe /rys. 7 - 2/

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c-m^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & C-I^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad 7 - 18$$

Rys. 7 - 2

Dalszym tokiem postępowania przy wyznaczaniu funkcji własnych jest zbudowanie macierzy przeniesienia dla konstrukcji i wyznaczenie częstości drgań własnych ω .

W układzie równań :

$$\{\vartheta(1)\}^n = [G]\{\vartheta(0)\}^1 \qquad 7 - 19$$

wykorzystujemy dwa zerowe warunki na początku układu, redukując w ten sposób liczbę niewiadomych do dwóch. Pozostałe dwie niewiadome wyznaczamy wykorzystując warunki brzegowe na końcu układu. Prawe strony tych równań są równe zeru. W przypadku belki swobodnie podpartej układ równań przyjmie postać:

$$\begin{aligned} g_{12} \cdot \varphi_o + g_{14} \cdot T_o &= 0 \\ g_{32} \cdot \varphi_o + g_{34} \cdot T_o &= 0 \end{aligned} \qquad 7 - 20$$

g_{ij} - wyraz macierzy G położony w wierszu "i" oraz kolumnie "j".

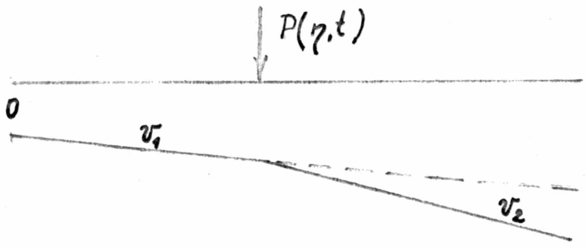
Niezerowe rozwiązanie układu jednorodnego równań istnieje wtedy, gdy wyznacznik współczynników jest równy zeru :

$$\det \begin{vmatrix} g_{12}^{(k)} & g_{14}^{(k)} \\ g_{32}^{(k)} & g_{34}^{(k)} \end{vmatrix} = 0 . \qquad 7 - 21$$

W wyznaczniku tym występuje nieznany parametr k . Wartości tego parametru, dla którego spełnione jest równanie 7 - 21 nazywane są wartościami własnymi. Równanie to jest równaniem przestępnym i posiada wiele pierwiastków. Na ich podstawie można wyznaczyć , ze wzoru 7 - 9a częstości własne ω_n oraz funkcje własne /7 - 11/.

W zadaniach dynamicznych określenie częstości drgań własnych belki ma znaczenie praktyczne. Jest to jednak odpowiedź pośrednia do określenia drgań wymuszonych, między innymi do oceny takiego zjawiska, jak rezonans drgań. Zachodzi on wówczas, gdy częstość siły wymuszającej jest równa częstości drgań własnych.

Rozwiązanie zadania przy drganiach wymuszonych sprowadza się do zsumowania całki ogólnej równania 7 - 5 oraz całki szczególnej pochodzącej od siły wymuszającej /rys. 7 - 3/.



Rys. 7 - 3

Stałe całki szczególnej

$$V_2(\xi) = \left[\mathcal{A} \cos k(\xi - \eta) + \mathcal{B} \sin k(\xi - \eta) + \mathcal{C} \operatorname{ch} k(\xi - \eta) + \mathcal{D} \operatorname{sh} k(\xi - \eta)\right] h(\xi - \eta) \quad ; \qquad 7 - 22$$

zostaną określone z warunków początkowych funkcji w miejscu przyłożenia siły

$$v_2(\xi = \eta; t) = 0 \quad ; \qquad v_{2,\xi\xi}(\xi = \eta; t) = 0 \quad ; \qquad 7 - 23$$

$$v_{2,\xi}(\xi = \eta; t) = 0 \quad ; \qquad v_{2,\xi\xi\xi}(\xi = \eta; t) = -\frac{\beta^3}{\alpha} P(\eta; t) \quad ;$$

$$\beta = \frac{l}{l} \quad ; \quad \alpha = \frac{EJ}{EJ} \; .$$

Jeżeli przyjmie się, że wymuszenie jest harmoniczne :

$$P(\eta,\ t) = P_0 \sin pt \quad ; \qquad 7 - 24$$

wówczas drgania wymuszone ustalają się na poziomie częstości wymuszającej :

$$v(\xi, t) = V(\xi) \sin pt \quad ; \qquad 7 - 25$$

Warunki 7 - 23 można wówczas przedstawić w postaci:

$$V_2(\xi=\eta) = 0 \quad ; \qquad V_{2,\xi\xi}(\xi=\eta) = 0 \quad ;$$
$$V_{2,\xi}(\xi=\eta) = 0 \quad ; \qquad V_{2,\xi\xi\xi}(\xi=\eta) = -\frac{\beta^3}{\alpha} P_0 \quad . \qquad 7 - 26$$

z równania 7 - 22 i warunków 7 - 26 wynika

$$\mathcal{A} + \mathcal{C} = 0 \quad ; \qquad (-\mathcal{A} + \mathcal{C})k^2 = 0 \quad ; \qquad 7 - 27$$
$$(\mathcal{B} + \mathcal{D})k = 0 \quad ; \qquad (-\mathcal{B} + \mathcal{D})k^3 = -\frac{P_0}{EJ} \quad .$$

Otrzymane stałe :

$$\mathcal{A} = \mathcal{C} = 0$$
$$\mathcal{B} = -\mathcal{D} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 P_0 \quad . \qquad 7 - 27a$$

Równanie 7 - 22 przyjmuje postać

$$V_2(\xi) = \frac{P_0}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 \left[\sin k(\xi-\eta) - \mathrm{sh}\, k(\xi-\eta)\right] h(\xi-\eta) \quad ; \qquad 7 - 28$$

lub wykorzystując oznaczenia 7-13c :

$$V_2(\xi) = \frac{P_0}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 \cdot V\left(k(\xi-\eta)\right) h(\xi-\eta) \quad . \qquad 7 - 28a$$

Podobnie można otrzymać całkę szczególną przy drganiach wymuszonych momentem $M(t) = M_0 \sin pt$

$$V_3(\xi) = \frac{M_0}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U\left(k(\xi-\eta)\right) h(\xi-\eta) \quad . \qquad 7 - 28b$$

Całkę ogólną równania 7 - 5 drgań wymuszonych harmoniczną siłą $P_0 \cdot \sin pt$ i momentem $M_0 \cdot \sin pt$ przyłożonymi w punkcie η można przedstawić :

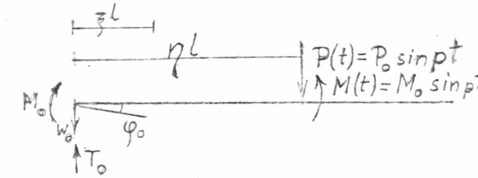
$$V(\xi) = S(k\xi)V(0) + \frac{\beta}{k}T(k\xi)\cdot V_{,\xi}(0) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \cdot U(k\xi)\cdot M(0) - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 \cdot V(k\xi)\cdot T(0) + \frac{P_0}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 \cdot V\big(k(\xi-\eta)\big)\cdot h(\xi-\eta) + \frac{M_0}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \cdot U\big(k(\xi-\eta)\big)\cdot h(\xi-\eta) \qquad 7-29$$

Obliczenie kolejnych pochodnych i wyznaczenie ich wartości dla $\xi = 1$ pozwala przedstawić macierz przeniesienia w postaci uwzględniającej obciążenie zewnętrzne /7 - 30/.

Tak otrzymaną macierz przeniesienia przęsła można wykorzystać do wyznaczenia wielkości statycznych dowolnie wybranego przekroju "i" będącego punktem podziału

$$\{\vartheta(1)\}^{i} = [F]^{i-1,i}[H]^{i-1}\dots[F]^{01}\{\vartheta(0)\}^{0}.$$

Do wyznaczenia wielkości statycznych wewnątrz przedziału można wykorzystać wzór 7 - 29 i jego pochodne. Rozwiązanie tego zadania może być pomocne przy projektowaniu konstrukcji jednowymiarowych obciążonych wymuszającą siłą harmoniczną.



$$
[F] = \left[\begin{array}{cccc:c}
S & \frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 V & \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 V\left(k(1-\eta)\right)P_0 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U\left(k(1-\eta)\right)M_0 \\
\frac{k}{\beta}V & S & -\frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U & \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U\left(k(1-\eta)\right)P_0 + \frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{k}T\left(k(1-\eta)\right)M_0 \\
-\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & -\alpha\frac{k}{\beta}V & S & \frac{\beta}{k}T & -\frac{\beta}{k}T\left(k(1-\eta)\right)P_0 - S\left(k(1-\eta)\right)M_0 \\
-\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^3 T & -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & \frac{k}{\beta}V & S & -S\left(k(1-\eta)\right)P_0 - \frac{k}{\beta}V\left(k(1-\eta)\right)M_0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

/ 7 - 23 /

7.2. Belka z rysami

W rozdziale tym zaproponowano metodę wyznaczania częstości drgań własnych belek zarysowanych, dla takich stanów ustalonych, w których ilość rys na określonym poziomie obciążenia jest stała. Defekt zarysowania wprowadzono do równania ruchu następująco:

$$\frac{EJ}{l^4}\, v_{,\xi\xi\xi\xi} + m\ddot{v} = \sum_{i=1}^{n} r_i\, v_{,\xi\xi}(\xi - \xi_i)\,\delta_{,\xi\xi}(\xi - \xi_i) \quad ; \qquad 7 - 20$$

m - gęstość materiału belki na jednostkę długości ;

n - ilość rys .

Ponieważ drgania odbywają się wokół położenia równowagi /rys. 7-1/ i ugięcia statyczne są rozpatrywane oddzielnie, dlatego deformacje resztkowe, opisywane współczynnikiem r_o powodują ugięcia statyczne i są wprowadzane w całości do statycznej części zadania.

Współczynnik opisujący sprężyste rozwieranie się rysy r_1 został przyjęty przez analogię do statycznych obciążeń wielokrotnych. Zachowanie się rysy w belce jest tutaj traktowane tak, jak przy wielokrotnym obciążeniu statycznym.

Równanie 7 - 20 rozwiązuje się metodą rozdzielenia zmiennych :

$$v(\xi, t) = V(\xi) \cdot T(t) \ . \qquad 7 - 21$$

Po podstawieniu do równania 7 - 20 i rozdzieleniu zmiennych otrzymuje się dwa równania :

$$V_{,\xi\xi\xi\xi}(\xi) - \omega^2 \frac{ml^4}{EJ} V(\xi) = \sum_i r_i V_{,\xi\xi}(\xi)\,\delta_{,\xi\xi}(\xi - \xi_i) \quad ; \qquad 7 - 22$$

$$\ddot{T}(t) + \omega^2 \cdot T(t) = 0 \ . \qquad 7 - 23$$

Rozwiązanie równania czasowego 7 - 23 otrzymuje się w postaci:

$$T(t) = e^{i\omega t} \ . \qquad 7 - 24$$

Całki równania 7 - 22 nazywają się funkcjami własnymi. Ich postać jest następująca:

$$V(\xi) = \frac{-1}{2kEJ} \sum_i r_i M(\zeta_i)\left[\operatorname{sh} k(\xi - \zeta_i) + \sin k(\xi - \zeta_i)\right] \cdot$$

$$\cdot\, h(\xi - \zeta_i) + \frac{1}{2}\left(\operatorname{ch} k\xi + \cos k\xi\right) V(0) + \frac{1}{2k} \cdot$$

$$\cdot\, \operatorname{sh}\left(k\xi + \sin k\xi\right) V_{,\xi}(0) - \frac{1}{2k^2 EJ}\left(\operatorname{ch} k\xi - \cos k\xi\right) \cdot$$

$$\cdot\, M(0) - \frac{1}{2k^3 EJ}\left(\operatorname{sh} k\xi - \sin k\xi\right) \cdot T(0)\,; \qquad 7 - 25$$

lub wykorzystując wzory 7 - 13c:

$$V = \frac{-1}{kEJ} \sum_i r_i\, M(\zeta_i) \cdot T\left[k(\xi - \zeta_i)\right] \cdot h(\xi - \zeta_i) + \qquad 7 - 26$$

$$+ S(k\xi) \cdot V(0) + \frac{1}{k} T(k\xi)\, V_{,\xi}(0) - \frac{1}{k^2 EJ}\, U(k\xi) \cdot$$

$$\cdot\, M(0) - \frac{1}{k^3 EJ}\, K(k\xi)\, T(0)\,.$$

Rozwiązanie to różni się zatem od rozwiązania belki bez rys /por. wzór 7 - 16 /.

Nieznaną wartość $M(\zeta_i)$ oblicza się ze wzoru rekurencyjnego:

$$M(\zeta_i) = k \cdot \sum_{j=1}^{i-1} r_j \cdot M(\zeta_j) \cdot K\left[\xi(\zeta_i - \zeta_j)\right] + \qquad 7 - 27$$

$$- k^2 EJ \cdot U(k\zeta_i) V(0) - kEJ \cdot K(k \cdot \zeta_i)\, V_{,\xi}(0) +$$

$$+ S(k \cdot \zeta_i)\, M(0) + \frac{1}{k} T(k\zeta_i)\, T(0)\,.$$

Wzór ten można przedstawić w innej postaci, w zależności tylko od parametrów początkowych

$$M(\zeta_i) = -EJ \cdot A(\zeta_i)\, V(0) - EJ\, B(\zeta_i)\, V(0) + \qquad 7 - 28$$

$$+ C(\zeta_i)\, M(0) + D(\zeta_i)\, T(0)$$

gdzie:

$$
\begin{aligned}
A(\zeta_i) &= k^2 U(k\zeta_i) + k \cdot \sum_{j=1}^{i-1} r_j \cdot A(\zeta_j)\, K[\xi(\zeta_i-\zeta_j)] \\
B(\zeta_i) &= k\, K(k\zeta_i) + k \sum_{j=1}^{i-1} r_j \cdot B(\zeta_j)\, K[\xi(\zeta_i-\zeta_j)] \\
C(\zeta_i) &= S(k\zeta_i) + k \sum_{j=1}^{i-1} r_j \cdot C(\zeta_j) \cdot K[\xi(\zeta_i-\zeta_j)] \\
D(\zeta_i) &= \frac{1}{k} T(k \cdot \zeta_i) + k \sum_{j=1}^{i-1} r_j \cdot D(\zeta_j) \cdot K[\xi(\zeta_i-\zeta_j)] .
\end{aligned}
\qquad 7 - 29
$$

Macierz przeniesienia dla belki zarysowanej jest superpozycją macierzy dla konstrukcji jednorodnej i wpływu rys :

$$\{\vartheta(1)\} = \big[[F] + [R]\big]\{\vartheta(0)\} = [C]\,\{\vartheta(0)\} . \qquad 7 - 30$$

Macierz C wyraża się we współrzędnych bezwymiarowych wzorem 7-28 .

Kryteria podziału konstrukcji przyjęto tak samo jak w zadaniu statycznym. Założenie, że rysy nie występują dokładnie na granicy przedziałów, na które została podzielona belka; pozwala wykorzystać macierze ciągłości wyznaczone dla konstrukcji jednorodnej /rozdz.7.1/.

Budowanie macierzy przeniesienia dla konstrukcji jest identyczne jak w zadaniu statycznym /por.rozdz.4/ :

$$\{\vartheta(1)\}^n = [C]^n [H]^{n-1,n} \ldots [H]^{1,2} [C]^1 \{\vartheta(0)\}^1$$

Wyznaczanie wartości własnych k omówiono dla belki jednorodnej. Podobnie jak w belce bez rys rozwiązuje się zadanie drgań wymuszonych.

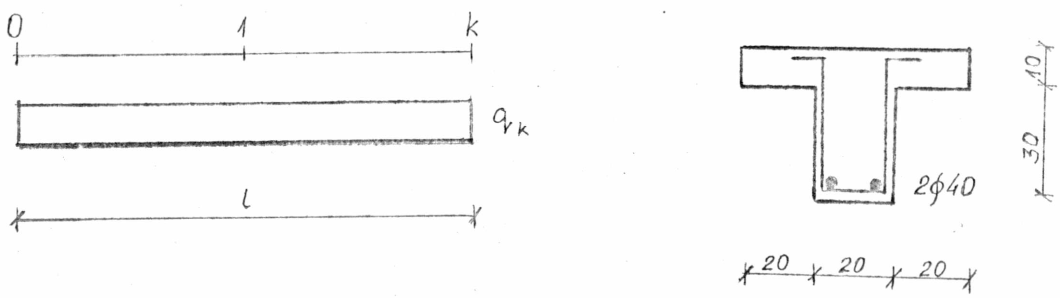
$$
[C] = \begin{bmatrix}
S + \frac{1}{k}\sum_i \tau_i A(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)] & \beta\left[\frac{1}{k}T + \frac{1}{k}\sum_i \tau_i B(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)]\right] & -\frac{\beta^2}{\alpha}\left[\frac{1}{k^2}U + \frac{1}{k}\sum_i \tau_i C(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)]\right] & -\frac{\beta^3}{\alpha}\left[\frac{1}{k^3}V + \frac{1}{k}\sum_i \tau_i D(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)]\right] \\
\frac{1}{\beta}\left[k V + \sum_i \tau_i A(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)]\right] & S + \sum_i \tau_i B(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)] & -\frac{\beta}{\alpha}\left[\frac{1}{k}T + \sum_i \tau_i C(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)]\right] & -\frac{\beta^2}{\alpha}\left[\frac{1}{k^2}U + \sum_i \tau_i D(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)]\right] \\
-\frac{\alpha}{\beta^2}\left[k^2 U + k\sum_i \tau_i A(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)]\right] & -\frac{\alpha}{\beta}\left[k V + k\sum_i \tau_i B(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)]\right] & S + k\sum_i \tau_i C(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)] & \beta\left[\frac{1}{k}T + k\sum_i \tau_i D(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)]\right] \\
-\frac{\alpha}{\beta^3}\left[k^3 T + k^2\sum_i \tau_i A(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)]\right] & -\frac{\alpha}{\beta^2}\left[k^2 U + k^2\sum_i \tau_i B(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)]\right] & \frac{1}{\beta}\left[k V + k^2\sum_i \tau_i C(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)]\right] & S + k^2\sum_i \tau_i D(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)]
\end{bmatrix}
$$

(7-31)

7.3. Przykłady

7.3.1. Wyznaczenie częstości drgań własnych belki swobodnie podpartej

Do obliczeń wybrano belkę o parametrach jak w doświadczeniu C. Bacha [3] /rys.7 - 4/. Pozwoliło to wykorzystać w obliczeniach wyznaczoną doświadczalnie wartość współczynnika charakteryzującego sprężyste rozwarcie rysy r_1.



Rys. 7 - 4

Przyjęto następujące dane belki :

$l = 4$ m ;

$$\frac{q}{q_n} = \frac{60\ 000}{105\ 000} = 0,57 \quad ;$$

$EJ = 80,10\ \mathrm{MNm}^2$;

$$\varrho = \frac{q}{g} = \frac{60\ 000}{9,81} = 6\ 000 \cdot \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} .$$

W przykładzie uwzględniono masę obciążenia użytkowego, ale nie uwzględniono wpływu obciążenia na sztywność belki.

W przypadku belki swobodnie podpartej warunki brzegowe są następujące :

$$v(0) = v(1) = M(0) = M(1) = 0 .$$

Do rozwiązania przyjęto podział belki na dwa równe przedziały. Przyjęto poziom obciążenia $q : q_n = 0{,}57$ co pozwoliło otrzymać taki rozkład rys jak w pracy R.Romanów [22], 16 rys odległych od siebie o 17 cm i rozmieszczonych symetrycznie. Przy tak przyjętym poziomie obciążenia odczytano z wykresu wartość współczynnika $\psi_a = 0{,}78$ i wyliczono ze wzoru 5 - 12a wartość współczynnika $r_1 = 0{,}331$.

Na podstawie tych danych można wyznaczyć macierze przeniesienia dla obu przęseł /wzór 17-31/ i wyliczyć macierz przeniesienia konstrukcji G

$$[G] = [F]^{1k} [H]^{1} [F]^{01} .$$

W równaniu tym występuje jednak nieznany parametr k - wartość własna - który należy dobrać tak aby spełnić warunek 7 - 21, czyli należy rozwiązać równanie przestępne. Rozwiązanie otrzymuje się metodą prób. Początkową wartość parametru k przyjęto jak dla analogicznej belki swobodnie podpartej niezarysowanej. Najniższa wartość własna dla takiej belki wynosi

$$k = \pi \qquad \omega_1 = 71{,}26 \text{ Hz} .$$

Poniżej przedstawiono algorytm postępowania dla pierwszego przybliżenia. W algorytmie mnożenia macierzy uwzględniono, że macierz ciągłości H - jest macierzą jednostkową.
Wzory rekurencyjne obliczono na maszynach cyfrowych i zsumowano z elementami macierzy dla rozwiązania jednorodnego:

$$a_{ij} = a^{j}_{ij} + a^{r}_{ij} ;$$

a^{j}_{ij} - wartość dla rozwiązania jednorodnego ;

a^{r}_{ij} - wpływ rys ;

1,839+0,103 = 1,942	5,296+0,022 = 5,318
5,296+0,014 = 5,310	62,135+0,293 =62,428
18,141+0,573 =18,714	1,839+0,103 = 1,942
62,135+0,046 =62,181	18,141+0,573 =18,714
0,1865+0,052 =0,1917	0,6386+0,010 = 0,6986
0,6386+0,017 =0,6403	5,296 +0,009 = 5,305
1,839 +0,032 =1,871	0,1865+0,052 = 0,1917
5,296 +0,007 =5,303	1,839 +0,032 = 1,871

					0	0
					1	0
					0	0
					0	1
$[F]^{01} =$	x	1,942	x	- 0,1917	1,942	- 0,1917
	x	5,310	x	- 0,6403	5,310	- 0,6403
	x	18,714	x	1,871	18,714	1,871
	x	62,181	x	5,303	62,181	5,303
$[F]^{1k} =$	5,318	1,942	- 0,6986	0,1917	45,633	- 4,587
	x	x	x	x	x	x
	62,428	18,714	5,305	1,871	436,225	43,798
	x	x	x	x	x	x

Ażeby układ równań /por. 7 - 20/:

$$g_{11}\,\varphi_0 + g_{12}\,T_0 = 0$$
$$g_{21}\,\varphi_0 + g_{22}\,T_0 = 0 \quad ;$$

miał niezerowe rozwiązania ze względu na φ_0 i T_0 musi zostać spełniony warunek:

$$\det\left[a_{ij}\right] = 0 \qquad i,j = 1,2 \quad ;$$

$$\begin{vmatrix} 45,633 & -4,587 \\ -436,225 & 43,798 \end{vmatrix} = -2,3299 \neq 0 \, .$$

Ponieważ wyznacznik nie jest równy zeru, należy przeprowadzić ponowne obliczenie dla innych wartości k. Otrzymano następujące wyniki:

$$k = 2,50 \qquad \det a_{ij} = 0,325 \quad ;$$
$$k = 2,60 \qquad \det a_{ij} = -0,261 \quad ;$$

Na podstawie interpolacji liniowej otrzymano wartości k, dla której wyznacznik równa się zeru

$k_1 = 2{,}508 \approx 2{,}51 \Rightarrow \omega_1 = 45{,}50$ Hz

Równanie posiada nieskończenie wiele pierwiastków k. Dla celów praktycznych najistotniejsze są początkowe wartości własne. Podobnie otrzymano:

$k_2 = 5{,}13 \Rightarrow \omega_2 = 190{,}04$ Hz

Dla porównania przytoczono również wartości własne oraz częstości drgań tej samej belki otrzymane niezależną metodą przez R. Romanów w pracy [22] oraz wartości własne i częstości drgań belki niezarysowanej:

$$k_1^{rys} = 2{,}55 \; ; \quad \omega_1^{rys} = 47{,}03 \text{ Hz}$$
$$k_1^{jdn} = \pi \; ; \quad \omega_1^{jdn} = 71{,}26 \text{ Hz}$$

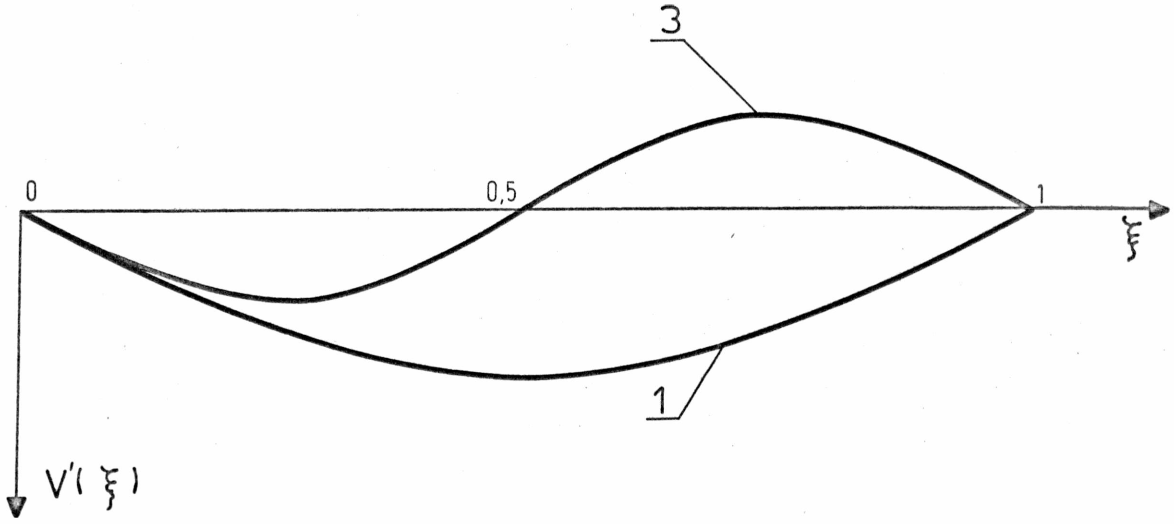
$$k_2^{rys} = 5{,}20 \; ; \quad \omega_2^{rys} = 195{,}25 \text{ Hz}$$
$$k_2^{jdn} = 2\pi \; ; \quad \omega_2^{jdn} = 285{,}31 \text{ Hz}$$

Wyliczonym wartościom własnym odpowiadają funkcje własne. Dwie pierwsze formy drgań zarysowanej belki swobodnie podpartej przedstawiono na rysunku 7 - 5 a. Pierwszą pochodną funkcji własnej pokazano na rys. 7 - 5 d. Następnie porównano pierwszą znormalizowaną funkcję własną z funkcją $\sin\pi\xi$ (rys. 7 - 5b), a drugą z funkcją $\sin 2\pi\xi$ (rys. 7 - 5 c).

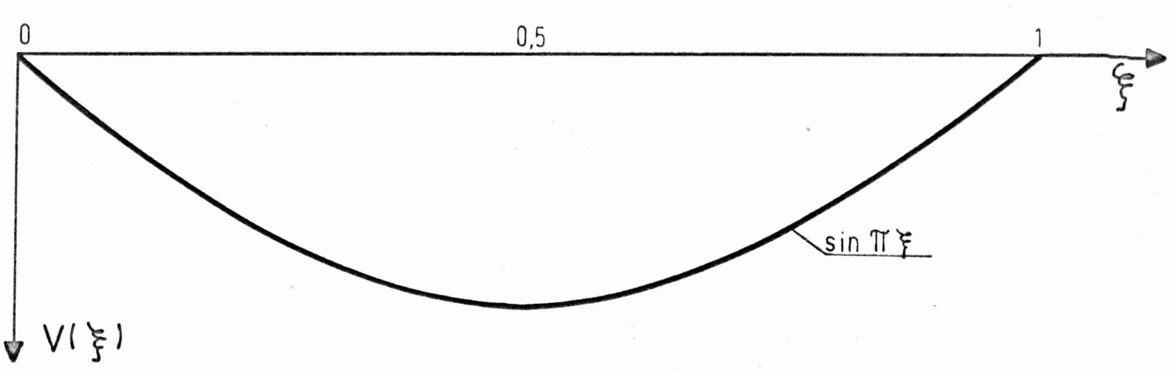
Rzędne wykresów przedstawiono w tabelach 7 - 1, 7 - 2.

Tabela 7 - 1

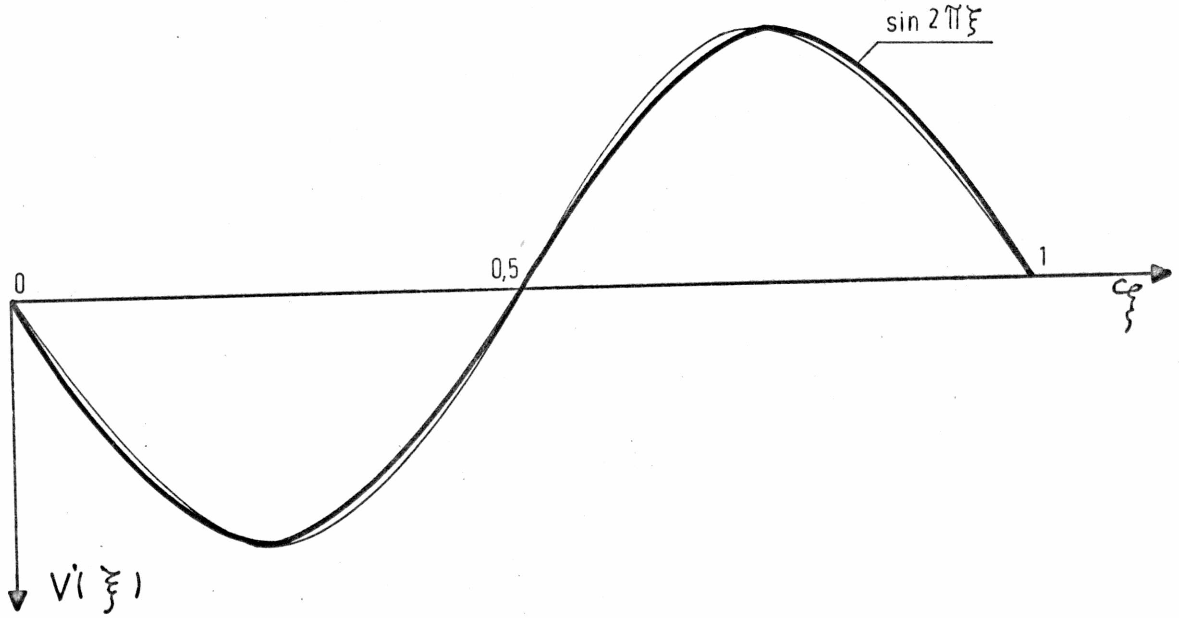
ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$V_1(\xi)$	0	0,5787	0,9504	0,9504	0,5787	0
$\sin\pi\xi$	0	0,5887	0,9510	0,9510	0,5887	0
ξ	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
$V_2(\xi)$	0	0,9257	0,6094	-0,6094	-0,9257	.0
$\sin 2\pi\xi$	0	0,9510	0,5877	-0,5877	-0,9510	0



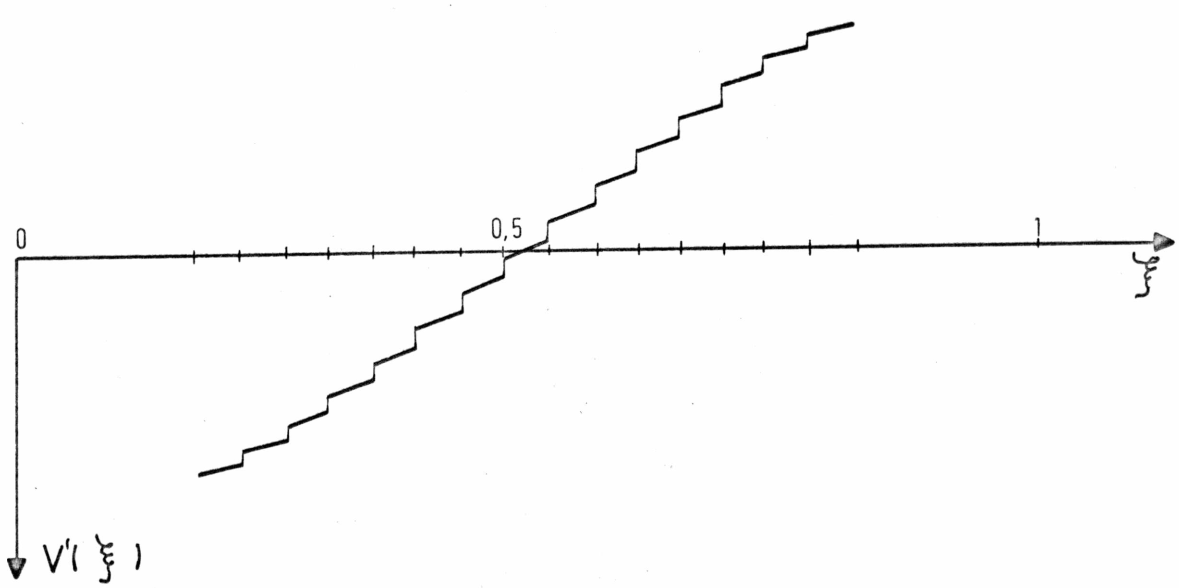
Rys. 7 - 5 a



Rys. 7 - 5 b



Rys. 7 - 5 c



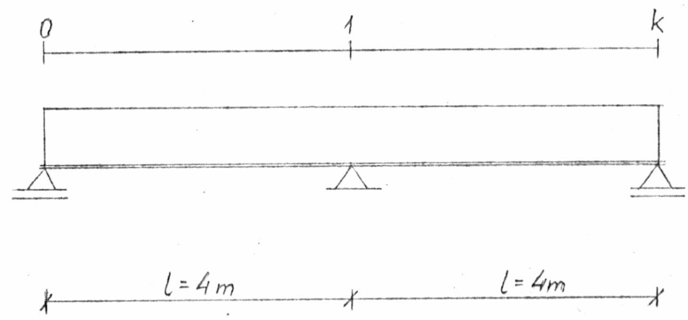
Rys. 7 - 5 d

Tabela 7 - 2

Miejsce rysy ζ_i	Pochodne pierwszej formy drgań		Skok w miejscu rysy
	$v_1'(\zeta_i^-)$	$v_1'(\zeta_i^+)$	$\lvert v_1'(\zeta_i^+) - v_1'(\zeta_i^-)\rvert$
0,1812	0,9286	0,8837	0,0449
0,2237	0,8477	0,7942	0,0535
0,2662	0,7519	0,6904	0,0615
0,3087	0,6429	0,5743	0,0684
0,3512	0,5220	0,4480	0,0740
0,3937	0,3920	0,3136	0,0784
0,4362	0,2550	0,1736	0,0814
0,4787	0,1134	0,0305	0,0829
0,5212	- 0,0302	- 0,1131	0,0829
0,5637	- 0,1733	- 0,2547	0,0814
0,6062	- 0,3133	- 0,3917	0,0784
0,6487	- 0,4477	- 0,5218	0,0741
0,6912	- 0,5741	- 0,6425	0,0684
0,7337	- 0,6902	- 0,7517	0,0615
0,7762	- 0,7940	- 0,8475	0,0535
0,8184	- 0,8836	- 0,9282	0,0446

7.3.2. Wyznaczenie częstości drgań własnych belki dwuprzęsłowej

Przykład wykonano na belce o parametrach jak w rozdziale 7.3.1. obciążonej także do poziomu $q : q_n = 0,6$ (q_n - obciążenie niszczące przęsło) o schemacie statycznym jak na rys. 7 - 6. Przyjęto sprężystozgodne zbrojenie na podporze. Przyjęto 11 rys w każdym przęśle, rozmieszczonych symetrycznie względem miejsca występowania największego momentu przęsłowego w rozstawie co 17 cm. Rysy powstałe wskutek ujemnych momentów zginających przyjęto nad teoretycznym punktem podparcia oraz po trzy rysy po obu jego stronach co 31 cm. Wartości własne otrzymane z rozwiązania belki jednoprzęsłowej przyjęto jako pierwsze przybliżenie.



Rys. 7 - 6

						φ	T	1	ΔQ	
						0	0	0	0	
						1	0	0	0	
						0	0	0	0	
						0	1	0	0	
						0	0	1	0	
						0	0	0	1	
f_{ij}^{01}				0	0					
0				1	0					
0				0	1					
1	0	0	0	0	0					
0	1	0	0	0	0					
0	0	1	0	0	0					
0	0	0	1	0	1					
0	0	0	0	1	0					
1	0	0	0	0	0					
f_{ij}^{1k}				0	0	g_{12}	g_{14}	0	g_{16}	$v_k = 0$
						g_{32}	g_{34}	0	g_{36}	$M_k = 0$
0				1	0					
0				0	1	g_{62}	g_{64}	0	0	$v_1 = 0$

W jednorodnym układzie równań, którego wyznacznik współczynników jest przyrównywany do zera, wystąpił dodatkowy warunek zerowego ugięcia na podporze pośredniej i nadliczbowa niewiadoma - reakcja podporowa.

$$\det \begin{vmatrix} g_{12} & g_{14} & g_{16} \\ g_{32} & g_{34} & g_{36} \\ g_{62} & g_{54} & 0 \end{vmatrix} = 0 \, .$$

Wartości własne obliczone na maszynach cyfrowych metodą prób przyjmą wartości:

k	2,30	2,40	2,50	2,60	3,10	3,20	3,300	3,40
det	2,621	1,453	-0,012	-1,448	-1,431	-0,197	1,078	2,375

k	5,00	5,10	5,20	5,30	5,70	5,80	5,90	6,00
det	2,181	0,754	-0,547	-1,805	-2,003	-0,404	1,053	2,731

Na podstawie interpolacji liniowej otrzymano następujące wartości własne:

$$k_1^{rys} = 2,499$$
$$k_2^{rys} = 3,215$$
$$k_3^{rys} = 5,074$$
$$k_4^{rys} = 5,828$$

Odpowiadające im wartości własne belki jednorodnej wynoszą natomiast:

$$k_1^{jdn} = 3,142$$
$$k_2^{jdn} = 3,927$$
$$k_3^{jdn} = 6,284$$
$$k_4^{jdn} = 7,069$$

Określenie częstości drgań własnych belki ma przy projektowaniu znaczenie praktyczne. Pozwala ona bowiem określić drgania wymuszone a także w przypadku gdy częstość siły wymuszającej równa jest częstości drgań własnych, zjawisko rezonansu.

Z przedstawionych przykładów widać, że zarysowanie powoduje znaczne zmniejszenie się częstości drgań własnych, a zwiększenie się ilości rys powoduje dalsze jej zmniejszanie.

8. MACIERZ PRZENIESIENIA PRZY OBLICZANIU SIŁY KRYTYCZNEJ W SŁUPIE ULEGAJĄCYM ZARYSOWANIU

W konstrukcjach ramowych występuje problem mimośrodowego ściskania. Przy projektowaniu prętowych elementów ściskanych pojawiają się takie problemy, jak ustalenie długości obliczeniowej i siły krytycznej. Norma zaleca przyjmowanie siły krytycznej na podstawie wzoru empirycznego, według którego siła ta zależy między innymi od zmian reologicznych. Przypadki bardziej złożone sprowadzane są do prostych schematów zastępczych. Długości obliczeniowe są przyjmowane na podstawie tych schematów w zależności od połączeń z sąsiadującymi elementami konstrukcji, lub według zasad mechaniki budowli, jak dla elementów z materiału liniowo-sprężystego.

Analizę i konfrontację z doświadczeniem dla niektórych prostszych schematów słupów obciążanych mimośrodowo wykonała w swojej pracy K.Kiedroń [29]. Pojęcie siły krytycznej w przyjętym przez nią modelu matematycznym występuje niezależnie czy jest to osiowe czy mimośrodowe ściskanie. Swoją analizę przeprowadziła ona wyróżniając dwa pojęcia:

- zniszczenie słupa wskutek osiągnięcia siły krytycznej - przypadek ten występuje gdy słup jest ściskany osiowo lub gdy mimośród jest mały,
- osiągnięcie nośności słupa przy sile niższej od siły krytycznej - występuje w tym przypadku gdy obciążenia ściskające działają na dużym mimośrodzie - rosnące przemieszczenia powodują wówczas zniszczenie słupa.

Spostrzeżenia K.Kiedroń w zakresie tego zjawiska wskazują na to, że trzeba byłoby uściślić w praktycznych obliczeniach sposób określania zwiększania się mimośrodu w przypadku ściskania mimośrodowego, które jest większe niż to określa norma. Dla przypadków rozważanych przez K.Kiedroń siła krytyczna zarysowanych elementów żelbetowych wynosi około 0,5 siły eulerowskiej.

Wykonany w niniejszej pracy przykład wykorzystuje do wyznaczenia siły krytycznej macierz przeniesienia. Metoda ta pozwala na wyznaczanie siły krytycznej bardziej złożonych układów statycznych bez wprowadzenia zastępczych długości obliczeniowych. Wyprowadzone przez K.Kiedroń równanie różniczkowe :

$$v^{IV}(\xi) + k^2 v''(\xi) = \sum_{i=1}^{n} \left[r_{oi} + r_{1i} v''(\xi_i^-) \right] \delta''(\xi - \xi_i) \quad ; \qquad 8-1$$

$$k^2 = \frac{Pl^2}{EJ} \quad ,$$

pozwala uwzględnić defekty konstrukcji spowodowane zarysowaniem.

Przyjęto, że rysy zostały spowodowane obciążeniem, na skutek którego naprężenia po jednej stronie słupa przekroczyły wytrzymałość betonu na rozciąganie. Wpływ rys występuje po prawej stronie równania i opisany jest on, podobnie jak w zadaniu statycznym i dynamicznym, jako suma deformacji kątowych trwałych r_o i sprężystych zależnych od momentu zginającego w zarysowanym przekroju $r_1 v''(\xi_i^-)$.

Rozwiązanie ogólne równania różniczkowego ma postać:

$$v(\xi) = v(0) + \frac{1}{k} v'(0) + \left[\frac{1}{k^2}(1 - \cos k\xi)\right] v''(0) + \left[\frac{1}{k^3}\left(\xi - \frac{\sin k\xi}{k}\right)\right] v'''(0) + \qquad 8-2$$

$$+ \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} \left[r_o + r_1 v''(\xi_i^-) \right] \left[\sin k(\xi - \xi_i) \right] h(\xi - \xi_i) \quad .$$

Nieznaną wartość $v''(\xi_i^-)$ - oblicza się ze wzoru rekurencyjnego 8 - 3, którego wyprowadzenie zostało omówione szczegółowo w pracy [29]:

$$v''(\xi_i) = |A_i| v''(0) + \frac{1}{k} |B_i| v'''(0) - |C_i| \quad . \qquad 8-3$$

Przez A oznaczono macierz $A = \left[a_{ij} \right]_{i = 1, \dots n}$,

a przez $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ wektory

kolumnowe $\vec{a} = (a_j)_{j = 1, \dots n}$, $\vec{b} = (b_j)_{j = 1, \dots n}$,

$\vec{c} = (c_j)_{j = 1, \dots n}$, gdzie :

$a_{ij} = 1 \quad ; \quad i = j$	$a_j = \cos k\zeta_j$
$a_{ij} = 0 \quad ; \quad i < j$	$b_j = \sin k\zeta_j$
$a_{ij} = kr_{ij} \sin k(\zeta_i - \zeta_j); \quad i > j$	$c_1 = 0 \quad ; \quad i = 1$
	$c_j = kr_{oi} \sin k(\zeta_i - \zeta_j)$; $i > 1$

Wtedy macierze A_i, B_i, C_i powstają przez zastąpienie i-tej kolumny macierzy A wektorami $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Macierz A jest macierzą trójkątną. Dzięki temu można wprowadzić następujące wzory rekurencyjne na wyznaczniki tych macierzy :

$$|A_i| = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} |A_{i-j}| a_{ij} \quad ;$$

$$|B_i| = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{ij}| a_{ij} \quad ;$$

$$|C_i| = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} |C_{ij}| a_{ij} \quad ;$$

Wzory te znacznie zmniejszają liczbę wykonywanych operacji i umożliwiają napisanie prostych programów na maszynę cyfrową.

Znajomość wzorów rekurencyjnych pozwala zapisać w formie jawnej macierz przeniesienia przęsła /wzór 8 - 5/.

Kryteria podziału konstrukcji przyjęto tak, jak w zadaniu statycznym. Nie ulegają także zmianie macierze ciągłości /rozdz. 4/ i sposób formułowania macierzy przeniesienia dla całej konstrukcji :

$$\{\vartheta(1)\}^n = [C]^n [H]^{n-1,n} \dots [H]^{1,2} [C]^1 \{\vartheta(0)\}^1 = = [G] \{\vartheta(0)\}^1 \quad ; \qquad 8 - 6$$

$[C]$ - macierz przeniesienia konstrukcji zarysowanej.

W tym układzie równań wykorzystane są dwa znane warunki na początku układu. Pozostałe dwie niewiadome otrzymuje się wykorzystując warunki brzegowe na jego końcu.

$$\begin{bmatrix} V(1) \\ V'(1) \\ M(1) \\ T(1) \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{k} & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2\left[(1-\cos k) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|A_i|\sin k(1-\zeta_i)\right] & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3\left[\left(1-\frac{\sin k}{k}\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|B_i|\sin k(1-\zeta_i)\right] & \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}(\tau_0-\tau_1|C_i|)\sin k(1-\zeta_i) \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}\left[\sin k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|A_i|\cos k(1-\zeta_i)\right] & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2\left[(1-\cos k) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|B_i|\cos k(1-\zeta_i)\right] & \sum_{i=1}^{n}(\tau_0-\tau_1|C_i|)\cos k(1-\zeta_i) \\ 0 & 0 & \left[\cos k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|A_i|\sin k(1-\zeta_i)\right] & \frac{\beta}{k}\left[\sin k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|B_i|\sin k(1-\zeta_i)\right] & \alpha k\sum_{i=1}^{n}(\tau_0-\tau_1|C_i|)\sin k(1-\zeta_i) \\ 0 & 0 & \frac{k}{\beta}\left[-\sin k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|A_i|\cos k(1-\zeta_i)\right] & \left[\cos k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n}\tau_{1i}|B_i|\cos k(1-\zeta_i)\right] & \alpha k^2\sum_{i=1}^{n}(\tau_0-\tau_1|C_i|)\cos k(1-\zeta_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V(0) \\ V'(0) \\ M(0) \\ T(0) \\ 1 \end{bmatrix} \tag{8-5}$$

$\beta = \frac{l}{\bar{l}}$

$\alpha = \frac{EJ}{\overline{EJ}}$

$\bar{l}$, $\overline{EJ}$ - dowolnie wybrane wielkości porównawcze

Niewiadomymi są zatem dwie wielkości statyczne na początku układu oraz parametr k . Parametr ten, nazywany jest dalej wartością krytyczną, natomiast odpowiadająca mu siła - siłą krytyczną. W przypadku słupa podpartego przegubowo układ równań jest następujący:

$$\begin{aligned} g_{12}\,\varphi_o + g_{14}\,T_o &= g_{15} \\ g_{32}\,\varphi_o + g_{34}\,T_o &= g_{35} \end{aligned} \qquad 8 - 7$$

Siła krytyczna mówi o niestabilności konstrukcji. Stan ten będzie odpowiadał nieoznaczoności układu równań. Można to wyrazić warunkiem:

$$\det \begin{vmatrix} g_{12}(k) & g_{14}(k) \\ g_{32}(k) & g_{34}(k) \end{vmatrix} = 0 \qquad 8 - 8$$

Równanie to jest przestępne i posiada wiele pierwiastków na wartości krytyczne k_n, z których można następnie wyznaczyć odpowiadające im wartości sił krytycznych P_{kr_n}.

Jeżeli słup podparty przegubowo potraktujemy jako jeden element obliczeniowy, wówczas równanie wiekowe ma postać:

$$\left(\frac{\beta}{k}\right)^2\left[\sin k - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} r_{1i}\left|B_i\right| \sin k(1-\xi_i)\right] + 0\cdot\frac{1}{\alpha}\left[\frac{\beta}{k}\left(1-\frac{\sin k}{k}\right) - \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n} r_{1i}\left|B_i\right| \sin k(1-\xi_i)\right] = 0 \qquad (8 - 9)$$

po przekształceniu

$$\sin k = k\sum_{i=1}^{n} r_{1i}\left|B_i\right| \sin k(1-\xi_i) \qquad 8 - 9a$$

gdzie:

B_i - określone jest wzorem rekurencyjnym

$$k = \frac{Pl^2}{EJ}$$

W przypadku jednego elementu równanie wiekowe ma postać analogiczną do otrzymanej przez K. Kiedroń [29]. Gdyby słup został podzielony na większą ilość elementów macierz przeniesienia dla tego słupa otrzymałoby się zgodnie ze wzorem 8 - 6 i na jej podstawie, po wykorzystaniu warunków brzegowych, równanie wiekowe.

Wyniki otrzymane w pracy [29] na podstawie równania 8 - 1 pozwoliły teoretycznie ocenić wpływ rys na wartość siły krytycznej. Umożliwiły także porównanie otrzymanej siły krytycznej z obliczeniami normowymi, orazzdoświadczalnie wyznaczoną siłą niszczącą.

9. WNIOSKI

Otrzymane wnioski podzielono na dwie grupy. Do pierwszej można zaliczyć następujące uwagi:

A. Wnioski wynikające z zastosowania macierzy przeniesienia do obliczania deformacji i sił wewnętrznych w żelbetowych konstrukcjach zarysowanych.

A.1. Uogólniono metodę macierzy przeniesienia stosowaną dotychczas do obliczeń statycznych i dynamicznych konstrukcji sprężystych na zagadnienia statyczne i dynamiczne żelbetowych konstrukcji ulegających zarysowaniu.

A.2. Wykazano, że sposób wyznaczania deformacji statycznych i dynamicznych w belkach żelbetowych ulagających zarysowaniu z wykorzystaniem macierzy przeniesienia jest analogiczny do sposobu rozwiązywania belek sprężystych. Występujące w macierzach przeniesienia funkcje opisujące zjawisko mają jednak w przypadku belek żelbetowych z rysami postać bardziej złożoną. Do opisu defektu pochodzącego od zarysowania wykorzystano funkcje uogólnione.

A.3. Metoda macierzy przeniesienia stwarza możliwości analizy konstrukcji żelbetowych z rysami w zakresie szerszym od dotychczas stosowanych. Pod względem rachunkowym może być jednak w bardziej złożonych przypadkach kłopotliwa i może być wówczas efektywnie wykorzystana z zastosowaniem elektronicznej techniki obliczeniowej. Przykłady liczbowe wskazują na praktyczne możliwości wykorzystania metody.

B. Wnioski dotyczące szczegółowej analizy wybranych elementów konstrukcji żelbetowych ulegających zarysowaniu.

B.1. Deformacje występujące w żelbetowych konstrukcjach zarysowanych są zmiennymi losowymi. Do opisu zjawiska przyjęto model deterministyczny, występują w nim jednak parametry losowe l_f (rozstaw rys) i Ψ_a (stosunek średnich naprężeń w zbrojeniu do naprężeń w przekroju zarysowanym) oraz poziom przeciążenia konstrukcji.

B.2. Przeprowadzona w pracy konfrontacja obliczeń teoretycznych z doświadczeniem wykazała, że opisaną metodę można stosować do obliczeń praktycznych; należałoby jednak uściślić wyznaczanie parametrów Ψ_a i l_f .

B.3. Rozdzielenie deformacji w rysie na trwałe i sprężyste znalazło potwierdzenie w eksperymencie zarówno przy obliczaniu konstrukcji obciążonych statycznie jak i dynamicznie (cyklicznie) . Obliczony na podstawie wzoru normowego współczynnik Ψ_a daje wartości uwzględniające łącznie efekt deformacji sprężystych i trwałych. W obliczeniach współczynnik ten należałoby rozdzielić na część opisującą zmiany sprężyste i trwałe.

B.4. W belkach ciągłych, w których przyjęto zbrojenie sprężystożgodne, stan zarysowania wpływa w małym stopniu na redystrybucję sił wewnętrznych. Metoda stwarza możliwość analizy także w przypadkach, gdy zbrojenie nie jest sprężystozgodne.

B.5. Analiza stosunku ugięć trwałych do sprężystych spowodowanych zarysowaniem belki, jako funkcja poziomu obciążenia pozwoliła zaobserwować, że wzrasta on do poziomu momentu rysującego w sposób proporcjonalny. Po powstaniu rysy zależność ta ustala się na określonym poziomie $w_{res} = w_{spr} = 0{,}15$. Prawidłowość ta przebiega w przedziale użytkowym obciążenia belki $P : P_{niszcz} = 0{,}5$.
Przy dalszym narastaniu obciążenia $(P \to P_{niszcz})$ daje się zauważyć coraz większą rozbieżność proporcji ugięć trwałych do sprężystych spowodowanych rysą, o ogólnej tendencji wzrastającej.

B.6. Belki o zmiennym momencie bezwładności można, przy wykorzystaniu macierzy przeniesienia, podzielić na odcinki o stałym momencie bezwładności i wówczas sztywność poszczególnych odcinków należy obliczać względem ich głównej centralnej osi bezwładności. Elementy te łączy się spełniając warunki ciągłości przemieszczeń i sił wewnętrznych. Niezależnie od tych warunków zachodzą na styku zaburzenia w rozkładzie naprężeń.

B.7. Zarysowanie powoduje znaczne zmniejszenie się częstości drgań własnych.

10. Literatura

1. Abramek W., Mateja O. - Numeryczne całkowanie równania ruchu metodą macierzy przeniesienia. Arch.Inż.Ląd.t.XXIV z.3/1978.
2. Bukowski B. - Konstrukcje żelbetowe. PWT.Warszawa 1953.
3. Bach C. - Versuche mit Eisenbetonbalken zur Ermittlung der Wiederstandsfächigkeit. Deutscher Ausschuss fur Eisenbeton, Heft 20 Berlin 1912.
4. Backer A.L.L. - The utimate-load theory applied to the design of reinforced and presstressed concrete frames. Concrete Publikations Ltd., London 1956.
5. Borcz A. - Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych. TNEB Warszawa 1963.
6. Borcz A. - Ogólna metoda obliczania deformacji żelbetowych konstrukcji z rysami. XXIII Konf.Nauk. Gliwice 1977.
7. Borcz A. - Teoria konstrukcji żelbetowych. Wrocław 1973.
8. Dubis J. - Cyfrowy model zarysowanych ram żelbetowych i jego zastosowania. Praca doktorska. Wrocław 1976.
9. Eimer C. - Zniszczenie przekrojów zbrojonych wskutek poślizgu stali. Arch.Inż.Ląd. t.IX z.2 Warszawa 1963.
10. Falk S. - Biegen, Knicken und Schwingen des mehrfeldigen geraden Balkens. Braunschweig Wiss.Ges. 7/1955.
11. Cohn M.Z, Petcu V.A. - Wpływ ilości zbrojenia na plastyczne rozprowadzenie momentów w żelbetowych belkach statycznie niewyznaczalnych. Arch.Inż.Ląd. t.VII z.3/1961.
12. Diliger W. - Veränderlichkeit der Biege und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken. Deutscher Ausschuss fur Stahlbeton - Heft 179 Berlin 1966.
13. Jankowiak R. - Z badań doświadczalnych zarysowanej belki żelbetowej. Arch.Inż.Ląd. t.XI 2/1965.
14. Jankowiak R. - Doświadczalna weryfikacja podstawowych założeń klasycznej teorii belek żelbetowych. Praca niepublikowana, znajduje się w Bibl.Gł.Polit.Wrocł. Wrocław 1970.
15. Jäger K. - Die wahrscheinlichste Momentenvrteilung in statisch unbestimmten Stahlbetonbalken. All.Bauzeitung, 1952 nr 290a.
16. Kersten R. - Das Reduktionsverfahren der Baustatik. Berlin Göttingen Heidelberg ; Springer - Verlag 1962.

17.König J.A. - Analiza plastyczna konstrukcji.Ossolineum Wrocław. Wrocław 1972.
18.Kozłowski J. - Studium współpracy betonu ze zbrojeniem w elemencie wielokrotnie,osiowo rozciąganym.Praca doktorska.Wrocław 1979.
19.Kuczyński W. - Kostrukcje betonowe.Kontynualna teoria zginania żelbetu. PWN Warszawa 1971.
20.Levi F. - Analisi di fenomeni anelastici prosequita fino a roktura. Giornalo de Gemo Civile 1954 nr 3.
21.Łempicki J. - Teoria zginania belek żelbetowych statycznie niewyznaczalnych. PWN Warszawa 1958.
22.Łuczak-Romanów R. - Metoda obliczeń dynamicznych żelbetowych belek i ram z rysami. Praca doktorska. Wrocław 1979.
23.Knauff M. - Obliczanie elementów z betonu ze względu na docisk. Praca doktorska. Warszawa 1970.
24.Mateja O. - Zastosowanie macierzy przeniesienia do analizy dynamicznej pręta ściskanego,zanurzonego w ośrodku sprężystym. Inż. i Bud. 2/1970.
25.Mateja O.,Żmuda J. - Analiza skończonych ugięć sprężystych pręta metodą macierzy przeniesienia.Arch.Inż.Ląd. t.XXIV z.1/1978
26.Mitzel A. - Reologia betonu. Arkady Warszawa 1972.
27.Kozaczewski A.,Kryłow S. - Issledowanie pereraspeledenja w słożnych sterżniewych sistemach s uczestom svojstw żelezobetona NIIŻB. Moskwa 1968.
28.Muraszew W.I. - Treszczinoustojcziwost,żestkost i procznost żelezobetona. Maszstrojizdat, Moskwa 1950.
29.Kiedroń K. - Metoda obliczania siły krytycznej żelbetowych słupów mimośrodowo ściskanych z uwzględnieniem zarysowania. Praca doktorska. Wrocław 1980.
30.Niemirowski J.M. - Issledowanie naprjażenno-deformirowannogo sostojania żelezobetonnych elementow s uczestom raboty rastijanutogo betona nad treszczinami,peresmotr na etoj osnowie teorii rasczeta deformacij i raskrytija treszczin.Strojizdat.Moskwa 1968.
31.Nowacki W. - Dynamika budowli. Arkady 1961.
32.Palotas L. - Beitrage zur Berechnung der Risssicherheit.Zurich1966.
33.Petersen C. - Das Verfahren der Übertragungsmatrizen fur den kontinuierlich elastisch gebetten Träger. Bautechnik 3/1965.
34.Probst E. - Vorlesungen uber Eisenbetonbau. Berlin 1917.
35.Rakowski G. - Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych. Bibl.Inż. i Bud. Warszawa 1968.

36. Rabisch R. - Beitrag zur Berechnung der Formänderungen von Stahlbetonbauteilen unter Berücksichtung der Rissbildung. Bauplanung - Bautechnik 1969 nr 4,5.

37. Rüsch H. - Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone. DAIS, 1955 nr 120.

38. Rüsch H., Jungwirth D. - Skurcz i pełzanie w konstrukcjach betonowych. Arkady Warszawa 1979.

39. Saliger R. - Nowa teoria żelbetu na podstawie odkształceń plastycznych przy złamaniu. PWT. Warszawa 1952.

40. Tal K.E., Cistjakow E.A. - Issledowanie nesuczej sposobnosti gibkich, żelezobetonnych kolonn. Gosstroizdat. Moskwa 1961.

41. Tal K.E., Cistjakow E.A. - Eksperymentalnyje issledowania nesuczej sposobnosti gibkich żelezobetonnych sterżnej. Gosstrojizdat Moskwa 1963.

42. Tichy M. - Redistribution de moments dans les poutres continues d'apres la theorie des deformations limits. Acta technica CSAV 4, 1959 nr 3.

43. Tal K.E., Cistjakow E.A.- Rasczet nesuczej sposobnosti gibkich żelezobetonnych elementow. Gosstrojizdat Moskwa 1964

44. Wittig W. - Steifigkeitsmethode zur einfachen Ermittlung der Eigenfrqenzen von Trägern. Bauplan.-Bautechnik 1977 nr 12.

45. Europejski Komitet Betonu CEB. Międzynarodowe zalecenia obliczania i wykonywania konstrukcji z betonu. Arkady Warszawa 1973.

46. PN 76/B-03264- Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Wydawnictwo Normalizacyjne. Warszawa 1977.

47. Kuczyński W., Goszczyński S. - Behavior of hyperstatic reinforced concrete beams subjec to increasing loads. Arch. Inż. Ląd. 1980 t.XXVI z.1.

48. Żunusow T.Ż., Szczerbina W.J.- Issledowanie żelezobetonnych, obycznych i priedwaritelno napriażonnych bałok. NIIŻB Moskwa 1970.

49. Chen Wai-Fah, Atsut Toshio - Theory of beam-columns. New York. Mc Graw-Hill Book COMP 1976.

50. Bzymek Z. - Zastosowanie maszyn cyfrowych do analizy statycznej konstrukcji inżynierskich - Bibl. Inż. i Bud. Warszawa 1966.

Z A Ł Ą C Z N I K

Wydruk programu głównego i podproramów wykorzystanych do obliczania przykładów

00000000
000000000000
000000000000
000000000000
000000000000

:I.2Z829.HIS

000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000

#LISTING OF :WORKFILE.AAAB0007304(1/) PRODUCED ON 10SEP80 AT 17.41.19

#OUTPUT BY LISTFILE IN ':I.2Z829.HIS' ON 10SEP80 AT 17.41.27 USING 913

DOCUMENT 10

FORTRAN COMPILATION BY #XFAT MK 5A DATE 10/09/80 TIME 17/56/18

```
      LIST
      LIBRARY(SUBGROUPFSCE)
      PROGRAM (ANDR)
      MIXED SEGMENTS
      INPUT 1=CR0
      OUTPUT 6=LP0
      TRACE 2
      END
```

```
      MASTER JEWR
      REAL AP(100),APP(100),BP(10,1),BBP(10,1),RIP(10)
      REAL H0(10,10),F1(10,10),H1(10,10)
      REAL G1L(10,10),G1P(10,10),G2L(10,10),G2P(10,10),G3L(10,10)
      REAL H00(10,1),H0P(10,10),A(10,10),X(10),B(10)
      REAL K(10,10),RK1(10,10),RK(10,10),RK2(10,10),RKS(10,10)
      REAL LI,ZK(20),DE(5)
      REAL DF(20)
      REAL WXX(20),WXX1(20),WXX2(20),WXX3(20)
      REAL R11(20),R12(20),R13(20)
      REAL G3P(10,10),G4L(10,10),G4P(10,10),G5L(10,10)
      REAL WXX4(20),WXX5(20),H0S(10,10),H0PS(10,10)
      REAL R1(20),R14(20),R15(20),ZP(10)

      READ(1,600)NP0
      READ(1,270)DP
      DO 998 IPI=1,NP0
      DO 919 I=1,20
      WXX1(I)=0
      WXX2(I)=0
      WXX3(I)=0
      WXX4(I)=0
  919 WXX5(I)=0
      NNN=1
  701 WRITE(6,270)IPI
      NN=1
      N=5
      M=3
      DO 1 I=1,N
      DO 1 J=1,M
      H0(I,J)=0
      H0(2,1)=1
      H0(4,2)=1
      H0(5,3)=1
  997 DO 2 I=1,N
      DO 2 J=1,N
      F1(I,J)=0
```

```
      WRITE(6,349)
      DO 6 I=1,N
      DO 6 J=1,N
    6 H1(I,J)=0
      DO 7 I=1,N
    7 H1(I,I)=1
      IF(NN.GT.1) GO TO 8
      CALL FF(UAX1,N,M,H1,HO,HOS,G1L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      GO TO 9
    8 CALL FF(UAX1,N,M,H1,HOP,HOPS,G1L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
    9 IF(NN.EQ.1) GO TO 981
      DO 30 I=1,4
   30 DE(I)=HOP(I,1)
      DE(5)=1
      CALL UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,UXX1)

     ELEMENT 2
  981 WRITE(6,350)
      CALL FF(UAX2,N,M,H1,G1L,G1P,G2L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      IF(NN.EQ.1) GO TO 982
      DO 31 I=1,4
   31 DE(I)=G1P(I,1)
      CALL UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,UXX2)

      ELEMENT 3
  982 WRITE(6,351)
      CALL FF(UAX3,N,M,H1,G2L,G2P,G3L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      IF(NN.EQ.1) GO TO 983
      DO 32 I=1,4
   32 DE(I)=G2P(I,1)
      CALL UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,UXX3)

      ELEMENT 4
  983 WRITE(6,352)
      CALL FF(UAX4,N,M,H1,G3L,G3P,G4L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      IF(NN.EQ.1) GO TO 613
      DO 33 I=1,4
   33 DE(I)=G3P(I,1)
      CALL UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,UXX4)

      ELEMENT 5
  613 WRITE(6,353)
      CALL FF(UAX5,N,M,H1,G4L,G4P,G5L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      IF(NN.EQ.1) GO TO 617
      DO 34 I=1,4
   34 DE(I)=G4P(I,1)
      CALL UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,UXX5)

**************************************************************************
      ROZUIAZANIE UKŁADU ROWNAN
**************************************************************************

  617 IF(NN.EQ.2)GO TO 700
**************************************************************************
*0 * * * * * * * * * * * * . R B " , " * * * * * * * * * * * * * * * 0
      ********************     *
      DO 896 I=1,N
      DO 896 J=2,N
  896 R(I,J)=G5L(I,J)
      DO 80 I=1,N-3
      DO 80 J=1,N
   80 RK1(I,J)=0
      ********************     *
      RK1(1,1)=1
      RK1(2,3)=1
      ********************     *
```

```
*************************************************************************
      IF(N.LT.6) GO TO 610
      DO 81 I=6,N
   81 RK1(I-3,I)=1
  610 DO 82 I=1,N-3
      DO 82 J=1,N
      RK(I,J)=0
      DO 82 K=1,N
   82 RK(I,J)=RK(I,J)+RK1(I,K)*R(K,J)

*************************************************************************
      DO 83 I=1,N
      DO 83 J=1,N-3
   83 RK2(I,J)=0
      RK2(1,1)=1
      RK2(2,2)=1
      IF(N.LT.4) GO TO 620
      DO 84 I=4,N
   84 RK2(I,I-1)=1
*************************************************************************

  620 DO 85 I=1,N-3
      DO 85 J=1,N-1
      RKS(I,J)=0
      DO 85 K=1,N
   85 RKS(I,J)=RKS(I,J)+RK(I,K)*RK2(K,J)
      DO 899 I=1,N-3
      DO 899 J=1,N-3
  899 A(I,J)=RKS(I,J)
      DO 898 I=1,N-3
  898 B(I)=RK(I,3)
      NP=N-3
      NAP=(N-3)**2
      NBP=N-3
      K=0
      DO 300 I=1,NP
      DO 300 J=1,NP
      K=K+1
  300 AP(K)=A(J,I)
      INP=1
      CALL F4ACSL(AP,B,NP,NAP,NBP,INP,X,TP,IDP,ITP,APP,BBP,RIP)
      WRITE(6,301)X
      NN=NN+1
      H00(1,1)=-X(1)
      H00(2,1)=-X(2)
      H00(3,1)=1
      IF(N.LT.4) GO TO 307
      DO 897 I=4,N
  897 H00(I,1)=-X(I-1)
  307 M=1
      DO 51 I=1,N
      DO 51 J=1,N
      HOP(I,J)=0
      DO 51 K=1,N-2
   51 HOP(I,J)=HOP(I,J)+H0(I,K)*H00(K,J)
      WRITE(6,201)
      DO 152 I=1,N
  152 WRITE(6,252)(HOP(I,J),J=1,N)
      GO TO 902
  709 IF(NNN.EQ.2) GO TO 998
      NNN=NNN+1
      WRITE(6,995)NNN
      GO TO 701
```

```
  400 FORMAT(I5)
473   FORMAT(F9.0)
   27 FORMAT(13H...PRZYKLAD...,I2)
  340 FORMAT(14H...ELEMENT...1)
   35 FORMAT(14H...ELEMENT...2)
  350 FORMAT(14H...ELEMENT...3)
  352 FORMAT(14H...ELEMENT...4)
  353 FORMAT(14H...ELEMENT...5)
  301 FORMAT(10(1X,E11.4))
  252 FORMAT(10(1X,E11.4))
   25 FORMAT(13H MACIERZ  HOP)
  255 FORMAT(10H.ITERACJA.,I2)
      STOP
      END
```

END OF SEGMENT, LENGTH 1402, NAME JEDR

```
      SUBROUTINE FF(UXX,M,N,H1,G2L,G2P,G3L,DF,ZR,G,LI,EI,NR,DP)
      REAL LI,R1(20),ZR(20),ZP(10),DF(20),UXX(20),R0(20)
      REAL F1(10,10),G2P(10,10),H1(10,10),G2L(10,10),G3L(10,10)
      READ(1,671)G,LI,EI,NR,NP,(R1(K),K=1,NR),(ZR(K),K=1,NR),(ZP(K),K=1,
     1NP),(R0(K),K=1,NR)
      ABP,BCP,CDP,DEP,ABR,BCR,ABC,BCD,CDE,DEF=0
      DO 973 K=1,NR
  973 DF(K)=0.
      DO 2000 K=1,NR
 2000 R1(K)=0.
      DO 940 K=1,NR
      DF(K)=R1(K)*UXX(K)+R0(K)
      ABR=ABR+DF(K)*(1-ZR(K))*LI
  940 BCR=BCR+DF(K)
      DO 605 K=1,NP
      ABP=ABP+DP*((1-ZP(K))*LI)**3/(6*EI)
      BCP=BCP+DP*((1-ZP(K))*LI)**2/(2*EI)
      CDP=CDP-DP*(1-ZP(K))*LI
  605 DEP=DEP-DP
      ABC=ABR+ABP
      BCD=BCR+BCP
      CDE=CDP
      DEF=DEP
      WRITE(6,947)
      WRITE(6,948)ABC,BCD,CDE,DEF
      WRITE(6,954)(DF(K),K=1,NR)
      DO 3 I=1,N
    3 F1(I,I)=1
      F1(1,2)=LI
      F1(1,3)=-(LI**2)/(2*EI)
      F1(1,4)=-(LI**3)/(6*EI)
      F1(2,3)=-LI/EI
      F1(2,4)=-(LI**2)/(2*EI)
      F1(3,4)=LI
      F1(1,5)=G*(LI**4)/(24*EI)+ABC
      F1(2,5)=G*(LI**3)/(6*EI)+BCD
      F1(3,5)=-G*(LI**2)/2+CDE
      F1(4,5)=-G*LI+DEF
      WRITE(6,457)G,LI,EI,NR,NP,(R1(K),K=1,NR),(ZR(K),K=1,NR),(ZP(K),K=1
     1,NP),DP,(R0(K),K=1,NR),((F1(I,J),J=1,M),I=1,N)
  457 FORMAT(1X,3E11.4,3X,I2,3X,I2,3X/1X,20E11.4/1X,20E11.4/1X,10E11.4//
     21X,E11.4/1X,20E11.4/1X,25E11.4/4H SPR)
```

```
      DO 14 I=1,N
      DO 14 J=1,N
      G2P(I,J)=0
      DO 14 K=1,N
   14 G2P(I,J)=G2P(I,J)+H1(I,K)*G2L(K,J)
      WRITE(6,207)
      DO 108 I=1,N
  108 WRITE(6,208)(G2P(I,J),J=1,N)
      DO 15 I=1,N
      DO 15 J=1,N
      G3L(I,J)=0
      DO 15 K=1,N
   15 G3L(I,J)=G3L(I,J)+H1(I,K)*G2P(K,J)
      WRITE(6,209)
      DO 110 I=1,N
  110 WRITE(6,210)(G3L(I,J),J=1,N)
  601 FORMAT(3F1.0,2I0,8F0.0)
  042 FORMAT(4H      ABC          BCD          CDE          DEF)
  043 FORMAT(4(1X,E11.4))
  054 FORMAT(3HDEF,10(1X,E11.4))
  207 FORMAT(13H MACIERZ  G2P)
  209 FORMAT(13H MACIERZ  G3L)
  208 FORMAT(10(1X,E11.4))
  210 FORMAT(10(1X,E11.4))
      RETURN
      END
```

END OF SEGMENT, LENGTH 655, NAME PF

```
      SUBROUTINE UU(DF,ZR,DE,G,LI,EI,NR,WXX)
      REAL D(5,5),U(5,5)
      REAL DF(20),ZR(20),DE(5),LI
      REAL WXX(20)
      DO 411 KK=1,NR
      Z=ZR(KK)
      DO 403 I=1,5
      DO 403 J=1,5
  403 D(I,J)=0.
      DO 404 I=1,4
  404 D(I,I)=1.
      D(1,2)=LI*Z
      D(1,3)=-(LI*Z)**2/(2*EI)
      D(1,4)=-(LI*Z)**3/(6*EI)
      D(2,3)=-LI*Z/EI
      D(2,4)=-(LI*Z)**2/(2*EI)
      D(3,4)=LI*Z
      D(5,3)=-1/EI
      D(5,4)=-LI*Z/EI
      D1,D2,D3,D4,D5=0
      DO 405 L=1,NR
      IF (Z-ZR(L))0,0,401
      H=0.
      GO TO 406
  401 H=1.
  406 D1=D1+(Z-ZR(L))*DF(L)*H*LI
  405 D2=D2+DF(L)*H
      D(1,5)=D1*G*(LI*Z)**4/(24*EI)
      D(2,5)=D2*G*(LI*Z)**3/(6*EI)
      D(3,5)=-G*(LI*Z)**2/2
      D(4,5)=-G*LI*Z
      D(5,5)=D3*G*(LI*Z)**2/(2*EI)
      DO 500 I=1,5
      SP=0.
      DO 501 J=1,5
  501 SP=SP+D(I,J)*DE(J)
  500 U(I,1)=SP
      WRITE (6,408)
  408 FORMAT (1H U(H,EI,H,T,A/R))
      WRITE(6,410)(U(I,1),I=1,5)
  410 FORMAT (5(1X,E18.11))
      WXX(KK)=U(5,1)
      WRITE(6,412)(WXX(KK),I=1,NR)
  412 FORMAT (10(1X,E11.4))
  411 CONTINUE
      RETURN
      END

END OF SEGMENT, LENGTH    518, NAME  UU

                         FINISH

END OF COMPILATION -  NO ERRORS

S/C SUBFILE:              51 BUCKETS USED

CONSOLIDATED BY XPCK 12H     DATE      10/09/80    TIME 1-/30/39
```

R o z d z i e l n i k

1.	Promotor	1 egz.
2.	Recenzenci	2 egz.
3.	Biblioteka Główna i OINT PWr	1 egz.
4.	Biblioteka i Ośrodek Informacji Instytutu Budownictwa PWr	1 egz.
5.	Autor	3 egz.