ROZPRAWY INŻYNIERSKIE

ZAWIERAJĄ PRACE BADAWCZE Z ZAKRESU TEORII SPRĘŻYSTOŚCI I PLASTYCZNOŚCI, HYDRO- I AEROMECHANIKI, TERMODYNAMIKI ORAZ PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW KONSTRUKCJI

Adres Redakcji
WARSZAWA, ul. Śniadeckich 8, I p.

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ZAKŁAD MECHANIKI OŚRODKÓW CIĄGŁYCH
POLSKIEJ AKADEMII NAUK

A. LISOWSKI

PŁYTY NA SPRĘŻYSTYM PODŁOŻU

ROZPRAWY
INŻYNIERSKIE
VII

WARSZAWA 1953
PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

ROZPRAWY INŻYNIERSKIE (VII)

Redaktor techniczny: JÓZEF JANICZEK

Nakład 1000+150 egz. Papier druk. sat. 70x100 16, 70 g. Arkuszy wydawniczych 1,25. Arkuszy drukarskich 1 1/8
Oddano do składania dn. 3.IX.53 r. Druk. ukończono dn. 30.XII.53 r. Zam. 182 a. 4-B-55502. Cena zł 5,—

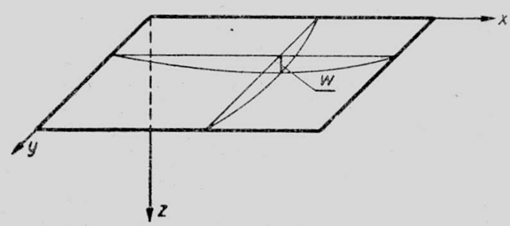
Warszawska Drukarnia Naukowa, Warszawa, Śniadeckich 8

Rozpatrzmy równanie różniczkowe odkształconej powierzchni płyty w prostokątnym układzie osi x, y, z:

$$(1) \qquad \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q,$$

gdzie E jest współczynnikiem sprężystości podłużnej, h grubością płyty, w ugięciem płyty w kierunku osi z, ν współczynnikiem Poissona oraz q obciążeniem przypadającym na jednostkę powierzchni płyty.

W przypadku oparcia płyty na sprężystym podłożu uwzględnić musimy ponadto sprężysty odpór gruntu p. W pracy niniejszej opierać się będziemy na tzw. założeniach Winklera. Według tych założeń:



Rys. 1

(1) osiadanie każdego punktu podłoża jest proporcjonalne do nacisku przenoszonego przez podłoże; oznaczając wielkość siły powodującej jednostkowe osiadanie podłoża przez k (jest to tzw. współczynnik sprężystości podłoża) otrzymamy wielkość ugięcia y ze wzoru

$$(2) \qquad y = \frac{p}{k};$$

(2) osiadanie danego punktu nie jest zależne od osiadania innych punktów podłoża;

(3) belka lub płyta nie może oddzielić się od podłoża, tzn. podłoże może przenosić siły zarówno ściskające, jak i rozciągające.

Uwzględniając odpór sprężysty gruntu otrzymamy na podstawie równania (1)

$$(3) \qquad \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) = q - kw,$$

gdzie k jest jednostkowym odporem gruntu przy założeniu odporu skierowanego przeciwnie niż oś z.

Jeżeli zastąpić różniczki różnicami i wprowadzić oznaczenie

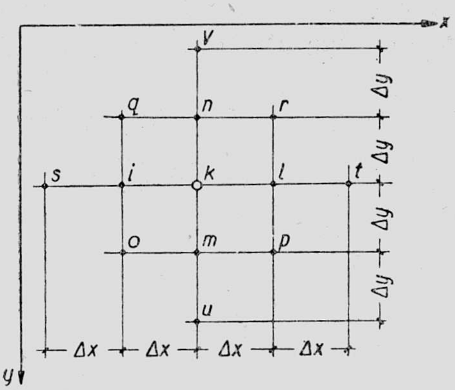
$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} = D, \tag{4}$$

to otrzymamy

$$D\left(\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^4} + 2\,\frac{\Delta^4 w}{\Delta x^2\,\Delta y^2} + \frac{\Delta^4 w}{\Delta y^4}\right) + k w = q. \tag{5}$$

Jest to równanie powierzchni odkształconej płyty spoczywającej na podłożu sprężystym. W pracy niniejszej zastosowano metodę różnic skończonych do obliczania płyt kwadratowych opartych na sprężystym podłożu [1]).

Wyraźmy kolejno różnice wchodzące do wzoru (5) przez ugięcia, przyjmując podział płyty na jednakowe pola o długości Δx w kierunku osi x oraz Δy w kierunku osi y.



Rys. 2

Zgodnie z oznaczeniami podanymi na rys. 2 dla punktu k otrzymamy

$$\left\{\begin{aligned} \Delta_x^4 w_k &= w_s - 4 w_i + \\ &\quad + 6 w_k - 4 w_l + w_t, \\ \Delta_y^4 w_k &= w_v - 4 w_n + \\ &\quad + 6 w_k - 4 w_m + w_u, \\ \Delta_{xy}^4 w_k &= 4 w_k - 2 (w_i + \\ &\quad + w_l + w_n + w_m) + w_g + \\ &\quad + w_r + w_o + w_p. \end{aligned}\right. \tag{6}$$

W przypadku podziału płyty na pola kwadratowe jest

$$\Delta x = \Delta y.$$

Wstawiając wyrażenia na różnice (6) do równania (5) otrzymamy po uporządkowaniu

$$\begin{aligned} 20 w_k - 8 (w_i + w_l + w_n + w_m) + 2 (w_g + w_r + w_o + w_p) + \\ + w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{\Delta x^4}{D} (q_k - k_k w_k), \end{aligned} \tag{7}$$

gdzie q_k jest jednostkowym obciążeniem zewnętrznym, przypadającym na pole podziału płyty w punkcie k, a l_k jednostkowym odporem sprężystym gruntu, przypadającym również na pole podziału płyty w punkcie k.

---

[1]) [1] i [2]

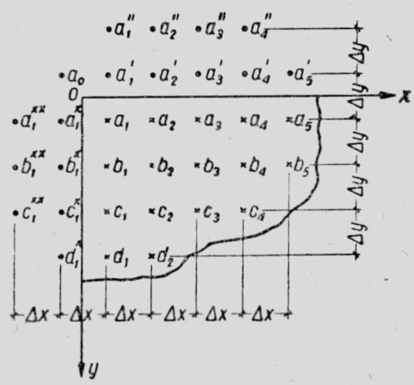
W przypadku działania sił skupionych należy obliczyć zastępcze obciążenie jednostkowe przypadające na dane pole

$$q_k = \frac{R_k}{\Delta x \Delta y}, \tag{8}$$

gdzie R_k jest wypadkową obciążenia przypadającą na pole k.

Rozpatrzmy płytę podaną w rzucie na rys. 3. Przy zastosowanym podziale na odcinki Δx i Δy otrzymamy n nieznanych ugięć płyty. Będą to ugięcia $a_1, a_2, a_3,...$ w rzędzie pierwszym oraz $b_1, b_2, b_3,...$ w rzędzie drugim itd.[2])

Układamy tyle równań (7), ile jest nieznanych ugięć płyty. Jednak do równań ułożonych dla skrajnych punktów płyty (np. dla rzędu punktów a_1, a_2, a_3,... wzdłuż osi x oraz dla szeregu punktów a_1, b_1, c_1,... wzdłuż osi y) oprócz ugięć punktów «rzeczywistych» wchodzą jeszcze «teoretyczne» ugięcia punktów poza płytą w odległości Δx i $2\Delta x$ od skrajnych punktów. Odpowiednie punkty w odległości Δy powyżej osi x oznaczono jedną kreską, a w odległości $2\Delta y$ dwoma kreskami. Odpowiednie punkty z lewej strony osi y oznaczono jednym lub dwoma krzyżykami.



Rys. 3

Ażeby ułożona liczba równań wystarczała do rozwiązania układu, należy teoretyczne ugięcia poza płytą wyrazić za pomocą rzeczywistych ugięć.

Nieznane ugięcia teoretycznych punktów w odległości Δx lub Δy obliczymy z warunku, że na brzegu płyty naprężenia muszą być równe zeru [3]). Oznacza to, że na krawędzi $x = 0$ jest

$$\sigma_x = 0 \tag{9.1}$$

oraz na krawędzi $y = 0$ jest

$$\sigma_y = 0. \tag{9.2}$$

Z równania (9.1), np. dla punktu a_4, znajdujemy zależność

$$b_4 - 2a_4 + a_4' + \nu(a_3 - 2a_4 + a_5) = 0. \tag{10.1}$$

---

[2]) Bez obawy dwuznaczności punkty i ich ugięcia oznaczamy tymi samymi symbolami.

[3]) [3].

Stąd obliczymy ugięcie teoretycznego punktu płyty a_4'

$$a_4' = -\nu a_3 + a_4 (2 + 2\nu) - \nu a_5 - b_4.$$

Odpowiednio obliczymy wielkość ugięcia punktu $b_1^{\times}$ z równania (9.2)

$$b_1^{\times} - 2 b_1 + b_2 + \nu (c_1 - 2 b_1 + a_1) = 0. \tag{10.2}$$

Ugięcie teoretycznych punktów w odległości $2\Delta x$ lub $2\Delta y$ obliczono zakładając, że przekrój płyty prostopadły do krawędzi przedstawia linię prostą. Tak np. ugięcie punktu a_4'' wyniesie

$$a_4'' - 2 a_4' + a_4 = 0. \tag{11.1}$$

Wstawiając wartość ugięcia punktu a_4' ze wzoru (10.1) wyrazimy ugięcie punktu a_4'' przez ugięcia punktów rzeczywistych płyty.

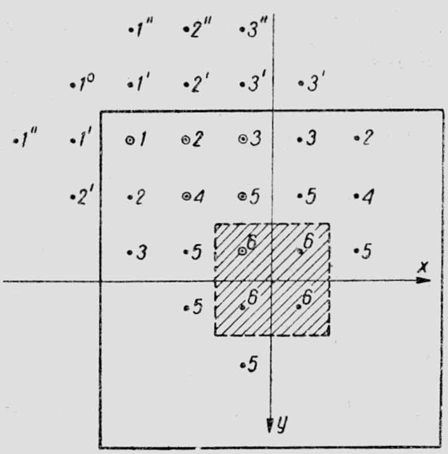
Analogicznie ugięcie punktu $b_1^{\times\times}$ obliczymy z zależności

$$b_1^{\times\times} - 2 b_1^{\times} + b_1 = 0. \tag{11.2}$$

Pozostaje jeszcze do omówienia teoretyczny punkt narożny a_0. W tym celu przyjęto, że wartość naprężenia zginającego wzdłuż przekątnej między osiami x i y w punkcie a_1 jest równa zeru. Stąd otrzymuje się zależność

$$a_0 - 2 a_1 + b_2 + \nu (b_1^{\times} - 2 a_1 + b_2') = 0. \tag{12}$$

Założenia ostatnie odbiegają niewątpliwie od stosunków faktycznych przy rozwiązaniu ścisłym; wobec tego jednak, że ugięcia punktów położonych w odległości $2\Delta x$ lub $2\Delta y$ poza płytą wchodzą tylko do równań ułożonych dla punktów skrajnych, i to z najmniejszym współczynnikiem [por. równanie (7)], więc nieścisłość ta wpłynąć może tylko niewiele na uzyskany wynik.



Rys. 4

Obliczenie ugięć płyty za pomocą równań (7) zostało przedstawione dla przypadku płyty kwadratowej obciążonej symetrycznie.

Przykład 1. Obliczyć ugięcia płyty kwadratowej, podanej na rys. 4, opartej na sprężystym podłożu i obciążonej symetrycznie w polach środkowych.

Wobec symetrii płyty i obciążenia wystarcza rozpatrzeć ćwiartkę płyty.

Do obliczeń przyjęto: $l = a = b = 500$ cm, $D = 19\,230\,000$ kG/cm, $k = 1$ kG/cm^2, $q_6 = q$, $q_1 = q_2 = q_3 = q_4 = q_5 = 0$.

Zastosowano następujący podział płyty:

$$\Delta x = \Delta y = \frac{l}{6} = \frac{500}{6} = 83{,}333 \text{ cm.}$$

Przy zastosowanym podziale i uwzględnieniu symetrii odkształcenia pozostaje do wyznaczenia sześć ugięć punktów płyty oznaczonych kolejno 1, 2, 3, 4, 5 i 6 (por. rys. 4).

Wyznaczenie ugięć punktów teoretycznych przeprowadza się z następujących równań:

$$\begin{aligned}
w_1' - 2\,w_1 + w_2 + \nu\,(w_1' - 2\,w_1 + w_2) &= 0,\\
w_2' - 2\,w_2 + w_4 + \nu\,(w_1 - 2\,w_2 + w_3) &= 0,\\
w_3' - 2\,w_3 + w_5 + \nu\,(w_2 - 2\,w_3 + w_3) &= 0,\\
w_0 - 2\,w_1 + w_4 + \nu\,(w_2' - 2\,w_1 + w_2') &= 0,\\
w_1'' - 2\,w_1' + w_1 &= 0,\\
w_2'' - 2\,w_2' + w_2 &= 0,\\
w_3'' - 2\,w_3' + w_3 &= 0.
\end{aligned}$$

Stąd otrzymujemy:

$$\begin{aligned}
w_1' &= 2\,w_1 - w_2,\\
w_2' &= -\,\nu\,w_1 + 2\,w_2\,(1+\nu) - \nu\,w_3 - w_4,\\
w_3' &= -\,\nu\,w_2 + w_3\,(2+\nu) - w_5,\\
w_0 &= 2\,w_1\,(1+\nu+\nu^2) - 4\,w_2\,(\nu+\nu^2) + 2\,\nu^2\,w_3 - w_4\,(1-2\,\nu),\\
w_1'' &= 3\,w_1 - 2\,w_2,\\
w_2'' &= -\,2\,\nu\,w_1 + w_2\,(3+4\,\nu) - 2\,\nu\,w_3 - 2\,w_4,\\
w_3'' &= -\,2\,\nu\,w_2 + w_3\,(3+2\,\nu) - 2\,w_5.
\end{aligned}$$

Dalsze obliczenie przeprowadzamy przyjmując $\nu = 0{,}2$. Otrzymamy wówczas:

$$\begin{aligned}
w_0 &= 2{,}48\,w_1 - 0{,}96\,w_2 + 0{,}08\,w_3 - 0{,}60\,w_4,\\
w_1' &= 2\,w_1 - w_2,\\
w_2' &= -\,0{,}20\,w_1 + 2{,}40\,w_2 - 0{,}20\,w_3 - w_4,
\end{aligned}$$

$$w_3' = -0{,}20\, w_2 + 2{,}20\, w_3 - w_5,$$

$$w_1'' = 3\, w_1 - 2\, w_2,$$

$$w_2'' = -0{,}40\, w_1 + 3{,}80\, w_2 - 0{,}40\, w_3 - 2\, w_4,$$

$$w_3'' = -0{,}40\, w_2 + 3{,}40\, w_3 - 2\, w_5.$$

Równanie (7) piszemy w postaci

$$(7.1) \quad \left(20 + \frac{k_k\, \Delta x^4}{D}\right) w_k - 8\,(w_i + w_l + w_n + w_m) + 2\,(w_q + w_r + w_0 + w_p) +$$

$$+ w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{q_k\, \Delta x^4}{D},$$

$$\frac{\Delta x^4}{D} = \frac{83{,}333^4}{19\,230\,000} = 2{,}507698.$$

Równanie (7.1) wypisujemy kolejno dla punktów 1, 2, 3, 4, 5 i 6 przyjmując stały odpór gruntu pod całą płytką, $k = 1$ kG/cm² (bardzo słaby grunt).

Otrzymujemy kolejno:

dla punktu 6

$$(20 + 2{,}507698)\, w_6 - 8\,(2\, w_5 + 2\, w_6) + 2\,(w_4 - 2\, w_5 + w_6) +$$

$$+ 2\, w_3 + 2\, w_5 = 2{,}507698\, q_6$$

lub po uproszczeniu

$$8{,}507698\, w_6 - 10\, w_5 + 2\, w_4 + 2\, w_3 = 2{,}507698\, q;$$

dla punktu 5

$$(20 + 2{,}507698)\, w_5 - 8\,(w_3 + w_4 + w_5 + w_6) + 2\,(w_2 + w_3 + w_5 + w_6) +$$

$$+ w_2 + w_3' + w_4 + w_6 = 0,$$

$$-5\, w_6 + 15{,}507698\, w_5 - 7\, w_4 - 3{,}80\, w_3 + 2{,}80\, w_2 = 0;$$

dla punktu 4

$$(20 + 2{,}507698)\, w_4 - 8\,(2\, w_2 + 2\, w_5) + 2\,(w_1 + 2\, w_3 + w_6) + 2\, w_2' + 2\, w_5 = 0,$$

$$2\, w_6 - 14\, w_5 + 20{,}507698\, w_4 + 3{,}60\, w_3 - 11{,}20\, w_2 + 1{,}60\, w_1 = 0;$$

dla punktu 3

$$(20 + 2{,}507696)\, w_3 - 8\,(w_2 + w_3' + w_3 + w_5) + 2\,(w_2' + w_3' + w_4 + w_5) +$$

$$+ w_1 + w_3'' + w_2 + w_6 = 0,$$

$$w_6 - 2\, w_5 + 4{,}307698\, w_3 - 1{,}40\, w_2 + 0{,}60\, w_1 = 0;$$

dla punktu 2

$$(20 + 2{,}507696)\, w_2 - 8\,(w_1 + w_2' + w_3 + w_4) + 2\,(w_1' + w_3' + w_2 + w_5) + $$
$$+ w_1' + w_2'' + w_3 + w_5 = 0,$$

$$w_5 - 2\,w_4 - 1{,}40\,w_3 + 5{,}707698\,w_2 - 0{,}80\,w_1 = 0;$$

dla punktu 1

$$(20 + 2{,}507696)\, w_1 - 8\,(2\,w_1' + 2\,w_2) + 2\,(w_1^0 + 2\,w_2' + w_4) + 2\,w_1'' + 2\,w_3 = 0,$$
$$-3{,}20\,w_4 + 1{,}36\,w_3 + 3{,}68\,w_2 + 0{,}667698\,w_1 = 0.$$

Rozwiązując układ sześciu równań obliczamy wielkość ugięć (przyjmując $q = 1$ kG/cm^2):

$w_1 = 0{,}340072$	cm	$w_4 = 0{,}062858$	cm
$w_2 = 0{,}021876$	„	$w_5 = 0{,}163361$	„
$w_3 = -0{,}078252$	„	$w_6 = 0{,}483153$	„

Powierzchnię odkształcenia płyty podaje w rzucie aksonometrycznym rys. 5.

Zastosowanie różnic skończonych do równania (3) pozwala na obliczenie odkształceń płyty, która tylko częścią swej powierzchni opiera się na sprężystym podłożu W i n k l e r a. Wystarcza w tym celu dla odpowiednich punktów przyjąć wartość odporu gruntu równą zeru. Dla naszego przypadku równanie (7.1) przybierze postać

$$(7.2) \quad 20\,w_k - 8\,(w_i + w_l + w_n + w_m) + 2\,(w_q + w_r + w_0 + w_p) +$$
$$+ w_s + w_t + w_v + w_u = \frac{q_k\,\Delta x^4}{D}.$$

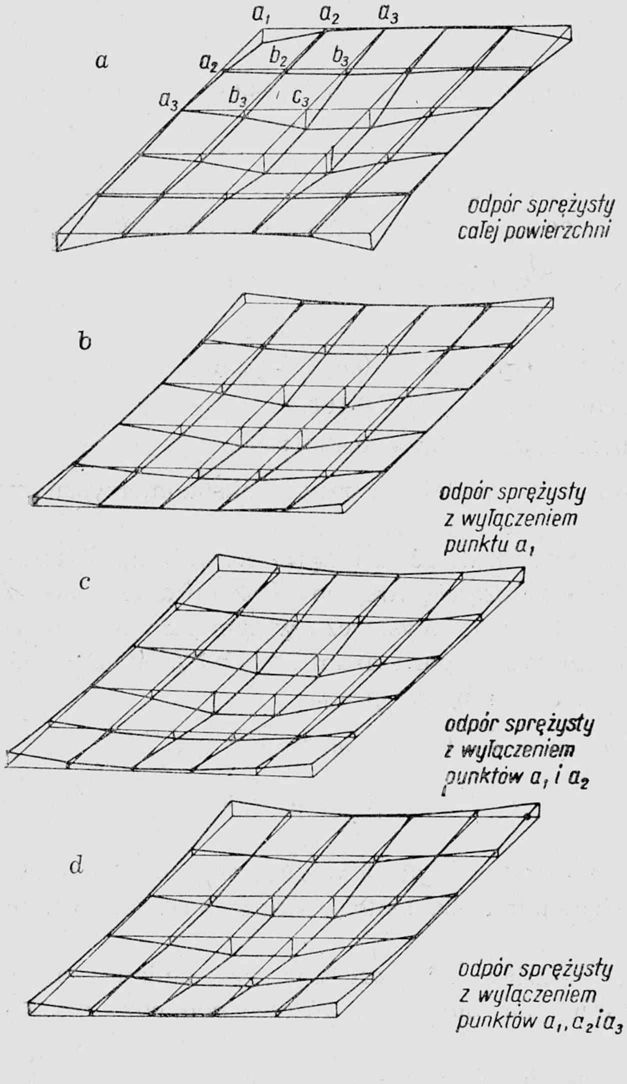
Przykład 1. 1. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pole odpowiadające punktowi 1 nie jest oparte na sprężystym podłożu.

Równania ułożone dla punktów 1-5 pozostają bez zmian, należy uwzględnić tylko w równaniu dla punktu 1 różnicę pomiędzy wzorami (7.2) i (7.1).

Otrzymamy następujący układ równań:

$$8{,}507698\,w_6 - 10\,w_5 + 2\,w_4 + 2\,w_3 = 2{,}507698\,q,$$
$$-5\,w_6 + 15{,}507698\,w_5 - 7\,w_4 - 3{,}80\,w_3 + 2{,}80\,w_2 = 0,$$
$$2\,w_6 - 14\,w_5 + 20{,}507698\,w_4 + 3{,}60\,w_3 - 11{,}20\,w_2 + 1{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_6 - 2\,w_5 + 4{,}307698\,w_3 - 1{,}40\,w_2 + 0{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_5 - 2\,w_4 - 1{,}40\,w_3 + 5{,}707698\,w_2 - 0{,}80\,w_1 = 0,$$
$$-3{,}20\,w_4 + 1{,}36\,w_3 + 3{,}68\,w_2 - 1{,}84\,w_1 = 0.$$

Układ tych równań daje następujące rozwiązanie:



Rys. 5

$$w_1 = -0{,}248753 \text{ cm}$$
$$w_2 = -0{,}039052 \text{ ,,}$$
$$w_3 = 0{,}002085 \text{ ,,}$$
$$w_4 = 0{,}099009 \text{ ,,}$$
$$w_5 = 0{,}224832 \text{ ,,}$$
$$w_6 = 0{,}535260 \text{ ,,}.$$

Rzeczą celową będzie podkreślić w tym miejscu, że podany sposób obliczenia może być zastosowany również do obliczenia ugięć płyt opartych na sprężystym podłożu o zmiennym współczynniku odporu sprężystego gruntu oraz dla płyt opartych tylko (dowolną) częścią swej powierzchni na podłożu.

W dalszym ciągu rozpatrzymy przypadek ważny ze względów praktycznych, a dotychczas nie rozwiązany w literaturze dostępnej autorowi, mianowicie przypadek odkształcenia się płyty opartej na sprężystym podłożu, gdy podłoże to jest zdolne przenieść tylko naprężenia ściskające, a pozwala na swobodne oderwanie się płyty pod wpływem naprężeń rozciągających.

Analizując wyniki przykładów 1 i 1.1 widzimy, że część podłoża, mianowicie punkt 2, pracuje na rozciąganie. Zwalniając od pracy podłoże w punkcie 2 obliczymy nową powierzchnię odkształconą płyty. Analiza wyników wskazuje następnie, czy należy ponadto zwolnić dalsze punkty, aby otrzymać ostateczną powierzchnię wgłębiania się płyty w podłoże.

Przypadek rozważany tutaj może znaleźć zastosowanie w praktyce przy płytach lub ławach fundamentowych pod słupami, masztami, kominami itp.

Przykład 1.2. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pola 1 i 2 nie są oparte na sprężystym podłożu.

Otrzymujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
8{,}507698\, w_6 - 10\, w_5 + 2\, w_4 + 2\, w_3 &= 2{,}507698\, q,\\
-5\, w_6 + 15{,}507698\, w_5 - 7\, w_4 - 3{,}80\, w_3 + 2{,}80\, w_2 &= 0,\\
2\, w_6 - 14\, w_5 + 20{,}507698\, w_4 + 3{,}60\, w_3 - 11{,}20\, w_2 + 1{,}60\, w_1 &= 0,\\
w_6 - 2\, w_5 + 4{,}307698\, w_3 - 1{,}40\, w_2 + 0{,}60\, w_1 &= 0,\\
w_5 - 2\, w_4 - 1{,}40\, w_3 + 3{,}20\, w_2 - 0{,}80\, w_1 &= 0,\\
-3{,}20\, w_4 + 1{,}36\, w_3 + 3{,}68\, w_2 - 1{,}84\, w_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

którego rozwiązaniem jest

$$
\begin{aligned}
w_1 &= -0{,}381161 \text{ cm} & w_4 &= 0{,}057256 \text{ cm}\\
w_2 &= -0{,}135503 \text{ ,,} & w_5 &= 0{,}223153 \text{ ,,}\\
w_3 &= -0{,}014314 \text{ ,,} & w_6 &= 0{,}546957 \text{ ,,}
\end{aligned}
$$

Przykład 1.3. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 1 w założeniu, że pola 1, 2 i 3 nie są oparte na sprężystym podłożu.

Otrzymujemy układ równań

$$
\begin{aligned}
8{,}507698\, w_6 - 10\, w_5 + 2\, w_4 + 2\, w_3 &= 2{,}507698\, q,\\
-5\, w_6 + 15{,}507698\, w_5 - 7\, w_4 - 3{,}80\, w_3 + 2{,}80\, w_2 &= 0,\\
2\, w_6 - 14\, w_5 + 20{,}507698\, w_4 + 3{,}60\, w_3 - 11{,}20\, w_2 + 1{,}60\, w_1 &= 0,\\
w_6 - 2\, w_5 + 1{,}80\, w_3 - 1{,}40\, w_2 + 0{,}60\, w_1 &= 0,\\
w_5 - 2\, w_4 - 1{,}40\, w_3 + 3{,}20\, w_2 - 0{,}80\, w_1 &= 0,\\
-3{,}20\, w_4 + 1{,}36\, w_3 + 3{,}68\, w_2 - 1{,}84\, w_1 &= 0,
\end{aligned}
$$

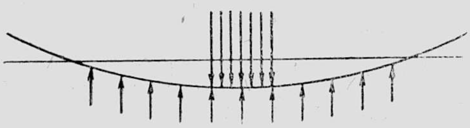
którego rozwiązaniem jest

$$
\begin{aligned}
w_1 &= -0{,}354200 \text{ cm} & w_4 &= 0{,}070672 \text{ cm}\\
w_2 &= -0{,}107630 \text{ ,,} & w_5 &= 0{,}221153 \text{ ,,}\\
w_3 &= -0{,}021692 \text{ ,,} & w_6 &= 0{,}543187 \text{ ,,}
\end{aligned}
$$

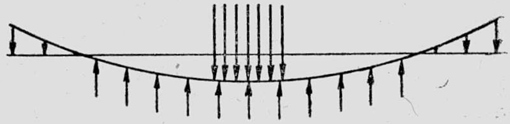
Kolejne powierzchnie odkształceń płyty wykreślone zostały na podstawie wyników przykładów 1, 1.1, 1.2 i 1.3 na rys. 5*a*, 5*b*, 5*c* i 5*d* i to przy odporze sprężystym na całej powierzchni na rys. 5*a*, przy zwolnieniu odporu sprężystego odpowiednio w jednym, dwóch i trzech punktach na rys. 5*b*, 5*c* i 5*d*.

Najbardziej zastanawiający jest fakt wgłębiania się rogów płyty przedstawiony na rys 5*a*.

Wynik obliczeń można wytłumaczyć w sposób następujący. Pod wpływem obciążenia części środkowej płyta wgłębia się w podłoże w sposób podany na rys. 6. Równania (7.1) zostały ułożone zgodnie z założeniami W i n k l e r a, że podłoże pracuje zarówno na naprężenia ściskające, jak i na naprężenia rozciągające. Wytwarza się zatem sytuacja podana na rys. 7.

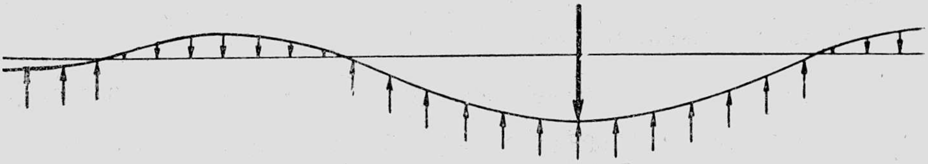


Rys. 6



Rys. 7

Siły ciągnące w częściach płyty odkształconej powyżej poziomu podłoża starają się wgłębić część środkową płyty oraz wygiąć rogi ku dołowi (to samo zjawisko ma miejsce w belce na sprężystym podłożu, por. rys. 8).



Rys. 8

Ponieważ dodatkowe zagłębienie części środkowej płyty napotyka na trudności (duża powierzchnia dotyku), reszta sił rozciągających wpływa na silne wygięcie rogów ku dołowi, co uwidacznia rys. 5*a*.

Zwalniając kolejno punkty podłoża poddane naprężeniom rozciągającym dochodzimy po szeregu przybliżeń do ostatecznej postaci płyty odkształconej, zgodnie z założeniem, że podłoże zdolne jest tylko do przejęcia naprężeń ściskających, a pozwala na swobodne oderwanie się płyty.

Na podstawie wykresów ugięć można dojść do powierzchni wgłębiania się płyty w podłoże i wykreślić odpowiednie warstwice.

Następne obliczenie odkształceń płyty przeprowadzimy zwiększając dziesięciokrotnie współczynnik podłoża bez zmiany innych warunków.

Przykład 2. Obliczyć odkształcenia płyty jak w przykładzie 1 przy zastosowaniu innego współczynnika sprężystości podłoża $k = 10$ kG/cm^2 (dla silnych gruntów).

Mamy teraz

$$\frac{\Delta x^4}{D} = 2{,}507698, \qquad \frac{k\,\Delta x^4}{D} = 25{,}076980.$$

Dla punktów 6, 5, 4, 3, 2 i 1 płyty otrzymujemy kolejno

$$31{,}076980\,w_6 - 10\,w_5 + 2\,w_4 + 2\,w_3 = 2{,}507698\,q,$$
$$-5\,w_6 + 38{,}076980\,w_5 - 7\,w_4 - 3{,}80\,w_3 + 2{,}80\,w_2 = 0,$$
$$2\,w_6 - 14\,w_5 + 43{,}076980\,w_4 + 3{,}60\,w_3 - 11{,}20\,w_2 + 1{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_6 - 2\,w_5 + 26{,}876980\,w_3 - 1{,}40\,w_2 + 0{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_5 - 2\,w_4 - 1{,}40\,w_3 + 28{,}276980\,w_2 - 0{,}80\,w_1 = 0,$$
$$-3{,}20\,w_4 + 1{,}36\,w_3 + 3{,}68\,w_2 + 23{,}236980\,w_1 = 0.$$

Rozwiązując powyższy układ równań otrzymujemy następujące wielkości ugięć dla $q = 1$ kG/cm^2:

$$w_1 = 0{,}0001731 \text{ cm}, \qquad w_4 = -0{,}0003451 \text{ cm},$$
$$w_2 = -0{,}0005190 \text{ ,,} \qquad w_5 = 0{,}0108147 \text{ ,,}$$
$$w_3 = -0{,}0023644 \text{ ,,} \qquad w_6 = 0{,}0843475 \text{ ,,}$$

Nie ma potrzeby podawania kolejnych powierzchni odkształconych otrzymanych przy stopniowym zwalnianiu punktów 1, 2, 3,... aż do ostatecznego ustalenia płyty. Sposób obliczenia jest tutaj bowiem identyczny jak w przykładzie 1. Podajemy natomiast ostateczną powierzchnię zagłębiania się płyty w sprężyste podłoże w założeniu, że podłoże przejmuje tylko naprężenia ściskające.

Przykład 2.1. Obliczyć odkształcenia płyty według przykładu 2 w założeniu, że pola 1, 2, 3 i 4 nie są oparte na sprężystym podłożu.

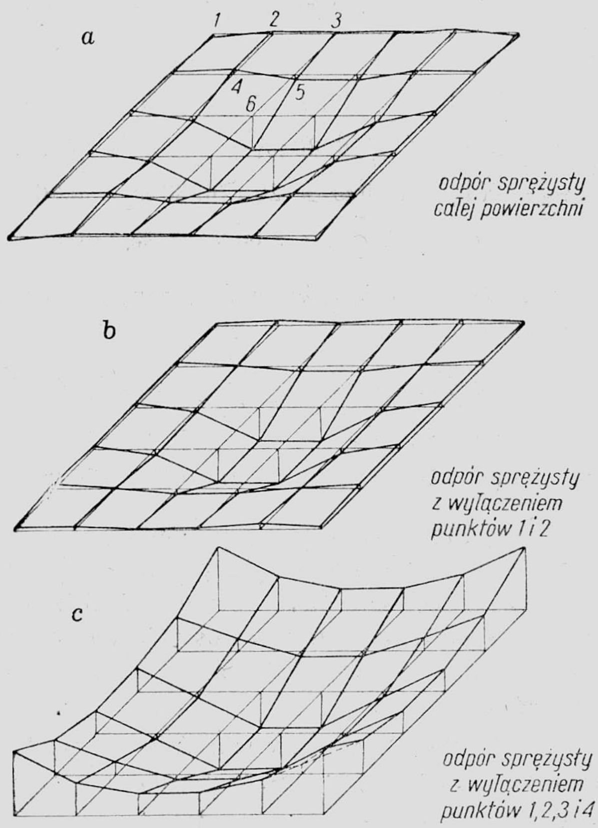
Otrzymujemy następujący układ równań:

$$31{,}076980\,w_6 - 10\,w_5 + 2\,w_4 + 2\,w_3 = 2{,}507698\,q,$$
$$-5\,w_6 + 38{,}076980\,w_5 - 7\,w_4 - 3{,}80\,w_3 + 2{,}80\,w_2 = 0,$$
$$2\,w_6 - 14\,w_5 + 18\,w_4 + 3{,}60\,w_3 - 11{,}20\,w_2 + 1{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_6 - 2\,w_5 + 1{,}80\,w_3 - 1{,}40\,w_2 + 0{,}60\,w_1 = 0,$$
$$w_5 - 2\,w_4 - 1{,}40\,w_3 + 3{,}20\,w_2 - 0{,}80\,w_1 = 0,$$
$$-3{,}20\,w_4 + 1{,}36\,w_3 + 3{,}68\,w_2 - 1{,}84\,w_1 = 0,$$

którego rozwiązaniem jest

$$w_1 = -0{,}161955 \text{ cm}, \qquad w_4 = -0{,}0349868 \text{ cm},$$
$$w_2 = -0{,}0897977 \text{ ,,} \qquad w_5 = 0{,}0059757 \text{ ,,}$$
$$w_3 = -0{,}0584565 \text{ ,,} \qquad w_6 = 0{,}0886298 \text{ ,,}$$

Odpowiednie powierzchnie ugięcia płyty przedstawione zostały na rys. 9*a*, 9*b* *i* 9*c* w założeniu odporu sprężystego na całej powierzchni płyty,



Rys. 9

a następnie przy usuwaniu kolejno odporu w punktach 1 i 2 oraz 1, 2, 3 i 4. Otrzymana w ten sposób ostateczna powierzchnia odkształcona płyty odpowiada założeniu, że podłoże sprężyste może przejąć tylko naprężenia ściskające.

Porównując wykresy powierzchni odkształconych z przykładów 1 i 2 widzimy, że powierzchnia wgłębiania się płyty w sztywniejsze podłoże znacznie zmalała, co odpowiada, oczywiście, doświadczeniu.

Warto podkreślić, że odpór całkowity obliczony na podstawie ugięć płyty równoważy dość dokładnie obciążenie zewnętrzne (z błędem 1%), co potwierdza ścisłość otrzymanych wyników.

Literatura cytowana w tekście

[1] *Woprosy stroitielnoj miechaniki,* pod redakcją J. W. Urbana, Moskwa 1951.

[2] K. Beyer, *Die Statik im Eisenbetonbau,* cz. I i II, Berlin 1933-1934.

[3] W. Wierzbicki, *Obliczenie płyty wspornikowej za pomocą równań różnicowych,* Warszawa 1934.

Резюмэ

ПЛАСТИНКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

В предлагаемой работе применен метод конечных разностей для вычисления деформации пластинок на упругом основании. Формула (5) является разностным уравнением пластинки согласно фиг. 1. Здесь w есть прогиб пластинки, D жёсткость пластинки на изгиб, k единичная реакция основания при предпосылке реакции направленной противоположно к оси z, q нагрузка на единицу поверхности пластинки.

Выразив разности прогибами отдельных точек, согласно обозначениям приведенным на фиг. 2, и разделив пластинку на квадратные участки $\Delta x = \Delta y$, получаем уравнение (7), где q_u есть удельная внешняя нагрузка участка в точке k а k_u удельная реакция на участок в точке k.

Составляем столько уравнений (7), сколько неизвестных прогибов пластинки. Чтобы число неизвестных было равно количеству линейных уравнений, выражаем теоретические прогибы вне пластинки прогибами действительных точек. Способ составления таких зависимостей дан формулами (9.1)-(12).

Уравнения (7) основаны на предпосылках Винклера, т. е. (1) не учитывают непрерывности вещества основания, (2) полагают, что оседание каждой точки является пропорциональным к переносимому давлению в данном месте и (3), что основание может переносить не только сжимающие, но и растягивающие напряжения. Эти предпосылки, особенно по отношению к грунтам, значительно расходятся с работой действительного основания.

Далее вычислены деформации квадратной пластинки, нагруженной в своей центральной части, при, допущении, что основание может

переносить только сжимающие напряжения и позволяет пластинке свободно отделяться от основания.

Применен способ последовательного освобождения от работы точек основания, подвергнутых растягивающим напряжениям. После нескольких приближений можно получить действительную поверхность деформированной пластинки, вдавливаемой в упругое основание.

Соответствующие графики для $k = 1$ кГ/см² приведены на фиг. 5*a*, 5*b*, 5*c* и 5*d*. Вычисление проведено вторично увеличивая в 10 раз значение упругой реакции основания (для $k = 10$ кГ/см²). Фигуры 9*a*, 9*b* и 9*c* приводят соответствующие графики.

Примененный метод расчета дает возможность рассматривать разные типы пластинок опёртых каким либо образом на упругом основании (например при переменным коэффициенте упругой реакции основания). В особенности делает возможным расчёт деформаций пластинки опёртой на упругом основании, которое переносит только сжимающие напряжения.

Предлагаемый способ может применяться на практике, например при расчёте фундаментных балок и пластинок.

Summary

PLATES ON ELASTIC FOUNDATIONS

In this paper finite differences are used to determine deformations of plates on elastic foundations. The difference equation of a plate presented in Fig. 1 is given by Eq. (5), where w denotes the deflection of the plate, D its flexural ridigity, k unit reaction of the foundation (the reaction being supposed to be in the sense opposite to that of the z-axis), q unit load of the plate. Expressing the differences by the deflections of individual points according to the designations in Fig. 2 (the plate being divided in elementary squares $\Delta x = \Delta y$) Eq. (7) is obtained, where q_u ist the unit external load of the elementary area corresponding to the point k, and k_u the unit reaction of the foundation for the elementary area corresponding to the point k.

A number of equations (7) are established, equal to that of unknown deflections of the plate. To have the number of unknown quantities equal to that of equations (which are linear), theoretical points of deflection outside the plate are expressed by the deflections of real points. The manner in which these relations are found is given by Eqs. (9.1)-(12).

Thus we obtain finally a system of linear equations, the number of unknown deflections being equal to that of the established equations.

Eqs. (7) are based on Winkler's assumptions, which means that the continuity of the foundation is not taken into account and the deflection of the foundation is assumed to be proportional to the load. Further it is assumed that the foundation can be subjected to compressive and tensile stresses as well. These assumptions differ considerably from the conditions of really existing foundations, especially when applied to the ground.

Furthermore the author has calculated the deformation of a rectangular plate loaded in the central part, assuming that the foundation can be subjected to compressive stresses only, and permitting free separation of the plate from the foundation. The method used consists in successive suppressing the tensile stresses at points where they exist. After several approximations we can obtain the real surface of deflection of a plate pressed against an elastic foundation.

The corresponding graphs for discussed plate, for $k = 1$ kG/cm^2, are shown in Figs 5*a*, 5*b*, 5*c* and 5*d*. The calculation has been repeated for the modulus ten times greater ($k = 10$ kG/cm^2). The corresponding graphs are shown in Figs 9*a*, 9*b* and 9*c*.

The method presented permits to investigate different kinds of plates on elastic foundations of any kind (e. g. characterized by a variable modulus of elasticity). In particular it permits to calculate the deflection of a plate on an elastic foundation which can be subjected to compressive stresses only.

The method can be used, for instance, to calculate foundation beams and plates.

Praca została złożona w Redakcji dnia 8 kwietnia 1953 r.

KOMITET REDAKCYJNY

ROZPRAW INŻYNIERSKICH

prosi autorów o przestrzeganie następujących wskazówek

(1) Prace w języku polskim, przepisane na maszynie (nie światłodruki), należy składać w dwóch egzemplarzach. Wzory powinny być napisane wyraźnie atramentem, rysunki (szkice) dołączone na oddzielnych kartach (nie w tekście).

(2) Obowiązuje numeracja dziesiętna wzorów [np. wzór 5 w p. 2 oznacza się (2.5)]. Numery wzorów należy umieszczać z lewej strony. Należy unikać numeracji rzymskiej i alfabetycznej (wzorów, rysunków, paragrafów, rozdziałów).

(3) Do pracy należy dołączyć streszczenie nie przekraczające jednej strony maszynopisu w języku polskim (również wtedy, gdy autor składa streszczenie w języku obcym) i podać ewentualnie terminologię w dwóch językach (w tym jeden rosyjski), na które streszczenie ma być przełożone.

(4) Literaturę cytowaną w tekście należy zestawić w końcu pracy podając nazwisko i imię autora, tytuł pracy, miejsce i rok wydania (w przypadku cytowania czasopisma również numer zeszytu). Nazwiska i tytuły rosyjskie należy pisać alfabetem rosyjskim. W tekście należy powoływać się na numery prac (w nawiasie kwadratowym, np. [5]) według zestawienia.

(5) Funkcje trygonometryczne należy oznaczać przez sin, cos, tg, ctg; funkcje hiperboliczne z dodaniem litery h. Współczynnik Poissona oznacza się przez ν. Kresek pionowych używa się tylko do oznaczenia wartości bezwzględnej. Wszelkie zestawienia należy nazywać tablicami (nie tabelami).

(6) Autorowi przysługuje prawo do przeprowadzenia ostatecznej korekty (bez zmian tekstu) dokładnie w terminie wyznaczonym przez Redakcję.

(7) Redakcji przysługuje prawo do przeprowadzenia korekty stylistycznej i do dostosowania oznaczeń oraz układu pracy do norm przyjętych w ROZPRAWACH.

Niestosowanie się do powyższych wskazówek opóźnia publikację pracy.

Cena zł 5.—