

A 1911 I

KOMITET GEODEZJI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

18

# GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY  
TOM II \* ZESZYT 3

WARSZAWA 1953



PIERWSZY  
KONGRES NAUKI  
POLSKIEJ

str. 296

zł 38,—

PAŃSTWOWE  
WYDAWNICTWO NAUKOWE

KOMITET GEODEZJI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

GEODEZJA  
I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY  
TOM II \* ZESZYT 3



1 9 5 3

---

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

### KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

### RADA REDAKCYJNA

Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk,  
Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,  
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — WARSZAWA 1953

Nakład 1000	Oddano do składania 7. VII. 53
Arkuszy wyd. 3,6; druk. 3,25	Podpisano do druku 20. VIII. 53
Papier druk. sat. V, 70 g, 70 × 100	Druk ukończono 25. VIII. 53
Cena zł 6,50	Zamówienie 422/132 K-4-11070

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

*Prof. A. A. Izotow*

Moskwa

## Elipsoida odniesienia F. N. Krasowskiego i nowoczesne osiągnięcia geodezji

Studia dokonane w celu ustalenia rozmiarów elipsoidy ziemskiej F. N. Krasowskiego, były wynikiem świetnego rozwoju geodezji i prac geodezyjnych w ZSRR.

Geodezja i prace geodezyjne w naszym kraju mają bogatą przeszłość historyczną. Prace geodezyjne w naszym kraju od początku rozwijały się w związku z wymaganiami życia. Rosyjska myśl naukowa w dziedzinie geodezji zawsze włączała się do ogólnego prądu idei naukowych i samodzielnie zajmowała się ich rozwojem.

Pierwszymi pracami geodezyjnymi w Rosji były katastralne opisy gruntów, zapoczątkowane jeszcze w epoce likwidacji feudalnego rozbicia kraju i powstawania jednolitego narodowego państwa rosyjskiego, czyli w XV stuleciu. W epoce Piotra I podniosły się one na nowy stopień rozwoju i przekształciły się w studia nad poznaniem kraju pod względem ogólnogeograficznym oraz w prace nad jego kartograficznym ujęciem. Kierownictwo naukowe tych prac objęła zorganizowana w r. 1724 Rosyjska Akademia Nauk, której departamentem geograficznym przez długi okres czasu kierował wybitny uczony rosyjski M. B. Łomonosow.

Powstanie teorii o spłaszczeniu ziemi zapoczątkowało rozwój geodezji jako nauki o figurze Ziemi i o metodach jej badania. Nowe prądy w geodezji szybko wzbudziły zainteresowanie i zdobyły uznanie wśród uczonych rosyjskich. Rosyjska Akademia Nauk już na pierwszym swoim posiedzeniu omawiała zagadnienie sferoidalnego kształtu ziemi i sposoby jego wyznaczania. Od tego czasu uczeni rosyjscy stale zajmowali się tym zasadniczym problemem geodezji i wzbogacili go poważnymi nowymi osiągnięciami.

Z początkiem wieku XIX w Rosji zaczęły się rozwijać podstawowe prace astronomiczno-geodezyjne typu nowoczesnego, posiadające zarówno naukowe, jak i praktyczne znaczenie. W okresie pierwszej połowy XIX w., pod kierownictwem znanego astronoma i geodety W. J. Struwego, doko-

nane były pomiary stopnia na południku od Północnego Oceanu Lodowego do ujścia rzeki Dunaju. Była to praca wyróżniająca się ujęciem zagadnienia, metodami i rezultatami. Miała ona ogromne znaczenie dla rozwoju myśli naukowej w dziedzinie geodezji. W toku tej pracy skonstruowany został jeden z najlepszych przyrządów do pomiaru baz, opracowano jeden z nowoczesnych sposobów pomiaru kątów, ustalono zasadnicze wymagania stawiane instrumentom geodezyjnym itd.

W ciągu ubiegłego stulecia łuk Struvego był najdokładniejszym i jednym z największych pomiarów stopnia w świecie. Rezultaty tego znakomitego pomiaru wykorzystane zostały przez wielu uczonych dla ustalenia rozmiarów Ziemi, a nawet w obecnych czasach nie utraciły one swego znaczenia naukowego.

W ubiegłym stuleciu rosyjscy wojskowi geodeci przeprowadzili większe pomiary stopnia na równoleżnikach  $48^{\circ}$  i  $52^{\circ}$ . Zostały one wykonane w związku z pomiarami stopnia w Europie i były cennym wkładem do tych przedsięwzięć naukowych. Jednak z biegiem czasu rosyjskie pomiary stopnia uznane zostały za przestarzałe i zastąpione nowymi pracami geodetów radzieckich.

W połowie wieku XIX stwierdzono znaczne rozbieżności w wynikach wyznaczenia rozmiarów Ziemi z różnych pomiarów stopnia, które nie mogły być wyjaśnione li tylko błędami pomiarów. Wynikły stąd skomplikowane zagadnienia ściślejszego sprecyzowania kształtu figury Ziemi i udoskonalenia metod badawczych w tym zakresie. Starając się rozstrzygnąć ten problem, rosyjski geodeta i astronom F. F. Szubert po raz pierwszy wypowiedział myśl o możliwości trójosiowości elipsoidy ziemskiej i pierwszy podał dowód potwierdzający tę myśl. Myśl ta później znalazła poparcie wielu uczonych europejskich i obecnie ma dostatecznie uzasadnione potwierdzenie.

W ubiegłym stuleciu ustaliło się pojęcie o kształcie geoidy i tworzyły się podstawy teoretyczne do odpowiednich badań. W związku z tym nasz geodeta F. A. Słudski opracował własną teorię figury Ziemi, wypowiadając głębokie myśli naukowe, do dziś dnia niecałkowicie wykorzystane. Jemu też należy przypisać zasługę ustalenia pewnej zależności różniczkowej, z której w końcu ubiegłego stulecia korzystał I. I. Pomerancew w badaniach figury geoidy.

Prace astronomiczne w Rosji dokonywane były zarówno dla celów zdjęć topograficznych, jak i w związku z pomiarami stopnia. Już w połowie ubiegłego stulecia w kraju naszym dokonano pomiaru ponad 500 punktów astronomicznych. Jednocześnie w związku z pracami astronomicznymi rozwijały się badania naukowe w dziedzinie astronomii geodezyjnej i astrometrii w ogóle.

Dobrze są znane prace Pułkowskiego Obserwatorium Astronomicznego w dziedzinie określenia absolutnych współrzędnych gwiazd, ułożenia fundamentalnych katalogów, opracowania metod pomiarów astronomicznych i udoskonalenia odpowiednich instrumentów. N. J. Cingier i D. D. Giedeonow podali swoje sposoby pomiarów czasu, zaś M. W. Piewcow opracował metodę wyznaczenia szerokości geograficznej. W kraju naszym już wówczas powstała naukowa szkoła astronomii, której osiągnięcia zasłużyły na powszechne uznanie i przyczyniły się poważnie do rozwoju światowej nauki astronomiczno-geodezyjnej.

Pułkowskie Obserwatorium Astronomiczne wniosło również bardzo duży wkład w przygotowanie kadr naukowych z dziedziny astronomii geodezyjnej. Jego szkołę przeszło wielu naszych wybitnych geodetów, a wśród nich — twórca i długoletni przewodnik radzieckiej geodezji F. N. Krasowski. Obecnie obserwatorium pułkowskie, kierowane przez czołowego astronoma i geodetę A. A. Michajłowa, bierze udział we wszystkich naukowych przedsięwzięciach w dziedzinie geodezji.

Od początku XIX w. zaczęto wykonywać w Rosji również prace grawimetryczne. Uczni rosyjscy pierwsi zaczęli stosować powszechnie przyjętą obecnie metodę względnego określenia siły ciężkości. W końcu ubiegłego stulecia Rosja zajęła jedno z pierwszych miejsc co do ilości pomierzonych punktów grawimetrycznych i dała obszerne, jak na owe czasy, materiały do naukowych wniosków dotyczących figury Ziemi.

W latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia W. J. Szwajcer, F. A. Słudski i inni na podstawie wyników obserwacji odchylenia pionu wykryli moskiewską anomalię grawitacyjną. Wyjaśnili oni również przyczynę tego zjawiska, wskazując na zaleganie w tym miejscu — na znacznej głębokości — mas mniejszej gęstości. Badania te były pierwszą próbą wykorzystania rezultatów astronomiczno-geodezyjnych prac w celu badania budowy skorupy ziemskiej.

Roboty niwelacyjne wyższej dokładności były rozpoczęte w Rosji w latach siedemdziesiątych ubiegłego stulecia. Od tego czasu geodeci rosyjscy rozpoczęli opracowania naukowe różnych zagadnień niwelacji. Badaniami swymi S. D. Rylke, N. J. Cingier i D. D. Giedeonow wiele zdziałali dla udoskonalenia metod i instrumentów, jak również dla zbadania refrakcji i wpływu innych błędów na wyniki dokładnej niwelacji.

W początku bieżącego stulecia uczeni rosyjscy przystąpili do nowych astronomiczno-geodezyjnych prac, wprowadzając udoskonalone metody. Od roku 1907 do pomiarów baz stosowany był przyrząd Jaederina, który był po raz pierwszy zbadany przez geodetów rosyjskich i który dopiero po dłuższym czasie został zastosowany w Europie. Do pomiarów kątów w triangulacji zaczęto stosować duże instrumenty geodezyjne i metodę pomiaru kątów we wszystkich kombinacjach. Od roku 1910 zaczęto stosować

metodę radiotelegraficznego określenia długości geograficznej. Jednak w związku z pierwszą wojną światową rozwój nowych astronomiczno-geodezyjnych prac został zahamowany.

W Rosji przedrewolucyjnej prace astronomiczno-geodezyjne i topograficzne wykonywane były prawie wyłącznie przez korpus wojskowych topografów. Oprócz tego na przeszkodzie szerszemu rozwojowi tych prac stały nie sprzyjające społeczno-polityczne warunki życia. Mimo to naukowa i praktyczna działalność geodetów rosyjskich w przeszłości doprowadziła do cennych osiągnięć, których część wymieniliśmy wyżej. Pozwoliła ona także nagromadzić duże i różnorodne doświadczenie, co miało pouczające znaczenie dla dalszego ustawienia prac geodezyjnych w naszym kraju.

Po Wielkiej Socjalistycznej Rewolucji Październikowej nastąpiła nowa epoka rozwoju geodezji i prac geodezyjnych w naszym kraju. 15 marca 1919 r. W. I. Lenin podpisał dekret o powołaniu Wyższego Urzędu Geodezyjnego, przekształconego następnie w Główny Urząd Geodezji i Kartografii przy Radzie Ministrów ZSRR. Urząd ten pełni państwową służbę geodezyjną w naszym kraju. W okresie władzy radzieckiej założono szereg instytutów geodezyjnych (szkoły wyższe) i średnie szkoły techniczne, kształcące inżynierów i techników dla wszystkich rodzajów prac geodezyjnych. W końcu roku 1928 utworzony został w Moskwie Centralny Naukowo-Badawczy Instytut Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii, który przekształcił się w wielkie centrum rozwoju myśli naukowej w dziedzinie geodezji.

Potężny rozwój budownictwa gospodarczego i kulturalnego w ZSRR stworzył decydujące warunki dla szerokiego rozwoju prac astronomiczno-geodezyjnych i zdjęć topograficznych. Stały się one częścią składową działalności państwa, zmierzającej do powiększenia i rozwoju sił wytwórczych i wykorzystania bogactw naturalnych kraju. Rozwój prac geodezyjnych i stworzenie przez rząd radziecki korzystnych warunków dla prac naukowych wywołały niebywały rozwój badań naukowych w dziedzinie geodezji.

Związek Radziecki odziedziczył po Rosji przedrewolucyjnej przestarzałe, nie związane ze sobą, podstawowe sieci geodezyjne i zdjęcia topograficzne. Dlatego też w okresie władzy radzieckiej tak podstawowe prace astronomiczno-geodezyjne, jak i zdjęcia topograficzne, były rozpoczęte od nowa według nowych programowych wytycznych. W miarę rozwoju podstawowych prac geodezyjnych w ZSRR nieprzerwanie doskonaliły się zarówno teoria, jak i metody ich wykonania i rozwiązywane były poważne naukowe problemy z dziedziny geodezji.

Ogromne zasługi naukowego ujęcia podstawowych prac geodezyjnych w ZSRR i opracowania naukowych problemów z zakresu geodezji należą do nieżyjącego już dziś wybitnego geodety radzieckiego, członka-kores-



pondenta Akademii Nauk ZSRR, prof. F. N. Krasowskiego. Wykonał on osobiście szereg poważnych badań naukowych z zakresu zasadniczych zagadnień geodezji i prac geodezyjnych i wywarł decydujący wpływ na kierunek i treść prac naukowych innych geodetów radzieckich. W niniejszym krótkim referacie, notując wyłącznie ważniejsze zdobycze geodezji radzieckiej, przypadnie często przytaczać imię F. N. Krasowskiego i powoływać się na jego prace, będące wielkim wkładem w rozwój geodezji.

Prace nad założeniem państwowej sieci triangulacji ZSRR wykonywane są według schematu i programu, opracowanego przez F. N. Krasowskiego w 1928 roku. Wymieniony schemat i program przewidują założenie triangulacji głównej w postaci sieci astronomiczno-geodezyjnej, odpowiadającej zarówno wymaganiom osnów dla wszystkich prac geodezyjnych i kartograficznych, jak i potrzebom naukowych badań z dziedziny geodezji. Stworzenie jednolitego schematu i programu prac astronomiczno-geodezyjnych dla tak olbrzymiego terytorium jak ZSRR, jak również ustalenie sposobów i metod osiągnięcia wysokiej dokładności ich wyników, stanowi samo w sobie wielkie osiągnięcie naukowe.

Łańcuchy triangulacji I rzędu w ZSRR zakłada się w przybliżeniu wzdłuż południków i równoleżników. Odległości pomiędzy łańcuchami przebiegającymi w jednakowym kierunku nie przekraczają 200—250 km. Zasadniczo łańcuchy triangulacji I rzędu w ZSRR utworzone są z pojedynczych łańcuchów trójkątów zbliżonych do równobocznych o długości boków 20—30 km.

Do pomiarów kątów w triangulacji używane są duże teodolity geodezyjne o dokładności dwusekundowej, produkowane w ZSRR. Instrumenty te mają bardzo dobrą optykę i odznaczają się małymi błędami podziału kół. Średni błąd kwadratowy pomiaru kąta triangulacji I rzędu w ZSRR, obliczony z odchyłek trójkątów, zwykle nie przewyższa  $\pm 0''{,}7$ . W pracach lat ostatnich dokładność pomiaru kątów triangulacji znacznie się podniosła. Dalsze powiększenie dokładności pomiarów kątowych w triangulacji związane jest z nakładem znacznych środków i pracy, szczególnie w tak różnorodnych fizyczno-geograficznych warunkach, jakie spotyka się na olbrzymich przestrzeniach ZSRR.

Badanie zagadnienia pomiarów kątowych w triangulacji wykazało, że stosowane w ZSRR instrumenty i metody pomiaru kątów doprowadziły do znikomych błędów indywidualnych i instrumentalnych. Wyjaśniło się przy tym, że pomiarom kątów towarzyszą pewne błędy, zależne od warunków środowiska zewnętrznego, to jest od refrakcji bocznej. Wykonana przez F. N. Krasowskiego analiza rezultatów określenia dwustronnych azymutów jak również specjalne badania prof. W. W. Daniłowa doprowadziły do wniosku, że zmiana mierzonego kierunku wywołana wpływem refrakcji bocznej osiąga średnio  $\pm 0''{,}6$ . Dokonane w ostatnich czasach ba-

dania wykazały, że wpływ refrakcji zasadniczo ma charakter przypadkowy. Mimo to przy zakładaniu triangulacji I rzędu wysokiej dokładności duże znaczenie ma odpowiednia gęstość rozmieszczenia baz i azymutów Laplace'a.

W ZSRR bazy mierzone są w miejscach przecięcia łańcuchów triangulacji I rzędu, nie rzadziej niż 200—250 km wzdłuż tych łańcuchów. Do pomiaru baz używany jest wyłącznie przyrząd bazowy Jaederina z 24-metrowymi drutami inwarowymi. Godne podkreślenia jest to, że w ZSRR opanowano i zorganizowano produkcję drutów inwarowych. Opracowana przez radzieckich geodetów i metalurgów technologia wytopu inwaru i wyrobów drutów inwarowych pozwoliły produkować druty do pomiarów o każdym żądanym współczynniku rozszerzalności cieplnej. Dla ustalenia współczynników liniowej rozszerzalności drutów A. S. Jurkiewicz i B. A. Łarin opracowali metodę termoelektryczną, opartą na ogrzewaniu drutów drogą przepuszczania przez nie prądu elektrycznego. Metoda ta pozwala ze znaczną dokładnością określać nie tylko liniowy i kwadratowy, ale również i objętościowy (sześcienny) współczynnik wydłużenia drutów. Badania CNBIGAiK wykazały, że współczynniki cieplne drutów inwarowych zachowują swoją stałość przez dłuższy okres czasu. Stwierdzenie to ma poważne znaczenie w metrologii geodezyjnej i wyjaśnia jedno ze skomplikowanych zagadnień pomiaru baz.

Na obu końcach jakiegokolwiek boku każdej sieci bazowej I rzędu wyznacza się astronomicznie szerokość, długość i azymut. Dzięki dwustronemu wyznaczeniu azymutów osiąga się znaczne zmniejszenie wpływu refrakcji bocznej i zwiększenie dokładności obliczenia azymutów Laplace'a. Astronomiczne pomiary szerokości i długości wykonuje się również na punktach łańcuchów triangulacji I rzędu co 70—100 km. Oprócz tego założone są główne łańcuchy triangulacji I rzędu, na których wyznacza się punkty astronomiczne co 50 km. Dzięki stosowanemu w ZSRR zagęszczeniu punktów astronomicznych łańcuchy triangulacji I rzędu stają się harmonijnym układem pomiarów stopniowych, służących do badania figury Ziemi.

W związku z rozwojem prac astronomicznych w ZSRR tworzyła się sieć podstawowych punktów długościowych. W tej olbrzymiej pracy, trwającej do chwili obecnej, brało udział Główne Obserwatorium Astronomiczne w Pułkowie, które partycypowało w naukowym ustawieniu prac i ich powodzeniu. W ZSRR opracowano ogólne założenia programu i metod wyznaczenia podstawowych punktów długościowych, jednak w każdym poszczególnym wypadku program prac ustala się oddzielnie. Średnie błędy kwadratowe w określaniu długości geograficznej wynoszą około  $\pm 0^s,005$ , a w żadnym wypadku nie przekraczają  $\pm 0^s,010$ .

W ZSRR jest siedem służb czasu, na których oparto prace astronomiczne i grawimetryczne w naszym kraju. Służby czasu Głównego Obserwatorium w Pułkowie i CNBIGAiK w Moskwie stosują dla określenia czasu aparatury fotoelektryczne, których konstrukcje opracował prof. N. N. Pawłow. Na podstawie wyników pracy wszystkich służb czasu w ZSRR nadawane są wyrównane rytmiczne sygnały czasu, których błędy nie przekraczają  $\pm 0,008$  sek.

Rozwój prac astronomicznych w ZSRR wysunął problem „gwiazd geodezyjnych“, dla rozwiązania którego wykonano poważne prace w dziedzinie astronomii. Leningradzki Instytut Astronomiczny, obecnie Instytut Astronomii Teoretycznej Akademii Nauk ZSRR, opracował instrukcje do metody Talcotta i opublikował zbiorczy katalog deklinacji 1967 gwiazd do tych instrukcji. Celem zaspokojenia potrzeb astronomii geodezyjnej większe obserwatoria ZSRR pod kierownictwem pułkowskiego obserwatorium wykonały dużą zbiorową pracę dla określenia rektascenzji i deklinacji „gwiazd geodezyjnych“. Rezultaty tej pracy, wymagającej wykonania licznych obserwacji, opublikowane zostały w postaci katalogu 2957 jasnych gwiazd o deklinacji od  $-10^{\circ}$  do  $+90^{\circ}$ . Dla wyznaczenia szerokości geograficznej według metody Piewcowa wydano efemerydy par gwiazd dla szerokości od  $40^{\circ}$  do  $65^{\circ}$ . Dla określenia czasu według metody Cingiera wydano efemerydy 500 par gwiazd dla szerokości od  $34^{\circ}$  do  $70^{\circ}$ , zaś celem opracowania obserwacji Instytut Astronomii Teoretycznej wydaje corocznie efemerydy oraz w Roczniku Astronomicznym ZSRR publikuje miejsca pozorne wszystkich gwiazd wchodzących do par Cingiera.

Przed rokiem 1945 w ZSRR prace niwelacji o najwyższej precyzji i precyzyjnej (I i II rzędu) wykonywane były przeważnie według rosyjskiej metody niwelatorami Hildebranda lub typu zbliżonego, produkowanymi w ZSRR. Ciągi I i II rzędu, niwelowane w dwóch kierunkach przy długości celowej nie dłuższej od 50—65 m, stanowiły poligony o obwodzie nie dłuższym od 100—600 km. Dokładność niwelacji I i II rzędu charakteryzowały średnie błędy przypadkowe, nie większe od 1—2 mm, i średnie błędy systematyczne, nie większe od 0,2—0,4 mm na kilometr.

Od roku 1945 w ZSRR wykonuje się nową niwelację I rzędu. Do prac używane są wyłącznie niwelatory z płasko-równoległą płytką i łąty inwarowe produkowane w ZSRR. W ostatnich latach w naszym kraju do niwelacji I rzędu produkuje się nowy typ niwelatora systemu W. A. Bielicyna, w którym płasko-równoległa płytka umieszczona jest wewnątrz lunety, zaś obraz końców pęcherzyka libeli znajduje się w polu widzenia lunety; sama luneta posiada znaczne powiększenie i dużą siłę światła. Nowe ciągi niwelacyjne I rzędu są główną podstawą wysokościową w naszym kraju, ale przede wszystkim służą celom naukowym. Dokładność niwelacji I rzędu cechuje średni błąd przypadkowy nie większy od  $\pm 0,4$  mm

i średni błąd systematyczny nie większy od  $\pm 0,05$  mm na kilometr, przy czym wielkości te wyprowadzono z różnic pomiarów w przód i wstecz oraz odchyłek poligonów niwelacyjnych.

W ostatnich 50 latach geodeci europejscy włożyli wiele wysiłku w zbadanie błędów niwelacji precyzyjnej. Wypowiedzieli oni wiele interesujących rozważań o charakterze spekulatywnym odnośnie do wpływu refrakcji i innych źródeł błędów, jak również obmyślili nazwy przypuszczalnych błędów. Istnieją nawet tak zwane formuły międzynarodowe do oceny dokładności niwelacji, przy czym należy zauważyć, że formuły te były już poddane krytyce przez prof. A. S. Czebotarewa. Jednak rzeczywiste źródła błędów, ich wielkość i prawidłowość występowania w wynikach niwelacji precyzyjnej dotychczas pozostały mało zbadane. Geodeci radzieccy w badaniach zagadnień niwelacji precyzyjnej odrzucili bezpłodną metodę spekulatywnych rozważań i oparli się na specjalnie przeprowadzonych doświadczeniach, które dały już cenne rezultaty. Badania CNBIGAiK wykazały, że wpływ refrakcji na rezultaty niwelacji istnieje, lecz przy spadku terenu mniejszym od 0,02 nie jest duży; pozwoliły ustalić, że osiadanie żabek i statywu powoduje błąd systematyczny w średniej różnicy wysokości przy pomiarze ciągów w obu kierunkach, dochodzący do 0,04 mm na 1 kilometr.

Duża ilość jednoczesnych obserwacji wykonanych niwelatorem znajdującym się w normalnych warunkach oraz niwelatorem w termostacie wykazała, że źródłem znacznego błędu systematycznego niwelacji jest zmiana kąta pomiędzy osią lunety i osią libeli, wywołana wpływem temperatury. Ten błąd systematyczny przy niwelacji w jednym kierunku może dojść do 0,5 mm na kilometr i zmniejsza się tylko przy ściśle symetrycznej obserwacji na stanowisku danym i sąsiednim.

Obecnie w ZSRR istnieje wiele powtórnie wykonanych niwelacji I i II rzędu. Ich rezultaty wykorzystuje się do badań ruchów skorupy ziemskiej i w tej dziedzinie uzyskano już cenne wnioski naukowe. Powtórne niwelacje są wykonywane w związku z wielkimi budowlami komunizmu, przy projektowaniu których należy koniecznie uwzględnić pionowe ruchy skorupy ziemskiej.

Jak wiadomo, w r. 1930 Międzynarodowa Asocjacja Geodezyjna ustaliła reglamentację dla triangulacji I rzędu i niwelacji precyzyjnej. Jakkolwiek nie mają one mocy obowiązującej i noszą tylko „charakter życzenia“, jednak powinny być naświetlone z pewnego punktu widzenia. Wymienione reglamentacje, szczególnie w odniesieniu do triangulacji I rzędu, zawierają wiele ogólnych rozważań i uwag, że wszystko należy wykonywać dobrze. Ale nie dają one uzasadnionych wskazówek odnośnie do ważniejszych założeń budowy sieci triangulacyjnej I rzędu. Tak na przykład mówi się w nich, że „nie wskazane jest mierzyć bazy zbyt często lub zbyt

rzadko“ i że „obecnie trudno jest ustalić reguły racjonalnego rozmieszczenia baz“ i nawet „nie można określić zasad racjonalnego rozmieszczenia punktów Laplace'a“. Przy tym podano do wiadomości, że w dobrych, nowoczesnych triangulacjach I rzędu, średni błąd pomiaru kąta, obliczony wg wzoru Ferrero, wynosi średnio  $\pm 1''$ ,2. Zaznaczyć należy, że w tych płynnych rozumowaniach ujawniły się uproszczone poglądy geodetów amerykańskich na zasadnicze zagadnienia geodezji.

Nieco ściślej są wskazówki dotyczące niwelacji precyzyjnej. Wymagają one, aby niwelacje precyzyjne miały błędy prawdopodobne przypadkowe i systematyczne odpowiednio nie większe niż  $\pm 1$  mm i  $\pm 0,2$  mm na kilometr. W zagadnieniach tych geodeci francuscy potrafili obronić swój punkt widzenia, ale nie może on być uznany za nowoczesny. Niewątpliwie reglamentacje Międzynarodowej Unii Geofizycznej i Geodezyjnej odnośnie do zagadnień triangulacji I rzędu i niwelacji precyzyjnej odznaczają się nie tylko połowicznością, ale i ubóstwem. Świadczą one o zacofaniu tej organizacji międzynarodowej, o jej słabości nie pozwalającej na naukowe ujęcie prac geodezyjnych i nie zasługują na większą uwagę ze strony geodetów przodujących krajów.

Zagadnienia dotyczące schematu i programu prac astronomiczno-geodezyjnych w ZSRR rozwiązano kompleksowo na podstawach naukowych, wysuwając żądanie, aby przy rozsądnym zużyciu sił i środków, osiągnięta była jednorodność i wysoka dokładność ostatecznych rezultatów. To samo również można powiedzieć o pracach z zakresu niwelacji precyzyjnej, które świadczą o dużych osiągnięciach geodezji radzieckiej. Astronomiczno-geodezyjne prace w ZSRR wykonywane są według odpowiednich instrukcji, które ustalają program i metody wykonania tych prac, jak również określają dokładność ich wyników. Instrukcje, początkowo ułożone osobiście przez F. N. Krasowskiego lub przy jego bezpośrednim udziale, były następnie wielokrotnie uzupełniane z uwzględnieniem praktycznego doświadczenia i osiągnięć naukowych w geodezji. Są one przykładem naukowo uzasadnionej reglamentacji zasadniczych astronomiczno-geodezyjnych i niwelacyjnych prac, odpowiednio do ich znaczenia naukowego i praktycznego.

W ZSRR opracowano racjonalne metody zakładania bezpośredniej osnowy do zdjęć topograficznych. Dla określenia punktów osnowy zdjęć szeroko stosuje się metody poligonów, jak również ciągi wysokościowo-teodolitowe, które zakładane są pomiędzy punktami triangulacyjnymi.

Dalmierz systemu W. A. Bielicyna, stosowany w ostatnich latach przy tych pracach, umożliwia pomiar długości do 1 km z błędem około 1 : 2000 i czyni zbędnym pomiar taśmą. G. J. Stodołkiewicz skonstruował kierownicę (kipregel) — wysokomierz i samoczynnie poziomujący się niwelator. Instrumenty te produkują fabryki radzieckie. W ZSRR skonstruo-

wano różne typy barometrów o wysokiej dokładności; są one szeroko stosowane w terenach górskich i leśnych.

Od roku 1932 wykonuje się ogólne zdjęcie grawimetryczne, stanowiące jedną z najważniejszych części astronomiczno-geodezyjnych prac w naszym kraju. Punkty grawimetryczne określone są z dokładnością 3—4 mgł co 30—40 km. Oprócz tego naokoło punktów astronomicznych na głównych łańcuchach triangulacji I rzędu wykonuje się bardziej dokładne specjalne pomiary grawimetryczne wg odrębnego programu. Rezultaty pomiarów grawimetrycznych ogólnych i specjalnych wykorzystuje się szeroko do opracowania triangulacji i badania figury Ziemi wg metod opracowanych przez geodetów radzieckich.

Podstawowymi punktami wyjściowymi pomiarów grawimetrycznych ZSRR są Pułkowo, Moskwa, Kazań i Połtawa. Najprawdopodobniejsze wartości siły ciężkości dla tych punktów były ustalone przez N. N. Parijskiego drogą wyrównania wszystkich związków grawimetrycznych zarówno pomiędzy sobą, jak i z Poczdamem. Oprócz tego istnieje znaczna ilość punktów grawimetrycznych I i II rzędu, których wielkości siły ciężkości określone są z dokładnością odpowiednio 1—2 mgł w stosunku do punktów podstawowych i które służą jako lokalne punkty wyjściowe. W ostatnich latach wykonywane są prace nad stworzeniem nowej sieci punktów grawimetrycznych I rzędu. W pracach tych stosowane są grawimetry przewożone w samolotach, zaś błąd pomiaru siły ciężkości wynosi około 0,5 mgł.

Przy ogólnym zdjęciu grawimetrycznym stosowane są przyrządy czterowahadłowe, produkowane w ZSRR. Do teorii i metod obserwacji wahadeł wprowadzono znaczne udoskonalenia, które zapewniają pełną kontrolę stałości długości wahadeł i dokładne wyliczenie poprawki ze względu na współdrżanie statywu. Przy obserwacjach stosuje się licznik optyczny, który rejestruje błyski powstające wskutek odbicia promienia od zwierciadła na balansjerze chronometru. W celu wyeliminowania zmian ruchu (chodu) chronometru obserwacje wahadeł trwają w miarę możliwości przez cały okres pomiędzy odbiorami rytmicznych sygnałów czasu. Przy obliczeniach poprawki na temperaturę uwzględnia się we wzorze wyraz proporcjonalny do kwadratu temperatury, jak również współczynnik dynamiczny, zależny od szybkości zmian temperatury.

Wyjaśniono, że na okres wahań wahadła poważnie wpływa warstwowy układ temperatur w przyrządzie. Poprawka barometryczna również uzupełniona jest wyrazem proporcjonalnym do pierwiastka kwadratowego z gęstości powietrza. Tak przy ogólnych, jak szczególnie przy specjalnych pomiarach grawimetrycznych, stosowane są grawimetry skonstruowane i wyprodukowane w ZSRR. Z różnych typów tych przyrządów szeroko stosowane są w ZSRR grawimetry systemu M. S. Mołodińskiego

i systemu WIRG, które pozwalają mierzyć siłę ciężkości z błędem nie większym od 0,5 mgl.

W ZSRR dokonywano również pomiarów grawimetrycznych na morzach i oceanach. Zapoczątkowały je prace prof. Ł. W. Sorokina, który w roku 1930 wykonał obserwacje na Morzu Czarnym zwykłym przyrządem wahadłowym, zaopatrzonym w zawieszenie kardanowe i fotograficzną rejestrację ruchów wahadła. W okresie późniejszym prof. Ł. W. Sorokin wraz z prof. W. W. Fiedynskim dokonał pomiaru siły ciężkości bardziej udoskonalonym przyrządem na morzach: Czarnym, Kaspijskim, Japońskim i Ochockim. Prace wykonane przez prof. I. D. Żongołowicza w latach 1935—1938 na morzach: Barentsa, Karskim i Lodowatym Północnym, przy wykorzystaniu łamacza lodów „Sadko“, jak również prace E. K. Fiedorowa na unoszonej przez prąd stacji „Biegun Północny“ pozwoliły na zebranie znacznego i cennego materiału grawimetrycznego z północnych polarnych rejonów Ziemi.

Sukcesy prac grawimetrycznych w ZSRR wywarły wpływ na wspaniałe osiągnięcia geodetów radzieckich w zakresie opracowania teorii i metod wykorzystania pomiarów siły ciężkości dla rozwiązania zasadniczych problemów geodezji.

N. D. Moisiejew, N. R. Małkin i M. S. Mołodienski przeprowadzili badania teoretyczne i wyprowadzili nowe wzory do określenia figury geoidy, nie zregularyzowanej bryły ziemskiej. Następnie M. S. Mołodienski doprowadził wszystkie trzy wzory do jednolitego układu i udowodnił, że ich część główna jest zgodna z formułą Stokesa, zaś wyrazy uzupełniające uwzględniają zniekształcenia geoidy przy przyjętym systemie regularyzacji. Liczbowe sprawdzenie formuły Stokesa i podobnych do niej metod redukcji siły ciężkości, czyli regularyzacji Ziemi, wykonał prof. A. A. Michajłow, stosując w tym celu po raz pierwszy metodę modeli. Rozpatrzył on również zagadnienie regularyzacji Ziemi sposobem kondensacji zewnętrznych mas na powierzchni geoidy i ułożył szczegółowe tabele dla redukcji siły ciężkości według tego sposobu, ze ścisłym uwzględnieniem kondensacji mas na całej Ziemi. W tym celu M. S. Mołodienski zastosował metodę Bouguera, zgodnie z którą początkowo usuwa się wpływ topograficznych mas na anomalie siły ciężkości, oblicza się odchylenie pionu i następnie uwzględnia się wpływ tych mas na otrzymane odchylenie pionu.

Na przedmiot i kierunek badań grawimetrii geodezyjnej duży wpływ wywarł F. N. Krasowski, który na temat tych zagadnień wypowiedział obszerne poglądy naukowe. Prawidłowo ocenił on wagę wspólnego wykorzystania pomiarów astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych dla rozwiązania zasadniczych problemów naukowych w geodezji. Naukowo również uzasadnił projekt rozwoju pomiarów grawimetrycznych w ZSRR i wskazał drogi wykorzystania ich rezultatów we wskazanym celu.

Pierwsze badania nad wykorzystaniem danych grawimetrycznych dla rozwiązania naukowych zagadnień geodezji były wykonane w CNBIGAiK przez prof. I. A. Kazanskiego i jego współpracowników, którzy w latach 1932—1934 wyznaczyli grawimetryczne odchylenia pionu i lokalny kształt geoidy na obszarze anomalii moskiewskiej. Po raz pierwszy przy tym były opracowane praktyczne metody obliczenia odchylenia pionu i odstepu geoidy na podstawie anomalii siły ciężkości. W późniejszych pracach CNBIGAiK jeszcze ściślej ujął te metody i doprowadził do pełnej doskonałości. Oprócz tego zbadano dokładność określenia odchylenia pionu przy różnym zagęszczeniu punktów grawimetrycznych i rozpatrzono zagadnienie wpływu tych obwodów lub stref, które nie mają zdjęć grawimetrycznych i pozostają poza granicami obszaru całkowania anomalii siły ciężkości. Wyjaśniono przy tym, że dokładność określenia odchylenia pionu w znacznym stopniu zależy od dokładności i zagęszczenia pomiarów siły ciężkości w pobliżu danego punktu. Stąd powstała konieczność wykonywania specjalnych zdjęć grawimetrycznych naokoło punktów Laplace'a, jak to przyjęto obecnie w ZSRR.

Poważnym osiągnięciem grawimetrii geodezyjnej jest opracowana przez M. S. Mołodińskiego metoda niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej, która ułatwia zadanie badania figury geoidy. Według jednego sposobu metoda ta może być zastosowana jak zwykła niwelacja astronomiczna, przy tym astronomiczno-geodezyjne odchylenia pionów interpoluje się z uwzględnieniem nieliniowej części ich zmian od punktu do punktu, według danych grawimetrycznych. W wypadku tym otrzymane w interpolacji odchylenia pionu mogą być doprowadzone do dowolnego zagęszczenia, które jest konieczne do zbadania figury geoidy z założoną dokładnością. Według drugiego sposobu, pozwalającego określić odstęp geoidy tylko w astronomiczno-geodezyjnych punktach, w wyniku niwelacji astronomicznej wprowadza się poprawkę grawimetryczną, która bezpośrednio uwzględnia nieliniową część zmiany odstepu geoidy od punktu do punktu. Niwelacja astronomiczno-grawimetryczna daje dobre rezultaty nawet przy stosunkowo rzadkiej sieci punktów astronomiczno-geodezyjnych, jeśli wokół tych punktów wykonano pomiary grawimetryczne w granicach obszaru o promieniu dwukrotnie większym od odległości pomiędzy nimi.

Przy badaniu figury geoidy powstają trudności, związane z odniesieniem do poziomu morza obserwacji astronomicznych i pomiarów siły ciężkości. W tym celu konieczna jest znajomość struktury mas leżących powyżej geoidy. Chcąc się uwolnić od tych trudności M. S. Mołodiński opracował teorię badania kształtu powierzchni fizycznej i zewnętrznego pola grawitacyjnego Ziemi na podstawie rezultatów astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych pomiarów na powierzchni Ziemi.



Z opisanych tu prac badawczych z zakresu grawimetrii geodezyjnej w ZSRR — powstała radziecka szkoła geodezji teoretycznej, która dotychczas nie ma odpowiednika w innych krajach. Rozpatrując zagraniczne badania w tej dziedzinie, moglibyśmy zobaczyć, że znajdują się one na poziomie końca pierwszego ćwierćwiecza wieku XX. W każdym razie nie zaszły one dalej od prac Vening-Meinesza w zakresie wyprowadzenia formuł do obliczenia grawimetrycznych odchyłeń pionu i badań Heiskanena i jego współpracowników w zakresie określenia figury geoidy i wyprowadzenia formuł normalnej siły ciężkości na podstawie przestarzałych przesłanek.

Prace astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne w ZSRR rozwinęły się szeroko i ułożyły się w harmonijny system pomiarów stopnia nowego typu. Obejmują one obszar przewyższający połączone obszary USA i Indii. Geodeci radzieccy w przeciągu około 30 lat wykonali pracę, na wykonanie której w mniej doskonałej postaci, geodeci innych krajów byliby stracili powyżej 100 lat.

System pomiarów stopnia ZSRR objął wielkie łuki południków i olbrzymie łuki równoleżników, pozwalając na określenie z wysoką dokładnością zarówno dużej półosi, jak i biegunowego spłaszczenia Ziemi. Takie łuki równoleżników, jak łuk Orsza-Chabarowsk o rozpiętości powyżej 100<sup>o</sup> długości geograficznej, mają szczególne znaczenie dla badania figury Ziemi. Razem z pomiarami stopnia innych krajów mogą one dać uzasadnione wnioski co do ogólnej eliptyczności równoleżników ziemskich, tj. co do trójosiowości Ziemi.

Dla wyrównania i obliczenia astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR w swoim czasie przyjęta była elipsoida Bessela. Punktem wyjściowym było obserwatorium pułkowskie, którego współrzędne astronomiczne przyjęto jako współrzędne geodezyjne, zaś wysokość geoidy przyjęto jako równą zeru. Odosobnione sieci triangulacyjne, początkowo nieuniknione na niektórych obszarach naszego kraju, obliczane były na tejże elipsoidzie, każda od swego punktu wyjściowego.

W latach 1930—1932 wykonane zostało pierwsze ogólne wyrównanie astronomiczno-geodezyjnej sieci europejskiej części ZSRR wg metody opracowanej przez F. N. Krasowskiego, polegającej na następujących zasadach. Każde ogniwo triangulacji I rzędu pomiędzy dwiema sąsiednimi bazami (bokami wyjściowymi) i azymutami Laplace'a wyrównuje się oddzielnie z uwzględnieniem warunków figur, baz i azymutów, przy czym określa się tylko poprawki pomierzonych kierunków. Wyrównanie ogniw triangulacji kończy się określeniem długości i astronomicznych azymutów odpowiednich linii geodezyjnych, z których tworzy się poligony astronomiczno-geodezyjnej sieci. W każdym poligonie układa się równania warunkowe szerokości i długości geograficznej, zaś dla każdej linii geodezyj-

nej układu się równanie warunkowe Laplace'a. Z wspólnego rozwiązania tych równań określa się poprawki długości i kierunków linii geodezyjnych, jak również poprawki azymutów astronomicznych i długości geograficznych na punktach Laplace'a. Wyrównanie poligonów astronomiczno-geodezyjnej sieci kończy się ustaleniem ostatecznych współrzędnych geodezyjnych ich wierzchołków. Następnie wykonuje się ostateczne wyrównanie oddzielnych ogniów triangulacji przy uwzględnieniu warunków figur, baz, azymutów i współrzędnych, przy tym określa się tylko poprawki kątów w trójkątach.

W 1936 r. prof. N. A. Urmajew opracował swoją metodę wyrównania astronomiczno-geodezyjnej sieci. W jego metodzie całkowicie zachowany jest opisany wyżej porządek wyrównania oddzielnych ogniów. Natomiast wyrównanie poligonów astronomiczno-geodezyjnej sieci dokonuje się sposobem obserwacji pośrednich. Metoda N. A. Urmajewa jest praktycznie niemniej ścisła, zaś z pewnych względów nawet prostsza od metody Krawskiego.

Przy wyrównaniu astronomiczno-geodezyjnej sieci w ZSRR szczególną uwagę zwraca się na prawidłowe wykorzystanie azymutów Laplace'a. Wykorzystuje się je już przy wyrównywaniu oddzielnych ogniów triangulacji I rzędu na równi z bazami. Rozważania teoretyczne, potwierdzone przez doświadczenia praktyczne wykazują, że w tym wypadku wewnątrz każdego ogniwa lokalizują się błędy pomiaru kątów tego ogniwa i podnosi się dokładność określenia długości i azymutów odpowiedniej linii geodezyjnej. Zmniejsza to poważnie odchyłkę w równaniach warunkowych poligonów i warunkach Laplace'a i podnosi dokładność rezultatów wyrównania astronomiczno-geodezyjnej sieci. Z tego punktu widzenia brak dostatecznej ilości azymutów Laplace'a w triangulacjach podstawowych wielu krajów (USA, Indie, Francja i in.) jest poważnym brakiem obniżającym ich dokładność i wartość naukową.

Przy pierwszym ogólnym wyrównaniu astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR bazy i kąty triangulacji zredukowano tylko do poziomu morza, tj. nie uwzględniano odległości powierzchni geoidy od powierzchni elipsoidy odniesienia. Oczywiście w tym wypadku opracowanie triangulacji jest równoznaczne z nałożeniem lub rozwinięciem powierzchni geoidy na powierzchnię przyjętej elipsoidy odniesienia. Ta metoda opracowania triangulacji u geodetów radzieckich otrzymała nazwę metody rozwijania.

Czasami w geodezji wypowiedziano niezbyt jasno sformułowane przypuszczenie, że odstępstwa geoidy od elipsoidy odniesienia w jakiś sposób wpływają na rezultaty opracowania triangulacji. Zwykle wskazywano, że przy opracowaniu triangulacji trzeba przyjąć elipsoidę odniesienia najbardziej zbliżoną do kształtu geoidy w granicach odpowiedniego obszaru. Jednak

zagadnienie charakteru i wielkości wpływu odstępów geoidy na rezultaty pomiarów geodezyjnych pozostawało całkowicie niezbadane.

Badania F. N. Krasowskiego wykazały, że metoda rozwijania nie jest dogodna nawet przy zastosowaniu najbardziej zbliżonej elipsoidy odniesienia. Okazało się, że na rezultaty opracowania triangulacji metodą rozwijania w znacznym stopniu wpływa niezgodność lokalnej krzywizny powierzchni geoidy z krzywizną odpowiedniej części powierzchni elipsoidy odniesienia. Jak wiadomo, promień lokalnej krzywizny geoidy w granicach pojedynczego poligonu sieci astronomiczno-geodezyjnej może się różnić od promienia krzywizny przyjętej elipsoidy odniesienia o kilka kilometrów, czasami zaś o dziesiątki kilometrów. Łatwo daje się to zauważyć, na przykład na podstawie rezultatów wyznaczenia rozmiarów elipsoidy z pomiarów stopnia na obszarze małych krajów. W wypadku tym wpływ odchylenia geoidy od przyjętej elipsoidy odniesienia na rezultaty opracowania triangulacji metodą rozwijania będzie znacznie przewyższać wpływ błędów pomiaru.

Na podstawie wszechstronnych badań F. N. Krasowskiego stało się jasne, że prawidłowe opracowanie matematyczne triangulacji związane jest przede wszystkim z odniesieniem jej baz i kątów do powierzchni elipsoidy odniesienia z uwzględnieniem odchylenia od powierzchni geoidy. Ściśle mówiąc, do wartości baz i kątów triangulacji powinny być wprowadzone poprawki, odpowiadające ich rzutowaniu na powierzchnię elipsoidy odniesienia normalnymi do jej powierzchni. Stąd nowa metoda opracowania triangulacji u geodetów radzieckich otrzymała nazwę metody rzutowania.

Dla opracowania triangulacji metodą rzutowania trzeba znać wysokości geoidy i odchylenia pionu od normalnej do powierzchni elipsoidy odniesienia. Wynika stąd, że badanie figury geoidy ma znaczenie nie tylko naukowe, ale i praktyczne. Metoda rzutowania wymaga również przyjęcia elipsoidy odniesienia najbardziej zbliżonej do geoidy, gdyż w przeciwnym wypadku odchylenia geoidy i odchylenia pionu, jak również odpowiednie poprawki baz i kątów triangulacji, będą duże.

W wyniku prac astronomiczno-geodezyjnych w ZSRR okazało się, że elipsoida ziemską Bessela posiada w granicach naszego kraju kształt znacznie odbiegający od kształtu geoidy. W związku z tym powstało zagadnienie ustalenia nowej elipsoidy odniesienia, odpowiadającej warunkom opracowania triangulacji ZSRR. To wielkie i o dużej wadze zagadnienie nie mogło być rozstrzygnięte bez przeprowadzenia odpowiednich badań, ponieważ nie było żadnych podstaw do przypuszczenia, że dla ZSRR okaże się odpowiednią jakakolwiek z istniejących elipsoid, włączając elipsoidę Hayforda.

Jak wiadomo, rozmiary elipsoidy ziemskiej Hayforda obliczone zostały w r. 1909 wyłącznie na podstawie pomiarów stopnia w USA, wykonanych

jeszcze w ubiegłym stuleciu. Charakterystyczną cechą tych pomiarów było to, że nie miały one uprzednio opracowanego programu naukowego i były dokonane przede wszystkim dla celów praktycznych. Wskutek tego bazy i obserwacje astronomiczne na łańcuchach triangulacji USA rozmieszczone były dość chaotycznie i prawie zupełnie nie zawierają azymutów Laplace'a. Ówczesne pomiary stopnia w USA rozlokowane były na obszarze kraju nierównomiernie, zaś liczne punkty astronomiczne umieszczono na terenach górskich, gdzie spostrzeżono znaczne lokalne odchylenia pionu. W celu zmniejszenia lokalnych wpływów na określenie rozmiarów elipsoidy ziemskiej Hayford przyjął teorię izostazji, której niedoskonałość jest dobrze znana. Głębokość kompensacji izostatycznej określona była równocześnie z rozmiarami elipsoidy ziemskiej przy warunku najmniejszej sumy kwadratów przypadkowych błędów odchylenia pionu, pomimo że nie jest to metoda właściwa. Mogło się przy tym zdarzyć, że i jedno i drugie zostało błędnie wyznaczone. W każdym razie głębokość kompensacji izostatycznej równa 120,9 km, którą przyjął Hayford, prawdopodobnie była przesadzona i doprowadziła do uzyskania przewiększonej wartości wielkiej półosi elipsoidy ziemskiej. Oprócz tego Hayford wykorzystał wiele pomiarów azymutów, przyjmując je za równoważne pomiarom szerokości i długości geograficznych, gdy tymczasem określenia azymutów są mniej dokładne niż określenia szerokości i długości geograficznej, zaś w szerokościach mniejszych od  $45^{\circ}$  — nawet mało przydatne dla wyprowadzenia odchylenia pionu. Okoliczność ta ma szczególne znaczenie w związku z tym, że przy opracowaniu triangulacji USA stosowano metody prymitywne i wcale nie wykorzystano azymutów Laplace'a. Mogło to poważnie zniekształcić wyniki obliczenia rozmiarów elipsoidy ziemskiej. Wynika stąd jasno, że nie było żadnych podstaw, aby elipsoidę Hayforda przyjąć za międzynarodową elipsoidę ziemską, tym bardziej że została ona ustalona na podstawie pomiarów stopnia, wykonanych tylko w jednym kraju.

Ustalenie elipsoidy odniesienia dla prac geodezyjnych i kartograficznych na tak wielkim obszarze jak ZSRR jest problemem trudnym i skomplikowanym. W istocie swej jest on związany z określeniem rozmiarów elipsoidy ziemskiej, prawidłowo charakteryzującej figurę Ziemi jako całości. Szeroki rozwój prac astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych w ZSRR wniósł zasadnicze zmiany do metod pomiarów stopnia na całym świecie i nie tylko wysunął na czoło ten problem naukowy, ale doprowadził również do zgromadzenia ogromnych ilości nowych materiałów dla jego rozwiązania.

Badania nad ustaleniem rozmiarów elipsoidy ziemskiej zostały rozpoczęte w roku 1932 przez F. N. Krasowskiego, który w 1935 r. wciągnął mnie do tych prac. Od 1937 r. stały się one jedną z zasadniczych prac Cen-

tralnego Naukowo-Badawczego Instytutu Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii i rozwijały się pod ogólnym kierownictwem ich inicjatora.

W badaniach naszych wykorzystane zostały przede wszystkim nowe pomiary stopnia ZSRR (łącznie ze słynnym łukiem południkowym Struvego), których program podany był wyżej. Wykorzystano również i pomiary stopnia USA, które posłużyły do ustalenia elipsoidy „międzynarodowej“, oraz pomiary stopnia w Europie zachodniej. Aczkolwiek pomiary stopnia USA i Europy zachodniej są mniej dokładne od pomiarów stopnia ZSRR, jednak prawdopodobne ich błędy powinny być znacznie mniejsze od wpływu lokalnego kształtu geoidy. Pomiary stopnia ZSRR w znacznej części wykorzystano łącznie z pomiarami siły ciężkości dla obliczenia poprawek grawimetrycznych do obserwacji odchyleń pionu. Przy opracowaniu pomiaru stopnia USA i Europy zachodniej zastosowano teorię izostazji, przyjmując głębokość kompensacji odpowiednio 113,7 i 96 km.

Obliczenie nowych rozmiarów elipsoidy ziemskiej zostało zakończone już w 1940 roku. Uzyskano również niezależne wnioski odnośnie do figury Ziemi na podstawie niektórych materiałów światowych pomiarów grawimetrycznych. Oprócz tego były również stosowane wyłącznie astronomiczne metody określenia figury Ziemi. Szczegółowe dane o całej pracy i jej rezultatach podane są w mojej monografii „Kształt i rozmiary Ziemi według nowoczesnych danych“ opublikowanej w 1950 r.

Wzięte pod uwagę pomiary stopnia, pomiary siły ciężkości i obserwacje ruchów bieguna doprowadziły do zgodnego wniosku, że bryła ziemską może być przedstawiona w postaci trójosiowej elipsoidy. Otrzymano przy tym następujące ostateczne elementy trójosiowości Ziemi:

Splaszczanie równika ziemskiego	1 : 30 000
Długość geograficzna najdłuższego południka	15 <sup>0</sup> na wschód od Greenwich

Określając średni promień równika i średnie biegunowe splaszczanie elipsoidy ziemskiej na podstawie wszystkich wykorzystanych pomiarów stopnia, otrzymaliśmy następujące rezultaty:

1. Bez uwzględnienia trójosiowości:
 

Promień równika	6 378 295 m
Splaszczanie biegunowe	1 : 298,4
2. Przy uwzględnieniu trójosiowości:
 

Promień równika	6 378 245 m
Splaszczanie biegunowe	1 : 298,3

Średnie splaszczanie biegunowe, obliczone na podstawie pomiarów siły ciężkości, wynosi również 1 : 298,3

Wszystko to doprowadziło do wniosku, że figurę Ziemi w odniesieniu do jej kształtu i rozmiarów charakteryzują następujące dane:

Średni promień równika	6 378 245 m
Średnie spłaszczenie biegunowe	1 : 298,3
Spłaszczenie równika ziemskiego	1 : 30 000
Długość geograficzna najdłuższego południka	15 <sup>o</sup> na wschód od Greenwich

Jak widzimy, przytoczone dane nie potwierdzają wartości uzyskanych dla elipsoidy Hayforda. Dla lepszego uzasadnienia tego wniosku w Centralnym Naukowo-Badawczym Instytucie Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii D. D. Kołkow pod moim kierownictwem wykonał w latach 1947—1949 opracowanie nowych pomiarów stopnia USA, których materiały opublikowane były w 1941 r. Przy pracy tej wykorzystano również pomiary stopnia w Kanadzie. Nowe pomiary stopnia USA pokrywają prawie cały obszar kraju. Znamienne jest, że geodeci amerykańscy wyłączyli znaczną część pomiarów szerokości i długości geograficznych, wykorzystanych w swoim czasie przez Hayforda i wcale nie opublikowali wyznaczenia azymutów. Według ustalonych wytycznych D. D. Kołkow w pracy swojej zastosował metody Hayforda, lecz wykorzystał znacznie rozszerzony materiał. Określając rozmiary elipsoidy ziemskiej z pomiarów stopnia USA wyłącznie z danych astronomiczno-geodezyjnych i stosując do nich redukcje izostatyczne przy różnych głębokościach kompensacji izostatycznej, otrzymał on następujące rezultaty:

Metody wyprowadzenia	Duża półoś	Spłaszczenie
1. Astronomiczno-geodezyjna	6 378 125 m	1 : 297,9
2. Przy głębokości kompensacji 113,7 km	6 378 203 m	1 : 298,3
3. Przy głębokości kompensacji 79,8 km	6 378 182 m	1 : 298,2

Jak widać rezultaty te odpowiadają dobrze rezultatom naszych badań i są nowym potwierdzeniem braku uzasadnienia rozmiarów tak zwanej elipsoidy międzynarodowej. Widzimy, że elipsoida Hayforda, ustalona wg pomiarów stopnia w USA, nie odpowiada figurze geoidy nawet w granicach USA. Bezpodstawność tej elipsoidy jest obecnie uznawana nawet przez tych uczonych zagranicznych, którzy jeszcze niedawno robili próby udowodnienia jej wartości.

W związku z tym należy zaznaczyć, że wykorzystanie elipsoidy Hayforda przez geodetów amerykańskich do wyrównania triangulacji zamarszalizowanych krajów Europy zachodniej nie ma nic wspólnego z naukowym ujęciem zasadniczych zagadnień naukowych. Poza tym zastosowanie przy tym wyrównaniu tak zwanej metody Bowie, którą z trudnością można nazwać metodą wyrównania triangulacji, jeszcze bardziej wpływa na obniżenie wartości całego tego przedsięwzięcia, które prowadzone jest przez Amerykanów w określonym celu.

Trójosiowa elipsoida nie może być przyjęta w praktycznych zagadnieniach geodezji, ponieważ skomplikowałyby to ogromnie opracowywanie materiałów. Dlatego też postanowiono przyjąć jako elipsoidę odniesienia do prac geodezyjnych ZSRR dwuosiową elipsoidę, którą nazwano elipsoidą Krasowskiego i którą charakteryzują następujące dane:

Duża półoś	6 378 245 m
Splaszczenie biegunowe	1 : 298,3

Elipsoida ziemiska Krasowskiego została wyznaczona w oparciu o obszernie astronomiczno-geodezyjne i grawimetryczne dane i obecnie w sposób najlepszy określa figurę Ziemi, w każdym razie w obrębie kontynentów. Odpowiada ona wszystkim naukowym i praktycznym wymaganiom prac geodezyjnych ZSRR, jak również wszystkich innych krajów.

Ustalenie elipsoidy odniesienia zawiera określenie jej orientacji, tj. tak zwanych wyjściowych dat geodezyjnych, pod którymi rozumiemy geodezyjne współrzędne i azymut, jak również wysokość geoidy w punkcie wyjściowym triangulacji. Zadanie ustalenia geodezyjnych dat wyjściowych w ZSRR rozwiązano w 1942 r. niezależnie od określenia rozmiarów elipsoidy odniesienia, ustalonych w wyniku wyżej podanych badań. Zadanie to było ograniczone do określenia składowych odchyłeń pionów i wysokości geoidy w punkcie wyjściowym, za który znów przyjęto Pułkowo.

Składowe odchylenia pionu od normalnej do powierzchni elipsoidy ziemskiej Krasowskiego w Pułkowie określone zostały przez A. A. Izotowa na podstawie materiałów sieci astronomiczno-geodezyjnej i ogólnego zdjęcia grawimetrycznego. Wyprowadzono je przy warunku minimum sumy kwadratów przypadkowych błędów odchyłeń pionu na wszystkich punktach Laplace'a, które się znajdowały w sieci triangulacyjnej ZSRR. Wysokość geoidy nad powierzchnią elipsoidy ziemskiej Krasowskiego w Pułkowie wyznaczona została przez M. S. Mołodińskiego na podstawie rezultatów badań figury geoidy w ZSRR wg metod astronomiczno-grawimetrycznej niwelacji. Wyznaczono ją przy zachowaniu warunku minimum sumy kwadratów przypadkowych błędów wysokości geoidy w granicach istniejącej wówczas astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR. Pracę nad ustaleniem wyjściowych geodezyjnych dat ZSRR zakończyło sporządzenie mapy wysokości geoidy na blisko połowie olbrzymich obszarów ZSRR.

Po ustaleniu rozmiarów elipsoidy odniesienia i wyjściowych dat geodezyjnych wykonano nowe ogólne wyrównanie astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR według metody Krasowskiego z pewnymi zmianami, które podano w drugiej części jego „Podręcznika geodezji wyższej“.

Przy nowym wyrównaniu astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR zastosowano metodę rzutowania, wg której bazy i kąty triangulacji odnoszono do powierzchni elipsoidy odniesienia Krasowskiego, po wprowa-

dzeniu poprawek na odchylenie od geoidy. W celu przeniesienia kątów na powierzchnię elipsoidy odniesienia, odchylenia pionu na punktach triangulacji wyznaczono drogą interpolacji odpowiednich wielkości, obserwowanych na punktach Laplace'a, przy tym część nieliniową zmian odchylen pionu uwzględniano wychodząc z danych grawimetrycznych. Wszystkie wyniki astronomicznych pomiarów triangulacji I rzędu ZSRR były doprowadzone do jednego systemu, opartego na Trzecim Fundamentalnym Katalogu jak również tam, gdzie to było możliwe, do średniego położenia bieguna. Ponadto należy nadmienić, że przy wyrównaniu astronomiczno-geodezyjnej sieci ZSRR najpoważniejszą uwagę zwrócono na analizę i ujednoczenie całego materiału pomiarowego.

Ogromna astronomiczno-geodezyjna sieć ZSRR, opracowana w oparciu o jednolite ściśle metody, doprowadzona jest obecnie do jednego naukowo-uzasadnionego układu współrzędnych. Jest to jedno z większych osiągnięć geodezji radzieckiej, która daje przykład naukowego podejścia do rozwiązywania skomplikowanych zagadnień badawczych, mających duże znaczenie praktyczne.

W niniejszym artykule o nowoczesnych osiągnięciach geodezji omówiliśmy przede wszystkim zdobycze geodezji radzieckiej. Stanie się to zupełnie zrozumiałe, jeśli weźmiemy pod uwagę, że w innych krajach dotychczas nie mamy równorzędnych osiągnięć w zakresie geodezji. Wiedzimy, że w ZSRR w geodezji dokonano wielkich prac i rozwiązano tak skomplikowane zagadnienia, których nigdy nawet nie postawiono przed kadrami naukowymi innych krajów.

#### РЕЗЮМЕ

Установление наиболее точным способом размеров земного эллипсоида, проведенное Ф. Н. Красовским, основано на совместном использовании астрономических, геодезических и гравиметрических измерений. Такой путь является одновременно самым надлежащим при решении основных научных проблем в геодезии. При исследовании фигуры Земли большие услуги оказывает метод астрономо-гравиметрического нивелирования, разработанный проф. Молоденским.

Обработка триангуляционной сети „методом развития“ заменена в СССР современным „методом проектирования“. Полученные этим путем результаты на много превышают достижения в этой отрасли, имевшиеся до сих пор.

Работы Ф. Н. Красовского над установлением надлежащих размеров земного эллипсоида опираются на новые градусные измерения, проведенные в СССР, на густую сеть гравиметрических пунктов, на многие астрономические измерения а также на результаты прежних измерений в Западной Европе и Америке.

Результаты работ показали, что фигура Земли может быть представлена в виде трехосного эллипсоида. Для практических целей однако принимается двухосный эллипсоид Красовского, который определяет размеры и фигуру Земли с на много большей точностью, чем эллипсоид Хейфорда.



## RÉSUMÉ

Les dimensions de l'ellipsoïde de la Terre, fixées de la manière la plus précise par F. N. Krasowski, furent calculées à l'aide des mesurages tant astronomiques que géodésiques et gravimétriques.

Cette voie est aussi la meilleure pour arriver à la solution des problèmes scientifiques fondamentaux en géodésie. Il faut ajouter que la méthode de nivellement astronomique et gravimétrique, élaborée par le Professeur Molodienski, rend de grands services dans l'investigation de la figure de la Terre.

L'élaboration du réseau de triangulation, par la méthode de développement, a été remplacée en URSS par la méthode moderne de projection. Les résultats obtenus par cette dernière méthode surpassent de beaucoup les résultats antérieurs dans ce domaine.

Les travaux de F. N. Krasowski qui ont pour but de fixer les dimensions exactes de l'ellipsoïde terrestre, sont basés sur les nouveaux mesurages du degré faits en URSS, sur un réseau épais de points gravimétriques, sur de nombreux mesurages astronomiques, de même que sur les résultats d'anciens mesurages faits dans l'Europe Occidentale et en Amérique.

Les résultats de ces travaux ont montré que le corps terrestre peut être représenté sous la forme d'un ellipsoïde triaxial.

Dans les problèmes pratiques de la géodésie on admet pourtant l'ellipsoïde biaxial de Krasowski qui définit les dimensions et la forme de la figure de la Terre avec une exactitude beaucoup plus grande que l'ellipsoïde de Hayford.

*M. S. Mołodiński*

Członek-korespondent Akademii Nauk ZSRR, Moskwa

## Metody badania figury Ziemi

Metody badania figury Ziemi rozwijały się wraz z precyzowaniem wyobrażenia o jej kształcie. Do czasów Newtona możliwe były metody wyłącznie geometryczne.

Teoria figury Ziemi, stworzona przez Newtona i rozwinięta zasadniczo przez Clairaut i Stokesa, w swoim czasie daleko wyprzedziła praktykę. Dopiero w naszych czasach, w pierwszym rzędzie w Związku Radzieckim, teoria ta została zastosowana w praktyce i dalej rozwinięta. Decydujące znaczenie miała w tej sprawie uchwała rządu o włączeniu pomiarów grawimetrycznych do planu Pięciolatki Stalinowskiej oraz o wykonaniu począwszy od 1933 r. pomiaru grawimetrycznego Związku Radzieckiego, a więc całkowitego pokrycia obszaru kraju siecią punktów grawimetrycznych o średniej odległości między punktami 30—40 km. Jako wynik tej ogromnej pracy, mającej wielkie znaczenie dla różnych dziedzin gospodarki narodowej, określona została według jednolitych zasad wielka ilość punktów, rozłożonych na obszarze około 20 milionów km<sup>2</sup>, co stanowi więcej niż połowę całkowitej ilości podobnych pomiarów na całej kuli ziemskiej.

Pomyślna realizacja ogólnego zdjęcia grawimetrycznego stworzyła bazę dla przeprowadzenia prac doświadczalnych i dla rozwinięcia teorii grawimetrycznej metody badania figury Ziemi. Wyznaczenie grawimetrycznych odchyłek pionu na obszarze moskiewskiej anomalii grawitacyjnej, dokonane po raz pierwszy w r. 1933 pod kierownictwem I. A. Kazanckiego, wykazało ogromne znaczenie praktyczne nowej metody. Dalsze prace F. N. Krasowskiego, A. A. Michajłowa i ich uczniów doprowadziły do tego, że grawimetria stała się niezbędnym elementem podstawowych prac geodezyjnych. Obecnie dokładne opracowanie triangulacji bez pomiarów grawimetrycznych jest niemożliwe.

Praktyka szybko wyprzedziła teorię i postawiła przed nią szereg nowych zagadnień. Niedoskonałość klasycznej teorii przejawiała się nie tylko w drugorzędnych zagadnieniach, ale i w zasadniczych pojęciach.

Pod pojęciem figury Ziemi rozumiano figurę geoidy, ponieważ za pomocą niej łącznie z wysokościami ortometrycznymi wyznacza się geome-

tryczną formę powierzchni Ziemi, a uwzględniając masę i prędkość kątową obrotu — charakteryzuje się pole grawitacyjne na zewnątrz Ziemi. Jednakże takie podejście do rozpatrywanego problemu, uważane za tradycyjne, wymagało poważnej rewizji.

W istocie, jednemu i temu samemu zewnętrznemu polu grawitacyjnemu, to jest polu siły ciężkości, jego potencjałowi i kierunkowi pionu na zewnątrz Ziemi, mogą odpowiadać różne geoidy. Na przykład dwie kule, różniące się tylko promieniami i gęstością, mające jednakowe masy i wspólny środek, umieszczone całkowicie wewnątrz powierzchni Ziemi, ale przecinające geoidę, mają na poszczególnych częściach geoidy rozmaite potencjały bez względu na to, że ich zewnętrzne pole grawitacyjne jest jednakowe.

Dlatego też jeśli nie jest znana gęstość masy w każdym punkcie na zewnątrz geoidy, to zasadniczo nie podobna określić figury geoidy i nie można wyznaczyć zewnętrznego pola grawitacyjnego Ziemi według figury geoidy. Ponieważ budowa nawet wierzchniej części skorupy ziemskiej znana jest tylko dla poszczególnych, a przy tym niewielkich obszarów, ograniczyć się trzeba do przybliżonego rozwiązania zadania, przyjmując gęstość wierzchnich warstw skorupy za stałą. Lecz nawet takie uproszczenie nie zmniejsza złożoności problemu redukcji przyspieszenia siły ciężkości i kierunku linii pionu z powierzchni Ziemi na geoidę. Dokładne redukcowanie po obliczeniu przyciągania wierzchnich warstw skorupy powinno doprowadzić do konstrukcji takiego całokształtu anomalii na geoidzie, który zastępowałby odpowiadający mu całokształt anomalii na powierzchni Ziemi bez zmiany zewnętrznego pola grawitacyjnego. Do tego celu potrzebne są analityczne metody przedłużenia potencjału od skomplikowanej powierzchni Ziemi, przy czym zadanie to jest rozwiązane tylko dla przedłużenia potencjału od płaszczyzny albo kuli. Oprócz tego, dla przystosowania obserwowanego pola grawitacyjnego do hipotezy o stałej gęstości wierzchnich mas, należałoby pole anomalii generalizować, tzn. ponownie tracić na dokładności i uciekać się do nowych nieuzasadnionych konstrukcji, w przeciwnym razie analityczne przedłużenie zewnętrznego pola grawitacyjnego do powierzchni geoidy okazałoby się niekiedy niemożliwe.

Wszystkie te zagadnienia nie były aktualne, kiedy powstawały podstawy geodezji wyższej. Nawet w czasach Helmerta grawimetryczna znajomość Ziemi była tak mała, że pójsie poza wyznaczanie elementów trójosiowej elipsoidy ziemskiej nie miało sensu. Przybliżenie, z którym można było wówczas ustalić położenie geoidy, było wtedy zupełnie wystarczające. Inaczej jednak przedstawia się sprawa w obecnych czasach. Na obszarze Związku Radzieckiego jest na ukończeniu jednolite zdjęcie grawimetryczne. Jego zagęszczenie i dokładność, uzyskane za pomocą grawi-

metrów, pozwala w krótkim czasie i bez większych kosztów na doprowadzenie dokładności grawimetrycznego wyznaczenia odchylenia pionu do  $0'',3-0'',5$ . W tych warunkach niedoskonałość teorii musi ograniczać możliwości metody, w szczególności na obszarach górzystych, gdzie zagadnienie redukcji ma wielkie znaczenie.

W dalszym ciągu rozwinięty będzie następujący punkt widzenia: rozwiązanie wszystkich zagadnień, które nasuwają się przy opracowaniu pomiarów geodezyjnych dokonanych na powierzchni Ziemi, w istocie sprowadza się do badania pola grawitacyjnego *na zewnątrz* masy Ziemi. Źródłem rozpatrzonych wyżej trudności jest sztuczne zastąpienie tego stosunkowo prostego zadania badaniem figury geoidy, tzn. pola grawitacyjnego *wewnątrz* masy.

Jest rzeczą od dawna znaną i absolutnie oczywistą, że kształt powierzchni Ziemi można zbadać za pomocą czysto geometrycznych konstrukcji, wykonując na niej tylko pomiary kątowe i liniowe. Niemożność uwzględnienia z potrzebną dokładnością wpływu refrakcji na składową pionową kątów przeszkadza w zastosowaniu tej metody w praktyce. Dlatego w dokładnych pracach pomiar kątów pionowych zastąpiono przez niwelację geometryczną i wyznaczenie współrzędnych astronomicznych. Można dowiedzieć, że w tych warunkach trzecią współrzędną geodezyjną  $H$  (odległość punktu na powierzchni Ziemi od elipsoidy odniesienia) można otrzymać z wystarczającą dla celów praktycznych dokładnością za pomocą następującego równania różniczkowego

$$dH = dh + (\xi \cos A + \eta \sin A) dl, \quad (1)$$

gdzie  $dH$  — przyrost wysokości  $H$  nad elipsoidą odniesienia przy przesunięciu na powierzchni Ziemi o odcinek  $dl$  ( $dl$  — przesunięcie poziome) w kierunku, którego azymut wynosi  $A$ ;  $dh$  — pomierzona różnica wysokości z niwelacji;  $\xi$  i  $\eta$  — składowe odchylenia pionu na powierzchni Ziemi (tzn. kąta między kierunkiem pionu i normalną do elipsoidy odniesienia). Wszystkie te wielkości wchodzą do wzoru (1) bez jakichkolwiek redukcji. Dla umożliwienia wykorzystania tego wzoru w praktyce konieczne jest uzyskanie dostatecznego zagęszczenia punktów astronomicznych, zapewniającego potrzebną dokładność interpolacji odchylenia pionu w dowolnym punkcie pośrednim, tzn. takiego zagęszczenia, jakie jest stosowane przy niwelacji astronomicznej.

We wzorze (1) tylko  $dH$  występuje jako różniczka zupełna. Wynik całkowania pierwszego (lub drugiego) składnika prawej strony zależy od drogi całkowania. Ale przy połączeniu obu składników, które otrzymywano osobno z niwelacji geometrycznej i astronomicznej, nie występuje ani zadanie obliczenia poprawek ortometrycznych, ani też zadanie spro-

wadzenia szerokości i długości do poziomemu morza. Jasne też jest, że przy czysto geometrycznym podejściu do wyznaczenia  $H$  nie ma ani podstaw, ani możliwości wyraźnego postawienia problemu figury geoidy, ponieważ suma pomierzonych przewyższeń niwelacyjnych nie ma sensu geometrycznego, a kierunek pionu na powierzchni Ziemi nie da się związać z kierunkiem normalnej do geoidy.

Tak więc konstrukcjami geometrycznymi można określić tylko kształt powierzchni ziemskiej, ale za to całkowicie ściśle, niezależnie od jakichkolwiek hipotez.

W zasadzie ze wzoru (1) można otrzymać wszystkie dane dla redukcji długości, kierunków i kątów triangulacji na powierzchnię elipsoidy odniesienia. Jednak bardziej efektywne sposoby rozwiązania tego zagadnienia daje metoda grawimetryczna badania figury Ziemi, do rozpatrzenia której przechodzimy. Oprócz tego nie zostały poruszone wszystkie zadania, wychodzące poza granice czysto geometrycznych rozwiązań, a więc w istocie rzeczy najważniejsze. Geodezja już dawno przestała być nauką czysto geometryczną. Teraźniejsze metody tzw. „geodezji fizycznej“, oparte na zastosowaniu teorii potencjału, powinny odgrywać dominującą rolę. Wykażemy to poniżej.

Niwelacja geometryczna ma znaczenie fizyczne tylko wtedy, gdy jest rozpatrywana jako metoda wyznaczania wartości potencjału siły ciężkości na powierzchni Ziemi. W istocie powiększenie potencjału  $W_A - W_O$  od poziomu morza  $O$  do danego punktu  $A$  wyznacza się ze znanego prostego i dokładnego wzoru:

$$W_A - W_O = - \int_O^A g dh, \quad (2)$$

gdzie  $dh$  oznacza niwelacyjną różnicę wysokości,  $g$  — przyspieszenie siły ciężkości w tym samym punkcie. Całkowanie dokonuje się według przebiegu ciągu niwelacyjnego.

Gdyby Ziemia się nie obracała, a figura powierzchni Ziemi była znana, to z wartości potencjału na tej powierzchni można by wyznaczyć potencjał przyciągania w całym obszarze na zewnątrz powierzchni, ponieważ w ten sposób wszystkie warunki odpowiadałyby zadaniu Dirichleta dla wartości zewnętrznych. Wpływ obrotu Ziemi łatwo jest uwzględnić, jeżeli znane jest położenie osi obrotu i prędkość obrotu, ponieważ wtedy potencjał siły odśrodkowej jest znany na całym obszarze. A zatem potencjał siły ciężkości i jego gradient — przyspieszenie siły ciężkości — wyznacza się przy tych założeniach wszędzie na zewnątrz Ziemi i w szczególności na jej powierzchni. O ile figura powierzchni Ziemi i wartość potencjału na niej wyznaczają gradient potencjału, o tyle możliwe jest postawienie zadania odwrotnego, a mianowicie: uważając za zadane potencjał i przyspiesze-

nie siły ciężkości we wszystkich punktach powierzchni Ziemi, znając położenie osi i względną prędkość obrotu Ziemi, można podjąć próbę wyznaczenia kształtu powierzchni Ziemi. W danym przypadku w odróżnieniu od znanego zadania Stokesa nie przyjmuje się zewnętrznej powierzchni Ziemi za poziomą, ale za to we wszystkich jej punktach mamy podaną wartość potencjału.

Przy rozwiązaniu tego zadania jak również i przy wyprowadzeniu wzoru Stokesa bardzo dogodnie jest mieć do czynienia z potencjałem perturbacyjnym, aczkolwiek nie jest to konieczne. W tym celu odległość  $H$  od powierzchni Ziemi do podstawowej powierzchni poziomej normalnego potencjału (do powierzchni odniesienia) przedstawia się jako sumę dwóch składowych. Pierwsza składowa (normalna wysokość  $H_n$ ) charakteryzuje się wartością potencjału jedynie w badanym punkcie powierzchni Ziemi w postaci następującego równania, w którym  $U$  oznacza potencjał normalny:

$$U_A(H_n) - U_A(O) = W_A - W_O = - \int g dh, \quad (3)$$

tj. na podstawie przyrostu potencjału, zmierzonego w rzeczywistym polu, oblicza się wysokość normalną przyjmując, że pole jest normalne. Takie wyznaczenie wysokości normalnej okazuje się bardzo dogodne z dwóch względów. Po pierwsze — drugą składową, którą nazwiemy „wysokością quasigeoidy“, otrzymuje się w tym przypadku ze wzoru analogicznego do wzoru Brunsza:

$$\zeta = H - H_n = \frac{T}{\gamma} \quad (4)$$

z tą tylko różnicą, że w danym przypadku  $T$  oznacza potencjał perturbacyjny, zaś  $\gamma$  normalne przyspieszenie siły ciężkości na powierzchni Ziemi (a nie na geoidzie). Po drugie — jasne sformułowanie otrzymuje warunek brzegowy teorii potencjału, wyrażający związek między potencjałem perturbacyjnym  $T$  i przyspieszeniem siły ciężkości  $g$  na powierzchni Ziemi:

$$\frac{\partial T}{\partial V} - \frac{T}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial V} = -(g - \gamma), \quad (5)$$

gdzie  $V$  oznacza kierunek normalnej do powierzchni odniesienia, zaś  $\gamma$  obliczone jest dla wysokości  $H_n$ . Oprócz tego  $H_n$  wylicza się dokładnie i prosto, nie odbiegając co do wielkości — od znanych dla geodetów wysokości ortometrycznych.

Wyznaczenie wysokości quasigeoidy  $\zeta$  sprowadza się teraz do rozwiązania trzeciego zadania na wartości brzegowe teorii potencjału, które brzmi: należy znaleźć funkcję  $T$ , harmoniczną dla obszaru na zewnątrz

powierzchni Ziemi, regularną w nieskończoności, a na powierzchni Ziemi spełniającą warunek brzegowy (5). Ponieważ wielkość  $\zeta$  jest mała w porównaniu z promieniem Ziemi (rzędu kwadratu spłaszczenia), wobec tego przy rozwiązywaniu zadania na wartości brzegowe można w pierwszym przybliżeniu przyjąć  $H$  jako równe  $H_n$ , tzn. można uważać figurę powierzchni Ziemi jako daną przez wysokości normalne. Podobne założenie znajdujemy również i w teorii Stokesa (ostateczne zadanie rozwiązuje się tam w stosunku do powierzchni odniesienia) i jak wiadomo, drugiego przybliżenia nie stosuje się. Rozwiązanie zadania na wartości brzegowe za pomocą jednolitej warstwy, rozciągającej się na powierzchni Ziemi z gęstością  $\varphi$  podlegającą wyznaczeniu, sprowadza się do liniowego równania całkowego:

$$2 \pi \varphi \cos \alpha = (g - \gamma) + \frac{3}{2R} \int \frac{\varphi}{r} ds + \int \frac{(H_n - H_n^0)}{r^3} ds. \quad (6)$$

Tutaj  $r$  oznacza odległość od badanego punktu do elementu powierzchni Ziemi  $ds$ ;  $\alpha$  — kąt między normalnymi do powierzchni odniesienia i powierzchni Ziemi (nachylenie powierzchni Ziemi);  $R$  — średni promień Ziemi. Całkowanie tego i następnych równań wykonuje się dla całej powierzchni Ziemi.

Wyznaczwszy z wzoru (6) funkcję  $\varphi$ , łatwo otrzymamy  $T$ ,  $\zeta$  — składowa odchylenia pionu w kierunku  $m$ :

$$T = \gamma \cdot \zeta = \int \frac{\varphi}{r} ds, \quad (7)$$

$$\frac{\partial T}{\partial m} = \int \varphi \cdot \frac{\partial}{\partial m} \frac{1}{r} ds - 2 \pi \cdot \cos(v, m). \quad (8)$$

Wielkości te w zupełności wyznaczają figurę powierzchni Ziemi nie tylko na kontynentach, ale i na oceanach.

Wróćmy do wzoru (1). Wykorzystując wyznaczenie normalnej wysokości ze wzoru (3), a także ze wzorów (4) i (5), można teraz otrzymać dwa nowe wzory, odpowiadające pojęciom niwelacji „geometrycznej“ i „astronomicznej“:

Wzory te mają postać:

$$dH_n = dh + \frac{g - \gamma}{\gamma} dh - \frac{H_n}{R} \cdot \frac{\gamma_p - \gamma_t}{\gamma_t} \sin 2B \cos A dl \quad (9)$$

$$d\zeta = \left[ \zeta \cos A + \eta \sin A + \frac{H_n}{R} \cdot \frac{\gamma_p - \gamma_t}{\gamma_t} \sin 2B \cos A \right] dl - \frac{g - \gamma}{\gamma} dh. \quad (10)$$

Dodane tu nowe oznaczenia  $\gamma_p$  i  $\gamma_l$  wyrażają przyspieszenia siły ciężkości na biegunie i na równiku elipsoidy poziomowej, warunkującej pole normalne;  $B$  jest to szerokość geograficzna. Przy sumowaniu wzorów (9) i (10) przyspieszenie siły ciężkości znosi się i wracamy do wzoru (1). Tak też powinno być, ponieważ figurę Ziemi można otrzymać na drodze czysto geometrycznej, podczas gdy quasigeoida związana jest nierozzerwalnie z polem grawitacyjnym Ziemi. Grawimetryczna metoda badania figury Ziemi doprowadza do naturalnego rozdzielenia wysokości powierzchni ziemskiej  $H$  na dwie części: na część hipsometryczną  $H_n$ , zależną od wartości potencjału tylko w danym punkcie i zmieniającą się od punktu do punktu w sposób nieregularny i szybki, oraz na część typu „geoidalnego“  $\zeta$ , uwarunkowaną rozkładem siły ciężkości na całej Ziemi i zmieniającą się nieporównanie wolniej. Przy nowym postawieniu zadania wysokości ortometryczne zastępuje się normalnymi, a geoidę — „quasigeoidą“, to znaczy powierzchnią, której wysokość ponad powierzchnią odniesienia jest równa  $\zeta$ . Wysokość quasigeoidy  $\zeta$  jest równa liczbowo ilorazowi z dzielenia potencjału perturbacyjnego w dowolnym punkcie powierzchni Ziemi przez przyspieszenie siły ciężkości w tym samym punkcie. Wyznacza ona odległość tego punktu od powierzchni poziomej pola normalnego, charakteryzującego się tą samą wartością potencjału, co badany punkt w rzeczywistym polu Ziemi. Na powierzchni oceanów quasigeoida pokrywa się z geoidą. Na dowolnej poziomej części powierzchni Ziemi (gdy  $dh$  we wzorze (10) jest równe zeru), normalna do quasigeoidy pokrywa się z kierunkiem linii pionu. Odpowiednia częśćka quasigeoidy przyjmuje kształt zewnętrznej powierzchni poziomej przechodzącej w bliskości takiej poziomej części powierzchni Ziemi. Im większe jest nachylenie powierzchni Ziemi i im większa anomalia siły ciężkości, tym większy jest kąt między normalną do quasigeoidy a kierunkiem linii pionu na powierzchni Ziemi.

Na stromych zboczach wysokich gór, gdzie zarówno anomalia siły ciężkości, jak i nachylenie powierzchni Ziemi są znaczne, kąt ten może sięgać  $10''$ — $20''$  (przy  $g - \gamma = 300$  mgl i przy tangensie kąta nachylenia od  $1/6$  do  $1/3$ ).

Wysokości normalne w przeciwieństwie do ortometrycznych można obliczyć łatwo i dokładnie. Na powierzchni oceanów są one równe zeru. Różnica zaś pomiędzy nimi i wysokościami ortometrycznymi na kontynentach wyraża się wielkością rzędu  $\frac{g-\gamma}{\gamma} H$ , to znaczy wielkością rzędu  $10^{-4} H$ . Ten sam rząd wielkości charakteryzuje stopień przybliżenia w obliczeniu wysokości ortometrycznych i rząd odchylenia geoidy od quasigeoidy.

Wspomniemy tu o jeszcze jednej bardzo ważnej okoliczności. Gdy już ze wzoru (6) wyznaczymy  $\varphi$ , wzór (7) pozwala na wyznaczenie potencjału



perturbacyjnego w całej przestrzeni zewnętrznej. W ten sposób poznajemy całkowicie nie tylko kształt geometryczny powierzchni, ale i całe zewnętrzne pole grawitacyjne Ziemi, przy tym bez stosowania jakich bądź danych czy hipotez co do charakteru rozkładu mas przyciągających.

Nowe podejście uwalnia nas więc w zupełności od problemu redukcji i w związku z tym, czyż może powstać chociaż cień wątpliwości co do celowości zastąpienia w praktyce geodezyjnej geoidy przez quasigeoidę?

Podstawowe zadanie geodezyjne (zbadanie figury i zewnętrznego pola grawitacyjnego Ziemi) wyraźnie się odróżnia od podstawowego zadania geofizycznego (zbadanie wewnętrznej budowy Ziemi). Geoida interesuje nas nie więcej niż każda inna powierzchnia poziomowa, położona wewnątrz Ziemi. Zbadanie jej figury należy zaliczyć, mówiąc ściśle, do dziedziny rozwiązania odwrotnego zadania potencjału, sprowadzającego się do znalezienia gęstości i potencjału w obszarze mas przyciągających, według ich zewnętrznego pola grawitacyjnego. Natomiast zbadanie figury quasigeoidy prowadzi, jak to widzieliśmy, do zadania na wartości brzegowe. Zasadnicza różnica między geoidą i quasigeoidą polega na głębokiej różnicy między odwrotnym i brzegowym zadaniem potencjału. Zadanie odwrotne posiada rozwiązanie tylko w szczególnych przypadkach, natomiast brzegowe — we wszystkich zagadnieniach fizycznych prawidłowo postawionych.

Zanalizowanie równania (6) doprowadziło do wniosku, że w warunkach omawianego zadania jest ono rozwiązalne. Figurę quasigeoidy wyznacza się z równań (6), (7) i (8) z dokładnością do przeniesienia równoległego, to znaczy z całkowitym zachowaniem stanu mającego miejsce i w przypadku szczególnym, jakim jest teoria Stokesa dla zregularyzowanej Ziemi.

Krótkie przedstawienie podstawowych zasad metod opracowanych i stosowanych w Związku Radzieckim dla badania figury Ziemi i jej zewnętrznego pola grawitacyjnego zakończymy następującą uwagą:

Zakłada się, że fizyczna powierzchnia Ziemi, według której odbywa się całkowanie we wzorach (6), (7) i (8), jest zgeneralizowana tak dalece, jak zgeneralizowana jest ta powierzchnia przy przedstawianiu jej na mapach topograficznych i hipsometrycznych we wszystkich skalach. Dopuszczalny stopień generalizacji, to jest skala map, używanych przy rozwiązywaniu równań całkowych, zależy od szczegółowości, a co za tym idzie i od dokładności pomiarów grawimetrycznych, inaczej mówiąc, zależy od wymagań stawianych dokładności wyniku ostatecznego. Całkowita generalizacja, to jest całkowite ignorowanie rzeźby terenu, cofa do teorii Stokesa. Dokładność rzędu  $0''{,}5$  w rejonach górzystych może być prawdopodobnie zawsze uzyskana przy pomocy map hipsometrycznych w skali 1 : 500 000 lub 1 : 200 000. W rejonach płaskich, przy tej samej dokładności

ści wyniku, prawie zawsze można stosować całkowitą generalizację rzeźby terenu, to znaczy prawie zawsze używać wzoru Stokesa.

Dla scharakteryzowania znaczenia praktycznego nowych metod podamy dwa przykłady.

Wnioski teoretyczne bardzo wygodnie jest sprawdzać za pomocą sztucznych schematów, odtwarzających w postaci uproszczonej te warunki, które mogą istnieć w rzeczywistości. Zakładając rozłożenie mas w takim modelu, możemy obliczyć wartość potencjału i przyspieszenia siły ciężkości na jego powierzchni, a także prawdziwe położenie geoidy i quasigeoidy. Następnie można wyznaczyć figurę geoidy według metody Stokesa, figurę quasigeoidy według wzorów (6), (7) i (8) i porównać otrzymane w ten sposób wyniki ze znanymi wartościami rzeczywistymi. Przy zastosowaniu metody modelu wyklucza się błędy pomiaru i interpolacji siły ciężkości i potencjału, a także błędy pochodzące z niedostatecznej znajomości pola grawitacyjnego Ziemi. Wszelkie rozbieżności między wynikami, otrzymanymi dla modelu przy pomocy różnych metod, powinny być przypisane wyłącznie niedoskonałości teorii.

Obliczenia wykonano dla modelu góry w kształcie stożka o wysokości około 4 km i podstawie 24 km. Maksymalną anomalię (w wierzchołku stożka) założono równą 250 mgl. Obliczano odchylenia pionu, ponieważ reagują one szczególnie wyraźnie na niedokładności teorii i w związku z tym są najważniejsze w zastosowaniu praktycznym. W omawianym modelu odchylenie pionu na geoidzie osiąga 55", podczas gdy wzór Vening-Meinesza dla tego samego punktu daje 15",4, to jest mniej niż  $\frac{1}{3}$  wielkości rzeczywistej. W odpowiednim punkcie powierzchni fizycznej modelu odchylenie linii pionu wynosi 17",7. Liczba ta jest znacznie bliższa wynikowi otrzymanemu ze wzoru Vening-Meinesza. Jak należało się spodziewać, teoria Stokesa charakteryzuje figurę modelu geoidy znacznie gorzej, niż figurę quasigeoidy. Według wzoru (8), nieznacznie tylko przekształconego i przystosowanego do rachunków, otrzymano w pierwszym przybliżeniu 16",0, w drugim zaś — 17",3 (rozbieżność z wartością ścisłą jest mniejsza od 0",4). Trzeciego przybliżenia nie porównano.

Jeśli zerwać z ustalonymi pojęciami i przyjąć, że wzór Vening-Meinesza wyznacza odchylenie pionu nie na „geoidzie“ — modelu, lecz na jej powierzchni, to i wtedy otrzymuje się rozbieżności w porównaniu z dokładnymi wielkościami: w pięciu przypadkach większe od 2", w sześciu — większe od 1", a tylko w trzech przypadkach mniejsze niż 1". Według wzoru (8) po drugim przybliżeniu wszystkie rozbieżności znalazły się w granicach 0",5, a w 12 przypadkach na 14 nie przewyższyły 0",3. Dla tego samego modelu wysokość ortometryczna, obliczona zwykłymi sposobami, odbiega o 1,2 m od wartości rzeczywistej, a wysokość normalna — nie więcej niż o 3 mm. Przewaga nowych metod jest tu więc oczywista.

Jako drugi przykład można przytoczyć wyniki obliczenia grawimetrycznych odchyłeń pionu w górzystej części Półwyspu Krymskiego. Na Krymie dawne metody doprowadzały do dużych rozbieżności między odchyleniami pionu wyznaczonymi za pomocą metod astronomiczno-geodezyjnych i odchyleniami uzyskanymi za pomocą metod grawimetrycznych. Dopiero w ostatnim czasie w wyniku zastosowania omówionych powyżej metod osiągnięto dokładność tego samego rzędu ( $\pm 1'',2$ ) co w rejonach równinnych dla zdjęcia grawimetrycznego mniej więcej o tym samym zagęszczeniu. Zastosowanie bardziej złożonych wzorów nieznacznie tylko powiększyło ilość prac obliczeniowych.

Zakres zastosowania grawimetrii w geodezji ograniczony jest wskutek niezakończenia pomiarów grawimetrycznych Ziemi na półkuli północnej i wskutek niemal całkowitego ich braku na południowej. Stan badań grawimetrycznych Ziemi na podstawie materiałów opublikowanych do r. 1949 nie pozwala jeszcze na wyciąganie ostatecznych wniosków co do kształtu Ziemi jako całości. Według naszych obliczeń przy ograniczeniu obszaru uwzględnienia anomalii do odległości sferycznej  $35^{\circ}$  pozostają nieznane dokładnie wysokości geoidy do 30 m, a odchylenia pionu do  $2''$  (przyjęto wartości średnie dla całości Ziemi). Prawie 90% podanych wielkości przypada na oddziaływanie kulistych funkcji harmonicznych drugiego i trzeciego stopnia, dlatego dokładne wyznaczenie tych funkcji harmonicznych miałyby większe znaczenie praktyczne. Przy zmniejszeniu promienia, wewnątrz którego anomalie uwzględnione są w całkowaniu bezpośrednim, wpływ funkcji kulistych wyższych rzędów szybko wzrasta.

Jeffris i Żongołowicz (ten drugi korzystając z większego materiału) wyznaczyli pierwsi funkcje harmoniczne w rozłożeniu anomalii według funkcji kulistych, trudno jest jednak ocenić realną dokładność otrzymanych przez nich współczynników. Bardziej wiarogodne wyniki otrzymać można z łącznego opracowania materiałów grawimetrycznych i geodezyjnych, obliczając z ogólnego układu równań rozmiar, masę Ziemi oraz pierwsze współczynniki rozłożenia potencjału perturbacyjnego. Pierwsze wyniki, oparte na zastosowaniu wyżej wspomnianej mapy grawimetrycznej i elementów elipsoidy, wyznaczonych z pomiarów grawimetrycznych ZSRR, USA, Europy Zachodniej i Indii, doprowadziły do wniosku, że pomiary stopnia na ogół dobrze zgadzają się z materiałami grawimetrycznymi.

W rozpatrywanym zadaniu szczególnie ważne jest, aby pomiary poszczególnych obszarów kuli ziemskiej były wykonane w jednolitym układzie i bez istotnych błędów systematycznych. Zapewnienie jednolitości układu nie jest obecnie rzeczą trudną. W Związku Radzieckim w ciągu 2 lat przy pomocy grawimetrów i lotnictwa została stworzona nowa sieć podstawowa. Błąd przeniesienia siły ciężkości na 1000 km nie przewyższa

$\pm 0,15$  mgl, tj. błąd dowiązania najdalszych punktów w Związku Radzieckim jest mniejszy od  $\pm 0,5$  mgl. Pożądane byłoby, aby sieci podstawowe o podobnej dokładności, odniesione do wspólnego początku, powstały we wszystkich krajach.

Bardziej skomplikowana jest sprawa eliminacji błędów systematycznych. Na lądzie są one naturalnie niewielkie, ale przy obserwacjach morskich mogą okazać się istotnymi. Doskonalenie techniki pomiarów morskich w kierunku pełnego eliminowania wszystkich źródeł błędów systematycznych stanowi jedno z najbardziej aktualnych i trudnych zadań dnia dzisiejszego.

Tak więc wyznaczenie figury Ziemi jako całości utrudnione jest wskutek istnienia ogromnych białych plam na mapie grawimetrycznej świata. Znacznie lepiej przedstawia się sprawa badania lokalnego figury Ziemi na obszarach, gdzie istnieje zdjęcie grawimetryczne.

Wyznaczenie wysokości z łącznej niwelacji astronomicznej i geometrycznej (wg wzoru 1) oraz z niwelacji astronomicznej (wg wzoru 10) możliwe jest jedynie przy istnieniu gęstej sieci punktów astronomicznych, to znaczy pod warunkiem dokonania dodatkowych prac astronomicznych, wychodzących daleko poza ramy normalnego programu pomiarów stopnia. W przeciwnym razie wyniki niwelacji będą obciążone poważnymi błędami interpolacji odchylenia pionu (rzędu  $5''$  na terenach równinnych oraz kilkudziesięciu sekund na terenach górskich). Materiały lokalnych pomiarów grawimetrycznych nie wystarczają, aby obejść się bez punktów astronomicznych, ale przy ich pomocy można z całą pewnością interpolować astronomiczno-geodezyjne odchylenia pionu, a następnie dokonać niwelacji wysokości quasigeoidy na podstawie rzadkiej sieci punktów astronomicznych. To stwierdzenie wynika z obliczenia skrajnej wielkości części nieliniowej wpływu anomalii na odchylenie pionu w nie uwzględnianych obszarach Ziemi. Okazuje się, że istnienie pomiarów grawimetrycznych tylko wewnątrz pasa, którego szerokość przekracza dwa do trzech razy odstęp pomiędzy sąsiadującymi z sobą punktami astronomicznymi, już pozwala na uwzględnienie wpływu nieliniowości zmian odchylenia pionu na niwelację astronomiczną z dokładnością do kilku dziesiątych części sekundy. Oparta na tym „niwelacja astronomiczno-grawimetryczna“ jest szeroko wykorzystywana w Związku Radzieckim dla wyznaczania wysokości baz i punktów triangulacyjnych ponad elipsoidę odniesienia. Za pomocą tej metody określona została figura quasigeoidy na obszarze od południka Pułkowo do Krasnojarska.

Dokładność niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej charakteryzuje się następującymi cyframi. Jeżeli mamy tylko równomierną sieć grawimetryczną o odległościach między punktami około 30 km, to średni błąd niwelacji na obszarach płaskich wynosi 1 : 150 000 odległości między punk-

tami astronomicznymi. Kosztem niewielkiego zagęszczenia sieci grawimetrycznej w okolicy punktów astronomicznych (na terenach płaskich 15—20 punktów w promieniu pierwszych 20 km) błąd zmniejsza się do 1 : 400 000. W Związku Radzieckim zaczęto zakładać linie niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej z taką dokładnością; należy życzyć sobie, aby takie same roboty prowadzone były i w innych krajach.

Pomysł interpolacji astronomiczno-geodezyjnych odchyłeń pionu, będący podstawą niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej, znalazł w ZSRR i inne, nie mniej ważne zastosowanie. Interpolacja odchyłeń pionu nie według jednej, lecz według dwóch współrzędnych pozwala dla większych przestrzeni, leżących między punktami astronomicznymi sieci triangulacyjnej, na znajdowanie interpolowanych astronomiczno-geodezyjnych odchyłeń pionu. Praktycznie interpolacja taka odbywa się w następujący sposób:

- 1) sporządza się mapę grawimetryczną dla obszaru, którego rozmiar dwa-trzy razy przewyższa rozmiar rejonu, wewnątrz którego przeprowadza się interpolację;
- 2) dla wszystkich punktów astronomicznych sieci triangulacyjnej (musi ich być nie mniej niż trzy, przy czym nie mogą one leżeć na jednej prostej) wyznacza się grawimetryczne odchylenia pionu;
- 3) obie składowe różnice między astronomiczno-geodezyjnymi a grawimetrycznymi odchyleniami pionu dla tych punktów przedstawia się w postaci funkcji liniowej ich współrzędnych (prostokątnych lub sferycznych) i oblicza się współczynniki wzorów interpolacyjnych dla szerokości i długości geograficznej;
- 4) składowe interpolowanego odchylenia pionu astronomiczno-geodezyjnego dla dowolnego punktu wewnątrz rejonu otrzymuje się w wyniku podstawienia do wzoru interpolacyjnego współrzędnych tego punktu i dodania wielkości otrzymanych tym sposobem do grawimetrycznego odchylenia pionu w tym samym punkcie.

Dokładność takiej interpolacji w zasadzie określa się dokładnością wyrowadzenia grawimetrycznych odchyłeń linii pionu. Jeżeli punkty grawimetryczne rozłożone są równomiernie, średni błąd interpolacji odchylenia pionu charakteryzuje się wielkością rzędu  $\pm 0'', 2 \delta g$ , gdzie  $\delta g$  jest to błąd interpolacji siły ciężkości, wyrażony w miligalach.

Przy odległościach między punktami grawimetrycznymi większych niż 10—15 km błąd interpolacji siły ciężkości praktycznie jest równy błędowi punktów podkładu grawimetrycznego. Na obszarach płaskich

$$\delta g \approx 1,1 \sqrt{x} \text{ mgl},$$

gdzie  $x$  — jest to średnia odległość między punktami, wyrażona w kilo-

metrach. W obszarach górzystych wygodniej jest interpolować anomalie wolnopowietrzne przy pomocy anomalii Bouguera, wykorzystując w tym celu mapę hipsometryczną, ponieważ błąd interpolacji anomalii Bouguera jest tam dwa—trzy razy mniejszy niż anomalii wolnopowietrznej. (Na Kaukazie dla anomalii Bouguera  $\delta g = 2\sqrt{x mgl}$ ).

W ZSRR grawimetryczne odchylenia pionu obliczane są dla wielu sektek, a nawet tysięcy punktów, dlatego wszystkie metody obliczeń i środki pomocnicze dla podobnych obliczeń są dobrze opracowane.

W ten sposób przy dzisiejszym stanie grawimetrycznej znajomości Ziemi całkowicie pewne i bezsporne wyniki otrzymuje się tylko przy jednoczesnym wykorzystaniu materiałów astronomiczno-geodezyjnych i grawimetrycznych. Pierwsze z nich pozwalają na eliminowanie wpływu nieznanymi — w sensie grawimetrycznym — obszarów Ziemi; drugie dają możliwość zbudowania figury quasigeoidy w oparciu o rzadką sieć punktów astronomicznych sieci triangulacyjnej.

W pracach geodezyjnych Związku Radzieckiego omówione badania wykorzystywane są dla różnorodnych celów praktycznych. Podamy tu krótko najważniejsze z nich:

1. Przy niwelacji precyzyjnej zamiast wysokości ortometrycznych oblicza się obecnie wysokości normalne zgodnie ze wzorem (9). Dla wyznaczenia anomalii siły ciężkości wykorzystuje się materiały ogólnej sieci grawimetrycznej lub też — celem zwiększenia dokładności — pomiary specjalne.

2. Przy opracowywaniu triangulacji metodą rzutowania wykorzystuje się wysokości nad elipsoidą odniesienia i odchylenia pionu dla wszystkich punktów triangulacyjnych. Pierwsze z nich otrzymuje się drogą niwelacji astronomiczno-grawimetrycznej, drugie — omówioną wyżej metodą interpolacji astronomiczno-geodezyjnych odchyłeń pionu za pomocą map grawimetrycznych.

3. Przy wykorzystywaniu sieci astronomiczno-geodezyjnej dla pomiaru stopnia tworzy się różnice między astronomiczno-geodezyjnymi a grawimetrycznymi odchyleniami pionu. Te ostatnie wyznacza się z uwzględnieniem anomalii w maksymalnym promieniu. W ten sposób eliminuje się lokalne nieregularności figury quasigeoidy i osiąga się lepsze przybliżenie do figury Ziemi na powierzchni lądów. Przy istnieniu u nas ogólnej sieci grawimetrycznej wiarogodne wyznaczenie dziewięciu współczynników funkcji kulistych drugiego i trzeciego stopnia w rozłożeniu anomalii siły ciężkości pozwoliłoby wyznaczać w pełni odchylenia linii pionu, co dałoby znaczne uproszczenie i zwiększenie dokładności pomiarów stopnia. Wraz ze zwiększeniem powierzchni, objętych niwelacją astronomiczno-grawimetryczną, występuje możliwość oparcia pomiarów stopnia na wysokościach quasigeoidy, nie zaś na odchyleniach linii pionu.

4. Sieć punktów podstawowych dla pomiarów topograficznych w rejonach położonych między łańcuchami triangulacyjnymi zakładana była u nas w wielu miejscach za pomocą interpolacji astronomiczno-geodezyjnych odchyłeń pionu. Punktami podstawowymi są w tym wypadku punkty astronomiczne, których współrzędne sprowadza się do układu współrzędnych geodezyjnych za pomocą interpolowanych, astronomiczno-geodezyjnych odchyłeń pionu.

Na zakończenie wspomnę, że wartość wyników prac geodezyjnych dla wyznaczenia figury, pola grawitacyjnego i wewnętrznej budowy Ziemi w ogromnym stopniu zależy od jednolitości systemu danych wyjściowych i metod pracy w poszczególnych krajach. Jakikolwiek krok naprzód w tym zagadnieniu byłby poważnym wkładem do nauki. Jesteśmy wszyscy zainteresowani w tym, aby szybciej i racjonalniej wykonywane były pomiary grawimetryczne w granicach każdego kraju, aby punkty wyjściowe tych pomiarów były powiązane między sobą z najwyższą dokładnością w jeden sztywny układ, aby niwelacja astronomiczno-grawimetryczna prowadzona była we wszystkich krajach, obejmując coraz większe i większe obszary w oparciu o bazę jednolitego układu współrzędnych geodezyjnych i jednolite metody pracy. Niezbędne jest także ustanowienie między krajami regularnej wymiany doświadczeń poprzez wymianę wszystkich publikacji w zakresie omówionych tu specjalności.

#### РЕЗЮМЕ

Автор представляет современный метод исследования фигуры Земли, являющийся развитием и применением на практике теории Ньютона, Клеро и Стокса, коренным способом отличающихся от применявшихся ранее чисто геометрических методов.

Дан метод исследования фигуры Земли, когда известны: заданный потенциал, значение ускорения силы тяжести во многих пунктах поверхности Земли, положение оси и относительная скорость вращения Земли.

Решение основывается на совместном использовании геодезических, астрономических и гравиметрических измерений. Метод этот, примененный в Советском Союзе сделал возможным рациональное решение государственной нивелирной сети и триангуляции, а также использование астрономо-геодезической сети для градусных измерений.

Качество результатов этих работ для больших пространств зависит от того, на сколько унифицированы исходные данные и методы работ в отдельных странах, охватываемых этими пространствами.

#### RÉSUMÉ

L'auteur nous présente une méthode moderne d'investigation de la figure de la Terre, qu'on peut considérer comme dérivée du développement et de l'application pratique des théories de Newton, Clairaut et Stokes et qui diffère essentiellement des anciennes méthodes purement géométriques dont on a fait usage jusqu'ici.

L'auteur expose sa méthode d'investigation de la figure de la Terre, les données suivantes étant connues: le potentiel des valeurs de l'accélération, de la force de pesanteur dans plusieurs points de la surface de la Terre, la position de l'axe et la vitesse relative de la révolution de la Terre.

La solution de la question posée consiste dans l'emploi simultané des mesurages géodésiques, astronomiques et gravimétriques.

Appliquée en URSS cette méthode a rendu possible tant la solution rationnelle du réseau du nivellement de précision et de triangulation du pays, que l'emploi de réseaux astronomiques et géodésiques pour le mesurage d'un degré.

En appliquant cette méthode à de vastes territoires, la réussite des résultats dépend de l'homogénéité des données d'issue ainsi que de l'organisation du travail dans les différents pays situés dans ces territoires.



Franciszek Biernacki

## O tak zwanym odwzorowaniu Bessela

### I. Wstęp

Zdawałoby się, że do klasycznej metody Bessela przenoszenia na duże odległości współrzędnych geograficznych i azymutu na powierzchni elipsoidy, metody dobrze znanej i używanej od lat prawie 130, nic już dodać nie można, i że wszystko o niej zostało już powiedziane. Okazuje się, że tak nie jest.

W niektórych nowszych podręcznikach geodezji wyższej metoda Bessela rozwiązania głównego zadania geodezyjnego przy użyciu pomocniczego trójkąta sferycznego jest interpretowana jako odwzorowanie powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli. Wyjaśnienie metody Bessela za pomocą tak zwanego „odwzorowania Bessela“ wymaga bardzo ostrożnego postępowania, aby nie popełnić błędu, który łatwo i niemal samorzutnie może się wkraść do rozważań.

Bessel ogłaszając swoje pośrednie rozwiązanie biegunowego trójkąta geodezyjnego na powierzchni elipsoidy <sup>1)</sup>, nie uzasadniał swej metody na drodze odwzorowania powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli. Mówi on tylko o trójkącie pomocniczym (Hilfsdreieck), a to jest sprawa nieco inna.

Jeśli do klasycznej metody Bessela chcemy podejść z punktu widzenia teorii odwzorowania powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli i wyjaśnić tę metodę za pomocą tak zwanego „odwzorowania Bessela“, to mu-

---

<sup>1)</sup> „Über die Berechnung der geographischen Längen und Breiten aus geodätischen Vermessungen“, „Astronomische Nachrichten, nr 86, 4 Band, 1826“.

Według J. Frischaufa (Die mathematischen Grundlagen der Landesaufnahme und Kartographie des Erdsphäroids, Stuttgart 1913, str. 135 i 136) pełną trygonometrię elipsoidalną, w odniesieniu do geodezyjnego trójkąta biegunowego na powierzchni elipsoidy obrotowej spłaszczonej, pierwszy opracował Barnaba Oriani, uczonego włoski, który w latach 1804—1810 wydał dwa kolejne tomy swych prac na ten temat. W numerze 94 „Astronomische Nachrichten“ Oriani podniósł sprawę swego pierwszeństwa w stosunku do Bessela. Jest nieco dziwne, że ani Bessel, ani Gauss nic nie wspominają o pracach, których dokonał Oriani.

simy przeprowadzić wnikliwą analizę postępowania Bessela w świetle teorii odwzorowania powierzchni.

## II. Analiza odwzorowania Bessela

Niechaj będą dane dwie powierzchnie, a mianowicie powierzchnia elipsoidy obrotowej spłaszczonej odniesiona do parametrów geograficznych  $\varphi, \lambda$  oraz powierzchnia kuli o promieniu  $a$  równym dużej półosi elipsoidy, odniesiona do parametrów geograficznych  $U, V$ :

$$\begin{array}{l|l} x = \frac{a}{W} \cos \varphi \cos \lambda & X = a \cos U \cos V \\ y = \frac{a}{W} \cos \varphi \sin \lambda & Y = a \cos U \sin V \\ z = \frac{b^2}{aW} \sin \varphi & Z = a \sin U, \end{array} \quad (1)$$

gdzie  $W = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$ , zaś  $e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$ .

Odwzorowanie punktowe powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli będzie dokonane, gdy ustalimy jakąkolwiek parę regularnych funkcji odwzorowawczych, wiążących zmienne parametrowe obu powierzchni:

$$\begin{array}{l} U = \psi_1(\varphi, \lambda) \\ V = \psi_2(\varphi, \lambda). \end{array} \quad (2)$$

W praktyce geodezyjnej zazwyczaj przyjmujemy prostsze funkcje odwzorowawcze:

$$\begin{array}{l} U = \psi_1(\varphi) \\ V = \psi_2(\lambda), \end{array}$$

przez co uzyskujemy tę korzyść, że równoleżniki elipsoidalne  $\varphi = \text{const.}$  przechodzą w równoleżniki sferyczne  $U = \text{const.}$  oraz południki elipsoidalne  $\lambda = \text{const.}$  przechodzą w południki sferyczne  $V = \text{const.}$

Rozpatrzmy teraz, jak postępuje Bessel przy przejściu od biegunowego trójkąta geodezyjnego na powierzchni elipsoidy do „trójkąta pomocniczego“, to jest do biegunowego trójkąta geodezyjnego na powierzchni kuli. W tej analizie wyróżnimy cztery etapy.

1. Obiór pierwszej funkcji odwzorowawczej i wnioski

Pierwszą funkcję odwzorowawczą Bessel obiera w postaci

$$\operatorname{tg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi. \quad (3)$$

Z tego szczególnego obioru funkcji wynika pięć wniosków, łatwych do odczytania z postaci tej funkcji.

**Wniosek 1.** Bieguny geograficzne  $N$  i  $S$  na powierzchni elipsoidy obrotowej odwzorowują się na bieguny geograficzne  $N'$  i  $S'$  na powierzchni kuli.

**Wniosek 2.** Równik elipsoidalny  $\varphi=0$ , przechodzi w równik sferyczny  $U=0$ .

**Wniosek 3.** Równoleżniki elipsoidy przechodzą w równoleżniki kuli. Ale nie jest zdefiniowana odpowiedniość punktowa na odpowiadających sobie równoleżnikach (i na równiku).

**Wniosek 4.** Szerokości elipsoidalnej  $\varphi$  odpowiada szerokość sferyczna  $U$ , równa szerokości zredukowanej dla elipsoidy.

**Wniosek 5.** Dla każdej pary odpowiadających sobie okręgów kół równoleżnikowych na obu powierzchniach promienie tych kół są sobie równe. Istotnie, promień  $r$  równoleżnika w szerokości geograficznej  $\varphi$  na powierzchni elipsoidy jest równy  $N \cos \varphi$ , lub  $a \cdot \frac{\cos \varphi}{W}$ . Promień  $R$  odpowiadającego równoleżnika na powierzchni kuli jest równy  $a \cdot \cos U$ . Z funkcji odwzorowawczej wynika, jak łatwo obliczyć, że  $\cos U = \frac{\cos \varphi}{W}$ .

Wobec tego  $N \cos \varphi = a \cos U$ , czyli  $r=R$ .

Na skutek równości promieni odpowiadających sobie kół równoleżnikowych obwody całych kół będą sobie równe. Lecz przy braku zdefiniowania odpowiedniości punktowej wzdłuż linii tych kół nic nie wiemy o stosunku części obwodów równoleżnikowych.

## 2. Brak drugiej funkcji odwzorowawczej

Bessel nie obiera wcale drugiej funkcji odwzorowawczej, a więc nie definiuje w sposób pełny punktowego odwzorowania powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli. Z tego punktu widzenia odwzorowanie Bessela jest więc jak gdyby „ułamne“ i zasługuje na nazwę odwzorowania tylko w pewnym szczególnym sensie. Nie jest ono bowiem odwzorowaniem powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli w rozumieniu teorii odwzorowania powierzchni.

Przy braku drugiej funkcji odwzorowawczej nie wiemy w ogóle, jak południki elipsoidalne odtwarzają się na powierzchni kuli. W odwzorowaniu Bessela południki kuli nie są obrazami południków elipsoidy; obrazy te pozostają niezdefiniowane.

Jakkolwiek brak drugiej funkcji odwzorowawczej uniemożliwia odwzorowanie jednej powierzchni na drugą, to jednak do rozwiązania głównego zadania geodezyjnego za pomocą trójkąta sferycznego zupełnie zdefiniowanie odwzorowania wcale nie jest niezbędne. Do tego celu jedna funkcja odwzorowawcza wraz z wprowadzonym przez Bessela, istotnie ważnym dla zagadnienia, warunkiem odwzorowawczym dla jednej linii, wymienionym poniżej w punkcie 3, całkowicie, jak się okaże, wystarczą.

### 3. Prawo odwzorowania dla linii geodezyjnej

Bessel nakłada na odwzorowanie warunek, aby rozważana na powierzchni elipsoidy linia geodezyjna, za pomocą której ma nastąpić przeniesienie współrzędnych, wyznaczona jednoznacznie przez punkt i kierunek, odtwarzała się na powierzchni kuli w postaci linii geodezyjnej (okręgu koła wielkiego), wyznaczonej jednoznacznie także przez pewien punkt i pewien kierunek. Wtedy prawo odwzorowania się punktów wzdłuż obrazowej linii geodezyjnej pozostaje zdefiniowane przez obraną już pierwszą funkcję odwzorowawczą, która działa na całej powierzchni, a tym samym i na wyznaczonej linii geodezyjnej.

Na powierzchni elipsoidy mamy linię geodezyjną, wyznaczoną przez znany punkt  $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$  i przez znany azymut  $\alpha_1$  tej linii w punkcie  $P_1$ . Bessel żąda, aby obraz tej linii był na powierzchni kuli także linią geodezyjną wyznaczoną przez punkt obrazowy  $P'_1(U_1, V)$  i przez azymut  $A_1$  w tym punkcie, równy azymutowi elipsoidalnemu  $\alpha_1$ . Żądanie takie jest oczywiście możliwe do spełnienia (wobec braku drugiej funkcji odwzorowawczej), a wówczas prawo odwzorowania się punktów wzdłuż linii geodezyjnej jest również ustalone. Obraz tej jednej linii geodezyjnej jest w ten sposób punktowo wyznaczony.

Dwie uwagi wymagają wyraźnego podkreślenia. Mianowicie:

a) Punkt  $P'_1$ , jako obraz punktu  $P_1$ , nie jest w pełni zdefiniowany; wiadomo tylko, że ma leżeć na obrazowym równoleżniku o znanej szerokości  $U_1$ . Położenie punktu  $P'_1$  na tym równoleżniku może być obrane zupełnie dowolnie wobec braku ustalenia odpowiedniości punktowej wzdłuż odpowiadających sobie okręgów kół równoleżnikowych; tę dowolność charakteryzuje nieokreśloność współrzędnej  $V$  dla punktu  $P'_1$ . Dla celu, do którego dążymy — rozwiązania zadania geodezyjnego — ta nieokreśloność w długości geograficznej na kuli nie ma znaczenia wskutek obrotowości powierzchni.

b) Azymut sferyczny  $A_1$  linii geodezyjnej w punkcie  $P'_1$  na powierzchni kuli, przyjęty według założonego przez Bessela warunku za równy azymutowi elipsoidalnemu  $\alpha_1$  linii geodezyjnej w jej punkcie  $P_1$  na powierzchni elipsoidy, nie jest obrazem azymutu  $\alpha_1$ . Wynika to stąd, że po-

Łudnik sferyczny dla punktu obrazowego  $P'_1$  nie jest obrazem południka elipsoidalnego dla punktu oryginalnego  $P_1$ .

Wniosek

Z nałożonego przez Bessela warunku na sferyczne odwzorowanie dla jednej linii geodezyjnej wynika ważny dla metody Bessela wniosek, który poniżej wyprowadzimy.

Przypomnijmy najpierw znane z geometrii różniczkowej twierdzenie Clairaut dla linii geodezyjnej na powierzchni obrotowej:

$$p \cdot \sin \alpha = \text{const.},$$

wyrażające stałość, wzdłuż linii geodezyjnej, iloczynu odległości  $p$  punktu bieżącego linii od osi obrotu i sinusa azymutu  $\alpha$  linii geodezyjnej w tym punkcie. Związek powyższy jest, jak wiadomo, pierwszą całką równania różniczkowego (drugiego rzędu) linii geodezyjnej na dowolnej powierzchni obrotowej i jest równaniem linii geodezyjnej na tej powierzchni, wyrażonym w zmiennych  $p$  i  $\alpha$ . Obierając w dopuszczalnych granicach rozmaite wartości na stałą dowolną, otrzymamy rozmaite linie geodezyjne.

Zastosowanie twierdzenia Clairaut do powierzchni elipsoidy obrotowej daje równanie dowolnej linii geodezyjnej w postaci

$$r \sin \alpha = \text{const.}, \text{ gdzie } r = N \cos \varphi,$$

a dla rozważanej szczególnej linii, wyznaczonej przez punkt  $P_1$  ( $\varphi_1, \lambda_1$ ) i azymut  $\alpha_1$  w tym punkcie, stała dowolna przyjmuje oznaczoną wartość  $r_1 \sin \alpha_1$ <sup>2)</sup>. Równanie rozważanej linii geodezyjnej będzie więc następujące:

$$r \sin \alpha = r_1 \sin \alpha_1, \text{ przy czym } r_1 = N_1 \cos \varphi_1. \quad (4)$$

Zastosowanie twierdzenia Clairaut do powierzchni kuli o promieniu  $a$  daje równanie dla dowolnej linii geodezyjnej w postaci

$$R \sin A = \text{const.}, \text{ gdzie } R = a \cos U,$$

a dla rozważanej szczególnej linii geodezyjnej, przechodzącej przez punkt

<sup>2)</sup> Dla wyznaczenia wartości stałej dla danej linii geodezyjnej najdogodniej byłoby wprowadzić ekstremalną szerokość geograficzną  $\varphi_0$ , jaką osiąga dana linia geodezyjna w swym przebiegu po powierzchni elipsoidy; bowiem azymut linii geodezyjnej w takim punkcie jest równy  $90^\circ$  i południk tego punktu jest prostopadły do linii geodezyjnej. Lecz szerokości  $\varphi_0$  bezpośrednio nie znamy i musielibyśmy ją obliczyć na podstawie punktu  $P_1$  ( $\varphi_1, \lambda_1$ ) i azymutu  $\alpha_1$  w tym punkcie.

$P'_1(U_1, V)$  i tworzącej w tym punkcie azymut  $A_1$ , wartość stałej dowolnej jest  $R_1 \sin A_1$ <sup>3)</sup>. Równanie rozważanej linii geodezyjnej na powierzchni kuli będzie więc następujące:

$$R \sin A = R_1 \sin A_1, \text{ przy czym } R_1 = a \cos U_1. \quad (5)$$

Równanie (5) napisane w postaci  $\cos U \sin A = \cos U_1 \sin A_1$  wyraża twierdzenie sinusów dla trójkąta sferycznego.

Ponieważ rozważana linia sferyczna jest obrazem linii elipsoidalnej, to według nałożonego warunku początkowego dla punktu  $P'_1$ , mamy  $A_1 = \alpha_1$ . Dalej na mocy pierwszej funkcji odwzorowawczej mamy  $R = r$  w każdej parze odpowiadających sobie punktów wzdłuż linii geodezyjnych.

Porównując równanie (4) linii geodezyjnej oryginalnej z równaniem (5) linii geodezyjnej obrazowej widzimy, że wskutek równości  $R_1 = r_1$  i  $A_1 = \alpha_1$ , prawe strony tych równań, wyrażające wielkości stałe, są sobie równe. A więc i lewe strony równań muszą być sobie równe. Otrzymujemy zatem wzdłuż linii geodezyjnej następującą zależność, wiążącą elementy sferyczne z elementami elipsoidalnymi:

$$r \sin \alpha = R \sin A;$$

zależność ta wskutek równości  $r = R$  prowadzi do wniosku, że w każdej parze odpowiadających sobie punktów wzdłuż obu linii geodezyjnych azymut sferyczny jest równy azymutowi elipsoidalnemu:

$$A = \alpha. \quad (6)$$

Zwróćmy uwagę, że azymut sferyczny  $A$  obrazowej linii geodezyjnej, w bieżącym jej punkcie  $P'$ , nie jest obrazem równego mu azymutu elipsoidalnego  $\alpha$  oryginalnej linii geodezyjnej w odpowiadającym punkcie  $P$ . Przyczyną braku odpowiedniości odwzorowawczej dla azymutów jest fakt, że południki sferyczne, od których liczymy azymuty  $A$ , nie są obrazami południków elipsoidalnych. Obrazy te nie są w ogóle zdefiniowane, jak podano w punkcie 2.

Wniosek powyższy sformułujemy wyraźnie w postaci twierdzenia:

<sup>3)</sup> Podobna uwaga jak w odsyłaczu <sup>2)</sup> stosuje się i do powierzchni kuli dla ekstremalnej szerokości  $U_0$  linii geodezyjnej. Szerokość ta będzie musiała być zresztą obliczona w celu wyrażenia zależności elementów liniowych  $ds$  i  $d\sigma$  obu linii geodezyjnych (patrz punkt 4 poniżej) a także zależności elementów różniczkowych  $d\lambda$  i  $dV$  dla długości geograficznych.

Jeśli pierwsza funkcja odwzorowawcza  $U = \psi_1(\varphi, \lambda)$  w odniesieniu do powierzchni elipsoidy i kuli ma postać  $\text{tg } U = \frac{b}{a} \text{tg } \varphi$  i jeśli jedna linia geodezyjna na powierzchni elipsoidy, wyznaczona jednoznacznie przez punkt  $P_1(\varphi_1, \lambda_1)$  i azymut  $\alpha_1$  w tym punkcie, ma na powierzchni kuli o promieniu  $a$  obraz w postaci linii geodezyjnej wyznaczonej jednoznacznie przez punkt obrazowy  $P'_1(U_1, V)$ , obrany dowolnie na równoleżniku sferycznym o szerokości  $U_1$ , i przez azymut  $A_1$  równy azymutowi  $\alpha_1$  — to w każdej parze odpowiadających sobie (na mocy pierwszej funkcji odwzorowawczej) punktów obu linii geodezyjnych azymuty tych linii (na mocy twierdzenia Clairaut) są sobie równe.

Słuszne jest także, jak łatwo się przekonać, twierdzenie odwrotne: z równości azymutów  $A = a$  wzdłuż linii geodezyjnej i odpowiadającej jej linii, i z prawa szerokości zredukowanej wynika (na mocy twierdzenia Clairaut) geodezyjność sferycznej linii obrazowej w odwzorowaniu.

Ta cenna własność odwzorowania Bessela stanowi niewątpliwą zaletę tego odwzorowania w stosunku do innych koncepcji odwzorowawczych, używanych do tego samego celu.

W odwzorowaniu Bessela odpowiedniość punktowa obu powierzchni, w obszarze poza rozważaną pojedynczą linią geodezyjną nie jest zdefiniowana z wyjątkiem obu biegunów geograficznych. Nadto znana jest odpowiedniość odwzorowawcza całych okręgów kół równoleżnikowych pomimo braku odpowiedniości punktowej wzdłuż linii tych kół.

W teorii odwzorowania jednej powierzchni na inną powierzchnię istnieją przypadki, w których znajomość prawa odwzorowania dla jednej linii na powierzchni wystarcza do definicji odwzorowania w obszarze całej powierzchni. Tak jest np. w odwzorowaniu konforemnym Gaussa-Krügera elipsoidy na płaszczyznę. W odwzorowaniu Bessela ta okoliczność nie ma miejsca. Znamy wprawdzie prawo punktowego odwzorowania dla jednej linii geodezyjnej, ale to bynajmniej nie definiuje odwzorowania powierzchni.

W literaturze geodezyjnej nie spotykamy wyraźnego omówienia metody odwzorowawczej Bessela ze stanowiska teorii odwzorowania powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli. Jedyną wzmiankę na ten temat autor znalazł na str. 99 w podręczniku prof. C. F. Baeschlina, Lehrbuch der Geodäsie, Zurych 1948. Wzmiankę tę pożytecznie będzie przytoczyć według tekstu oryginału:

„Wir haben damit eine sphärische Abbildung der geodätischen Linie gewonnen, die durch Konstante  $\cos U_0$  charakterisiert ist. Das Kugelbild der geodätischen Linie ist ein Kugelgrosskreis. Die Breiten der Punkte sind identisch den reduzierten Breiten auf dem Rotationsellipsoid, ebenso sind die Azimute auf der Kugel gleich den Azimuten auf dem Ellipsoid. Es wäre aber falsch diese Abbildung ganz besonderer Art als eine Abbildung des Rotationsellipsoides auf die Kugel anzusprechen. Das Bild eines Punktes, der nicht auf der geodätischen Linie liegt, ist ja überhaupt nicht definiert“.

4. Wyrażenie prawa odwzorowania punktów dla linii geodezyjnej za pomocą związku pomiędzy długościami odpowiadających sobie łuków tej linii.

Prawo odwzorowywania się punktów rozważanej linii geodezyjnej, zdefiniowane w pełni w punkcie 3, nie jest przystosowane do warunków zadania o przenoszeniu współrzędnych. Należy to prawo przystosować, a mianowicie wyrazić położenie punktu na linii za pomocą długości łuku tej linii i samo prawo przedstawić w postaci  $a\sigma = f(s)$ , w której  $s$  oznacza dowolną (lecz znaną) długość łuku rozważanej linii geodezyjnej na powierzchni elipsoidy, zaś  $\sigma$  oznacza w mierze kątowej długość odpowiadającego łuku obrazowego na powierzchni kuli o promieniu  $a$ . Długości tych łuków są mierzone odpowiednio od punktów  $P_1 (\varphi_1, \lambda_1)$  i  $P'_1 (U_1, V)$  na obu powierzchniach. Odpowiadające sobie punkty końcowe tych łuków oznaczmy przez  $P$  i  $P'$ .

Naszkieujemy rachunek, odsyłając po szczegóły do podręczników geodezji wyższej.

Elementy liniowe obu linii geodezyjnych w odpowiadających sobie punktach  $P$  i  $P'$  są następujące:

$$ds \cos \alpha = M d\varphi$$

$$a d\sigma \cos A = a dU.$$

Na mocy ustalonego odwzorowania Bessela mamy  $A = \alpha$  i

$$\frac{d\varphi}{dU} = V^2 \sqrt{1 - e^2}.$$

Wobec tego otrzymamy zależność

$$ds = a d\sigma \sqrt{1 - e^2 \cos^2 U}.$$

Należy jeszcze  $\cos^2 U$  wyrazić przez  $\sigma$ . Mamy wzór

$$\cos^2 U = 1 - \cos^2 m \cdot \sin^2 (M + \sigma),$$

w którym

$$\sin m = \cos U_1 \sin A_1$$

$$\operatorname{tg} M = \frac{\sin U_1}{\cos U_1 \cos A_1}.$$

Otrzymamy

$$ds = a d\sigma \sqrt{1 - e^2 + e^2 \cos^2 m \cdot \sin^2 (M + \sigma)}$$



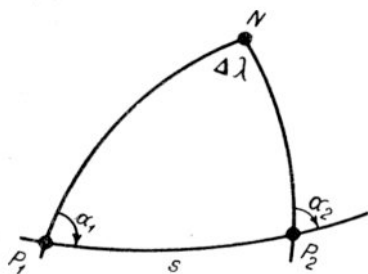
skąd drogą całkowania przez szereg i odwrócenia szeregu całkowego dostaniemy

$$\sigma = \alpha \frac{s}{b} + \beta \sin \sigma \cdot \cos (2 M + \sigma) + \gamma \sin 2 \sigma \cdot \cos (4 M + 2 \sigma) + \\ + \delta \sin 3 \sigma \cdot \cos (6 M + 3 \sigma) + \dots$$

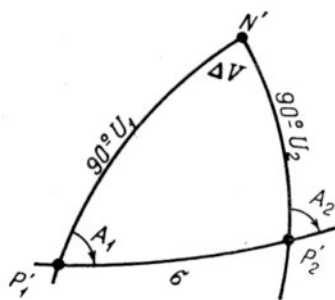
Ze wzoru tego możemy obliczyć  $\sigma$  drogą kolejnych przybliżeń.

### III. Użycie odwzorowania Bessela do rozwiązania głównego zadania geodezyjnego

Na powierzchni elipsoidy znamy: współrzędne geograficzne punktu  $P_1$  ( $\varphi_1, \lambda_1$ ), azymut  $\alpha_1$  linii geodezyjnej w tym punkcie oraz długość  $s$  łuku tej linii, wyznaczającą położenie drugiego punktu  $P_2$  na tej linii. Poszukujemy współrzędnych  $\varphi_2, \lambda_2$  dla punktu  $P_2$  oraz azymutu  $\alpha_2$  linii geodezyjnej w tym punkcie.



Rys. 1



Rys. 2

Stosujemy odwzorowanie Bessela na kulę o promieniu  $a$ . Biegun  $N$  przechodzi w biegun  $N'$ . Linia geodezyjna na elipsoidzie, wyznaczona przez punkt  $P_1$  i azymut  $\alpha_1$ , odwzorowuje się w sposób punktowy na linię geodezyjną na kuli, wyznaczoną przez punkt obrazowy  $P'_1$  ( $U_1, V$ ) i azymut  $A_1 = \alpha_1$ . Punkt  $P_2$ , wyznaczony na elipsoidzie przez długość  $s$  łuku linii geodezyjnej, odtwarza się na punkt  $P'_2$ , wyznaczony przez długość (kątową) łuku  $\sigma$  uprzednio obliczoną na podstawie znajomości  $s$ . Poprowadźmy południki na obu powierzchniach dla punktów  $P_2$  i  $P'_2$ .

W utworzonym trójkącie geodezyjnym na powierzchni kuli (zwanym, zwykle wprost trójkątem sferycznym) mamy trzy elementy wiadome: bok  $N'P'_1$ , równy  $90^\circ - U_1$ ; kąt  $A_1$ , równy  $\alpha_1$ ; oraz bok  $\sigma$ . Możemy ten trójkąt rozwiązać za pomocą trygonometrii sferycznej i znaleźć pozostałe trzy elementy: azymut  $A_2$ , bok  $N'P'_2$  równy  $90^\circ - U_2$  oraz kąt  $\Delta V$ .

Następnie musimy przejść od obliczonych elementów sferycznych do elementów elipsoidalnych. Robimy to stosując odwzorowanie Bessela, w którym dla azymutu  $\alpha_2$  mamy wprost  $\alpha_2 = A_2$ ; dla szerokości  $\varphi_2$  mamy wzór  $\operatorname{tg} U_2 = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi_2$ . Pozostaje tylko sprawa przejścia do wielkości sferycznej  $\Delta V$  do wielkości elipsoidalnej  $\Delta \lambda$ . Związek pomiędzy tymi wielkościami wyraża redukcję odwzorowawczą kąta  $\Delta V$  i może być obliczony w podobny sposób, jak związek pomiędzy  $\sigma$  i  $s$ . Nie będziemy przytaczać rachunku, podamy od razu końcowy wynik:

$$\Delta \lambda = \Delta V - \sin m [\alpha' \sigma + \beta' \sin \sigma \cdot \cos (2M + \sigma) + \gamma' \sin 2\sigma \cdot \cos (4M + 2\sigma) + \delta' \sin 3\sigma \cdot \cos (6M + 3\sigma) + \dots].$$

Pragniemy zwrócić uwagę na oba trójkąty geodezyjne, które zostały rozwiązane. Trójkąt sferyczny  $P'_1 P'_2 N'$  nie jest obrazem trójkąta elipsoidalnego  $P_1 P_2 N$ , gdyż oba południki sferyczne nie są obrazami południków elipsoidy. Wszystkie trzy kąty trójkąta sferycznego nie są obrazami odpowiednich kątów trójkąta elipsoidalnego pomimo równości azymutów we wszystkich odpowiadających sobie punktach wzdłuż obu linii geodezyjnych. Tylko trzeci bok trójkąta sferycznego jest obrazem odpowiedniego boku trójkąta elipsoidalnego; nadto jest ustalona odpowiedniość punktowa wzdłuż linii tego boku.

Trzy punkty wierzchołkowe trójkąta sferycznego są, jak wiadomo, obrazami trzech odpowiednich punktów wierzchołkowych trójkąta elipsoidalnego. Trójkąt na kuli Bessel nazywa „sferycznym trójkątem pomocniczym“. Z punktu widzenia teorii odwzorowania powierzchni jest to *geodezyjny quasi-obraz* trójkąta oryginalnego<sup>4)</sup>. Do wyznaczenia geodezyjnego trójkąta quasi-obrazowego wystarcza znajomość trzech punktów w odwzorowaniu. Znajomość lub nieznanie obrazów linii łączących te punkty jest bez znaczenia dla tego celu, gdyż linie geodezyjne łączące trzy punkty obrazowe są wyznaczone przez samą powierzchnię. To właśnie motywuje dopuszczalność braku drugiej funkcji odwzorowawczej bez szkody dla zagadnienia.

Relacje metryczne, jakie zachodzą pomiędzy geodezyjną figurą quasi-obrazową a figurą oryginalną, nazywamy, jak wiadomo, redukcjami odwzorowawczymi. O te właśnie redukcje odwzorowawcze chodzi nam przede wszystkim w zagadnieniu Bessela. Geodezyjny quasi-obraz trójkąta jest w zupełności wyznaczony przez odwzorowanie Bessela, chociaż sam obraz trójkąta nie jest zdefiniowany i wcale nie jest konieczny do

<sup>4)</sup> Dr inż. Franciszek Biernacki, O zniekształceniach odwzorowawczych i o redukcjach odwzorowawczych. „Przegląd Geodezyjny“, nr 2, Warszawa 1949.

rozwiązania zagadnienia, którego istota polega na obliczeniu redukcji odwzorowawczych.

Jakie są te redukcje w odwzorowaniu Bessela? Na ogół redukcje odwzorowawcze dotyczą wszystkich elementów metrycznych figury, a więc trzech boków i trzech kątów trójkąta. Redukcja boku  $\sigma$  została już obliczona przez ustalony związek długości obu boków  $\sigma$  i  $s$ . Ponieważ w rozważanym odwzorowaniu te dwa boki występują jednocześnie w relacji odwzorowawczej: łuk  $\sigma$  jest obrazem łuku  $s$ , więc w tym szczególnym przypadku redukcja odwzorowawcza długości boku  $\sigma$  jest jednocześnie i zniekształceniem odwzorowawczym długości tego boku. Dwa pozostałe boki południkowe na kuli mają oczywiście swoje długościowe redukcje odwzorowawcze, które można obliczyć, lecz nie interesują nas one w zagadnieniu.

Redukcje odwzorowawcze kątów azymutalnych trójkąta sferycznego są równe zeru wskutek właściwości odwzorowania Bessela. Redukcja kąta  $\Delta V$  była już przytoczona wyżej.

Zniekształceń odwzorowawczych, oprócz wspomnianego już zniekształcenia długości boku  $\sigma$ , nie jesteśmy w stanie obliczyć dla żadnego z pozostałych pięciu elementów trójkąta sferycznego, gdyż w odwzorowaniu Bessela obrazy sferyczne dla wszystkich pięciu elementów trójkąta nie są zdefiniowane wskutek braku zdefiniowania obrazów liniowych dla obu południków elipsoidalnych.

#### IV. Afiniczne odwzorowanie powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli

W bliskim, lecz z gruntu zupełnie innym, związku z odwzorowaniem Bessela jest odwzorowanie afiniczne powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli o promieniu  $a$ . Funkcje odwzorowawcze dla afinizmu obu powierzchni, przedstawionych za pomocą równań parametrycznych (1), są następujące:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} U &= \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi \\ V &= \lambda. \end{aligned} \quad (7)$$

Obie funkcje odwzorowawcze są zdefiniowane, mamy więc pełne odwzorowanie jednej powierzchni na drugą. Pierwsza funkcja jest taka sama, jak w odwzorowaniu Bessela, wskutek czego wnioski wyszczególnione w punkcie II, 1 są słuszne i dla odwzorowania afinicznego z tym tylko uzupełnieniem, że odpowiedniość punktowa wzdłuż odpowiadających sobie linii równoleżnikowych jest obecnie zdefiniowana. Nadto odwzorowanie afiniczne jest równoodległościowe w równoleżnikach.

W odwzorowaniu (7) równoleżniki elipsoidalne przechodzą w równoleżniki sferyczne i południki elipsoidalne przechodzą w południki sfe-

ryczne, zachowując równą długość geograficzną. Ponieważ obie siatki parametrowe są ortogonalne, a odwzorowanie nie jest konforemne, są one więc krzywymi głównymi odwzorowania.

Jeśli środek kuli zostanie umieszczony w środku elipsoidy, odwzorowanie afiniczne może być wykonane przez geometryczne zrzutowanie punktów powierzchni elipsoidy na powierzchnię kuli za pomocą wiązki promieni równoległych do osi obrotu, wspólnej dla obu powierzchni. Odwzorowanie afiniczne jest więc jak gdyby „rzutem ortograficznym“ powierzchni elipsoidy na powierzchnię współśrodkowej kuli o promieniu  $a$ . Afinizm wynika nie tylko z rzutu równoległego, lecz także i z prostych związków liniowych, wiążących współrzędne  $X, Y, Z$  ze współrzędnymi  $x, y, z$ . Mamy bowiem, jak łatwo stwierdzić:

$$\begin{aligned} X &= x \\ Y &= y \\ Z &= \frac{a}{b} z. \end{aligned} \tag{8}$$

Do rozwiązania zadania o przenoszeniu współrzędnych geograficznych i azymutu odwzorowanie afiniczne jest mniej dogodnie od odwzorowania Bessela, i — o ile autorowi wiadomo — nie było stosowane ani proponowane do tego celu, ani też nie było zanalizowane co do jego przydatności.

Odwzorowanie afiniczne i odwzorowanie Bessela wymagają wyraźnego odróżnienia, ponieważ mogą łatwo doprowadzić do pomieszania obu odwzorowań.

W książce F. Hopfnera, *Grundlagen der höheren Geodäsie*, Wiedeń 1949, na stronie 80 czytamy następującą krótką notatkę: „Die Geodäsie löst die beiden Hauptaufgaben in der Regel nach *Jacobi* mit Hilfe einer geodätischen Abbildung des Ellipsoids auf die affine Kugel, wobei die Azimute der geodätischen Kurve erhalten bleiben“.

Notatka ta jest nieścista; prawdopodobnie wynika ona z pomieszania odwzorowania Bessela z odwzorowaniem afinicznym. Żadne z tych odwzorowań nie jest odwzorowaniem geodezyjnym; odwzorowanie geodezyjne elipsoidy na kulę w ogóle nie istnieje. Metoda *Jacobiego*, „*Solution nouvelle d'un problème fondamental en Géodésie*, Journ. f. reine und angew. Math., 53, 1857, p. 335“ polega na wprowadzeniu funkcji eliptycznych i nie jest w geodezji używana.

#### РЕЗЮМЕ

В настоящей работе автор провел анализ т. н. з. „проекции Бесселя“ поверхности эллипсоида на поверхность шара, применяемой в известном методе переноса географических координат. Проекция Бесселя не является полной проекцией поверхности; изображения точек, лежащих вне одной геодезической линии за исключением полюсов, не определены; имеем только одну функцию:

$$\operatorname{tg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi.$$

Полярный сферический треугольник Бесселя не является изображением полярного треугольника на эллипсоиде, однако три вершины и одна геодезическая сторона являются сферическими изображениями соответствующих элементов на эллипсоиде.

Этих данных достаточно для вычисления соответствующих редуций и тем самым для решения треугольника на эллипсоиде.

В заключении автор рассматривает афинную проекцию поверхности эллипсоида на поверхность шара, определенную двумя функциями:

$$\operatorname{tg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

$$V = \lambda$$

и подчеркивает легкость смешивания этой проекции с проекцией Бесселя.

#### RÉSUMÉ

Dans le mémoire présent l'auteur analyse la projection, dite de Bessel, de la surface de l'ellipsoïde sur la surface d'une sphère. Cette projection est utilisée dans la méthode connue de translation de coordonnées géographiques.

La projection de Bessel n'est pas complète.

Exception faite des pôles, les images de points situés en dehors d'une ligne géodésique, ne sont pas définies. On n'a qu'une seule fonction de projection

$$\operatorname{tg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi.$$

Ce n'est pas le triangle sphérique polaire de Bessel qui est l'image du triangle polaire ellipsoïdal, mais ce sont trois sommets et un côté géodésique qui sont les images sphériques des éléments respectifs de l'ellipsoïde. Ces données suffisent pour calculer les réductions de projection et par cela même permettent de résoudre le triangle sur l'ellipsoïde.

En terminant, l'auteur traite la projection affine de la surface de l'ellipsoïde sur la surface d'une sphère, cette projection étant définie par deux fonctions:

$$\operatorname{tg} U = \frac{b}{a} \operatorname{tg} \varphi$$

$$V = \lambda.$$

L'auteur fait ressortir également la possibilité de confondre aisément cette projection avec celle de Bessel.

## SPIS TREŚCI

	Strona
<i>A. A. Izotow</i> — Elipsoida odniesienia F. N. Krasowskiego i nowoczesne osiągnięcia geodezji . . . . .	131
<i>M. S. Mołodienski</i> — Metody badania figury Ziemi . . . . .	152
<i>Franciszek Biernacki</i> — O tak zwanym odwzorowaniu Bessela . . . . .	167

## ЗАГЛАВІЕ

<i>А. А. Изотов</i> — Референц-эллипсоид Ф. Н. Красовского и современные достижения геодезической науки . . . . .	150
<i>М. С. Молоденский</i> — Методы исследования фигуры Земли . . . . .	165
<i>Фр. Бернацки</i> — О так называемой проекции Бесселя . . . . .	178

## SOMMAIRE

<i>A. A. Izotow</i> — L'ellipsoïde de référence de F. N. Krasowski et les progrès de la géodésie moderne : . . . . .	151
<i>M. S. Mołodienski</i> — Méthodes d'investigation de la figure de la Terre . . . . .	165
<i>Fr. Biernacki</i> — Sur la projection dite de Bessel . . . . .	179





WYDAWNICTWO POLSKIEGO TOWARZYSTWA CHEMICZNEGO

CHEMIA WSPÓŁCZESNA

WYKŁADY AKADEMICKIE TOM III

WŁODZIMIERZ TRZEBIATOWSKI

STRUKTURA METALI

Stron 176

zł 12.60

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

Prenumerata półroczna Kwartalnika „**POSTĘPY FIZYKI**” wynosi 20 zł, roczna 40 zł. Wpłaty należy przekazywać na konto Państwowego Wydawnictwa Naukowego w PKO Warszawa, Nr I-110-28504.

Prenumeraty zgłoszone dotychczas w placówkach pocztowych lub w PPK Ruch, będą wykonane w okresach, na które uiszczono przedpłaty, natomiast odnowienia prenumeraty należy dokonać przez podane wyżej konto PKO.

Pojedyncze numery są do nabycia w Księgarniach Naukowych

„**DOMU KSIĄŻKI**”:

- |                                      |                                    |
|--------------------------------------|------------------------------------|
| 1. Białystok, Rynek Kościuszki 12/14 | 12. Olsztyn, Plac Wolności 2/3     |
| 2. Bydgoszcz, Dworcowa 14            | 13. Poznań, 27 Grudnia 23          |
| 3. Bytom, Stalina 10                 | 14. Rzeszów, 3 Maja 2              |
| 4. Częstochowa, Al. N. M. P. 14      | 15. Szczecin, Sikorskiego 7        |
| 5. Gdańsk-Wrzeszcz, Grunwaldzka 8    | 16. Toruń, Rynek Staromiejski 30   |
| 6. Gliwice, Zwycięstwa 31            | 17. Warszawa, Krak. Przedmieście 7 |
| 7. Stalinogród, Warszawska 11        | 18. Wrocław, Kuźnicza 42           |
| 8. Kielce, Sienkiewicza 30           | 19. Wrocław, Curie-Skłodowskiej 39 |
| 9. Kraków, Podwale 6                 | 20. Zabrze, Wolności 288           |
| 10. Lublin, Krak. Przedmieście 52    | 21. Opole, Ozimska 8               |
| 11. Łódź, Narutowicza 34             |                                    |



Cena zł 6.50