

A 19111

KOMITET GEODEZJI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

GEODEZJA I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM II * ZESZYT 2

WARSZAWA 1953

KOMITET GEODEZJI POLSKIEJ AKADEMII NAUK

GEODEZJA
I KARTOGRAFIA

KWARTALNIK NAUKOWY
TOM II * ZESZYT 2



1 9 5 3

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE

KOMITET REDAKCYJNY

Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz (zastępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)

RADA REDAKCYJNA

Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk,
Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski

Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — W A R S Z A W A 1953

Nakład 1000	Oddano do składania 8/IV. 53
Ark. wyd. 47, druk. 37/8	Podpisano do druku 9/VI. 53
Papier dr. sat. 70 g 70×100/16 V kl.	Druk ukończono 17/VI. 53
Cena zł 6.50	Zamówienie 236/113 K-4-10215

POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10

Franciszek Biernacki

O zenitalnych i azymutalnych odwzorowaniach kartograficznych

1. Wstęp

Sprawa zenitalności i azymutalności odwzorowania była poruszana w literaturze kartograficznej przez bardzo nielicznych tylko autorów i to w formie krótkich, raczej marginesowych wzmianek. Pojęcia te nie są wyraźnie sprecyzowane i wskutek tego rozmaicie rozumiane. Pochodzi to — jak się wydaje — stąd, że powstawały one i były stosowane na dość wąskiej bazie: odwzorowania kuli na płaszczyznę, co stworzyło duże zwężenia i ograniczenia pojęciowe. Nieliczne wzmianki na ten temat, jakie udało się autorowi spotkać w literaturze kartograficznej, są podane przy końcu niniejszego artykułu. Były one pewną wskazówką dla autora, jak rozważyć temat w sposób ogólny i podać niniejszy przyczynek umożliwiający dokładne ujęcie sprawy.

W wielu książkach na temat odwzorowań kartograficznych można spotkać pogląd, że odwzorowania na płaszczyznę są to odwzorowania azymutalne, na walec — walcowe i na stożek — stożkowe. Tymczasem pojęcie azymutalności odwzorowania wcale nie jest związane wyłącznie z płaszczyzną; możemy mieć również odwzorowania azymutalne i na walcu, i na stożku, i w ogóle na dowolnej powierzchni. Nie należy więc pojęcia azymutalności odwzorowania, a także zenitalności wiązać ani z powierzchnią, którą odwzorowujemy, ani też z powierzchnią, na którą odwzorowujemy; obie powierzchnie mogą być dowolnymi powierzchniami regularnymi.

Drugi mylny pogląd, jaki dość powszechnie spotykamy, to identyfikowanie pojęć azymutalności i zenitalności odwzorowania. A przecież są to pojęcia zupełnie różne, które mogą, lecz nie muszą występować łącznie. Niektórzy operują tylko nazwą azymutalności, nie mówiąc o zenitalności; inni odwrotnie — mówią tylko o zenitalności.

Praca niniejsza ma na celu sprecyzowanie obu pojęć i przyczynienie się do właściwego ich używania.

2. Półgeodezyjne współrzędne biegunowe na powierzchni i odwzorowanie powierzchni

Niechaj będzie dana dowolna regularna powierzchnia i obrany na tej powierzchni układ półgeodezyjnych współrzędnych¹⁾ biegunowych: biegun O i oś biegunowa K . Wówczas położenie dowolnego punktu P na powierzchni może być wyznaczone względem obranego układu za pomocą dwóch współrzędnych: odległości biegunowej z (mierzonej jako długość łuku linii geodezyjnej poprowadzonej z bieguna O na punkt P) i kąta biegunowego a ²⁾ (mierzonego w biegunie O od osi biegunowej — w kierunku ruchu wskazówek zegara — do kierunku wspomnianej linii geodezyjnej na punkt P).

Podobnie niechaj będzie dana druga regularna powierzchnia, a na niej dowolnie obrany układ półgeodezyjnych współrzędnych biegunowych: A, Z , odniesionych do bieguna O' i osi biegunowej K' .

W kartografii matematycznej ustaliły się pewne nazwy związane z układem biegunowym: biegun O układu półgeodezyjnych współrzędnych biegunowych na powierzchni może być nazwany *zenitem*, geodezyjna odległość biegunowa z punktu P nazywana jest *odległością zenitalną*, zaś kąt biegunowy a punktu P (przy obraniu osi biegunowej K w kierunku południka ku północy) nazywany jest *azymutem*. Sam układ półgeodezyjnych współrzędnych biegunowych na powierzchni nazywany jest układem *współrzędnych azymutalnych*.

Równania parametrowe obu powierzchni możemy napisać w postaci:

$$\begin{array}{ll} x = f_1(a, z) & X = F_1(A, Z) \\ \text{I. } y = f_2(a, z) & \text{II. } Y = F_2(A, Z) \\ z = f_3(a, z) & Z = F_3(A, Z); \end{array} \quad (1)$$

linie $a = \text{const.}$ i $z = \text{const.}$ oraz odpowiednio $A = \text{const.}$ i $Z = \text{const.}$ — tworzą siatkę parametrową na odpowiedniej powierzchni.

Odwzorowanie punktowe powierzchni I na powierzchnię II możemy ogólnie uzyskać przez obranie dowolnej pary regularnych funkcji odwzorowawczych, wiążących współrzędne biegunowe obu powierzchni:

$$\begin{array}{l} A = \psi_1(a, z) \\ Z = \psi_2(a, z). \end{array} \quad (2)$$

¹⁾ Siatka współrzędnych na powierzchni nazywa się *półgeodezyjna*, jeśli składa się z jednoparametrowej rodziny linii geodezyjnych i z (jednoparametrowej) rodziny ich ortogonalnych trajektorii, które — jak wiadomo — są liniami geodezyjnie równoległymi i na ogół nie są liniami geodezyjnymi powierzchni. Szczególnym przypadkiem jest siatka współrzędnych półgeodezyjnych *biegunowych*, gdy rodzina linii geodezyjnych przechodzi przez jeden wspólny punkt na powierzchni, zwany *biegunem*; wówczas rodzina ich trajektorii ortogonalnych składa się z *kół geodezyjnych* o środku w biegunie.

²⁾ Pojęcie kąta biegunowego może być uważane za szczególny przypadek kąta kierunkowego.

Układy biegunowe O i O' na obu powierzchniach były obrane zupełnie dowolnie. Dowolność tę możemy bez zwięzania ogólności rozważań nieco ograniczyć, a mianowicie umówimy się, że biegunowi O na powierzchni I ma odpowiadać na powierzchni II bądź biegun O' , bądź też koło geodezyjne o środku w biegunie O' i o pewnym dowolnym promieniu geodezyjnym Z_0 . Wprowadzamy więc warunek

$$\begin{aligned} A = \psi_1(a, 0) \\ 0 = \psi_2(a, 0) \end{aligned} \quad \text{albo} \quad \begin{aligned} A = \psi_1(a, 0) \\ Z_0 = \psi_2(a, 0), \end{aligned} \quad (2')$$

który możemy nazwać *warunkiem biegunowości* odwzorowania (2), przy czym pierwszy jest warunkiem biegunowości *punktowej*, drugi — *kołowej*. Funkcja $A = \psi_1(a, 0)$ oznacza, że w biegunie O (przy $z=0$) kierunkowi a odpowiada w biegunie O' jakiś kierunek A ; funkcja $0 = \psi_2(a, 0)$, bądź też $Z_0 = \psi_2(a, 0)$ oznacza, że biegunowi O (przy $z=0$) odpowiada biegun O' ($Z=0$), bądź koło geodezyjne o promieniu Z_0 .

3. Półgeodezyjność i zenitalność odwzorowania

Pojęcie *półgeodezyjności* odwzorowania powierzchni I na powierzchnię II oraz pojęcie *zenitalności* odwzorowania wiążą się z pewnymi warunkami nałożonymi na ogólne funkcje odwzorowawcze (2). Przez poczynienie dla tych funkcji pewnych ogólnych założeń, ograniczających ich zbyt szeroką dowolność, możemy wyodrębnić pewne grupy odwzorowań, mających jakieś pożądane własności.

W ogólnym odwzorowaniu (2), nawet przy wprowadzeniu warunku biegunowości (2'), siatki parametrowe półgeodezyjne współrzędnych biegunowych na obu powierzchniach na ogół nie muszą sobie odpowiadać, a więc jedna z siatek nie musi być obrazem drugiej. Byłoby jednak najprościej, gdyby odwzorowanie było takie, by siatki parametrowe obu układów O i O' odpowiadały sobie, a więc gdyby jednocześnie:

1) linie geodezyjne $a = \text{const.}$ układu biegunowego O na powierzchni I przechodziły w linie geodezyjne $A = \text{const.}$ układu biegunowego O' na powierzchni II oraz

2) koła geodezyjne $z = \text{const.}$ układu O , przechodziły w koła geodezyjne $Z = \text{const.}$ układu O' .

Ponieważ obie siatki parametrowe są ortogonalne i jedna byłaby wówczas obrazem drugiej, to według pierwszego twierdzenia Tissota z teorii odwzorowań³⁾, byłyby one krzywymi głównymi (niekonforemnego) odwzorowania, spełniającego wymienione warunki.

³⁾ Zob. Franciszek Biernacki, *Teoria odwzorowań powierzchni dla geodetów i kartografów*, Warszawa 1949, str. 67.

Dla klasyfikacji odwzorowań (2) na pewne grupy wymaganie powyższe byłoby za daleko idące. Pewną korzyść przedstawiają takie odwzorowania, w których nie obie, lecz przynajmniej jedna rodzina linii parametrycznych siatki biegunowej układu O przetwarza się na odpowiednią rodzinę linii parametrycznych układu O' . Stosownie do tego możemy wyodrębnić dwie grupy odwzorowań:

1. Jeśli odwzorowanie (2) przeobraża linie geodezyjne $a = \text{const.}$ układu O w linie geodezyjne $A = \text{const.}$ układu O' (bez względu na to, jak się przeobrażają linie pozostałej rodziny krzywych parametrycznych) to odwzorowanie takie możemy nazwać *półgeodezyjnym*⁴⁾. Wtedy A jest funkcją jednej tylko zmiennej a ; ta grupa odwzorowań charakteryzuje się więc następującymi funkcjami odwzorowawczymi:

$$\begin{aligned} A &= \psi_1(a) \\ Z &= \psi_2(a, z), \end{aligned} \quad (3)$$

przy czym warunek horyzontu⁵⁾ może być zachowany lub nie.

2. Jeśli odwzorowanie (2) przetwarza koła geodezyjne $z = \text{const.}$ układu O w pełne koła geodezyjne $Z = \text{const.}$ układu O' (przy czym — zgodnie z ogólnym ograniczeniem (2') — sam biegun O przechodzi bądź w biegun O' , bądź w pełne koło geodezyjne bieguna O') to bez względu na to, jak się przeobrażają linie pozostałej rodziny krzywych parametrycznych, odwzorowanie takie nazywamy *zenitalnym*. Wtedy Z jest funkcją jednej tylko zmiennej z ; ta grupa odwzorowań charakteryzuje się więc następującymi funkcjami odwzorowawczymi:

$$\begin{aligned} A &= \psi_1(a, z) \\ Z &= \psi_2(z), \end{aligned} \quad (4)$$

z warunkiem, że istnieje przynajmniej jedna wartość zmiennej a taka, że gdy a zmieni się o $\pm 2\pi$, to i odpowiadająca jej wartość zmiennej A zmieni się odpowiednio także o $\pm 2\pi$, czyli

$$A \pm 2\pi = \psi_1(a \pm 2\pi, z). \quad (4')$$

Warunek ten może być nazwany warunkiem horyzontu, gdyż w zenitalności kąt A , podobnie jak i kąt a , musi mieć możliwość zmienności w pełnym obrocie, nie zaś tylko w wycinku.

Od zenitalności nie żądamy żadnych innych warunków; w szczególności nie żądamy, aby biegun O odzwiercał się na biegun O' (przypadek ten może mieć miejsce).

4) W literaturze naukowej nie ma nazwy dla tego typu odwzorowań; autor wprowadził wymienioną nazwę przez analogię do nazwy układu półgeodezyjnych współrzędnych na powierzchni. Gdyby jeszcze długości wszystkich łuków wzdłuż rodziny linii geodezyjnych były zachowane, odwzorowanie byłoby nie tylko półgeodezyjne, ale i *równoodległościowe* w liniach parametrycznych $a = \text{const.}$

5) Wyjaśnienie: zob. w punkcie 2 tekstu poniżej.

lecz może także odtwarzać się w koło geodezyjne bieguna O' ; nie żądamy, aby wszystkie linie geodezyjne przechodzące przez biegun O przetwarzały się w linie geodezyjne przechodzące przez biegun O' (przypadek ten również może mieć miejsce), lecz mogą także odtwarzać się na linie niegeodezyjne; nie żądamy, aby wszystkie kąty pomiędzy liniami geodezyjnymi bieguna O przechodziły w równe im kąty pomiędzy obrazami tych linii na powierzchni II.

Odwzorowanie półgeodezyjne charakteryzuje się związkiem $A = \psi_1(a)$.

Odwzorowanie zenitalne charakteryzuje się związkiem $Z = \psi_2(z)$.

Obie te cechy są niezależne od siebie, mogą się więc rozmaicie splatać na 4 sposoby, jak to pokazuje poniższa tablica, w której znaki + i — oznaczają odpowiednio „tak“ i „nie“.

Odwzorowanie		Funkcje odwzorowawcze	Azymutalność ⁶⁾ $A = a$
Półgeodezyjne $A = \psi_1(a)$	Zenitalne $Z = \psi_2(z)$		
—	—	$A = \psi_1(a, z); Z = \psi_2(a, z)$	nie ma
—	+	$A = \psi_1(a, z); Z = \psi_2(z)$	nie ma
+	—	$A = \psi_1(a); Z = \psi_2(a, z)$	$A = a; Z = \psi_2(a, z)$
+	+	$A = \psi_1(a); Z = \psi_2(z)$	$A = a; Z = \psi_2(z)$

Według powyższej tablicy możemy dla tych czterech typów odwzorowań zestawić cztery odpowiednie nazwy dwuwyrazowe, jak np. odwzorowanie półgeodezyjne niezenitalne itp.

4. Azymutalność odwzorowania

Szczególnym przypadkiem odwzorowań półgeodezyjnych jednej dowolnej powierzchni na drugą są odwzorowania *azymutalne*, gdy nie tylko linie geodezyjne bieguna O przechodzą w linie geodezyjne bieguna O' , lecz nadto i wszystkie kąty pomiędzy tymi liniami odtwarzają się na równe im kąty pomiędzy ich geodezyjnymi obrazami. Sam biegun O może przy tym odtworzyć się na biegun O' , bądź w koło geodezyjne bieguna O' . Wtedy $A = a$, druga zaś funkcja odwzorowawcza może być na ogół dowolna.

Są dwa typy odwzorowań azymutalnych, a mianowicie: azymutalne niezenitalne i azymutalne zenitalne. (Patrz tablica wyżej podana oraz graficzne przedstawienie zakresu pojęć, rys. 1). Odpowiednio do tego grupa odwzorowań azymutalnych charakteryzuje się następującymi funkcjami odwzorowawczymi:

$$\begin{aligned} A &= a \\ Z &= \psi_2(a, z), \end{aligned} \quad (5)$$

⁶⁾ O tym będzie mowa niżej w punkcie 4.

a w szczególnym przypadku:

$$\begin{aligned} A &= a \\ Z &= \psi_2(z). \end{aligned} \quad (5')$$

Odwzorowania azymutalne niezenitalne nie wzbudziły większego zainteresowania. Zastosowanie praktyczne znalazły odwzorowania azymutalne zenitalne (5'). W związku z tym sama definicja pojęcia azymutalności, tak jak ją podaje fachowa literatura kartograficzna, niepotrzebnie została zwięziona przez włączenie zenitalności jako cechy koniecznej azymutalności. A przecież azymutalność i zenitalność są to dwie cechy niezależne od siebie, które mogą, ale nie muszą, występować łącznie. Taka zwięziona definicja odwzorowań azymutalnych jest następująca:

Odwzorowanie powierzchni I na powierzchnię II nazywamy azymutalnym, jeśli spełnia 4 następujące warunki:

1. Wszystkie linie geodezyjne przechodzące przez biegun O odwzorują się na linie geodezyjne przechodzące przez biegun O' . Wówczas odwzorowanie musi być *półgeodezyjne*. (Warunek ten nie przesądza jeszcze sprawy, że biegun O musi odwzorować się na biegun O').

2. Wszystkie kąty pomiędzy liniami geodezyjnymi w biegunie O odwzorują się na równe im kąty pomiędzy geodezyjnymi obrazami tych linii w biegunie O' . Tę cechę równości kątów nazywamy *azymutalnością*.

3. Wszystkie koła geodezyjne układu O przechodzą na koła geodezyjne układu O' . Jest to warunek *zenitalności*.

4. Biegun O układu I odwzorowuje się na biegun O' układu II. Jest to warunek *biegunowości punktowej*.

W ujęciu matematycznym warunek pierwszy znajduje wyraz we wzorze $A = \psi_1(a)$, drugi — we wzorze $A = a$; warunek trzeci — we wzorze $Z = \psi_2(z)$, warunek czwarty — we wzorze $0 = \psi_2(0)$. Wszystkie cztery warunki łącznie można ująć w następującą postać funkcyjną, będącą wyrazem zwięzonej definicji odwzorowań azymutalnych:

$$\begin{aligned} A &= a \\ Z &= \psi_2(z) \\ 0 &= \psi_2(0). \end{aligned} \quad (6)$$

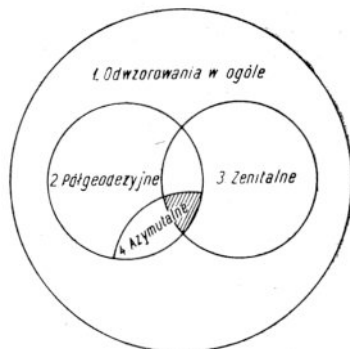
W myśl tej definicji wszystkie odwzorowania azymutalne są zarazem i zenitalne, lecz nie odwrotnie.

Znacznie logiczniejsze wydaje się zdefiniowanie pojęcia azymutalności odwzorowania przez spełnienie tylko dwóch warunków, a mianowicie pierwszego i dalej idącego drugiego, przy czym nie koniecznie musi występować warunek 3 oraz warunek 4. Takie stanowisko zajmuje autor, jak to wynika z definicji azymutalności podanej na początku. Wówczas

mogłyby istnieć odwzorowania azymutalne, które nie muszą być zenitalne. Lecz praktyka kartograficzna poszła inną drogą i zwięzła zakres pojęcia azymutalności przez wymaganie zenitalności i punktowej biegunowości. Również gdy jeden tylko, a mianowicie czwarty warunek biegunowości punktowej nie jest spełniony, zaś pozostałe 3 warunki są spełnione, wydaje się bardziej logiczne zaliczenie odwzorowania raczej do grupy azymutalnej aniżeli do zenitalnej.

Wszystkie te pojęcia i ich wzajemne relacje zakresowe są przedstawione graficznie za pomocą metody kół pojęciowo-logicznych na Rys. 1.

W związku z zachowaniem w biegunie równości kątów nasuwa się jeszcze jedna uwaga, o której pożytecznie będzie wspomnieć. Każde odwzorowanie azymutalne ma punkt równokątny w biegunie O' , lecz niekoniecznie odwrotnie. Punkt O' może być punktem równokątnym i dla odwzorowań nieazymutalnych; może to mieć miejsce tylko w przypadku, gdy linie geodezyjne bieguna O mają swe obrazy w postaci linii na ogół niegeodezyjnych, a więc w odwzorowaniach nie należących do grupy półgeodezyjnej; samo odwzorowanie może przy tym być bądź zenitalne, bądź niezenitalne.



Rys. 1

Koło 1 przedstawia zakres odwzorowań w ogólności:

$$A = \psi_1(a, z), \quad Z = \psi_3(a, z).$$

Koło 2 przedstawia zakres odwzorowań półgeodezyjnych:

$$A = \psi_1(a), \quad Z = \psi_2(a, z).$$

Koło 3 przedstawia zakres odwzorowań zenitalnych:

$$A = \psi_1(a, z), \quad Z = \psi_2(z).$$

Część wspólna kół 2 i 3 odpowiada odwzorowaniom półgeodezyjnym i zenitalnym:

$$A = \psi_1(a), \quad Z = \psi_2(z).$$

Odcinek kołowy 4 przedstawia zakres odwzorowań azymutalnych:

$$A = a, \quad Z = \psi_2(a, z).$$

Część zakreskowana odpowiada zwięzłej definicji azymutalności:

$$A = a, \quad Z = \psi_2(z).$$

5. Wzmianki w literaturze kartograficznej

Jako ilustrację powyższego rozważania przytoczymy bardzo zresztą nieliczne, odnoszące się do tematu wzmianki z literatury kartograficznej.

1. W podręczniku prof. Antoniego Łomnickiego *Kartografia matematyczna*, 1927, na stronie 70 i 71 mamy wyprowadzony wzór $r^2 = -2R^2$.

$\cdot \cos p + C$ dla grupy odwzorowań równopolowych azymutalnych (Lamberta). Wielkość C jest stałą dowolną, występującą na skutek całkowania. Wprowadzając warunek azymutalności w węższym znaczeniu, stała C musi być obrana jako $2R^2$ i wzór dla promienia r będzie: $r = 2R \sin \frac{p}{2}$.

Potem mamy następującą uwagę:

„*U w a g a*. Gdybyśmy stałej C dali jakąkolwiek inną wartość, rzut nie byłby już azymutalny, tylko tzw. *zenitalny*, to znaczy, że punkty mające równą odległość sferyczną od stałego punktu na kuli (tutaj dla bieguna geogr.), mają i w obrazie równe odległości od stałego punktu na obrazie. Obrazem bieguna byłoby wtedy całe kółko o promieniu $r = C$. Takie rzuty zaliczamy już do pseudoazymutalnych“.

2. W czasopiśmie „*Ztschr. f. Verm.*“ XIII Bd., 1884, str. 299, był wydrukowany artykuł prof. K. Zöppritza pt. *Tissot's Untersuchungen über Kartenprojektionen*. Czytamy tam następującą krótką wzmiankę:

„Odwzorowanie nazywamy *zenitalnym*, gdy wszystkie punkty powierzchni kuli, których odległość zenitalna od punktu środkowego odtwarzanego obszaru jest taka sama (a więc dla których linie pionu tworzą taki sam kąt z pionem punktu środkowego) leżą na mapie na okręgu, którego środek jest obrazem punktu środkowego obszaru. Okrąg kuli mający stałą odległość zenitalną zwie się *almukantaratem*; można więc krótko powiedzieć: *almukantaraty* odtwarzają się jako okręgi. Gdy teraz oprócz tego jeszcze i wszystkie koła duże, przechodzące przez punkt środkowy obszaru, tzw. koła azymutalne, odtwarzają się jako linie proste, a więc każdy punkt na mapie zachowuje taki sam azymut, jaki ma na powierzchni kuli, to odwzorowanie nazywamy *azymutalnym*„.

Ściśle biorąc jest rzeczą niesłuszną, gdy pojęcia „azymutalny“ i „zenitalny“, jak to przeważnie ma miejsce, używa się jako równoznaczne. Wiechel przedłożył w *Civilingenieur*, Jahr. 1879, odwzorowanie zenitalne, które nie jest azymutalne. Koła azymutalne są tam odtworzone jako linie krzywe w formie litery S“.

3. Autorowi nie powiodło się odszukanie źródłowego artykułu Wiechela, o którym wzmiankę podał Zöppritz. Odwzorowanie Wiechela opisał również Herz w znanym podręczniku *Lehrbuch der Landkartenprojektionen*, Lipsk, 1885, str. 189. Ale i tej książki nie udało się odszukać. Natomiast niedawno ukazała się notatka o odwzorowaniu Wiechela w czasopiśmie „*The Geographical Journal*“, June 1952, t. CXVIII, str. 237; przytaczamy ją w przekładzie poniżej:

„Zapomniana projekcja pseudozenitalna.

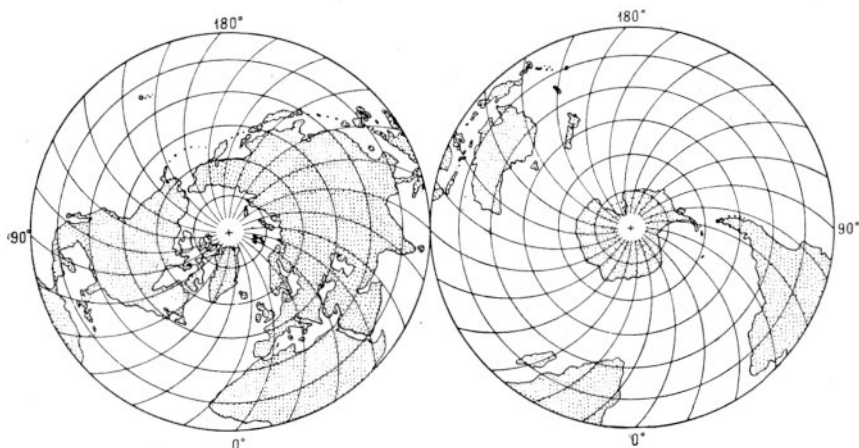
Ciekawe równopolowe odwzorowanie, w którym odległości mierzone wzdłuż południków są wierne w skali, jest opisane w książce Herza *Lehrbuch der Landkartenprojektionen* (Lipsk 1885); odwzorowanie to Herz przypisuje Wiechelowi.

Jest to odwzorowanie równopolowe z kołowymi kwadrantami jako południkami; konstrukcja odwzorowania jest następująca: Jeśli r oznacza promień Ziemi (przyjętej za kulę), wykreślamy okrąg o promieniu $r\sqrt{2}$; będzie to granica odwzorowania dla jednej półkuli, to znaczy równik. Teraz poprowadźmy dowolną średnicę tego okręgu i weźmy punkt odległy od środka o wielkość promienia r . Z tego no-

wego punktu, który przyjmujemy za środek, promieniem r zakreślmy kwadrant okręgu poczynając od pierwotnego środka i kończąc przy granicy. Ten kwadrant będzie przedstawiał południk. Podobne kwadranty, umieszczone w równych odstępach, będą przedstawiały inne południki (rys. 2).

Równoleżniki są okręgami współśrodkowymi, przechodzącymi przez punkty odmierzone wzdłuż krzywych południków, w poprawnych odległościach od równika.

Możemy, jeśli chcemy, patrzeć na każdy południk na tym odwzorowaniu jako na prawdziwy południk kuli, obrócony tak, żeby leżał na papierze zachowując swą krzywiznę. Łatwo dowieść, że odwzorowanie jest równopolewe; równoleżniki są w istocie takie same, jak w dobrze znanym zenitalnym odwzorowaniu równopolewym. Gdy pola są zachowane i odległości wzdłuż krzywych południków są wierne w skali, kąty i inne odległości są zmienione i jak to musi się zdarzać przy wszystkich odwzorowaniach równopolewych, zachodzą znaczne zniekształcenia w miejscach odległych od środka. Jak widać, odwzorowanie może być rozszerzone na całą kulę, co zrobił Wiechel, lecz zniekształcenie odległej półkuli jest nadmierne“.



Rys. 2

РЕЗЮМЕ

Понятия азимутальной и зенитальной картографических проекций являются недостаточно ясными и поэтому их различно понимают. Настоящий доклад является пробой более точного определения как самых терминов так и их взаимного отношения. Нельзя трактовать этих терминов как идентичных и связанных только с проекцией на плоскость. Автор производит классификацию проекций одной поверхности на другую путём сравнения обеих поверхностей при помощи сетки полугеодезических полярных координат. Потом он даёт определения азимутальной и зенитальной проекций. В конце статьи приводятся некоторые замечания из картографической литературы, относящиеся к рассматриваемому вопросу.

RÉSUMÉ

La définition de la projection azimuthale et de la projection zénithale cartographique, n'est pas d'une façon claire définie, et à cause de cela, elle est comprise de manières différentes. Le travail actuel constitue l'essai de définition assez précise de ces conceptions et de leur relation réciproque. En particulier ces deux définitions ne peuvent être traitées comme identiques, de même comme exclusivement liées avec la projection sur un plan. L'auteur accomplit la classification des projections d'une surface sur l'autre en se servant de réseau des coordonnées demi-géodésiques polaires. Ensuite il nous donne la définition de la projection zénithale et de la projection azimuthale. A la fin de cet article l'auteur nous cite quelques indications de la littérature cartographique, concernant le thème discuté.

Stanisław Milbert

Transformacja współrzędnych geograficznych

1. Wstęp

Zagadnienie transformacji współrzędnych geograficznych na elipsoidzie obrotowej spłaszczonej może być w swym najbardziej naturalnym ujęciu pojmowane jako ruch figury po powierzchni elipsoidy. Będzie to bezpośrednio nasuwające się uogólnienie znanej transformacji figur na płaszczyźnie (z zachowaniem metryki, przez przesunięcie, skrócenie i ew. zmianę skali). Nowym czynnikiem, który na ogół musi wystąpić przy ruchu figury po powierzchni krzywej, będzie zmiana elementów metrycznych figury (długości boków, wielkości kątów, wielkości pola) oraz zmiana formy figury przez gięcie. Tylko niektóre powierzchnie oraz niektóre kierunki dopuszczają ruch figury po powierzchni bez zmiany metryki figury (a więc dopuszczają ruch sztywny figury po powierzchni lub też ruch giętki figury, tj. połączony ze zmianą formy, lecz bez zmiany metryki przy założeniu giętkości figury).

Pod względem możliwości ruchu figury (np. geodezyjnej) po powierzchni możemy rozklasyfikować powierzchnie na trzy następujące typy:

1. Powierzchnie mające trzy stopnie swobody ruchu figury (dwa stopnie ze względu na dwuwymiarowy utwór geometryczny każdej powierzchni i trzeci stopień ze względu na ruch obrotu figury); po takich powierzchniach można dowolnie przesuwać i obracać figury bez zmiany ich elementów metrycznych. Powierzchnie o trzech stopniach swobody dopuszczają ruch sztywny figury lub też ruch giętki. Należą do nich powierzchnie o stałej krzywiznie Gaussa K : płaszczyzna ($K=0$), kula ($K>0$), pseudosfera ($K<0$) — dopuszczające ruch sztywny, oraz powierzchnie na nie nakładalne (np. stożek, walec), które mogą dopuszczać zarówno ruch sztywny, jak i ruch giętki.

2. Powierzchnie mające jeden stopień swobody ruchu, po których figury można przesuwać bez zmiany metryki tylko w pewnym kierunku, po pewnych liniach krzywych. Powierzchnie takie dopuszczają ruch sztywny figury. Należą tu powierzchnie obrotowe o zmiennej krzy-

wiżnie Gaussa, dla których równoleżniki są liniami ruchu sztywnego, a mianowicie, przesunięcia oraz powierzchnie nakładalne na powierzchnie obrotowe. Ruch figury po powierzchni obrotowej o zmiennej krzywiznie w kierunku różnym od równoleżnika możliwy jest tylko przy jednoczesnej zmianie metryki i formy (gięcie) figury.

3. Powierzchnie nie mające żadnego stopnia swobody, po których ruch figury możliwy jest tylko z jednoczesną zmianą metryki tej figury. Do tego typu należą wszystkie pozostałe powierzchnie.

Należy nadmienić, że jeśli jakaś powierzchnia ma dwa stopnie swobody ruchu figur, to musi mieć jeszcze i trzeci stopień swobody. Powierzchnie mające tylko dwa stopnie swobody nie istnieją.

Z powyższego wyciągamy wniosek, że sieć triangulacyjną (układ trójkątów geodezyjnych) możemy na elipsoidzie obrotowej przesuwać bez zniekształceń metryki i bez gięcia (bez zmiany formy) tylko wzdłuż równoleżników. Wszelkie inne przesunięcia sieci triangulacyjnej pociągają za sobą zmianę metryki i zmianę formy (przez gięcie), tj. wywołują zniekształcenia i deformacje. W praktyce geodezyjnej zachodzi jednak konieczność przesuwania (dowiązkiwanie i łączenie sieci triangulacyjnych) figur na elipsoidzie obrotowej w różnych kierunkach oraz konieczność rozciągania (zmiany skali). Musimy zatem dopuścić pewne zmiany elementów trójkątów geodezyjnych. Przy rezygnacji z podobieństwa figur na elipsoidzie obrotowej powstaje jeszcze kwestia sposobu ich przemieszczania. Zachowamy tu zasadę przemieszczania figur podaną przez Helmerta. Zadanie to rozpatrzymy z punktu widzenia odwzorowania, co pozwala wyznaczyć wielkość zniekształceń i wprowadzić pewne uproszczenia dla zastosowań praktycznych.

II. Wyprowadzenie wzorów

1. Zasada odwzorowania

Przyjmijmy na elipsoidzie obrotowej układ geodezyjnych współrzędnych biegunowych s, α z biegunem w punkcie $P(\varphi, \lambda)$, wprowadzony w sposób następujący. Na elipsoidzie ziemskiej wybieramy punkt P jako biegun oraz południk przechodzący przez ten punkt jako oś układu. Geodezyjnymi współrzędnymi biegunowymi punktu Q będzie odległość s tego punktu od bieguna P , liczona po linii geodezyjnej, oraz kąt (azymut) α , jaki ta linia geodezyjna tworzy w biegunie z południkiem. Linie parametrowe geodezyjnych współrzędnych biegunowych są ortogonalne. Element łuku w tym układzie ma postać

$$d\sigma^2 = ds^2 + G da^2, \quad (1)$$

gdzie G jest zależne od położenia bieguna P oraz współrzędnych s, α .

Przyjmijmy na tej samej elipsoidzie obrotowej drugi układ geodezyjnych współrzędnych biegunowych s_1, α_1 z biegunem w punkcie $P_1 (\varphi_1, \lambda_1)$. Dla elementu łuku w tym układzie będzie podobnie

$$d\sigma_1^2 = ds_1^2 + G_1 d\alpha_1^2, \quad (2)$$

przy czym G_1 zależy od położenia bieguna P_1 i współrzędnych s_1, α_1 .

Jeśli teraz napiszemy

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi + \Delta \varphi \\ \lambda_1 &= \lambda + \Delta \lambda \\ s_1 &= s(1+h) \\ \alpha_1 &= \alpha + \Delta \alpha, \end{aligned} \quad (3)$$

gdzie $\Delta \varphi, \Delta \lambda, h, \Delta \alpha$ są stałymi, otrzymamy szukane przemieszczenie figur na elipsoidzie obrotowej oraz zmianę ich skali. Układ pierwszy odwzoruje się na układ drugi, przy czym biegun P przejdzie w P_1 przez przesunięcie w południku o $\Delta \varphi$ i w równoleżniku o $\Delta \lambda$, układ zostanie skręcony dokoła bieguna o kąt $\Delta \alpha$ oraz zostanie rozciągnięty o hs . Figury geometryczne zmieniają swe położenie oraz elementy trójkątów ulegną zmianie o różne wielkości zależnie od swego pierwotnego położenia. Zmiany więc współrzędnych punktów oraz elementów figur będą funkcjami współrzędnych.

2. Zniekształcenia

Z dwóch ostatnich wzorów (3) otrzymamy

$$\begin{aligned} ds_1 &= (1+h) ds \\ d\alpha_1 &= d\alpha, \end{aligned}$$

co po wstawieniu do (2) daje

$$d\sigma_1^2 = (1+h)^2 ds^2 + G_1 d\alpha^2. \quad (4)$$

Formy kwadratowe (1) i (4) dają nam skale liniowe w kierunkach głównych

$$a = \sqrt{\frac{E_1}{E}} = 1+h \quad (5)$$

$$b = \sqrt{\frac{G_1}{G}}. \quad (5a)$$

Skalę b obliczamy w sposób następujący. G jest, jak powiedziano wyżej, funkcją położenia bieguna $P (\varphi, \lambda)$ i punktu elipsoidy $Q (s, \alpha)$ oraz podobnie G_1 jest funkcją punktu $P_1 (\varphi_1, \lambda_1)$ i punktu $Q_1 (s_1, \alpha_1)$. Będzie więc

$$G = G(\varphi, \lambda, s, \alpha)$$

$$G_1 = G_1(\varphi_1, \lambda_1, s_1, \alpha_1)$$

oraz na podstawie (3)

$$G_1 = G(\varphi + \Delta\varphi, \lambda + \Delta\lambda, s + hs, \alpha + \Delta\alpha),$$

przy czym obie funkcje G i G_1 mają tę samą budowę, a wartości ich zależą tylko od wartości argumentów.

Stąd znajdujemy

$$\sqrt{G_1} = \sqrt{G} + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial s}hs + \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha}\Delta\alpha + (\text{wyrazy wyższych rzędów})$$

oraz skalę b

$$b = \sqrt{\frac{G_1}{G}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\varphi}\Delta\varphi + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\lambda}\Delta\lambda + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial s}hs + \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha}\Delta\alpha + (\text{wyrazy wyższych rzędów}). \quad (6)$$

Dla wyrażenia \sqrt{G} , które nazywa się zredukowaną długością linii geodezyjnej, mamy dla elipsoidy obrotowej następujący wzór¹⁾:

$$\sqrt{G} = s - \frac{s^3}{6 MN} + \frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi \cos\alpha}{3 MN^2} s^4 + \dots, \quad (7)$$

skąd otrzymujemy

$$\frac{1}{\sqrt{G}} = \frac{1}{s} + \frac{s}{6 MN} + \dots, \quad (8)$$

przy czym ε jest drugim mimośrodem elipsy południkowej, zaś M i N są głównymi promieniami krzywizny.

Pochodne cząstkowe funkcji \sqrt{G} względem φ , λ , s , α są:

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\varphi} = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 \sin\varphi \cos\varphi}{N^2} s^3 + \dots$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial s} = 1 - \frac{s^2}{2 MN} + \dots$$

$$\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial\alpha} = -\frac{\varepsilon^2 \cos\varphi \sin\varphi \sin\alpha}{3 MN^2} s^4 + \dots$$

¹⁾ Zob. np. Jordan-Eggert, *Handbuch der Vermessungskunde*, t. 3, Stuttgart 1923, str. 410, wzór (12).

Po pomnożeniu przez $\frac{1}{\sqrt{G}}$ oraz uwzględnieniu wzoru (8) będzie

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \varphi} &= \frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{N^2} s^2 + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \lambda} &= 0 \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial s} &= \frac{1}{s} - \frac{s}{3 MN} + \dots \\ \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial \alpha} &= -\frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha}{3 MN^2} s^3 + \dots\end{aligned}\quad (9)$$

Wstawiając (9) do (6) i uwzględniając ϱ'' otrzymamy skalę liniową b :

$$\begin{aligned}b &= 1 + \left(\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{N^2} s^2 + \dots \right) \frac{\Delta \varphi''}{\varrho''} + \left(1 - \frac{s^2}{3 MN} + \dots \right) h + \\ &+ \left(-\frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha}{3 MN^2} s^3 + \dots \right) \frac{\Delta \alpha''}{\varrho''} + \text{wyraży wyższego rzędu.}\end{aligned}\quad (10)$$

3. Wnioski wypływające ze zniekształceń i zestawienie wyników

Współczynniki w nawiasach wzoru (10) mają następujące wartości przy $s=500\,000\text{ m}$:

$$\frac{2}{3} \frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi}{N^2} s^2 = \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi s^2}{3 N^2 \varrho''} < 10^{-10}$$

$$\frac{s^2}{3 MN} < \frac{1}{400}$$

$$\frac{\varepsilon^2 \sin \varphi \cos \varphi \sin \alpha}{3 MN^2 \varrho''} s^3 = \frac{\varepsilon^2 \sin 2\varphi \sin \alpha}{6 MN^2 \varrho''} s^3 < \frac{1}{2} 10^{-11}$$

Widzimy, że przy $\Delta \varphi'' < 1000''$ i $\Delta \alpha'' < 20\,000''$ oraz $h < 1 : 25\,000$ wpływ zmiany szerokości geograficznej, azymutu i skali jest mniejszy niż $1 : 10\,000\,000$. Można więc we wzorze (10) wyrazy te i wszystkie rzędu wyższego opuścić. W rzeczywistości zmiany $\Delta \varphi$, $\Delta \alpha$, h są znacznie mniejsze, przez co wpływ ich jest znacznie mniejszy od $1 : 10\,000\,000$. Przyjmując więc dla (10) wyrażenie

$$b = 1 + h \quad (11)$$

popelniamy błąd mniejszy niż $1 : 10\,000\,000$, skale a i b możemy uważać

praktycznie za równe. Widzimy więc, że odwzorowanie elipsoidy na tę samą elipsoidę określone przez wzory (3) przy powyżej podanych ograniczeniach jest praktycznie wiernokątne i skala b jest stała dla całego obszaru. Znaczący to, że figury geometryczne na elipsoidzie możemy w dość dużych granicach przesuwac i rozciągać nie zniekształcając elementów w granicach praktycznych dokładności. Drugim ważnym wnioskiem jest niewystępowanie w wzorach (5) i (11) współrzędnych bieguna $P(\varphi, \lambda)$, co znaczy, że skale liniowe a i b są równe i stałe dla każdego bieguna. Możemy biegun wybrać zupełnie dowolnie, nie naruszając praktycznie podobieństwa figur przed transformacją i po transformacji.

Wyniki powyższe formułujemy następująco:

a) Transformacją układu geodezyjnego (tj. układu figur na powierzchni, np. sieci triangulacyjnej) nazwiemy odwzorowanie tego układu określone równaniami (3).

b) Przy warunkach

$$s \leq 500\,000 \text{ m}$$

$$\Delta\varphi'' < 1000''$$

$$\Delta\alpha'' < 20\,000''$$

$$h < 1 : 25\,000$$

transformacja jest odwzorowaniem „prawie“ wiernokątnym, z dokładnością większą od $1 : 10\,000\,000$, tzn. figury geometryczne przed transformacją i po transformacji są podobne z dokładnością większą od $1 : 10\,000\,000$, przy czym skala liniowa jest we wszystkich punktach i kierunkach „prawie“ jednakowa i wynosi

$$\alpha = b = 1 + h.$$

c) Ze względu na równość skali we wszystkich punktach układu położenie bieguna można przyjąć dowolnie.

4. Transformacja współrzędnych geograficznych

Związek między współrzędnymi geograficznymi φ' , λ' i geodezyjnymi współrzędnymi biegunowymi s , α punktu Q ogólnej postaci

$$\begin{aligned} \varphi' - \varphi &= F(\varphi, \lambda, \alpha, s) \\ \lambda' - \lambda &= L(\varphi, \lambda, \alpha, s) \end{aligned} \tag{12}$$

podają szeregi potęgowe głównego zadania geodezyjnego, przedstawione w postaci krakowianowej w moim artykule *Numeryczna metoda obliczania współczynników szeregów potęgowych głównego zadania geodezyjnego*, „Geodezja i Kartografia“, t. I, zesz. 4, str. 206, wzór (10), Warszawa 1952.

Po transformacji (3) punkt Q będzie miał współrzędne geograficzne φ'_1 , λ'_1 oraz biegunowe $s_1 = s + hs$, $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$, więc

$$\begin{aligned} \varphi'_1 - \varphi_1 &= F(\varphi + \Delta\varphi, \lambda + \Delta\lambda, \alpha + \Delta\alpha, s + hs) \\ \lambda'_1 - \lambda_1 &= L(\varphi + \Delta\varphi, \lambda + \Delta\lambda, \alpha + \Delta\alpha, s + hs). \end{aligned} \quad (13)$$

Przy małych zmianach $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$, hs możemy prawe strony rozwinąć w szereg Taylora

$$\begin{aligned} \varphi'_1 - \varphi_1 &= F(\varphi, \lambda, \alpha, s) + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial F}{\partial s} hs + \\ &+ \text{wyrazy wyższego rzędu}. \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \lambda'_1 - \lambda_1 &= L(\varphi, \lambda, \alpha, s) + \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \frac{\partial L}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial L}{\partial s} hs + \\ &+ \text{wyrazy wyższego rzędu}. \end{aligned}$$

Oznaczając różnicę współrzędnych geograficznych po transformacji i przed transformacją przez $D\varphi = \varphi'_1 - \varphi_1$ i $D\lambda = \lambda'_1 - \lambda_1$ oraz uwzględniając wzory (12) i (13) otrzymamy poprawki współrzędnych ze względu na transformację (opuszczamy wyrazy wyższych rzędów):

$$\begin{aligned} D\varphi &= \left(1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) \Delta\varphi + \frac{\partial F}{\partial \lambda} \Delta\lambda + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial F}{\partial s} hs \\ D\lambda &= \frac{\partial L}{\partial \varphi} \Delta\varphi + \left(1 + \frac{\partial L}{\partial \lambda}\right) \Delta\lambda + \frac{\partial L}{\partial \alpha} \Delta\alpha + \frac{\partial L}{\partial s} hs \end{aligned} \quad (15)$$

III. Zastosowanie

Współczynniki przy $\Delta\varphi$, $\Delta\lambda$, $\Delta\alpha$, h w (15) wystarczy obliczyć raz na zawsze dla pewnego bieguna. Dla Polski przyjmijmy szerokość bieguna $\varphi = 52^\circ$, jednostkę długości $s = 500\,000$ m oraz elipsoidę Bessela.

Dalsza praca jest już czysto rachunkowa.

Z współczynników szeregów potęgowych głównego zadania geodezyjnego zamieszczonych w 4 zeszytce I tomu „Geodezji i Kartografii“, 1952, str. 214—216 otrzymujemy dla $f = 0$ (tj. dla $\varphi = 52^\circ$), $s = 5$, gdzie $u = s \cos \alpha$, $v = s \sin \alpha$:

$$F = \varphi' - \varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -810,102 & +2,430 & -0,014 \\ +16\,179,105 & -97,054 & +0,859 & -8 \\ -6,189 & -11,372 & +203 & -3 \\ +83 & -1,347 & +40 & 0 \\ +13 & -0,159 & +7 & 0 \\ 0 & -19 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^2 \\ v^4 \\ v^6 \end{pmatrix} \quad (16)$$

$$L = \lambda' - \lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \\ u^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} + 26\,212,464 & - 87,623 & + 0,635 & - 0,005 \\ + 2\,624,960 & - 31,694 & + 376 & 0 \\ + 316,490 & - 7,487 & + 133 & 0 \\ + 37,050 & - 1,474 & + 36 & 0 \\ + 4,378 & - 0,261 & + 8 & 0 \\ + 0,517 & - 43 & 0 & 0 \\ + 61 & - 7 & 0 & 0 \\ + 8 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ v^7 \end{pmatrix} \quad (16)$$

Dla przejrzystości opuszczamy w tabelach zera. Współczynniki zamieszczone w powyżej cytowanym artykule są obliczone dla $s=100\,000\,m$, jednak można je było zastosować dla $s=500\,000\,m$, gdyż wymagana tu jest dokładność do $0'',01$. W rzeczywistości autor zastosował powyższe współczynniki (których obliczenia dokonano z dokładnością $0'',00000001$, zaokrąglając następnie do $0'',000001$) porównując je ze współczynnikami obliczonymi jeszcze raz dla jednostki $s=500\,000\,m$. Różnice były drobne, spowodowane błędami zaokrągleń.

Wzory (16) są szeregami w postaci krakowianowej. Różniczkowanie ich względem s i a nie przedstawia wielkiej trudności. Istnieją reguły takiego różniczkowania (algebra jądrowa, w obliczeniach tego zagadnienia bardzo szeroko stosowana), lecz czytelnik nie znający ich może zwykłym rachunkiem, choć bardzo rozwlekłym i nieprzejrzystym, otrzymać następujące wartości pochodnych, występujące we wzorach (15):

$$\frac{\partial F}{\partial a} \frac{10}{q''} + \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,7843851 & +0,0047053 & -0,0000416 \\ - 779496 & + 15739 & - 238 \\ - 94227 & + 3625 & - 81 \\ - 11052 & + 702 & - 22 \\ - 1306 & + 124 & . \\ - 154 & + 19 & . \\ - 18 & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial F}{\partial s} \frac{s}{10\,000} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,1620204 & +0,0009720 & -0,0000084 \\ +1,6179105 & - 291162 & + 4295 & - 56 \\ - 12378 & - 45488 & + 1218 & - 24 \\ + 249 & - 6733 & + 280 & . \\ + 52 & - 954 & + 56 & . \\ 0 & - 133 & . & . \\ 0 & - 16 & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^2 \\ v^4 \\ v^6 \end{pmatrix} \quad (17)$$

$$\frac{\partial L}{\partial a} \frac{10}{q''} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \\ u^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,1272617 & +0,0015366 & -0,0000182 \\ +1,2708161 & - 434320 & + 8799 & - 146 \\ +0,1272617 & - 99984 & + 3055 & - 52 \\ + 153439 & - 19379 & + 829 & - 16 \\ + 17962 & - 3397 & + 192 & . \\ + 2123 & - 557 & + 40 & . \\ + 251 & - 90 & . & . \\ + 30 & - 10 & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^2 \\ v^4 \\ v^6 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\partial L}{\partial s} \frac{s}{10\,000} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \\ u^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +2,6212464 & -0,0262869 & +0,0003175 & -0,0000035 \\ +0,5249920 & - & 126776 & + & 2256 & . \\ + & 949470 & - & 37435 & + & 931 & . \\ + & 148200 & - & 8844 & + & 288 & . \\ + & 21890 & - & 1827 & + & 72 & . \\ + & 3102 & - & 344 & . & . & . \\ + & 427 & - & 63 & . & . & . \\ + & 64 & . & . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ v^7 \end{pmatrix} \quad (17)$$

Kropki w tabelach oznaczają, że tych elementów nie obliczano.

Pochodne $\frac{\partial F}{\partial \varphi}$ i $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$ otrzymujemy przez różniczkowanie szeregów powyżej cytowanych dla głównego zadania geodezyjnego. Stosujemy tu następujące reguły

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{df}{d\varphi} = \frac{\partial F}{df} \frac{\varrho^0}{p^0},$$

gdzie

$$f = \varrho^0 \frac{\varphi' - \varphi}{p^0},$$

skąd

$$\frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{1}{\varrho''} = \frac{\partial F}{\partial f} \frac{\varrho^0}{\varrho''} \frac{1}{p^0}$$

i podobnie

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} \frac{1}{\varrho''} = \frac{\partial L}{\partial f} \frac{\varrho^0}{\varrho''} \frac{1}{p^0}.$$

Z dalszych obliczeń otrzymujemy pozostałe współczynniki wzorów (15)

$$1 + \frac{\partial F}{\partial \varphi} \frac{1}{\varrho''} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1,0000000 & -0,0080443 & +0,0000645 & -0,0000006 \\ -0,0007652 & - & 16085 & + & 292 & 0 \\ + & 154 & - & 2750 & + & 84 & 0 \\ + & 31 & - & 422 & + & 19 & 0 \\ & 0 & - & 61 & . & . & 0 \\ & 0 & - & 8 & . & . & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ v^2 \\ v^4 \\ v^6 \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi} \frac{1}{\varrho''} = \begin{pmatrix} 1 \\ u \\ u^2 \\ u^3 \\ u^4 \\ u^5 \\ u^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0,1622439 & -0,0022908 & +0,0000271 & -0,0000005 \\ + & 424375 & - & 10373 & + & 187 & 0 \\ + & 72010 & - & 2995 & + & 76 & 0 \\ + & 11238 & - & 696 & + & 22 & 0 \\ + & 1644 & - & 143 & + & 6 & 0 \\ + & 231 & - & 28 & . & . & 0 \\ + & 31 & - & 6 & . & . & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ v^3 \\ v^5 \\ v^7 \end{pmatrix}$$

Pochodne (17) i (18) jako współczynniki wzorów (15) są funkcjami współrzędnych biegunowych s, a . Rugując²⁾ z nich s, a za pomocą wzorów (16) otrzymamy ostatecznie (19):
współczynniki dla szerokości

$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +1,00000 & -0,01059 & -0,00002 \\ - & 95 & + & 1 & 0 \\ + & 2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l^2 \\ l^4 \end{pmatrix}$$

$$b_1 = 0$$

$$c_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,89772 & +0,00317 \\ + & 85 & 0 \\ - & 2 & 0 \\ - & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ l^3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,10611 & +0,00004 \\ +2,00000 & - & 526 & + & 2 \\ - & 95 & 0 & 0 & \\ + & 3 & - & 1 & 0 \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ l^2 \\ l^4 \end{pmatrix}$$

współczynniki dla długości

(19)

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +0,18569 & -0,00066 \\ + & 3705 & - & 13 \\ + & 460 & - & 2 \\ + & 69 & 0 \\ + & 10 & 0 \\ + & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ l^3 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = 1$$

$$c_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \\ f^6 \\ f^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -0,08335 & +0,00015 \\ +1,57094 & - & 1663 & + & 3 \\ +0,19521 & - & 206 & 0 & \\ + & 2916 & - & 31 & 0 \\ + & 423 & - & 4 & 0 \\ + & 62 & - & 1 & 0 \\ + & 10 & 0 & 0 & \\ + & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l^2 \\ l^4 \end{pmatrix}$$

$$d_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \\ f^6 \\ f^7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} +3,00000 & -0,00657 \\ +0,37137 & - & 131 \\ + & 6490 & - & 21 \\ + & 922 & - & 3 \\ + & 137 & 0 \\ + & 20 & 0 \\ + & 3 & 0 \\ + & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} l \\ l^3 \end{pmatrix}$$

²⁾ Rugowanie s, a zwykłymi metodami jest tak skomplikowane, że praktycznie niewykonalne. Można jedynie pierwsze wyrazy otrzymać łatwo zwykłą drogą. Zastosowano tu algebrę jądrową, przez co łatwo wyrugowano s, a .

gdzie

$$f = \frac{\varphi'' - \varphi_0''}{20\,000''} \quad \varphi_0 = 52^\circ$$

$$l = \frac{\lambda'' - \lambda_0''}{30\,000''} \quad \lambda_0 \text{ jest dowolną stałą,}$$

φ'' i λ'' są współrzędnymi transformowanego punktu (w sekundach).

Wzory transformacyjne (15) z liczbowymi współczynnikami (19) przyjmą postać ostateczną

$$D\varphi = a_1 \Delta\varphi + b_1 \Delta\lambda + c_1 \Delta A + d_1 H \quad (20)$$

$$D\lambda = a_2 \Delta\varphi + b_2 \Delta\lambda + c_2 \Delta A + d_2 H,$$

gdzie $\Delta A = \frac{\Delta\alpha}{10}$, $H = 10\,000 h$, $D\varphi$ i $D\lambda$ są poprawkami współrzędnych geograficznych φ' i λ' punktu transformowanego; $\Delta\varphi$ i $\Delta\lambda$ są przesunięciami bieguna $P(\varphi, \lambda)$, $\Delta\alpha$ jest skrętem układu oraz h jest zmianą skali układu.

Przy dowiązywaniu ³⁾ sieci triangulacyjnej T do sieci T_1 dla każdego punktu o współrzędnych geograficznych φ' , λ' w układzie T oraz φ'_1 , λ'_1 w układzie T_1 powinno być

$$\varphi'_1 + v = \varphi + D\varphi \quad (21)$$

$$\lambda'_1 + w = \lambda + D\lambda,$$

skąd

$$v = D\varphi + (\varphi' + \varphi'_1) \quad (22)$$

$$w = D\lambda + (\lambda' - \lambda'_1).$$

Błędy pozorne v i w w równaniach (22), które układamy dla każdego punktu należącego jednocześnie do układu T i T_1 , dodajemy do współrzędnych φ'_1 , λ'_1 , aby nie zmieniać znaków przy $D\varphi$ i $D\lambda$.

Przy większej liczbie punktów niż 2 równania (22) prowadzą do wyrównania. Przy wyrównaniu należy równania (22) pomnożyć odpowiednio przez $\frac{M'}{N \cos \varphi}$, $\frac{N' \cos \varphi'}{N \cos \varphi}$ lub $\frac{M'}{M}$, $\frac{N' \cos \varphi'}{M}$, aby poprawki v i w sprowadzić

³⁾ Szczegółowo i w sposób ogólniejszy temat ten omawiam w pracy *Translation des résultats des triangulations de la Pologne sur l'ellipsoïde international et leur réunion en un système uniforme sur la base des points communs*, „Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres“, Série A: Sciences Mathématiques, Supplément, Kraków 1950, str. 116—118.

do wspólnej jednostki liniowej. M' , N' są głównymi promieniami krzywizny w punkcie transformowanym, M , N — w biegunie P . Równania (22) otrzymają postać:

$$\begin{aligned} V &= v \frac{M'}{N \cos \varphi} \\ W &= w \frac{N' \cos \varphi'}{N \cos \varphi} \end{aligned} \quad (22a)$$

względnie

$$\begin{aligned} V &= v \frac{M'}{M} \\ W &= w \frac{N' \cos \varphi'}{M} \end{aligned} \quad (22b)$$

Wyrównanie przeprowadzamy przy warunku

$$[VV] + [WW] = \text{minimum.}$$

Współczynniki $\frac{M'}{N \cos \varphi}$, $\frac{N' \cos \varphi'}{N \cos \varphi}$, $\frac{M'}{M}$, $\frac{N' \cos \varphi'}{M}$ są następujące:

$$\frac{M'}{N \cos \varphi} = \begin{Bmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1,62014 \\ + 83 \\ - 1 \end{Bmatrix} \quad \frac{N' \cos \varphi'}{N \cos \varphi} = \begin{Bmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1,00000 \\ - 6685 \\ - 138 \\ + 3 \end{Bmatrix}$$

$$\frac{M'}{M} = \begin{Bmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +1,00000 \\ + 51 \\ - 1 \end{Bmatrix} \quad \frac{N' \cos \varphi'}{M} = \begin{Bmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} +0,61723 \\ - 4126 \\ - 85 \\ + 2 \end{Bmatrix}$$

gdzie

$$f = \frac{\varphi'' - \varphi_0''}{20\,000''} \quad \varphi_0 = 52^\circ$$

IV. Przykład liczbowy

Jako przykład zastosowania powyżej przedstawionej metody dowiążemy sieć „zachodnio-pruska“, wykonaną w latach 1899—1903 i obliczoną w układzie niemieckim z punktem wyjściowym Helmertturm do układu

polskiego z punktem wyjściowym Borowa Góra. Dane dotyczące tych układów czerpiemy z następujących źródeł:

Die Preussische Landesvermessung. Hauptdreiecke. Neue Folge, Berlin 1925.

Travaux de l'Association internationale de Géodésie, t. 13. Rapports nationaux, Paris 1938. Zawiera zeszyt sprawozdawczy prac geodezyjnych wykonanych w Polsce w latach 1933—1935, Warszawa 1936.

Dane dotyczące transformacji tej sieci, dokonanej metodą Helmerta i Hristowa, dające możliwość porównania poniżej otrzymanych wyników, zawierają następujące prace:

S. Hausbrandt, *Transformacja współrzędnych geograficznych przy pomocy interpolacji*, Warszawa 1947 (odbitka światłoczuła).

Cz. Kamela, *Geodezja*, cz. IV, Warszawa 1952, str. 1476/77.

Układy Borowa Góra i Helmerturm zawierają następujące punkty wspólne:

Tabela I

Nr	Nazwa punktu	Układ Borowa Góra Układ Helmerturm	
		φ	λ
1	Chorańiewka	52°56'25".4718	18°30'41".8437
		28,1383	42,8703
2	Chełmża	53 11 13,5915	18 36 58,1844
		16,2430	59,2323
3	Golub	53 07 11,2463	19 02 01,0343
		13,8928	02,0911
4	Łopatki	53 20 52,4849	19 00 14,7632
		55,1250	15,8275
5	Świerczyny	53 13 28,5494	19 28 42,1851
		31,1841	43,2615
6	Kurzędnik	53 23 19,0070	19 35 51,9611
		21,6340	53,0441
7	Prioma	53 15 16,8986	20 03 12,4844
		19,5248	13,5763

Pierwsza para współrzędnych odnosi się do układu polskiego, druga do układu niemieckiego.

Dla powyższych punktów wspólnych obliczamy współczynniki z wzorów (19) przyjmując $\lambda_0 = 19^0$ i układamy je w tabeli odpowiadającej wzorom (22):

Tabela II

Numer punktu	a	b	c	d	$\varphi' - \varphi'_1$ lub $\lambda' - \lambda'_1$	Suma
1	+0,9998		+0,0526	+0,3384	+2,6665	+4,0573
	-0,0112	+1,0000	+0,2716	-0,1795	+1,0266	+2,1075
2	+0,9998		+0,0413	+0,4274	+2,6515	+4,1200
	-0,0089	+1,0000	+0,3449	-0,1419	+1,0479	+2,2420
3	+0,9998		-0,0036	+0,4033	+2,6465	+4,0460
	+0,0008	+1,0000	+0,3250	+0,0125	+1,0568	+2,3951
4	+0,9998		-0,0005	+0,4854	+2,6401	+4,1248
	+0,0001	+1,0000	+0,3933	+0,0016	+1,0643	+2,4593
5	+0,9998		-0,0516	+0,4407	+2,6347	+4,0236
	+0,0112	+1,0000	+0,3560	+0,1772	+1,0764	+2,6208
6	+0,9997		-0,0644	+0,4996	+2,6270	+4,0619
	+0,0140	+1,0000	+0,4051	+0,2223	+1,0830	+2,7244
7	+0,9996		-0,1135	+0,4502	+2,6262	+3,9625
	+0,0246	+1,0000	+0,3639	+0,3904	+1,0919	+2,8708

Następnie obliczamy współczynniki wchodzące do wzorów (22b) zestawione w tabeli III:

Tabela III

Numer punktu	A	B	C	D	ω	Suma
1	+0,9999		+0,0526	+0,3384	+2,6667	+4,0576
	-0,0068	+0,6102	+0,1657	-0,1095	+0,6265	+1,2861
2	+0,9999		+0,0413	+0,4274	+2,6518	+4,1204
	-0,0054	+0,6084	+0,2098	-0,0863	+0,6375	+1,3640
3	+0,9999		-0,0036	+0,4033	+2,6468	+4,0464
	+0,0005	+0,6089	+0,1979	+0,0076	+0,6435	+1,4584
4	+0,9999		-0,0005	+0,4854	+2,6404	+4,1252
	+0,0001	+0,6072	+0,2388	+0,0010	+0,6462	+1,4933
5	+0,9999		-0,0516	+0,4407	+2,6350	+4,0240
	+0,0068	+0,6081	+0,2165	+0,1078	+0,6545	+1,5937
6	+0,9998		-0,0644	+0,4996	+2,6273	+4,0623
	+0,0085	+0,6069	+0,2458	+0,1349	+0,6572	+1,6533
7	+0,9997		-0,1135	+0,4502	+2,6265	+3,9629
	+0,0150	+0,6079	+0,2212	+0,2373	+0,6637	+1,7451

gdzie A, B, C, D, ω są równe współczynnikom $a, b, c, d, \varphi' - \varphi'_1$ lub $\lambda' - \lambda'_1$ pomnożonym przez $\frac{M'}{M}$ wzgl. $\frac{N' \cos \varphi'}{M}$. Z tabeli tej otrzymujemy następujące równania normalne:

$$\begin{aligned}
 &+6,998419 \Delta \varphi + 0,011343 \Delta \lambda - 0,134914 \Delta A + 3,051209 H + 18,504538 = 0 \\
 &+0,011343 \Delta \varphi + 2,589601 \Delta \lambda + 0,909550 \Delta A + 0,177592 H + 2,754664 = 0 \\
 &-0,134914 \Delta \varphi + 0,909550 \Delta \lambda + 0,348060 \Delta A + 0,002226 H + 0,604936 = 0 \\
 &+3,051209 \Delta \varphi + 0,177592 \Delta \lambda + 0,002226 \Delta A + 1,447573 H + 8,239815 = 0
 \end{aligned}$$

z których otrzymujemy niewiadome

$$\begin{aligned}
 \Delta \varphi &= -2,68545 \\
 \Delta \lambda &= -0,99745 \\
 \Delta A &= -0,17299 \\
 H &= +0,09090
 \end{aligned} \tag{23}$$

oraz

$$[VV] + [WW] = 0,000038.$$

Średni błąd współrzędnej obliczony według wzoru

$$m = \frac{M}{\rho''} \sqrt{\frac{[VV] + [WW]}{4(n-2)}}$$

(gdzie n jest liczbą punktów wspólnych) ma wartość:

$$m = \pm 0,042 \text{ mtr.}$$

Wstawiając znalezione poprawki (23) elementów orientacji do wzorów (20) z liczbowymi współczynnikami (19) otrzymamy szukane wzory transformacyjne:

$$\begin{aligned}
 D\varphi &= \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2,68545 & +0,15530 & +0,01878 & -0,00055 & -0,00005 \\ +0,18434 & - & 15 & - & 51 & 0 & 0 \\ - & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ l^2 \\ l^3 \\ l^4 \end{pmatrix} \\
 D\lambda &= \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \\ f^4 \\ f^5 \\ f^6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -0,99745 & -0,22595 & +0,01442 & +0,00116 & -0,00003 \\ - & 27176 & - & 6574 & + & 288 & + & 23 & 0 \\ - & 3377 & - & 645 & + & 36 & + & 2 & 0 \\ - & 504 & - & 101 & + & 5 & + & 1 & 0 \\ - & 73 & - & 15 & + & 1 & 0 & 0 & 0 \\ - & 11 & - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ l^2 \\ l^3 \\ l^4 \end{pmatrix}
 \end{aligned} \tag{24}$$

gdzie

$$f = \frac{\varphi'' - \varphi_0''}{20\,000''} \quad \varphi_0 = 52^0$$

$$l = \frac{\lambda'' - \lambda_0''}{30\,000''} \quad \lambda_0 = 19^0$$

Wzorum (24) nadamy postać wygodniejszą do rachunków, przenosząc punkt początkowy: $\varphi_0 = 52^0$, $\lambda_0 = 19^0$ do punktu: $\varphi_0 = 54^0$, $\lambda_0 = 19^0$ i zmniejszając zakres zmienności f i l pięciokrotnie, tzn. szeregi (24) rozwijamy na szereg Taylora w punkcie $f_0 = 0,36$, $l_0 = 0$ dla przyrostów $\Delta f = \frac{1}{5}f$, $\Delta l = \frac{1}{5}l$.

Otrzymamy w wyniku następujący wzór ostateczny, przy czym piszemy f i l zamiast Δf i Δl :

$$D\varphi = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2,61911 & +0,03105 & +0,00074 \\ + & 3684 & - & 1 & 0 \\ - & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ l^2 \end{pmatrix} \quad (25)$$

$$D\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ f \\ f^2 \\ f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1,09991 & -0,05010 & +0,00062 & +0,00001 \\ - & 5963 & - & 283 & + & 3 & 0 \\ - & 159 & - & 6 & 0 & 0 & 0 \\ - & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ l \\ l^2 \\ l^3 \end{pmatrix}$$

gdzie

$$f = \frac{\varphi'' - \varphi_0''}{4\,000''} \quad \varphi_0 = 54^0$$

$$l = \frac{\lambda'' - \lambda_0''}{6\,000''} \quad \lambda_0 = 19^0$$

Transformując przy pomocy wzorów (25) dane punkty w tabeli I otrzymujemy następujące współrzędne punktów przetransformowanych z układu niemieckiego do układu polskiego:

Tabela IV

Nr	φ	λ
1	52°56'25,4751	18°30'41,8398
2	53 11 13, 5899	18 36 58, 1862
3	53 07 11, 2452	19 02 01, 0364
4	53 20 52, 4844	19 00 14, 7619
5	53 13 28, 5483	19 28 42, 1886
6	53 23 19, 0059	19 35 51, 9591
7	53 15 16, 9011	20 03 12, 4851

Porównując otrzymane wyniki z wynikami podanymi przez dwie wyżej wymienione prace, można stwierdzić następujące fakty. Podane na str. 1477 „Geodezji“ prof. Cz. Kameli przesunięcie punktu głównego (jest to nasz punkt nr 5):

$$d\varphi = -2''63580 \quad d\lambda = -1''07330$$

dosyć dobrze zgadza się z przesunięciem otrzymanym przez powyższe wyrównanie (poprawka współrzędnych dla punktu nr 5)

$$D\varphi = -2''63582 \quad D\lambda = -1''07287.$$

Dane zawarte w pracy prof. S. Hausbrandta różnią się natomiast od naszych. Różnice w szerokości geograficznej wynoszą kilka (do 10) jednostek na czwartym miejscu po przecinku w sekundach, natomiast w długości geograficznej można zauważyć systematyczną różnicę od 15 do 25 jednostek na czwartym miejscu po przecinku (w sekundach). Różnice te pochodzą prawdopodobnie od różnych danych wyjściowych.

Podana przez nas metoda transformacji współrzędnych geograficznych prowadzi zasadniczo do tych samych wyników co i metody Helmerta i Hristowa, a ma następujące zalety:

1. Współczynniki transformacyjne obliczamy z gotowych wzorów krawkowanowych bez posilkowania się tablicami. Wzory Helmerta i Hristowa wymagają natomiast wyszukiwania wartości funkcji w tablicach i podstawiania ich do wzorów.

2. Wzory nasze są również wygodne do transformacji dużych układów o promieniu 500 km, a więc nawet dla układów pokrywających całą Polskę.

3. Wzory nasze pozwalają uzyskać wynik z dokładnością do $0''00001$ i uwzględniają wszystkie wyrazy wyższych rzędów, które mają znaczenie. Wzory Hristowa pomijają pewne wyrazy zawierające wyższe potęgi mimośrodu.

РЕЗЮМЕ

В статье рассматривается вопрос перевода географических координат эллипсоида вращения на тот же эллипсоид. Из искажений видно, что эта проекция почти конформная и на практике можно считать числовое значение этого искажения постоянным для района радиусом около 500 км. Числовые коэффициенты вычисленные по новому методу для эллипсоида Бесселя позволяют использовать указанные здесь формулы для общей территории Польши при любых размерах триангуляционных сетей.

RÉSUMÉ

Dans cet article, je considère la transformation des coordonnées géographiques comme une projection d'ellipsoïde de révolution sur la même ellipsoïde. Les déformations nous montrent que la projection est „quasi“ conforme et on peut considérer la valeur de cette déformation comme pratiquement constante dans un rayon jusqu'à plus de 500 km. Les coefficients calculés d'après la nouvelle méthode pour l'ellipsoïde de Bessel, nous permettent d'appliquer les formules mentionnées au territoire de la Pologne dans les grands réseaux de triangulation.

Tadeusz Kluss

Zamiana współrzędnych katastralnych na obszarze Małopolski na współrzędne Gaussa-Krügera w systemie Borowej Góry

O tym, czy na pewnym obszarze należy wykonać nowe pomiary, czy też włączyć drogą transformacji istniejące sieci do sieci ogólnopństwowej, decydują:

1. ilość punktów triangulacyjnych z zachowaną stabilizacją,
2. dokładność sieci,
3. zagęszczenie sieci punktów triangulacyjnych na badanym obszarze,
4. wartość planów szczegółowych opartych na istniejącej triangulacji.

Stabilizacja małopolskiej sieci triangulacyjnej zachowana jest w około 50—70%.

Na obszarze tym istnieją dwojakiemu rodzaju współrzędne:

- a) punkty I rzędu o współrzędnych geograficznych φ i λ z punktem wyjścia Hermanskogel,
- b) tzw. współrzędne katastralne (płaskie).

Początki układów współrzędnych katastralnych znajdują się w punktach triangulacyjnych: kopiec Unii we Lwowie oraz kościół św. Stefana w Wiedniu.

Współrzędne geograficzne i katastralne zebrane są według arkuszy map 1 : 100 000 w katalogu punktów Wiadomości Służby Geograficznej nr 8, Warszawa 1932 r. W nagłówkach wpisano tam — zapewne omyłkowo — „współrzędne soldnerowskie“ zamiast „katastralne“¹⁾.

Dokładność obu triangulacji (punktów I rz. i punktów katastralnych) wynosi odpowiednio (w przybliżeniu) 1 : 60 000, 1 : 20 000. O dokładności tej świadczą liczne pomiary wykonane na tym terenie. Obszar triangulacyjny wynosi około 50 arkuszy mapy 1 : 100 000 i zawiera około 1500 punktów triangulacyjnych.

Cały ten teren posiada plany katastralne w skali 1 : 2880 (względnie 1 : 5760, teren górzysty) oraz dla miast i terenów przemysłowych w skali 1 : 1440, 1 : 1000, 1 : 2000, 1 : 2500.

¹⁾ Fr. Biernacki, w artykule pt. „W sprawie współrzędnych katastralnych w Małopolsce“, Wiadomości Służby Geograficznej, zeszyt 4, 1934 r., str. 548, sprostował po raz pierwszy tę omyłkę.

W zasadzie z planów katastralnych korzysta się w sposób graficzny, ponieważ nie ma w terenie punktów poligonowych oznaczonych trwałymi znakami. Pomiary, wykonywane metodą poligonową lub taśmową, nawiązuje się do punktów terenu zidentyfikowanych z mapą, na podstawie porównania graficznych miar wziętych z mapy z odpowiednimi miarami wziętymi z terenu. Szczegół ten określa w przybliżeniu dokładność, z jaką powinna być wykonana transformacja. Tylko nowoczesne pomiary oparte o katastralne współrzędne punktów triangulacyjnych mają naniesioną na mapy sieć poligonową zastabilizowaną w terenie. Transformacja wykonana dla tych pomiarów powinna mieć dokładność odpowiadającą dokładności nowych pomiarów.

Podane wyżej przybliżone dane pozwalają stwierdzić, że:

1. stabilizacja punktów triangulacyjnych jest poważnie naruszona,
2. dokładność nadająca się na ogół do celów praktycznych niezupełnie odpowiada nowoczesnym pomiarom,
3. zagęszczenie punktów wymaga uzupełnienia.

Braki powyższe są częściowo zrekompensowane planami katastralnymi, które należy podzielić na dwie grupy:

- a) plany katastralne bez stabilizacji punktów poligonowych,
- b) plany katastralne o istniejącej stabilizacji punktów poligonowych (nowe pomiary oparte na nowoczesnej triangulacji w nawiązaniu do punktów triangulacji katastralnej).

Plany a) i b) odpowiednio użyte (omówienie szczegółów nie należy do niniejszej pracy) mogą częściowo uzupełnić braki wymienione w punkcie 1) i 3).

Tak więc na pytanie postawione na początku można odpowiedzieć, że materiał posiadany przedstawia dużą wartość i należy go wykorzystać, tj. włączyć sieci istniejące i plany katastralne do sieci ogólnopństwowej drogą transformacji. Nowe pomiary triangulacyjne należałoby ograniczyć do prac mających na celu:

1. dostarczenie punktów łącznych koniecznych do transformacji,
2. uzupełnienie zagęszczenia punktów triangulacyjnych tam, gdzie jest ono niewystarczające lub gdzie stabilizacja jest zniszczona.

Zagadnienie postawione wyżej może być rozwiązane za kilka lat, po przeprowadzeniu pomiarów i obliczeń. Natomiast dla bieżących robót topograficznych wyłania się potrzeba pilnego wykorzystania istniejących w terenie punktów triangulacji katastralnej, po przeliczeniu ich na współrzędne w obowiązującym w Polsce układzie państwowym. W pracy niniejszej przedstawiono wyniki transformacji dla wymienionego celu.

Ponieważ opracowanie transformacji bez bezpośrednich punktów łącznych z systemem Borowej Góry wymagało zbadania obszerniejszego ma-

teriału, wydaje się, że wykonana transformacja z kolei może służyć jako materiał do postawionego na wstępie zagadnienia.

Transformację sieci triangulacyjnych wykonamy najracjonalniej na podstawie odpowiedniej ilości punktów łącznych, tj. punktów identycznych w systemie jednolitym i obcym. U nas: układ Gaussa-Krügera (system Borowej Góry) i oba układy katastralne (lwowski i wiedeński).

Jeżeli brak punktów łącznych, to należy wykonać uzupełniające pomiary triangulacyjne w celu uzyskania nawiązania.

Po transformacji punkty łączne nie powinny zawierać odchyień. Jeżeli metoda transformacji wykazuje odchylenie, to należy je usunąć.

Przeważnie wzory transformacyjne powinno się stosować tylko do obszarów położonych wewnątrz punktów łącznych, ponieważ wzory te mają najczęściej charakter interpolacyjny. W praktyce nie należy pojmować transformacji jako przekształcenia czysto matematycznego, lecz jako matematykę stosowaną, a to dlatego, że sieci obce oparte są na innych podstawach niż sieć jednolita. Różne mogą być bowiem: powierzchnia odniesienia, skala, orientacja, odwzorowanie oraz wyrównanie. Poza tym występuje tu często przybliżona identyczność punktów łącznych (identyczność ta jest zwykle trudna do ustalenia) oraz przybliżona znajomość wzorów odwzorowawczych. Właśnie te dwa ostatnie czynniki występują w małopolskiej sieci katastralnej, ponieważ identyczność dostępnych obecnie punktów jest wątpliwa oraz odwzorowanie, w jakim obliczono współrzędne katastralne, jest nieznan²⁾.

Sieć triangulacji w Małopolsce nie posiada odwzorowania w znaczeniu matematycznym. Powodem tego jest osobliwa metoda redukcji pomierzonych kątów w celu użycia ich do dalszych obliczeń przy zastosowaniu wzorów trygonometrii płaskiej. Odwzorowanie to trafnie określił w 1934 r. dr Fr. Biernacki w pracy swej pt. „W sprawie współrzędnych katastralnych w Małopolsce“, pisząc: „... są one (współrzędne katastralne) jako płaskie, jakimś odwzorowaniem, lecz odwzorowanie to nie da się zdefiniować żadnymi regularnymi prawami rzutowymi w ścisłej formie“. W końcu analizy Fr. Biernacki dochodzi w cytowanej pracy do wniosku, że współrzędne katastralne są pod względem wielkości redukcji odwzorowawczych czymś lepszym od płaskich współrzędnych soldnerowskich.

Nieznajomość odwzorowania nie pozwala ustalić ogólnych wzorów transformacyjnych ułatwiających przejście z jednego rodzaju współrzędnych na współrzędne rodzaju drugiego. W tych przypadkach przekształcenia dokonujemy na podstawie punktów łącznych.

²⁾ Inż. Wł. Murzewski: „Rozwój triangulacji na południu Polski”. Wiadomości Służby Geograficznej nr 2, 1936. Warszawa.

Triangulacyjna sieć katastralna nie posiada ani jednego punktu łączącego ją z siecią triangulacyjną w systemie Borowej Góry. Z tej przyczyny do transformacji użyto współrzędnych pośrednich w systemie Rauenberg, Helmertturm (Einheitssystem), oraz w systemie Elipsoidy Wyrównującej (system rosyjski). Współrzędne wymienionych systemów, jako łączne ze współrzędnymi w systemie Borowej Góry, posłużyły do ułożenia następujących związków:

1. pomiędzy współrzędnymi geograficznymi φ, λ w systemie Borowej Góry i współrzędnymi geograficznymi φ', λ' w systemie Hermanskogel,
2. pomiędzy współrzędnymi Gaussa-Krügera x, y i współrzędnymi soldnerowskimi x', y' ,
3. pomiędzy współrzędnymi soldnerowskimi x', y' i współrzędnymi katastralnymi x'', y'' ,
4. pomiędzy współrzędnymi Gaussa-Krügera x, y w systemie Borowej Góry i współrzędnymi x'', y'' w systemie Hermanskogel.

Użycie wymienionych związków do celów transformacji zostanie wyjaśnione po ich wyprowadzeniu.

Bezpośrednie wyprowadzenie relacji pomiędzy współrzędnymi geograficznymi φ, λ w systemie Borowej Góry i współrzędnymi φ', λ' w systemie Hermanskogel nie jest możliwe z tej przyczyny, że nie posiadamy ani jednego punktu łączącego oba systemy. Jednakże związek ten uzyskamy pośrednio poprzez obce systemy: Rauenberg, Helmertturm, Elipsoida Wyrównująca. Systemy te posiadają punkty łączne z systemem Hermanskogel z jednej strony i z systemem Borowej Góry — z drugiej.

Po ułożeniu wzorów transformacyjnych pomiędzy systemami:

Rauenberg — Borowa Góra,
Helmertturm — Borowa Góra.
Elipsoida Wyrównująca — Borowa Góra

uzyskamy punkty łączne pomiędzy systemami Hermanskogel i Borowej Góry, co nam pozwoli na ułożenie wzorów transformacyjnych pomiędzy systemem Borowej Góry i systemem Hermanskogel. Dla ułożenia wzorów transformacyjnych posługiwałem się wzorami szeregowymi Hristova (Zeitsch. f. Verm. 1942 r.) następującego kształtu:

$$\begin{aligned} d\varphi = & d\varphi_0 + [-3t_0(\eta_0^2 - \eta_0^4)d\varphi_0 + dp]\Delta\varphi + \\ & + [-\cos\varphi_0(1 + \eta_0^2)dA_0]l + \\ & + \left[-\frac{3}{2}(\eta_0^2 - t_0^2\eta_0^2)d\varphi_0 - \frac{3}{2}t_0\eta_0^2dp \right] \Delta\varphi^2 + \\ & + [3\cos\varphi_0t_0\eta_0^2dA_0]\Delta\varphi \cdot l + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left[-\frac{1}{2} \cos^2 \varphi_0 (1+t_0^2+\eta_0^2) d\varphi_0 - \frac{1}{2} \cdot \cos^2 \varphi_0 t_0 (1+\eta_0^2) dp \right] l^2 + \\
& + \left[-\frac{1}{3} \cdot \cos^2 \varphi_0 dp \right] \Delta\varphi \cdot l^2 + \left[\frac{1}{6} \cdot \cos^3 \varphi_0 (1+t_0^2) dA_0 \right] l^3, \\
d\lambda = d\lambda_0 & + \left[\frac{1}{\cos \varphi_0} (1-\eta_0^2+\eta_0^4) dA_0 \right] \Delta\varphi + \\
& + \left[t_0 (1-\eta_0^2+\eta_0^4) d\varphi_0 + dp \right] l + \\
& + \left[\frac{1}{\cos \varphi_0} t_0 (1-\frac{1}{2}\eta_0^2) dA_0 \right] \Delta\varphi^2 + \\
& + [(1+t_0^2-\eta_0^2-2t_0^2\eta_0^2) d\varphi_0 + t_0 (1-\eta_0^2) dp] \Delta\varphi \cdot l + \\
& + \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi_0 \cdot t_0 dA_0 \right] l^2 + \left[\frac{1}{3 \cos \varphi_0} (1+3t_0^2) dA_0 \right] \Delta\varphi^3 + \\
& + \left[t_0(1+t_0^2) d\varphi_0 + \frac{1}{3} (2+3t_0^2) dp \right] \Delta\varphi^2 \cdot l + \\
& + \left[-\frac{1}{2} \cos \varphi_0 (1+t_0^2) dA_0 \right] \Delta\varphi \cdot l^2 + \\
& + \left[-\frac{1}{6} \cos^2 \varphi_0 t_0 (1+t_0^2) d\varphi_0 - \frac{1}{6} \cos^2 \varphi_0 t_0^2 dp \right] l^3.
\end{aligned}$$

Znaczenie użytych we wzorach symboli jest następujące:

$\Delta\varphi = \varphi - \varphi_0$, $l = \lambda - \lambda_0$	różnice współrzędnych geograficznych pomiędzy punktem bieżącym i punktem głównym,
$d\varphi_0$, $d\lambda_0$	przesunięcie w punkcie głównym,
dp	zmiana skali,
dA_0	skręt.

Pozostałe wyrazy: $t_0 = \operatorname{tg} \varphi_0$, $\eta_0 = e' \cos \varphi_0$. Wartości te oraz $\cos \varphi_0$ obliczamy dla współrzędnych punktu głównego φ_0 , λ_0 . W przypadku, gdy mamy do czynienia z różnymi elipsoidami odniesienia, dochodzą jeszcze wyrazy zawierające da i da (zmiana osi wielkiej i spłaszczenia).

Wzory w tej postaci nie nadają się dla naszego zagadnienia, mamy bowiem rozwiązać zadanie następujące: mając szereg punktów łącznych dwóch sieci triangulacyjnych, należy tak dostosować sieć jednego systemu do sieci systemu drugiego, tj. tak zmienić skalę, przesunąć sieć i skrócić około punktu głównego, by suma kwadratów poprawek do odchyłek po-

między współrzędnymi obu systemów była minimum³⁾. W naszym zagadnieniu niewiadomymi są więc: $d\varphi_0$, $d\lambda_0$, dp i dA_0 (oraz ewentualnie da i $d\alpha$). Porządkując podane wzory według tych argumentów otrzymamy:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= [l + a_1 \Delta\varphi + a_2 \Delta\varphi^2 + a_3 l^2] d\varphi_0 + \\ &+ [\Delta\varphi + b_1 \Delta\varphi^2 + b_2 l^2 + b_3 \Delta\varphi \cdot l] dp + \\ &+ [c_1 l + c_2 \Delta\varphi l + c_3 l^3] dA_0, \\ d\lambda &= d\lambda_0 + [a_1 l + a_2 \Delta\varphi \cdot l + a_3 \Delta\varphi^2 \cdot l + a_4 l^3] d\varphi_0 + \\ &+ [l + b_1 \Delta\varphi l + b_2 \Delta\varphi^2 l + b_3 l^3] dp + \\ &+ [c_1 \Delta\varphi + c_2 \Delta\varphi^2 + c_3 l^2 + c_4 \Delta\varphi^3 + c_5 \Delta\varphi \cdot l^2] dA_0, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

gdzie a, b, c, \dots są współczynnikami otrzymanymi z uporządkowania.

Ogólnie, wzory (1) i (2) można napisać w postaci:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= d\varphi_0 + A\Delta\varphi + B l + C\Delta\varphi^2 + D\Delta\varphi \cdot l + E l^2 + F l^3, \\ d\lambda &= d\lambda_0 + A_1 \Delta\varphi + B_1 l + C_1 \Delta\varphi^2 + D_1 \Delta\varphi \cdot l + E_1 l^2 + F_1 l^3, \end{aligned} \right\} \quad (1a)$$

oraz:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= A' d\varphi_0 + B' dp + C' dA_0, \\ d\lambda &= d\lambda_0 + A'_1 d\varphi_0 + B'_1 dp + C'_1 dA_0. \end{aligned} \right\} \quad (2a)$$

Wzory (2a) służą do ułożenia równań błędów na podstawie punktów łącznych. Wyrazami wolnymi w tych równaniach będą różnice współrzędnych punktów łącznych w obu systemach. Po obliczeniu niewiadomych z wzorów (2a) możemy przystąpić do obliczenia zmian współrzędnych $d\varphi$, $d\lambda$ przy przejściu z jednego systemu na drugi. Zmiany te obliczać będziemy wzorami (1a), ponieważ współczynniki w tych wzorach są nam już znane (są one funkcją obliczonych poprzednio $d\varphi_0$, $d\lambda_0$, dp , dA_0 oraz współrzędnych punktu głównego).

W niektórych przypadkach posługiwano się również wzorami interpolacyjnymi, układanymi dla mniejszych obszarów, położonych w pobliżu

³⁾ Zagadnieniem tym zajmował się u nas dr Fr. Biernacki, który podał podobne wzory różniczkowe w pracy pt. „Sprawdzenie współrzędnych kilku odrębnych triangulacji wykonanych na różnych elipsoidach odniesienia z różnymi punktami wyjściowymi do jednej elipsoidy odniesienia i jednego punktu wyjścia za pośrednictwem punktów łącznych”. Wiadomości Służby Geograficznej, zeszyt 2, 1934, s. 165—177 oraz dr S. Milbert w pracy pt. „Translation des résultats des triangulations de la Pologne sur l'ellipsoïde international et leur réunion en un système uniforme sur la base des points communs”. Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences et des Lettres. Kraków 1950. Série A: Sciences Mathématiques Supplément.

granic Małopolski. Do ułożenia tych wzorów użyto równań transformacyjnych metodą afiniczną. Ponieważ użyto więcej punktów łącznych niż trzy, z tej przyczyny niewiadome otrzymano przy pomocy wyrównania. Potrzeba ta zachodziła w przypadkach konieczności zastąpienia błędnych punktów łącznych innymi punktami, co okazywało się podczas badania dostępnego materiału oraz z powodu większej ich ilości na małym obszarze; odpadało bowiem wtedy żmudne obliczanie współczynników wzorów (1) i (2). Większą ilość punktów łącznych na niektórych obszarach tłumaczy się częściowymi pracami triangulacji niemieckich z czasu ostatniej wojny, ogólną transformacją systemów i układów obcych na system polski oraz fragmentami wyrównań sieci triangulacyjnych przeprowadzanymi w okresie powojennym (np. wyrównanie sieci łączącej systemy Rauenberg i Borowa Góra).

1. *Związki pomiędzy współzrędnymi geograficznymi φ, λ w systemie Borowej Góry i współzrędnymi geograficznymi φ', λ' w systemie Hermanskogel*

Wracając do naszego zagadnienia układamy przy pomocy podanych równań następujące wzory transformacyjne:

a) Wzory łączące system Helmertturm z systemem Borowej Góry. Wzory te ułożono na podstawie 8 punktów łącznych, znajdujących się na wschodzie opracowywanego obszaru (punkty łączne: Zubowice, Grabowa, Brany, Leszniów, Budy, Zadubrowce, Strusów, Zębowa Góra).

Kształt wzorów jest następujący:

$$\begin{aligned} d\varphi &= -36,56 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\varphi + 0,94 \cdot 10^{-6} \cdot l + 0,72 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 2'', 385, \\ d\lambda &= -2,28 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\varphi - 50,50 \cdot 10^{-6} \cdot l - 0,03 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 0,13 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi^2 - \\ &\quad - 3,48 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi \cdot l - 2'', 138. \end{aligned} \quad (3)$$

Współzrędnę punktu głównego:

$$\varphi = 50^{\circ}06'06'',7214, \quad \lambda = 24^{\circ}45'29'',2686.$$

b) Wzory interpolacyjne pomiędzy systemem Rauenberg i systemem Borowej Góry, ułożone na podstawie 10 punktów łącznych (Bobrownik, Ostropa, Ciężkowice, Łosień, Brzezinka, Zagórze, Polanka Wielka, Sierakowice, Góra św. Anny, Dębowa Góra):

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= +0,391919 \cdot 10^{-4} \cdot \varphi - 0,329245 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda - 2'', 202, \\ d\lambda &= -1,160606 \cdot 10^{-4} \cdot \varphi + 0,599518 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda + 0'', 201. \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

c) Wzory transformacyjne pomiędzy systemem Elipsoidy Wyrównującej i systemem Borowej Góry. Wzory ułożono na podstawie 14 punktów

łącznych (Huta Turobińska, Krzeszów, Ojców, Golub I, Pyzdry I, Piotrków, Warszawa, Grabów, Wieś Kościelna, Wilanów, Koziczyn, Służew, Roy, Koniusza):

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= 536,07 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\varphi - 14,96 \cdot 10^{-6} \cdot l + 31,84 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi^2 + \\ &\quad + 710 \cdot 72 \cdot 10^{-15} \cdot \Delta\varphi \cdot l - 9,20 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 3'',524, \\ d\lambda &= 38,37 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\varphi + 790,67 \cdot 10^{-6} \cdot l + 2,34 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi^2 + \\ &\quad + 47,20 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi \cdot l - 0,45 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 3'',729. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Punkt główny:

$$\varphi = 51^{\circ}28'25'',038, \quad \lambda = 20^{\circ}12'43'',946.$$

Na podstawie podanych wzorów przeliczono szereg punktów z systemów obcych na system Borowej Góry. Przeliczono jednakże tylko te punkty, które posiadały współrzędne geograficzne w systemie Hermanskogel. W ten sposób uzyskano punkty łączne w systemach Hermanskogel i Borowej Góry. Wzory transformacyjne obliczone na podstawie otrzymanych punktów łącznych mają postać następującą:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= 8,22 \cdot 10^{-6} \cdot \Delta\varphi + 2,95 \cdot 10^{-6} \cdot l + 0,03 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 1'',080, \\ d\lambda &= 7,10 \cdot 10^{-10} \cdot \Delta\varphi + 1,95 \cdot 10^{-6} \cdot l - 0,08 \cdot 10^{-10} \cdot l^2 - 9'',236. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Punkt główny:

$$\varphi = 49^{\circ}59'11'',160, \quad \lambda = 22^{\circ}15'24'',565.$$

Prócz tych wzorów ułożono wzory interpolacyjne na podstawie 14 punktów łącznych. Potrzeba ta zaszła celem wyeliminowania niekorzystnych punktów, które zastąpiono punktami dodatkowymi. Forma tych wzorów jest następująca:

$$\left. \begin{aligned} d\varphi &= +0,258289 \cdot 10^{-4} \cdot \varphi - 0,047446 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda - 5'',43, \\ d\lambda &= +0,094338 \cdot 10^{-4} \cdot \varphi - 0,013744 \cdot 10^{-4} \cdot \lambda - 10'',80 \end{aligned} \right\} \quad (6a)$$

Błąd wyznaczenia punktu określono wzorem:

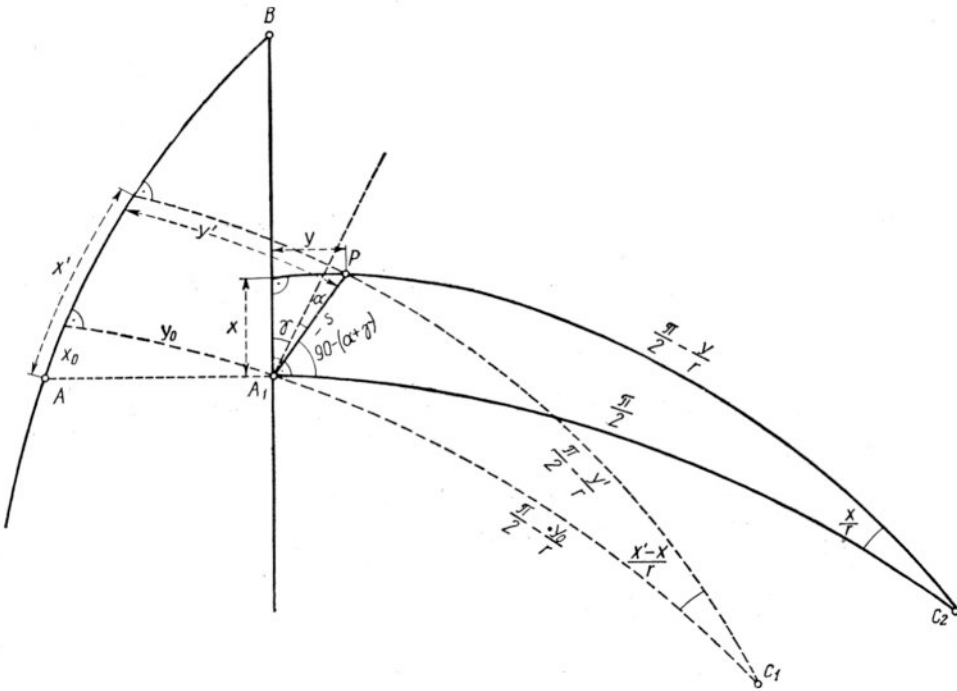
$$m_p = \sqrt{\frac{|vv|}{n-k}} = \pm 2,5 \text{ m}$$

(v oznaczają odchyłki wyrażone w metrach; n — ilość równań błędów użytych do ułożenia wzorów (6); k — ilość niewiadomych).

Przyjmując przeciętną odległość punktów łącznych równą 30 km, otrzymamy błąd względny 1 : 12 000.

2. Związki pomiędzy współzrędnymi Gaussa-Krügera x, y i współzrędnymi soldnerowskimi x', y'

Związek pomiędzy współzrędnymi obu układów (na kuli) wyprowadzimy wprost z rysunku, wykreślając współzrędną dowolnego punktu P w obu układach. Ponieważ rzędne y odwzorowania soldnerowskiego różnią się o $\frac{y^3}{6r^2}$ od rzędnych w odwzorowaniu Gaussa-Krügera, z tej przyczyny ułożymy najpierw związek pomiędzy współzrędnymi soldnerowskimi obu układów, po czym dodając poprawkę, przejdziemy na współzrędną Gaussa-Krügera.



Niech punkt A leżący w południku BA będzie początkiem jednego układu soldnerowskiego; zaś punkt A_1 (w południku BA_1) o szerokości geograficznej punktu A — początkiem układu drugiego. Dowolny punkt P posiada w obu układach współzrędną:

$$P(x, y) \text{ i } P(x', y').$$

Poza tym znane są:

- φ_A, λ_A początek układu A ,
- $\varphi_{A_1}, \lambda_{A_1}$ początek układu A_1 ,
- x_0, y_0 współzrędną punktu A ,
- γ zbieżność południków w punkcie A_1 .

Wzory do obliczenia współrzędnych sferycznych w obu układach, ułożone z trójkątów $A_1 P C_2$ i $A_1 P C_1$, mają formę następującą: ¹⁾

$$\left. \begin{aligned} y &= s \cdot \sin(\alpha + \gamma) - \frac{s^3 \cdot \sin(\alpha + \gamma) \cos^2(\alpha + \gamma)}{6 r^2}, \\ x &= s \cdot \cos(\alpha + \gamma) + \frac{s \cdot y^2 \cdot \cos(\alpha + \gamma)}{2 r^2} - \frac{s^3 \cdot \sin^2(\alpha + \gamma) \cos(\alpha + \gamma)}{6 r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} y' &= y_0 + s \cdot \sin \alpha - \frac{s^2 \cdot y_0 \cos^2 \alpha}{2 r^2} - \frac{s^3 \sin \alpha \cos^2 \alpha}{6 r^2}, \\ x' &= x_0 + s \cdot \cos \alpha + \frac{s \cdot y'^2 \cdot \cos^2 \alpha}{2 r^2} - \frac{s^3 \sin^2 \alpha \cos \alpha}{6 r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

Przyjmując w pierwszym przybliżeniu:

$$\begin{aligned} y &= s \cdot \sin \alpha & y' - y_0 &= s \cdot \sin \alpha, & y' - y_0 &= y \\ & \text{oraz} & & & & \\ x &= s \cdot \cos \alpha & x' - x_0 &= s \cdot \cos \alpha, & x' - x_0 &= x, \end{aligned}$$

oraz w drugim przybliżeniu:

$$\begin{aligned} s \cdot \sin \alpha &= y' - y_0 + \frac{(x' - x_0)^2 y_0}{2 r^2} + \frac{(x' - x_0)^2 (y' - y_0)}{6 r^2}, \\ s \cdot \cos \alpha &= x' - x_0 - \frac{(x' - x_0) y'^2}{2 r^2} + \frac{(y' - y_0)^2 (x' - x_0)}{6 r^2}, \end{aligned}$$

otrzymamy w pierwszym przybliżeniu:

$$\begin{aligned} y &= s \cdot \sin \alpha \cdot \cos \gamma + s \cdot \cos \alpha \cdot \sin \gamma - \frac{(x' - x_0)^2 (y' - y_0)}{6 r^2}, \\ x &= s \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma - s \cdot \sin \alpha \cdot \sin \gamma + \frac{(x' - x_0) (y' - y_0)^2}{3 r^2}, \end{aligned}$$

oraz w drugim przybliżeniu:

$$\left. \begin{aligned} y &= [(y' - y_0) + B] \cos \gamma + [(x' - x_0) + A] \sin \gamma - C, \\ x &= [(x' - x_0) + A] \cos \gamma - [(y' - y_0) + B] \sin \gamma + D. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

Wyrazy po prawej stronie równań (9) oznaczają: x_0, y_0, γ — wyrazy stałe; A, B, C — wyrazy zmienne, a mianowicie:

¹⁾ patrz Jordan: Handbuch der Vermessungskunde, t. III.

$$A = \frac{(y' - y_0)^2 (x' - x_0)}{6 r^2} - \frac{(x' - x_0) y'^2}{2 r^2},$$

$$B = \frac{(x' - x_0)^2 (2 y_0 + y')}{6 r^2},$$

$$C = \frac{(x' - x_0)^2 (y' - y_0)}{6 r^2},$$

$$D = \frac{(x' - x_0) (y' - y_0)^2}{3 r^2},$$

$$\gamma = l \sin \varphi_{A_1} + \frac{l^3}{3 \varrho''^2} \sin \varphi_{A_1} \cos^2 \varphi_{A_1},$$

gdzie

$$l = \lambda_{A_1} - \lambda_A;$$

prócz tego należy obliczyć zmienną różnicę pomiędzy rzędną w odwzorowaniu Soldnera i rzędną w odwzorowaniu Gaussa-Krügera:

$$E = \frac{y^3}{6 r^2}.$$

Wzory (9) pozwalają przetransformować na kuli dowolny punkt z układu soldnerowskiego x', y' na układ soldnerowski x, y . Jeżeli punkt A wyobrażać będzie początek układu lwowskiego, punkt A_1 początek układu w południku, np. 21° , to wystarczy obliczyć zbieżność południków γ i współrzędne x_0, y_0 dla przejścia z jednego układu na drugi. Rozumie się, że przedtem należy przeliczyć na podstawie wzorów (6) współrzędne geograficzne punktu A z systemu Hermanskogel na system Borowej Góry. Dodając z kolei do odciętej x długość łuku południka odpowiadającą punktowi A oraz przechodząc z odwzorowania soldnerowskiego do odwzorowania Gaussa-Krügera w tym samym układzie przez dodanie poprawki $\frac{y^3}{6 r^2}$ otrzymamy rozwiązanie zadania.

Szczegółowe obliczenia w obu układach dały w wyniku:

Układ lwowski:

$\varphi' = 49^\circ 50' 55''$, 2429 współrzędne Lwowa (na rys. punkt A)

$\lambda' = 24^\circ 02' 40''$, 5684, w systemie Hermanskogel;

wzorami (6) obliczamy:

$$\begin{aligned} \varphi &= 49^{\circ} 50' 54'', 033 && \text{współrzędne Lwowa} \\ \lambda &= 24^{\circ} 02' 31'', 308 && \text{w systemie Borowej Góry.} \end{aligned}$$

Następnie przyjmujemy współrzędne początku nowego układu w południku 21° (na rysunku punkt A_1):

$$\begin{aligned} \varphi_{A_1} &= 49^{\circ} 50' 54'', 033 \\ \lambda_{A_1} &= 21^{\circ} 00' 00'', 000, \end{aligned}$$

oraz obliczamy stałe x_0 , y_0 i γ :

$$\begin{aligned} x_0 &= +4437,2 \\ y_0 &= -218\,699,0 \\ \gamma &= -2^{\circ} 19' 33'', 8. \end{aligned}$$

Układ wiedeński:

$$\begin{aligned} \varphi' &= 48^{\circ} 12' 32'', 75 && \text{system Hermanskogel,} \\ \lambda' &= 16^{\circ} 22' 32'', 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi &= 48^{\circ} 12' 31'', 56 && \text{system Borowej Góry,} \\ \lambda &= 16^{\circ} 22' 23'', 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi_{A_1} &= 48^{\circ} 12' 31'', 56 \\ \lambda_{A_1} &= 18^{\circ} 00' 00'', 00, \\ x_0 &= +1\,279,7 \\ y_0 &= -120\,889,5 \\ \gamma &= +1^{\circ} 12' 47'', 1. \end{aligned}$$

Każdy punkt, posiadający współrzędne geograficzne w systemie Hermanskogel, możemy dwoma sposobami przeliczyć na współrzędne Gaussa-Krügera w systemie Borowej Góry: przeliczając współrzędne geograficzne [wzorami (6)] z systemu Hermanskogel na system Borowej Góry, a następnie na x , y , lub wzorami (9) przechodząc bezpośrednio ze współrzędnych soldnerowskich na współrzędne Gaussa-Krügera.

W praktyce będziemy korzystać z obu metod przeliczania, tam bowiem, gdzie nie posiadamy współrzędnych geograficznych w systemie Hermanskogel, zmuszeni będziemy posługiwać się tylko wzorami (9).

**Przykład przeliczenia współrzędnych soldnerowskich na współrzędne
Gaussa-Krügera w systemie Borowej Góry wzorami (9)**

Kopiec Unii
(układ lwowski)

dane współrzędne soldnerowskie:
 $x' = +32\ 263,2$; $y' = -284\ 162,8$
oraz stałe x_0 , y_0 , x_A , γ .

$x_0 = 4437,2$	$y_0 = -218699,0$	$x_A = 5523411,0$	$\gamma = -2^{\circ}19'33'',8$		
x	+ 32263,2	y	- 284162,8	$\lg(x-x_0+A)$	4,4440276
x_0	+ 4437,2	y_0	- 218699,0	$\lg \sin \gamma$	8,6083781n
$x-x_0$	+ 27826,0	$y-y_0$	- 65463,8	$\lg 1$	3,0524057n
A	- 27,1	B	- 2,3	1	- 1128,3
$x-x_0+A$	+ 27798,9	$y-y_0+B$	- 65466,1		
$\lg(x-x_0+A)$	4,4440276	$\lg(y-y_0+B)$	4,8160164n	$\lg(y-y_0+B)$	4,8160164n
$\lg \cos \gamma$	9,9996420	$\lg \sin \gamma$	8,6083781n	$\lg \cos \gamma$	9,9996420
$\lg 1$	4,4436696	$\lg 2$	3,4243945	$\lg 2$	4,8156584n
1	+ 27776,0	2	+ 2657,2	2	- 65412,2
+2	+ 2657,2			1	- 1128,3
1-2	+ 25118,8			1+2	- 66540,5
D	+ 1,0			-C+E	- 1,0
1-2+D	+ 25119,8			y	- 66541,5
X_A	5523411,0				
x	5548530,8				
		$X = 5\ 548530,8$			
		$Y = 7\ 433458,5$			
		<i>Obliczenia pomocnicze</i>			
$2 \lg y$	0,90712	$\lg(2y_0+y)$		5,85827n	
$\lg(x-x_0)$	4,44444	$2 \lg(x-x_0)$		8,88888	
$\lg(1:2r^2)$	6,08918	$\lg(1:6r^2)$		5,61206	
$\lg 1$	1,44074	$\lg B$		0,35921n	
1	+ 27,6	B		- 2,3	
$2 \lg(y-y_0)$	9,63200	$\lg(x-x_0)$		4,444	
$\lg(x-x_0)$	4,44444	$2 \lg(y-y_0)$		9,632	
$\lg(1:6r^2)$	5,61206	$\lg(1:3r^2)$		5,913	
$\lg 2$	9,68850	$\lg D$		9,989	
2	+ 0,5	D		+ 0,97	
1	+ 27,6				
$A=2-1$	- 27,1	$2 \lg(x-x_0)$		8,888	
		$\lg(y-y_0)$		4,816n	
$3 \lg(y-y_0)$	4,4480n	$\lg(1:6r^2)$		5,612	
$\lg(1:6r^2)$	5,6120	$\lg C$		9,316n	
$\lg E$	0,0600	C		- 0,2	
E	- 1,2				

3. Związki pomiędzy współrzędnymi soldnerowskimi x', y' i katastralnymi x'', y''

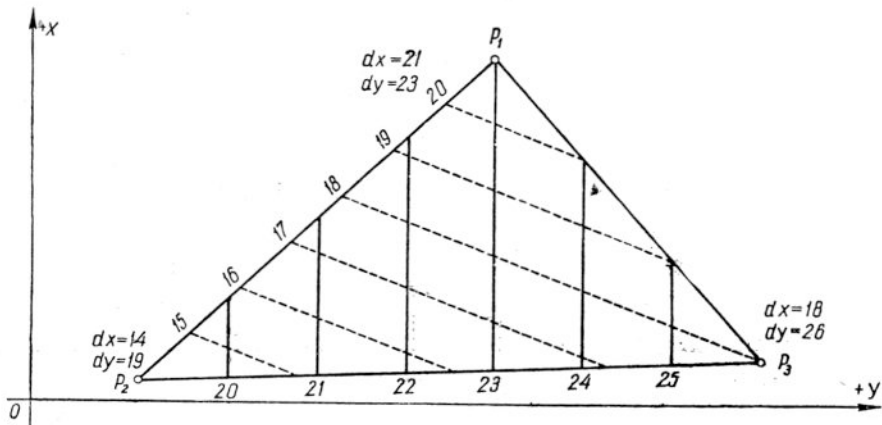
Wzory na przejście ze współrzędnych katastralnych na soldnerowskie mają postać następującą ⁵⁾:

$$x' = x'' - 0,00089 x'' - x'' \cdot y''^2 (5,91311)^{-20} + 0,002 y'' - 1,26$$

$$y' = y'' - 0,00089 y'' - y'' \cdot x''^2 (5,61208)^{-20} - 0,002 x'' - 5,13$$

(cyfry w nawiasach oznaczają logarytmy liczb; współrzędne i poprawki wyrażone są w metrach).

We wzorach tych uwzględniono przesunięcie początku układu, skręt, zmianę skali i poprawkę rzutu.



Rys. 2

Przeliczając tymi wzorami współrzędne katastralne na soldnerowskie, otrzymujemy wartości różniące się o około 20 m od współrzędnych soldnerowskich obliczonych bezpośrednio ze współrzędnych geograficznych φ, λ . Wzory te nie nadają się więc do prac dokładniejszych. W przypadkach, gdy nieznane są wzory określające odwzorowania obu układów lub jednego z nich jak w naszym przykładzie — jedną z najprostszych dróg uzyskania związków pomiędzy dwoma układami jest metoda afiniczna. Transformacja afiniczna określona jest trzema odpowiadającymi sobie punktami:

$$\begin{array}{ll} P_1(x'', y''); P_2(x'', y''); P_3(x'', y'') & \text{układ katastralny,} \\ P_1(x', y'); P_2(x', y'); P_3(x', y') & \text{,, soldnerowski} \end{array}$$

⁵⁾ Wzory te podał J. Słomczyński w rozprawie pt. „Uzgodnienie wyników triangulacji na obszarze Polski”. Biblioteka służby geograficznej, nr II, 1933 r.

oraz wzorami:

$$dx_i = x'_i - x''_i = (a_1 - 1)x_i + b_1 y_i + c_1$$

$$dy_i = y'_i - y''_i = a_2 x_i + (b_2 - 1)y_i + c_2.$$

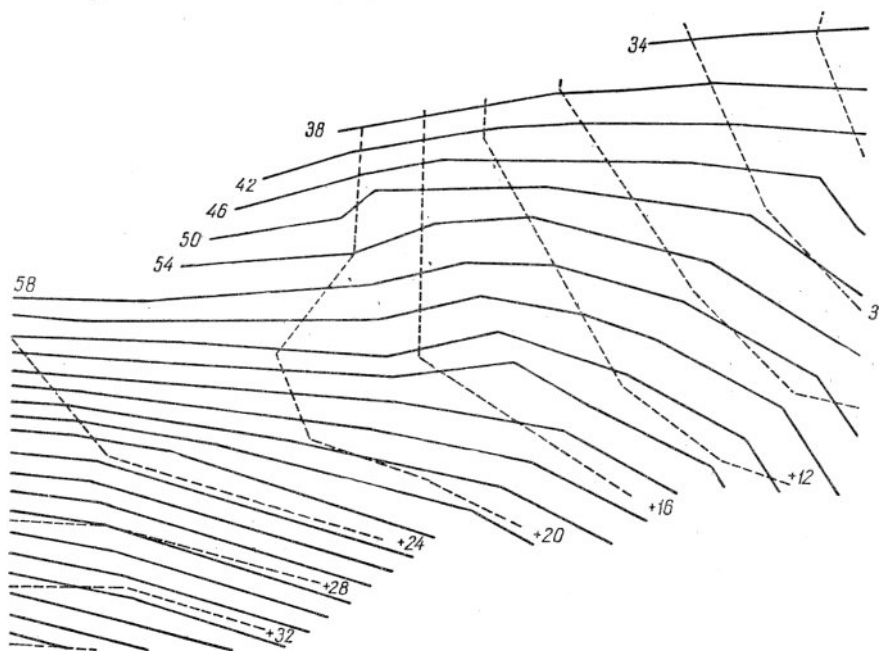
Po obliczeniu niewiadomych współczynników z obu grup równań, możemy przejść z układu katastralnego na soldnerowski.

Przenosząc poprawki na drugą stronę otrzymamy:

$$(a_1 - 1)x + b_1 y + (c_1 - dx) = 0$$

$$a_2 x + (b_2 - 1)y + (c_2 - dy) = 0.$$

Równania te przedstawiają rodzinę linii prostych równoległych do siebie, różniących się tylko wyrazami wolnymi, zależnymi od dx , dy . Te proste równoległe przedstawiają linie równych poprawek (odchyłek) pomiędzy dwoma układami. Graficzny sposób otrzymania tych linii polegać będzie na podziale boków trójkąta P_1 , P_2 , P_3 na równe części (rys. 2).



Rys. 3

Linie równych poprawek. Δx ————— Δy - - - - -

Interpolację afiniczną należy wykonać przy pomocy jak największej ilości trójkątów, tj. należy wykorzystać wszystkie współrzędne geogra-

ficzne. Ze współrzędnych tych obliczymy współrzędne soldnerowskie x', y' otrzymując w ten sposób punkty łączne o współrzędnych x'', y'' oraz x', y' (x'', y'' podane są w katalogu współrzędnych dla każdego φ', λ'). Tam, gdzie brak oryginalnych współrzędnych, należy je uzyskać pośrednio poprzez obce systemy. W braku współrzędnych tych punktów, ekstrapolacja liczbowa dałaby błędne wyniki. W koniecznych przypadkach stosowania ekstrapolacji, należy posługiwać się wykresami, ponieważ przedstawiają one jaśniej przebieg linii równych poprawek.

Rysunek 3 przedstawia wykres linii równych poprawek fragmentu obszaru Małopolski. Z wykresu tego wnioskować możemy, że linie te nie powstały z przekroju powierzchni matematycznej, a więc nie daje się uzyskać poprawek przy pomocy jednego równania dla całego obszaru. Zastąpienie jednej powierzchni powierzchnią składającą się z wielu trójkątów (w przykładzie rozpatrywanym mamy około 50 punktów łącznych) da w wyniku współrzędne o dokładności wystarczającej dla celów mapy topograficznej. Podany wykres, wykonany w skali 1 : 1 250 000, pozwala interpolować poprawki z dokładnością około 1 m (na rysunku linie równych poprawek podano co 4 metry).

4. Związki pomiędzy współrzędnymi Gaussa-Krügera x, y w systemie Borowej Góry i współrzędnymi x'', y'' w systemie Hermanskogel

Wzory otrzymane metodami 1, 2 i 3 pozwalają dwiema drogami obliczyć współrzędne x, y dowolnego punktu o danych współrzędnych:

φ', λ' oraz x'', y'' w systemie Hermanskogel;

1. droga:

$\varphi', \lambda' \longrightarrow (\text{wzory (6a)}) \longrightarrow \varphi, \lambda \longrightarrow x, y;$

2. droga:

$x'', y'' \longrightarrow (\text{met. 3}) \longrightarrow x', y' \longrightarrow (\text{wzory (9)}) \longrightarrow x, y.$

Drogę pierwszą można użyć do punktów, posiadających współrzędne geograficzne φ', λ' w systemie Hermanskogel. Punktów takich mamy tylko około 50 na całym obszarze. Droga druga, chociaż nie posiada tego ograniczenia, jest jednak żmudna i mniej dokładna, a to z tego powodu, że wymaga przejścia ze współrzędnych katastralnych na soldnerowskie. Z tych powodów użyto obu dróg do wyznaczenia tylko kilkudziesięciu punktów łącznych; pozostałe punkty postanowiono przeliczyć metodą afiniczną, nadającą się najbardziej do przeliczeń masowych na wielkich obszarach. Ponieważ, jak niżej zostanie wykazane, współrzędne katastralne są zbliżone do współrzędnych odwzorowań konforemnych, więc metoda

Wielkości podstawowe 1 rzędu będą:

dla oryginału:

$$E=G=1, F=0;$$

dla obrazu:

$$E' = a_1^2 + a_2^2, \quad F' = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad G' = b_1^2 + b_2^2.$$

Ponieważ w przykładzie badanym otrzymaliśmy $F=0$, stąd dalsze uproszczenia dla:

$$P = \frac{E'}{E}, \quad Q = \frac{F'}{\sqrt{EG}}, \quad R = \frac{G'}{G}.$$

Podstawiając otrzymane poprzednio wielkości otrzymamy:

$$P = a_1^2 + a_2^2, \quad Q = a_1 b_1 + a_2 b_2, \quad R = b_1^2 + b_2^2.$$

Po obliczeniu a_1, b_1, a_2, b_2 i podstawieniu otrzymamy:

$$P=1,000\ 327, \quad R=1,000\ 308, \quad Q=0,000\ 011.$$

Dla odwzorowań konforemnych są spełnione równości:

$$P=R, \quad Q=0.$$

W przykładzie badanym wartości P i R są bardzo zbliżone do siebie, wnosimy stąd, że mamy do czynienia z odwzorowaniem konforemnym (w przybliżeniu). Inaczej: ponieważ funkcje odwzorowawcze powstały z metody afinicznej, stąd wniosek, że przez „wtłoczenie“ jednej figury do drugiej, kąty uległy małej zmianie, a więc oba pierwotne odwzorowania kuli (względnie elipsoidy) na dwie płaszczyzny były w przybliżeniu konforemne.

Do wniosku tego doszliśmy na podstawie zbadania jednej pary funkcji odwzorowawczych. Jeżeli podobne obliczenia wykonamy nad szeregiem funkcji, wynik przedstawi się następująco:

Wierzchołki trójkątów	P	R	P-R	Q
1	0,999893	0,999716	+ 0,000177	- 0,000101
2	0,999923	0,999899	+ 0,000024	- 0,000038
3	0,999850	1,000580	- 0,000730	+ 0,000178
4	1,000313	1,000150	+ 0,000163	+ 0,000016
5	0,999944	1,000308	- 0,000364	+ 0,000108
6	1,000285	1,000157	+ 0,000128	- 0,000080
7	0,999022	0,999170	- 0,000148	+ 0,000076
8	1,000327	1,000308	+ 0,000019	+ 0,000011
9	1,000313	1,000261	+ 0,000052	- 0,000000
Średnia:	0,999985	1,000061	- 0,000076	- 0,000066

Obliczając w podobny sposób wielkości P , Q , R odwzorowania płaskiego katastralnego i odwzorowania soldnerowskiego, otrzymamy w wyniku szereg wartości na P , Q , R . Średnia dla obu grup przeliczeń da nam:

z pierwszej grupy: $P - R = -0,000076$, $Q = 0,000066$;

z drugiej grupy: $P - R = -0,001778$, $Q = 0,000096$.

Wyniki otrzymane drogą teoretyczną potwierdza praktyka. Jeżeli obliczymy kąty ze współrzędnych trzech układów: (x, y) — Gaussa-Krügera; (x', y') — Soldnera; (x'', y'') — katastralnego, to okaże się, że kąty obliczone ze współrzędnych katastralnych różnią się od kątów obliczonych ze współrzędnych Gaussa-Krügera przeciętnie o $20''$; natomiast różnice kątów obliczonych ze współrzędnych soldnerowskich i ze współrzędnych katastralnych dochodzą do czterech minut.

Z powyższego wyprowadzamy wniosek:

Wynikiem redukcji pomierzonych kątów oraz obliczeń wzorami trygonometrii płaskiej, które były użyte przez austriackie Biuro Triangulacyjne, są współrzędne tzw. katastralne, zbliżone bardziej do odwzorowania konforemnego aniżeli do odwzorowania soldnerowskiego.

Zrozumiałe teraz stają się wyniki wyrównań przeprowadzonych na podstawie wykonanych w przeszłości pomiarów triangulacyjnych w nawiązaniu do współrzędnych katastralnych; nie zauważono tam deformacji kątowych, które powinny wystąpić przy danych współrzędnych odwzorowania niekonforemnego. Praktyczną korzyścią wniosku byłaby możliwość użycia odwzorowania przez podobieństwo zamiast metody afinicznej, co w przypadkach konieczności użycia ekstrapolacji jest jedynym rozwiązaniem. Odpadną również próby upodobniania współrzędnych katastralnych do współrzędnych odwzorowania soldnerowskiego, co sugerowały niektóre dawniejsze prace.

РЕЗЮМЕ

Настоящая работа предлагает способ трансформирования кадастровых координат в неизвестной проекции в систему координат Гаусса-Крюгера с начальным пунктом Борова Гура.

Точность трансформирования должна соответствовать потребностям хозяйственной карты Польского Государства в масштабе 1 : 10 000

Основой для решения поставленного вопроса являются:

общие пункты в системах Рауэнберг и Германскогель,
 „ „ „ Гельмерттурм и Германскогель,
 „ „ „ уравнильного эллипсоида и Германскогель,
 а так же:

общие пункты в системах Рауэнберг и Борова Гура,
 „ „ „ Гельмерттурм и Борова Гура,
 „ „ „ уравнильного эллипсоида и Борова Гура.

На основе этой посредственной связи между системами Борова Гура и Германскогель получены формулы трансформирования с применением рядов, данных Христовым.

Таким образом осуществлен переход от географических координат в системе Германскогель к географическим координатам в системе Гаусса-Крюгера,

Поскольку в каталоге координат в системе Германскогель даны географические и прямоугольные координаты всех пунктов, можно получить общие пункты, координаты которых известны одновременно в системе Гаусса-Крюгера и в системе Кадастра.

Массовое перевычисление кадастровых координат в координаты Гаусса-Крюгера проведено с помощью аффинного преобразования на основе ранее полученных координат общих пунктов. В районах, на которые нет географических координат в системе Германскогель, применен посредственный метод т. е. переход от кадастровых координат в координаты Зольднера а затем в систему Гаусса-Крюгера.

Связь между неизвестной проекцией кадастра и проекцией Зольднера получена при помощи аффинного преобразования.

RÉSUMÉ

L'article présent offre le moyen de transformer les coordonnées cadastrales d'une représentation inconnue du système de Gauss-Krüger en système de Borowa Góra. L'exactitude du point déterminé d'après cette méthode, devrait correspondre aux besoins d'une carte économique de l'État dans l'échelle de 1 : 10 000.

Les données servant à la solution du problème précité sont les suivantes:

Points de liaison dans le système de Rauenberg et de Hermanskogel,
 " " " " " " de Helmertturm et de Hermanskogel,
 " " " " " " de l'ellipsoïde de compensation et de Borowa Góra,
 de même

points de liaison dans le système de Rauenberg et de Borowa Góra,
 " " " " " " de Helmertturm et de Borowa Góra,
 " " " " " " de l'ellipsoïde de compensation et de Borowa Góra.

En se basant sur cette liaison indirecte des systèmes de Borowa Góra et de Hermanskogel et en se servant des formules de séries fournies par Hristov, des formules de transformation ont été formées. De cette façon il a été possible de passer des coordonnées géographiques fournies par le système de Hermanskogel aux coordonnées géographiques du système de Borowa Góra et dans la suite aux coordonnées de Gauss-Krüger.

Vu que dans l'index des coordonnées du système de Hermanskogel il est indiqué pour chaque coordonnée géographique une coordonnée cadastrale correspondante, il en résulte des points de liaison entre les coordonnées de Gauss-Krüger et les coordonnées cadastrales.

Les calculs globaux servant à passer des coordonnées cadastrales aux coordonnées de Gauss-Krüger ont été exécutés à l'aide de la méthode affine en se servant des points de liaison obtenus précédemment.

Dans les superficies où les coordonnées géographiques du système Hermanskogel font défaut, il a été appliqué la méthode indirecte, c'est à dire le passage des coordonnées cadastrales aux coordonnées de Soldner et en suite aux coordonnées de Gauss-Krüger. La liaison entre les représentations cadastrales inconnues et les représentations de Soldner a été accomplie à l'aide de la méthode affine.

Ludostław Cichowicz

Rozwój i stan współczesny astronomii praktycznej w Związku Radzieckim

Pierwsze prace i badania naukowe na polu astronomii praktycznej w Rosji rozpoczęte zostały w wieku XVI. Przy geograficznych badaniach rozległego obszaru imperium rosyjskiego jak również przy odkrywaniu nowych szlaków żeglarskich na morzu stało się nieodzowne opracowanie i stosowanie metod astronomicznych. Pierwsze wyznaczenia współrzędnych geograficznych kilku większych miast, jak Moskwa, Carycyn, Nowogród, nie miały dużej dokładności. Proste były sposoby obserwacji i prymitywne narzędzia. Przy pomocy astrolabii z alhidadą i przeziernikami obserwowano wysokość gwiazdy Polarnej nad horyzontem i otrzymany wynik, oczywiście w stopniach, przyjmowano jako szerokość geograficzną miejsca obserwacji. Jeszcze mniej dokładnie umiano wyznaczyć długość geograficzną.

Systematyczny rozwój prac astronomicznych nastąpił na przełomie XVII i XVIII wieku w czasie panowania Piotra I. Ten przedsiębiorczy władca nie tylko doceniał znaczenie prac astronomicznych, ale sam niekiedy brał w nich czynny udział. Za jego życia powstało pierwsze obserwatorium astronomiczne w Rosji, w którym dokonywał obserwacji jeden ze światlejszych astronomów swej epoki — Brius. W roku 1701 założono w Moskwie szkołę nawigacyjną, gdzie astronomia praktyczna stanowiła osobny przedmiot.

Do intensywnego rozwoju rosyjskiej astronomii przyczyniło się powołanie do życia petersburskiej Akademii Nauk. Akademia organizowała liczne ekspedycje naukowe w głąb i na peryferie cesarstwa: na półwysep Kola, Kamczatkę, jez. Ładoga, do Jakucka, Orenburga, na Krym itd. Badawcze prace geograficzne opierano na punktach wyznaczonych astronomicznie. Liczba takich punktów w Rosji u schyłku XVIII wieku wynosiła 67; takiej ilości nie miało w owym czasie żadne państwo.

Wielkim uczonym tej epoki był Michał Łomonosow, który obok innych prac z zakresu astronomii opracował w r. 1761 metodę wyznaczania azymutu celu ziemskiego z obserwacji gwiazd okołobiegunowych w pobliżu elongacji. Uczony ten położył duże zasługi w poznawaniu północnych dróg morskich, a także w dziedzinie uzupełniania i uaktualniania map. Niesposób nie wymienić członka Rosyjskiej Akademii Nauk Eulera, który oprócz badań z zakresu mechaniki niebios opracował konstrukcję achromatycznego teleskopu i mikroskopu. Ekspedycjami i pracami astronomicznymi kierowali również: uczeń Eulera, Rumowski, oraz Wiszniewski, Krasilnikow, Czerny i inni. Wreszcie osobne miejsce należy się Piotrowi Inochodcewowi, wnikliwemu badaczowi praktycznych zagadnień astronomii i jej pierwszemu historykowi w Rosji.

Do rozwoju astronomii i geodezji przyczyniły się także prace nad sporządzaniem dokładnych map strategicznych, których potrzeba wyłoniła się w związku z obronnymi wojnami Rosji w latach zawieruchy napoleońskiej. Wówczas to wprowadzono w rosyjskim sztabie generalnym naukę astronomii i geodezji.

Początek prac triangulacyjnych w Rosji nastąpił w r. 1816 na terenie Wileńszczyzny i zachodniej Białorusi. Kilka lat później, w celu zorganizowania podobnych prac na obszarze całej Rosji, utworzono przy Sztabie Głównym tzw. Korpus Wojskowych Topografów. Jednocześnie postępowały prace nad wyznaczeniem astronomicznych punktów podstawowych dla triangulacji. W europejskiej części Rosji w latach 1806—1815 punktów tych wyznaczono około 200, przy czym dokładność wyznaczenia szerokości geograficznej wynosiła $\pm 5''$, długość $\pm 2S$.

W latach 1816—1831 pracami triangulacyjnymi oraz pracami nad pomierzeniem stopnia południka w bałtyckich terenach pogranicznych kierował profesor geodezji i astronomii uniwersytetu w Dorpacie W. Struve. Oparta na naukowych podstawach działalność W. Struvego wywarła duży wpływ na rozwój prac astronomicznych w Rosji. Prof. W. Struve opracował zastosowanie instrumentu przejściowego dla wyznaczenia szerokości geograficznej z obserwacji przejść gwiazd przez I wertykał oraz wyznaczenie czasu i azymutu w południku; opracował wreszcie szereg wyznaczeń azymutu, szerokości i czasu przy użyciu instrumentu uniwersalnego.

Postęp polowych prac astronomicznych przyczynił się do rozwoju astronomii fundamentalnej oraz przyczynił się do powstania kilku obserwatoriów na nowopowstałych uniwersytetach w Dorpacie, Kazaniu, Kijowie, Charkowie, Petersburgu oraz w Moskwie (1831). W roku 1839 powstało słynne obserwatorium w Pułkowie, które stało się naukowym i dyspozycyjnym ośrodkiem w zakresie fundamentalnej i polowej astronomii w Rosji, i zyskało sobie sławę światową. Dyrektorem został prof. W. Struve. Ze szkoły-obszernium w Pułkowie wyszło wiele pokoleń geodetów i astronomów. Dzięki wypróbowanej metodyce prac tego obserwatorium Korpus Wojskowych Topografów dokonał tysięcy astronomicznych wyznaczeń miejsc, służących rosyjskiej kartografii za punkty oparcia.

W tym czasie prace nad pomiarem rosyjsko-skandynawskiego łuku nabrały rozmachu i urosły do rozmiarów jednego z największych przedsięwzięć geodezyjnych. (Prace pomiarowe rozciągnęły się na długości 2800 km). W r. 1850 astronom O. Struve, kontynuując bałtycki łańcuch triangulacyjny, dotarł do oceanu Lodowatego, zaś na południu osiągnięto w r. 1852 ujście Dunaju.

Wyznaczeń azymutu i szerokości przy zastosowaniu różnych metod obserwacyjnych dokonano w 13 miejscach pomiaru „łuku Struvego“. Posługując się instrumentami przejściowymi i uniwersalnymi otrzymano dla szerokości geograficznej dokładność rzędu $0''.05$, dla azymutu — $0''.5$.

W połowie wieku XIX obserwatorium pułkowskie przeprowadziło badania w celu wyznaczenia długości geograficznej sposobem „przewózki chronometrów“. Przy zastosowaniu tej metody dokonano wyznaczenia różnicy długości Pułkowo-Greenwich z dokładnością ± 0.5057 . Zorganizowano także szereg ekspedycji, chronometrycznych celem wyznaczenia współrzędnych geograficznych Moskwy, Warszawy, Odessy, Astrachania, Kazania i innych większych miast. Jednocześnie Korpus Wojskowych Topografów przeprowadzał wyznaczenia współrzędnych geograficznych w wielu rejonach państwa, jak Bessarabia, Kaukaz, Środkowa Azja, Krym, przy czym dla szerokości otrzymywano dokładność rzędu $0''.3$, zaś dla długości 0.52 .

W drugiej połowie XIX wieku, po rozpowszechnieniu się sieci telegraficznej, opracowano nieco dokładniejsze metody wyznaczeń długości; pierwsze prace w tym zakresie przeprowadzono w r. 1860 w Finlandii. Wyznaczenia różnicy długości Moskwa—Pułkowo dokonano metodą telegraficzną z dokładnością ± 0.5021 . Wreszcie do ważniejszych prac z zakresu astronomii polowej należy zaliczyć prace rosyjskich geodetów Szarnogosta i Kulberga nad wyznaczeniem w latach siedemdziesiątych dłu-

gości geograficznych ważniejszych miast, leżących na szlaku Moskwa—Władywostok (warto przy tym podkreślić tę okoliczność, że kolej transsyberyjska jeszcze nie istniała).

Przy wykonywaniu prac w zakresie astronomii geodezyjnej wielkie zastosowanie znalazły oryginalne metody opracowane przez rosyjskich uczonych. Niektóre z tych metod stosuje się do dzisiejszego dnia jako podstawowe sposoby wyznaczania szerokości i czasu. W r. 1874 astronom pułkowskiego obserwatorium Zinger opracował metodę wyznaczenia czasu z obserwacji par gwiazd na jednakowej wysokości. W 1874 Döllen ogłosił metodę wyznaczenia poprawki chronometru z obserwacji momentów przejścia gwiazd północnej i południowej przez południk. Geodeta Piewcow opracował w r. 1885 metodę wyznaczenia szerokości z obserwacji par gwiazd na jednakowej wysokości z obu stron I wertykału. W tym samym czasie ukazała się praca Sawicza pt. „Zastosowanie astronomii praktycznej dla geograficznego wyznaczenia miejsc” oraz Zingera „Kurs astronomii praktycznej”.

Oceniając niemały dorobek astronomii rosyjskiej w wieku XIX stwierdzamy, że żywy swój rozwój w tej epoce zawdzięcza ona z jednej strony pracom Korpusu Wojskowych Topografów, z drugiej strony — naukowej działalności obserwatorium w Pułkowie. Podczas gdy inne obserwatoria rosyjskie nie miały warunków do tak wspaniałego rozwoju z powodu małej liczby fachowców, obserwatorium pułkowskie zyskało zaszczytną nazwę „astronomicznej stolicy świata”. Wydało ono uczonych tej klasy, co Witkowski, Zinger, Piewcow, Szczetkin, Krasowski. W r. 1912 dyrektor tego obserwatorium, Baklund, został obrany pierwszym przewodniczącym Międzynarodowej Komisji Czasu. W tym samym czasie rosyjscy astronomowie wzięli udział w międzynarodowych pracach badawczych nad wahaniem bieguna.

Jeśli chodzi natomiast o prace Korpusu W. T., to już w r. 1877 przechodzi on wyłącznie do zadań topograficzno-geodezyjnych dla potrzeb wojska. W pracach tych mających na celu usprawnienie służby topograficznej, astronomia odegrała pośledniejszą rolę. Całość prac Korpusu zaczęła służyć wyłącznie imperialistycznym celom carskiej Rosji.

Garść tych fragmentarycznych informacji, charakteryzujących etapy rozwojowe astronomii geodezyjnej w Rosji, mówi nam, że rosyjska myśl naukowa na tym odcinku odznaczała się samodzielnością i oryginalnością. Jednakże technicznie i gospodarczo zacofane państwo nie mogło stworzyć warunków dla pełnego rozwoju prac astronomicznych i geodezyjnych. Bezplanowość tych prac, ich charakter sporadyczny, uzależnienie od importu zagranicznych instrumentów precyzyjnych, niedocenianie ogólnopaństwowego znaczenia prac astronomicznych działały hamująco na rozwój tej dziedziny wiedzy.

Okres rozkwitu badań i prac astronomicznych nastąpił dopiero z chwilą ustalenia władzy radzieckiej.

Już w marcu 1919 roku, tj. w niespełna dwa lata po zwycięstwie Wielkiej Rewolucji Październikowej, Włodzimierz Lenin podpisał dekret o powołaniu Wyższego Urzędu Geodezyjnego. (Obecnie: Główny Urząd Geodezji i Kartografii przy Radzie Ministrów ZSRR). Władza radziecka doceniła wielkie znaczenie astronomiczno-geodezyjnej służby dla rozbudowy państwa socjalistycznego. W powyższym dekreście określone zostały różnorodne i szerokie zadania, jakie stanęły przed astronomią praktyczną; oto najważniejsze z nich:

„Zabezpieczenie wysokiego poziomu naukowego pierwszorzędnych wyznaczeń astronomicznych jako części składowej pomiarów, służących do: a) wyznaczenia rozmiarów i kształtu Ziemi, b) utworzenia dokładnej sieci podstawowej, c) zbadania figury geoidy na całym obszarze Związku Radzieckiego;

wykonanie wielkiej ilości astronomicznych wyznaczeń w celu skartowania okolic trudnodostępnych;

opracowanie naukowych i metodycznych zagadnień, organizowanie badań, mających na celu konstrukcję i udoskonalenie przyrządów pomiarowych, opracowywanie metod astronomicznych wyznaczeń, odpowiadających warunkom rozległego terytorium państwa;

organizacja służby czasu itp. . . .“

W roku 1923 rozpoczęto prace astronomiczne na punktach triangulacyjnych I i II rzędu; w pierwszym roku dokonano wyznaczeń 16 punktów; wyznaczenia te (szerokość, długość, azymut) dały początek podstawowym pracom geodezyjnym i topograficznym. Przy wyznaczaniu szerokości geograficznej posługiwano się metodami Piewcowa i Talkotta, azymuty boków triangulacyjnych wyznaczono na podstawie obserwacji gwiazdy Polarnej, zaś poprawkę chronometru — metodą Zingera. Pierwszych pomiarów długości geograficznej przy zastosowaniu radia, dokonano już w latach 1920—1923.

Na skutek uchwał XIV zjazdu Wszechzwiązkowej Komunistycznej Partii bolszewików (1925), na którym zapadła decyzja o socjalistycznym uprzemysłowieniu kraju, powstała konieczność opracowania nowego programu dla służby astronomiczno-geodezyjnej. Wykonanie tego zadania powierzono doświadczonym specjalistom. I tak prof. F. Krasowski opracował nową instrukcję dla prac triangulacyjnych, zaś prof. K. Cwietkow przy współudziale inż. Dołgowa opracował pierwszą instrukcję dla obserwacji astronomicznych. Instrukcja, wprowadzająca jednolitą klasyfikację punktów astronomicznych i określająca metodykę ich wyznaczeń, obowiązuje wszystkie instytucje zajmujące się pracami astronomicznymi. Astronomia praktyczna w Związku Radzieckim uzyskała jasną perspektywę rozwoju jako niezwykle ważny czynnik przy zakładaniu państwowej sieci geodezyjnej i opracowaniu kartograficznym kraju.

W latach 1922—29 Główny Urząd Geodezyjny łącznie z Urzędem Wojskowych Topografów (b. Korpus Wojskowych Topografów) dokonał wyznaczeń trzystu kilkudziesięciu punktów astronomicznych, w tej liczbie 63 punkty I rzędu.

Olbrzymie tempo i zakres prac geodezyjnych wymagały zorganizowania odpowiedniej instytucji, która stanowiłaby naukowo-techniczną bazę dla wszelkich poczynań wykonawczych. W tym celu w r. 1929 powołano przy Głównym Urzędzie Geodezyjnym Naukowo-Badawczy Instytut Geodezji i Kartografii. (Obecnie: Centralny Naukowo-Badawczy Instytut Geodezji, Fotogrametrii i Kartografii — CNIIGAiK). Ingerencja świeżo powołanego instytutu w zakresie astronomii praktycznej polegała na udoskonalaniu metodyki prac polowych, opracowywaniu instrukcji, układaniu pomocniczych tablic itp.

W rezultacie pierwsze dziesięciolecie służby astronomicznej w ZSRR stanowiło okres przygotowawczy, podczas którego rozwiązano metodyczne i techniczne zagadnienia astronomii geodezyjnej, określono podstawowe zadania, zebrano siły i środki do ich wykonania.

W latach trzydziestych w wyniku wspianego rozwoju nauki i techniki Związku Radzieckiego młody radziecki przemysł optyczno-mechaniczny rozpoczął własną produkcję instrumentów astronomiczno-geodezyjnych. Powstała w tym czasie krajowa fabryka „Aerogeoprzet“⁴. Obok teodolitów przeznaczonych do triangulacji (np. T. T. 2"/6") rozpoczęła ona produkcję 5 sekundowych i 2 sekundowych astronomicznych instrumentów uniwersalnych z łamaną lunetą (A. U. 5", A. U. 2"/10"). Te same zakłady wyprodukowały typ teleskopu zenitalnego dla wyznaczenia szeroko-

kości i poprawki chronometru z obserwacji par gwiazd na równych wysokościach, koło wertykalne dla wyznaczenia szerokości i czasu z pomiaru odległości zenitalnych i inne. Jednocześnie uczeni radzieccy zastosowali cały szereg pomysłów konstrukcyjnych bądź udoskonaleń, które przyczyniły się do opracowania nowych metod obserwacyjnych. Oto astronom z obserwatorium Pułkowa N. Pawłow rozpoczął prace nad fotoelektrycznym sposobem rejestracji przejść gwiazd, w którym rolę ludzkiego oka spełnia fotokomórka. Pierwsze próbne obserwacje bez zapisu wykonano w r. 1935; w rok później aparat rejestruje już przejścia najjaśniejszych gwiazd, zaś w latach 1937—38 obserwowano gwiazdy aż do wielkości 4,9. Odtąd obserwatorium Pułkowa przeprowadzało regularne obserwacje, które przerwane zostały dopiero z chwilą wtargnięcia najeźdźcy hitlerowskiego.

W roku 1938 D. Dołgow w celu udoskonalenia metody wyznaczenia czasu (Zingera) instrumentem uniwersalnym przystosował do tego narzędzia mikrometr kontaktowy.

Docent L. Mieszczanski opracował specjalny przyrząd do wyznaczania i kontroli systematycznych błędów osobowych i instrumentalnych przy wyznaczaniu czasu miejscowego. Tenże sam konstruktor zbudował ramkową libelę nasadkową, pozwalającą obserwować ciała niebieskie w bardzo małych odległościach zenitalnych oraz w zenicie.

Doc. A. Kuzniecowa, dla wyrugowania błędów osobowych przy obserwacji metodą Zingera, opracował specjalne urządzenie fotograficzne, wmontowane w okular instrumentu uniwersalnego. Urządzenie to posiada: a) kamerę nasadkową wyposażoną w przesłonę oraz okular, w którego płaszczyźnie ogniskowej zamiast siatki nitek znajduje się szklana skala z nacięciami, b) relais czasu oraz c) trójsekundowy przerywacz prądu w chronometrze kontaktowym. Wynalazek ten, oparty na szkicach samego Zingera, stosowany jest w CNIIGAiK.

Jednocześnie CNIIGAiK dla zapewnienia jak największej dokładności pierwszorzędnych wyznaczeń astronomicznych prowadzi prace badawcze nad konstrukcjami coraz to doskonalszych narzędzi. M. in. opracowano nowy, zmodyfikowany typ instrumentu uniwersalnego oraz przenośnego instrumentu przejściowego, przystosowanego do prac polowych, szczególnie nadającego się na Północy. W roku 1940 zakłady „Aerogeosprzęt“ wyprodukowały 70-milimetrowy instrument przejściowy typu stacyjnego, wyposażony w kontakty, z lunetą osadzoną ekscentrycznie oraz z nakładaną libelą. Instrument ten odznacza się dużą stabilnością.

W roku 1942 leningradzki optyk D. Maksutow (autor pierwszorzędnych pod ręczników z dziedziny optyki instrumentalnej i instrumentów astronomicznych) skonstruował tzw. teleskop meniskowy, który posiadając moc optyczną refraktora, pozbawiony jest wad charakterystycznych dla tego typu narzędzi (aberracji chromatycznej, sferycznej, komatycznej, astygmatyzmu). Maksutow w miejsce zwierciadeł parabolicznych wprowadził lustro kuliste. Rozmiary teleskopu zostały znacznie zmniejszone, zaś luneta zakryta, co w dużym stopniu zabezpiecza ją przed wpływami atmosferycznymi.

Opierając się na konstrukcji teleskopu meniskowego (obecnie ustawionego w obserwatorium w Alma-Ata) Pawłow wykonał projekt meniskowego instrumentu przejściowego, który według przewidywań w znacznym stopniu przewyższy pod względem dokładności wszelkie istniejące typy instrumentów przejściowych, zachowując jednocześnie niewielkie stosunkowo rozmiary. Instrument ten, wyposażony we wszystkie najnowocześniejsze urządzenia rejestrujące i kontrolne, jest przede wszystkim przeznaczony dla wysokodokładnej służby czasu.

W latach 1948/9 P. Popow opracował konstrukcję oryginalnego przyrządu do przyjmowania sygnałów metodą wizualną — tzw. chronoskopu, przyrządu, który zapewnia dużo większą precyzję opracowania rejestracji niż piszące chronografy, a przy tym pozbawiony jest wad zwykłego chronografu. Ostatnio opracowano także przyrząd służący do rejestracji przerywania i otwierania prądu z dokładnością do 0.001 sec (fotochronograf).

W parze z osiągnięciami radzieckich konstruktorów w dziedzinie instrumentów precyzyjnych astronomowie opracowywali coraz to nowsze, oryginalne metody wyznaczeń astronomicznych. Już w 1924 r. prof. T. Krasowski opracowuje przybliżony sposób wyznaczenia azymutu celu ziemskiego drogą pomiaru kąta poziomego między Gwiazdą Polarną i inną gwiazdą pomocniczą. Do metody tej Smirnow przygotował specjalne tablice. W tym samym roku W. Kawrajski podał metodę jednoczesnego wyznaczenia czasu i szerokości przy pomocy obserwacji przejść dwóch par gwiazd przez odpowiednie dwa almukantary. Przybliżony sposób wyznaczenia szerokości podaje także A. Michajłow. W ramach prac CNIIGAIK. A. Kołupajew, kontynuujący badania Dołgowa, wykorzystał koncepcję zastosowania mikrometru kontaktowego do instrumentu uniwersalnego dla wyznaczenia szerokości metodą Piewcowa oraz czasu — metodą Zingera. Dzięki dodatkowym urządzeniom Kołupajew wprowadza ten rodzaj obserwacji poza 65 równoleżnik, na daleką Północ.

N. Pawłow, dzięki zastosowaniu fotoelektrycznej rejestracji przejść gwiazd, opracował metodę wyznaczenia czasu przy pomocy narzędzia przejściowego. W roku 1945 A. Mazajew opracował metodę jednoczesnego wyznaczania szerokości i długości geograficznych z obserwacji instrumentem przejściowym przejść gwiazd przez ten sam almukantarą (30° bądź 45°).

Metoda ta, którą autor wyposażył we wszelkie pomocnicze środki usprawniające tak przebieg obserwacji, jak i jej redukcję znajduje dziś zastosowanie przy wyznaczaniu punktów III i IV rzędu.

Sledząc za ogólnym rozwojem prac astronomicznych w ZSRR osobną uwagę warto poświęcić zagadnieniu Służby Czasu. Powstanie i późniejszy rozwój tej najmłodszej gałęzi astronomii praktycznej wiąże się sukcesywnie z rozpowszechnieniem sieci telegraficznej, a następnie radia. Początek radzieckiej Służby Czasu przypada na rok 1920, w którym Obserwatorium Pułkowskie rozpoczęło codzienne nadawanie sygnałów o 19h30m czasu uniwersalnego. W cztery lata później na mocy specjalnego dekretu powstaje w Pułkowie Międzyresortowy Komitet Służby Czasu, koordynujący tę służbę w Związku Radzieckim. Dzięki inicjatywie Komitetu w r. 1931 powstają w Moskwie dwie nowe placówki Służby Czasu: w obserwatorium Głównego Instytutu Astronomicznego im. Szternberga (GAISz.) oraz przy CNIIGAIK.

W r. 1938 Służbę Czasu Związku Radzieckiego prowadzi już 7 obserwatoriów (poza wyżej wymienionymi: Taszkient, Irkuck, Charków, Nikołajew). Niestety, w latach II wojny światowej hitlerowcy zniszczyli obserwatorium w Pułkowie, kilka zaś innych stacji zawiesiło swoje czynności; jedynie obserwatoria GAISz. oraz taszkienckie przez cały ciężki okres nie przerywały służby.

Obecnie Służba Czasu w Związku Radzieckim osiągnęła bardzo wysoki poziom techniki i zajmuje jedno z pierwszych miejsc w świecie.

Istniejący przy Komitecie Miar i Przyrządów Pomiarowych Międzyresortowy Komitet Służby Czasu w celu usprawnienia dalszej działalności powołał do życia specjalny organ: Centralne Naukowo-Badawcze Biuro Służby Czasu. Szereg obserwatoriów wznowiło swe prace, oparte na zastosowaniu coraz doskonalszych metod

i aparatury. W ostatnich latach obserwatorium CNIIGAiK. zastosowało fotoelektryczną metodę rejestracji Pawłowa oraz wymieniony poprzednio nowy przyrząd do porównywania zegarów i odbioru sygnałów — chronoskop Popowa.

Wzorowo postawiona Służba Czasu i regularne nadawanie rytmicznych sygnałów umożliwiło poprowadzenie na szeroką skalę prac geodezyjnych, astronomicznych oraz grawimetrycznych, posłużyło do masowych wyznaczeń długości geograficznych, uwzględniło potrzeby nawigacji itp. Już w 1949 roku na kilkanaście stacji, podlegających kontroli Międzynarodowego Biura Czasu (Bureau de l'Heure) w Paryżu, pięć znajdowało się w Związku Radzieckim.

Obok Służby Czasu, nastawionej przede wszystkim na potrzeby związane z rozbudową gospodarczą Kraju Rad, astronomowie radzieccy od kilkudziesięciu lat biorą wybitny udział w pracach Międzynarodowej Służby Szerokości. Na skutek międzynarodowej umowy, założono na przełomie XIX i XX wieku w pięciu miejscach kuli ziemskiej stacje szerokościowe, rozlokowane na 39°8' równoleżniku. (Przy czym jedna na terytorium rosyjskim w Czardżou).

Po pierwszej wojnie światowej funkcjonowały zaledwie 3 stacje: dopiero rok 1930 przyniósł na tym odcinku polepszenie sytuacji, z chwilą założenia nowej stacji szerokościowej na terenie Uzbekkiej Republiki Radzieckiej w Kitab. Obserwatorium to o współrzędnych: $\lambda = 66^{\circ}53' E$, $\varphi = 39^{\circ}8' N$ położone w pobliżu nieczynnej stacji w Czardżou, prowadzi od chwili swego założenia nieprzerwane prace obserwacyjne, posługując się teleskopem zenitalnym dla metody Talkotta. Z rozwojem radzieckiej służby szerokościowej od lat wiąże się nazwisko członka Akademii Nauk A. Orłowa, który od roku 1926 zajmuje się w obserwatorium połtawskim badaniami nad ruchami bieguna. W badaniach swoich Orłow rozwija pojęcie średniego i chwilowego bieguna oraz znajduje metody do wyznaczenia jego współrzędnych. Ostatnie wyniki prac tego uczonego są rewelacyjne. Dokonawszy ponownego opracowania (przeliczenia) obserwacji Międzynarodowej Służby Szerokości od chwili ich wszczęcia do r. 1940, Orłow udowadnia, że dotychczasowe metody są błędne i wskazuje na nowe drogi wiodące do rozwiązania problemu. Propozycje Orłowa były tematem obrad XIX komisji podczas międzynarodowego zjazdu astronomów jesienią 1952 r. w Rzymie. W związku z tymi propozycjami niektórzy uczeni zachodni, jak P. Tardi oraz Spencer Jones, wyrazili pogląd, że są one „zbyt rewolucyjne“ i łamią wszystkie 50-cioletnie tradycje Międzynarodowej Służby Szerokości.

Obecnie obserwacje szerokościowe prowadzi się także w kilku innych obserwatoriach Związku Radzieckiego: w Pułkowie, Kazaniu, Irkucku i innych.

Uniezależniona od importu zagranicznych instrumentów, bogatsza w metodyczne doświadczenia, radziecka służba astronomiczno-geodezyjna przystąpiła w latach trzydziestych do gigantycznych prac, związanych z zadaniami rozbudowy gospodarczej. I tak w r. 1936 zakończono pomiar triangulacyjnego łańcucha pierwszego rzędu wzdłuż syberyjskiej magistrali kolejowej, przy czym wzdłuż 52 równoleżnika wykonano pomiar łuku o rozpiętości 106°. Łącznie w ciągu pierwszych 20 lat istnienia Związku Radzieckiego dokonano pomiaru stopnia na 7 łukach południkowych o rozpiętości 112° oraz na 4 łukach równoleżnikowych o łącznej rozpiętości 200°. Liczba pierwszo- i drugorzędnych punktów astronomicznych przewyższyła 1200. Dokładność tych wyznaczeń wynosiła: dla szerokości 0",15—0"20, dla długości 0",03, dla azymutu 0",4—0",5.

W celu topograficznego opracowania terenów trudnostępnych dokonano wielu astronomicznych wyznaczeń na punktach III i IV rzędu. Metody astronomii prak-

tycznej znalazły także zastosowanie w dokonywanych na terytorium Związku Radzieckiego badaniach geograficznych, geologicznych i geofizycznych. Astronomia praktyczna obsłużyła również wielkie tereny rozbudowy radzieckiego przemysłu, energetyki i przeobrażenia krajobrazu, jak: Wołchowstroj, Dnieprostroj, Kanał Białomorski, Kanał Moskiewski, hydroweżeł Kujbyszewa, Stalingradu, Kanał Wołga-Don, Kanał Turkmeński i inne.

W związku z eksploatacją północnych dróg morskich wykonano wiele astronomicznych wyznaczeń na dalekiej Północy, na Nowej Ziemi, Północnej Ziemi, Ziemi Franciszka-Józefa, na wybrzeżu Morza Białego, zatoki Beringa itd.

Również w zadaniach służby aeronawigacyjnej astronomia praktyczna odegrała dużą rolę. Opracowano tzw. Rocznik Lotniczy. Wydano szereg astronomicznych tablic nawigacyjnych. Podczas ekspedycji na Biegun Północny w r. 1936/7 znalazło zastosowanie szereg specyficznych metod astronomicznych, dostosowanych tak do warunków lotu, jak i do wykonywania pomiarów w dużych szerokościach geograficznych. Również i na innych terenach trudno dostępnych astronomowie coraz częściej posługują się samolotami. W ten sposób w ostatnich latach wyspecjalizowało się w Związku Radzieckim grono fachowców w dziedzinie astronomii lotniczej (Bielakow, Danilin i inni).

Epokowym osiągnięciem radzieckiej geodezji były zapoczątkowane w r. 1939 prace nad założeniem i wyrównaniem astronomiczno-geodezyjnej sieci na olbrzymich obszarach Związku Radzieckiego. Prace te, wymagające wieloletniej systematyzacji materiału obserwacyjnego i obliczeniowego, niemałego wkładu badań naukowych, uwzględniania wpływu całego szeregu zjawisk ubocznych (jak ruchów bieguna, nutacji itd.), doprowadziły, jak wiadomo, do wyznaczenia nowej, obowiązującej w ZSRR elipsoidy odniesienia.

Wreszcie w związku z decyzją opracowania dla całego terytorium państwa mapy w skali 1 : 100 000, prowadzone są od roku 1940 masowe prace nad wyznaczeniem punktów astronomicznych III rzędu. Oczywiście w pracach tych zachodzi ścisła koordynacja pomiędzy astronomią praktyczną i aerofotogrametrią.

W ślad za badaniami naukowymi i rozwojem prac polowych astronomowie radzieccy nieustannie opracowują roczniki astronomiczne, katalogi gwiazd oraz liczne tablice pomocnicze. Począwszy od roku 1922 wychodzi „Rocznik Astronomiczny“ (Astronomiczeskij Jeżegodnik); w r. 1941 rozmiary jego znacznie powiększono. O tempie pracy tego wydawnictwa świadczy znamieny fakt, że już w r. 1952 wydrukowano rocznik na 1955, podczas gdy w tym czasie w żadnym innym państwie nie ukazał się jeszcze rocznik na 1954 r. W r. 1926 Astronomiczny Instytut w Leningradzie wydał nowe efemerydy dla par Zingera, zaś w latach 1929—32. dzięki kolektywnej pracy, wydano katalog 500 par Zingera dla epoki 1950 (Raboczije efiemerydy). W r. 1933 ukazał się katalog 1967 gwiazd dla metody Talkotta. W latach trzydziestych rozpoczęto prace nad „Katalogiem słabych gwiazd“, zawierającym 931 gwiazd, których położenie ma być wyznaczone metodami absolutnymi, oraz 20.000 gwiazd — metodami względny. W latach 1932—1948 w rezultacie zbiorowej pracy pięciu obserwatoriów radzieckich opracowano katalog 2957 gwiazd tzw. geodezyjnych.

Niesposób w tym miejscu przytoczyć całego szeregu tablic astronomicznych, instrukcji i tym podobnych pomocniczych wydawnictw. Omówienie przebogatej literatury naukowej i technicznej w zakresie astronomii praktycznej i zagadnień pokrewnych stanowiłoby osobny rozdział. Niezliczona ilość ogłoszonych drukiem prac naukowych, wysokowartościowe podręczniki, periodyki Akademii Nauk (np. „Uspiechi Astronomiczeskich Nauk“, „Astronomiczeskij Żurnał“, „Trudy

Instituta Teoretycznej Astronomii" i inne), liczne biuletyny instytucji („Trudy CNIIGAiK.“ — zeszyty poświęcone zagadnieniom astronomii geodezyjnej, „Trudy GAISz.“ itd.), biuletyny stowarzyszeń (np. „Biuletyn Wszechzwiązkowego Towarzystwa Astronomiczno-Geodezyjnego“), publikacje całego szeregu obserwatoriów z „Trudami“, „Izwestijami“ i innymi publikacjami obserwatorium Pułkowa na czele — wszystkie te i tym podobne wydawnictwa dają wyobrażenie o poziomie nauki i prac astronomicznych w ZSRR.

W ciągu trzydziestolecia rozwoju astronomii radzieckiej powstał szereg instytucji prowadzących wyłącznie prace astronomiczne, wyrosły doświadczone kadry wybitnych specjalistów. Zamiast dwóch — trzech dziesiątków astronomów, wykonujących w Rosji Carskiej nieskoordynowane prace, dzisiaj w Związku Radzieckim pracuje przeszło 200 osób, które mają stopnie naukowe w zakresie nauk astronomicznych. Ludzie ci, działający w dwudziestu kilku ośrodkach naukowych znajdujących się we wszystkich republikach Związku Radzieckiego, wykonują prace zaplanowane i koordynowane przez Astronomiczną Radę Akademii Nauk ZSRR. Wielu z nich położyło wielkie zasługi dla rozwoju praktycznych zagadnień astronomii, a szczególnie astronomii geodezyjnej.

Niesposób jednak wtłoczyć w ramki niniejszego referatu wszystkich nazwisk. Oto z samym tylko imieniem prof. Krasowskiego (1878—1948) wiąże się cała epoka rozwoju podstawowej geodezji radzieckiej. Trudno w kilku słowach streścić przebieg kilkudziesięcioletniego, pracowitego życia tego wielkiego uczonego, autora 120 ogłoszonych drukiem prac, współzałożyciela szeregu instytucji, inicjatora wielu podstawowych poczynań w zakresie geodezji. W latach 1907—1917 Krasowski bierze czynny udział w pracach astronomiczno-geodezyjnych. Z jego inicjatywy powstaje w r. 1929 Naukowo-Badawczy Instytut Geodezji i Kartografii (obecnie CNIIGAiK.). W dwa lata później organizuje on Instytut Inżynierów Geodezji i Kartografii. Krasowski dał schemat programu triangulacji państwowej oraz odegrał rolę inspiratora przy zakładaniu astronomiczno-geodezyjnej sieci państwowej; opracował także teorię wyrównania tej sieci uwzględniając szeroki zakres prac astronomicznych na rozległych obszarach. W r. 1937 opracował zagadnienie badania skorupy Ziemi na podstawie danych astronomii, geodezji i grawimetrii. W r. 1940 pod jego kierunkiem zostaje opracowana nowa elipsoida odniesienia, o wiele lepiej „pasująca“ do terytorium Związku Radzieckiego niż elipsoida Bessela. Krasowski dał także początek geodezji grawimetrycznej. Pod kierunkiem jego wreszcie wyrosło szereg wybitnych pracowników nauki.

Duży wkład w rozwój astronomii praktycznej dali prof. A. Cwietkow i prof. S. Błażko, niestrudzeni pracownicy, autorzy licznych podręczników i długoletni wychowawcy młodych kadr, a także wymienieni w niniejszym referacie: A. Pawłow, A. Michajłow, W. Kawrajski, P. Dołgow, A. Orłow, A. Mazajew, P. Popow i M. Mieszczanski, wreszcie I. Zongołowicz, Iwanow, Kuzniecowa, Smirnow i inni. Wielu spośród nich zostało za wyniki swoich prac wyróżnionych stalinowskimi premiami i orderami.

Wysoki poziom nauk astronomicznych w Związku Radzieckim znajduje dziś uznanie na całym świecie. W ósmym Międzynarodowym Zjeździe Astronomów, który odbył się jesienią ubiegłego roku w Rzymie, wzięła udział 12 osobowa delegacja radziecka; jej przedstawiciel, członek ormiańskiej Akademii Nauk prof. W. Ambarcumian, został obrany jednym z pięciu wiceprzewodniczących Zjazdu, zaś radzieckie propozycje naukowo-organizacyjne były omawiane na posiedzeniach szeregu komisji.

Jednakże nie do pomyślenia byłoby osiągnięcie takich wyników w astronomii oraz zapewnienie jej dalszego pełnego rozwoju bez właściwie postawionej akcji przygotowywania nowych kadr. Kadry te kształcone są na wyższych uczelniach i instytutach, a następnie przez staż i aspirantury — w pracowniach instytutów naukowych i obserwatoriach. Radzieccy uczeni okazują młodym siłom pomoc w zdobywaniu wyższych kwalifikacji naukowych i technicznych.

Z drugiej strony — w celu zainteresowania ogółu społeczeństwa, a w szczególności młodzieży zagadnieniami astronomii — prowadzi się w całym kraju masowe prace popularyzacyjne, wydaje milionowe nakłady wydawnictw popularno-naukowych, produkuje się filmy naukowe, zakłada sieć planetariów. Ważną rolę na tym odcinku spełniają liczne zrzeszenia miłośników astronomii z Wszechzwiązkowym Astronomiczno-Geodezyjnym Towarzystwem na czele. Towarzystwo to, jednoczące w swoich szeregach obok licznych rzesz sympatyków duże grono wybitnych pracowników nauki, wykonuje prace naukowe, przeprowadza dziesiątki tysięcy obserwacji i prowadzi masowe prace popularyzacyjne w zakresie astronomii praktycznej.

BIBLIOGRAFIA

1. K. Cwietkow, *Astronomia Praktyczna* (Prakticzeskaja Astronomija), Moskwa 1951.
2. S. Błażko, *Kurs Astronomii Praktycznej* (Kurs Prakticzeskoj Astronomii), Moskwa—Leningrad 1951;
oraz artykuły opublikowane na łamach wydawnictw:
 - a) „Uspiechi Astronomiczeskich Nauk“, t. V, 1951,
 - b) „Astronomiczeskij Żurnał“, t. XXIX, z. 6, 1952,
 - c) „Biulletień Wsiesojuznogo Astronomo-Geodieziczeskogo Obszczestwa“, nr 1 (1947), 3 (1948), 8 (1950), 10 (1951).

SPIS TREŚCI

	str.
<i>Franciszek Biernacki</i> — O zenitalnych i azymutalnych odwzorowaniach kartograficznych	69
<i>Stanisław Milbert</i> — Transformacja współrzędnych geograficznych	79
<i>Tadeusz Kluss</i> — Zamiana współrzędnych katastralnych na obszarze Małopolski na współrzędne Gaussa-Krügera w systemie Borowej Góry	97
<i>Ludostaw Cichowicz</i> — Rozwój i stan współczesny astronomii praktycznej w Związku Radzieckim	117

СОДЕРЖАНИЕ

Ф. Берн а ц к и — Зенитальные и азимутальные картографические проекции	69
С. М и л ь б е р т — Трансформация географических координат	79
Т. К л ю с с — Трансформирование кадастровых координат в систему координат Гаусса-Крюгера с начальным пунктом Борова-Гура	97
Л. Ц и х о в и ч — Развитие и современное состояние практической астрономии в СССР	117

SOMMAIRE

F. <i>Biernacki</i> — De projections cartographiques zénithales et azimuthales	69
S. <i>Milbert</i> — La transformation des coordonnées géographiques	79
T. <i>Kluss</i> — La transformation des coordonnées cadastrales en coordonnées de Gauss-Krüger dans le système de Borowa Góra	97
L. <i>Cichowicz</i> — Le développement et l'état contemporain d'astronomie pratique en l'U.R.S.S.	117

PRENUMERATA CZASOPISM NAUKOWYCH

Nazwa Czasopisma	Za 1 nr. zł	Pół- rocznie zł	Rocznie zł
Acta Microbiologica Polonica kwart. . . .	10.—	20.—	40.—
Acta Physica Polonica „ . . .	12.—	24.—	48.—
Ekonomista „ . . .	15.—	30.—	60.—
Folia Biologica „ . . .	12.—	24.—	48.—
Geodezja i Kartografia „ . . .	6.50	13.—	26.—
Kwartalnik Inst. Pol.-Radz. „ . . .	10.—	20.—	40.—
Kwartalnik Historyczny „ . . .	15.—	30.—	60.—
Myśl Filozoficzna „ . . .	15.—	30.—	60.—
Nauka Polska „ . . .	20.—	40.—	80.—
Postępy Fizyki „ . . .	10.—	20.—	40.—
Przegląd Geograficzny „ . . .	7.—	14.—	28.—
Przegląd Orientalistyczny „ . . .	12.—	24.—	48.—
Roczniki Chemii „ . . .	20.—	40.—	80.—
Chrońmy Przyrodę Ojczyzną (dwum.) . . .	3.—	9.—	18.—
Życie Szkoły Wyższej (mies.) . . .	8.—	48.—	96.—
Wszechświat (10 x w roku) . . .	1,50	7.50	15.—

Wpłaty należy przekazywać na konto Państwowego Wydawnictwa Naukowego
w PKO Warszawa, Nr 1—110—28504 z dokładnym zaznaczeniem tytułu, którego
wpłata dotyczy.

*

Prenumeraty zgłoszone dotychczas w placówkach pocztowych lub w P. P. K.
Ruch, będą wykonane w okresach, na które uiszczono przedpłaty, natomiast
odnowienia prenumeraty należy dokonać przez podane wyżej konto PKO.

*

Pojedyncze numery są do nabycia w Księgarniach Naukowych

„DOMU KSIĄŻKI”



ERRATA DO ZESZYTU 2, TOMU II, „GEODEZJI I KARTOGRAFII”

str.	wiersz od góry	wiersz od dołu	jest	powinno być
86		19	$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{10}{\rho''} +$	$\frac{\partial F}{\partial \alpha} \frac{10}{\rho''} =$
88		3	Rugowanie s, a	Rugowanie s, a
89		15	$\varphi_1' + v = \varphi + D\varphi$	$\varphi_1' + v = \varphi' + D\varphi$
89		13	$v = D\varphi + (\varphi' + \varphi_1')$	$v = D\varphi + (\varphi' - \varphi_1')$
94		1	20 03 12,4851	20 03 13,4851
104	14		obliczone	ułożone
105			opuszczono numerację rysunku	Rys. 1
120		15	Fotogrametrii	Aerofotogrametrii



**PIERWSZY
KONGRES NAUKI
POLSKIEJ**

str. 296

zł 38,—

**PAŃSTWOWE
WYDAWNICTWO NAUKOWE**