

A 1911 I

P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
K O M I T E T   G E O D E Z J I

---

**G E O D E Z J A  
I K A R T O G R A F I A**

K W A R T A L N I K   N A U K O W Y  
T O M   I I I   •   Z E S Z Y T   1

P A Ń S T W O W E  
W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E  
W A R S Z A W A  
1   9   5   4



P O L S K A   A K A D E M I A   N A U K  
K O M I T E T   G E O D E Z J I

---

G E O D E Z J A  
I   K A R T O G R A F I A

K W A R T A L N I K   N A U K O W Y

T O M   I I I   •   Z E S Z Y T   1



P A Ń S T W O W E  
W Y D A W N I C T W O   N A U K O W E

W A R S Z A W A

1   9   5   4

**KOMITET REDAKCYJNY**

**Jan Różycki (redaktor naczelny), Bronisław Dzikiewicz (za-  
stępca redaktora), Marian Brunon Piasecki (sekretarz)**

**RADA REDAKCYJNA**

**Franciszek Biernacki, Tadeusz Kochmański, Zygmunt Kowalczyk,  
Stanisław Kryński, Henryk Leśniok, Janusz Tymowski**

**Adres Redakcji: Politechnika Warszawska,  
Warszawa, Pl. Jedności Robotniczej 1**

**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — W A R S Z A W A 1954**

Nakład 809 + 113	Oddano do składania 18/XII. 1953
Ark. wyd. 3,6, druk. 2,75	Podpisano do druku 22/II. 1954
Papier dr. sat. 70 g 70 × 100/16 V kl.	Druk ukończono 26/II. 1954
Cena zł 10,—	Zam. Nr 937/183 — K-5-10125

**POZNAŃSKA DRUKARNIA NAUKOWA — POZNAŃ, FREDRY 10**

A. Łobanow, M. Konszyn

Moskwa

## Metody sporządzania map topograficznych na podstawie zdjęć lotniczych i zasad fotogrametrii

Aerofotogrametria w Związku Radzieckim rozwija się w ścisłym związku z rozwojem całej gospodarki narodowej. Bodźcem, który zapoczątkował rozwój aerofotogrametrii, był znany dekret W. I. Lenina o utworzeniu Wyższego Urzędu Geodezyjnego dla kartografowania obszaru Związku w celu podniesienia i rozwoju wytwórczych sił kraju oraz zaoszczędzenia sił technicznych, środków pieniężnych i czasu. Przy rozwiązaniu zadania postawionego przez W. I. Lenina geodeci radzieccy zwrócili szczególną uwagę na aerofotogrametrię, której stosowanie rozpoczęło się właśnie od tego czasu.

Początkowo aerofotogrametria w ZSRR była stosowana do sporządzania fotoplanów sytuacyjnych na osnowie współrzędnych geodezyjnych czterech punktów, zidentyfikowanych na każdym zdjęciu. Jednakże rozwój gospodarki narodowej podczas pierwszej pięcioletki stalinowskiej postawił przed aerofotogrametrią zadanie skrócenia terminów kartografowania i wysunął nowe żądania co do treści i jakości otrzymywanej mapy. Wymagania te doprowadziły do opracowania w ZSRR kombinowanej metody zdjęcia aerofototopograficznego. Metoda kombinowana pozwoliła na zredukowanie ilości polowych prac geodezyjnych i na sporządzenie pełnowartościowej mapy topograficznej z warstwicami. Dalszy nieprzerwany wzrost gospodarki narodowej wymagał jak najszybszego sporządzenia map topograficznych w skali 1 : 100 000 dla całego obszaru Związku Radzieckiego. Dla zapewnienia realizacji tego zadania opracowano w ZSRR stereofotogrametryczną metodę zróżnicowaną oraz różne sposoby fotogrametrycznego zagęszczenia osnowy wysokościowej. W wyniku szerokiego zastosowania tych sposobów osiągnięto duże sukcesy w kartografowaniu obszaru Związku Radzieckiego w skalach 1 : 50 000 i 1 : 100 000.

Olbrzymi stalinowski plan przeobrażenia przyrody — wielkie budowle komunizmu — wymagają sporządzenia map w dużej skali dla znacznych obszarów i w krótkim terminie. Zadania te rozwiązuje się obecnie na podstawie zdjęć lotniczych i fotogrametrii.

Z podanego wyżej krótkiego przeglądu widać, że aerofotogrametria w ZSRR służy potrzebom gospodarki narodowej i pokojowego budownictwa w ramach ogólnego systemu planowania gospodarki narodowej. Tu tkwi istotna różnica w porównaniu z krajami kapitalistycznymi, w których aerofotogrametria służy interesom agresywnej, imperialistycznej polityki. Nie jest to przypadkiem, że Stany Zjednoczone Ameryki kartografują obszary krajów kolonialnych i półkolonialnych, uważanych przez nich za bazy wypadowe agresywnych przedsięwzięć, a nie zajmują się zdjęciami swoich terenów macierzystych.

Szybkie tempo rozwoju gospodarki narodowej ZSRR doprowadziło do wspaniałego rozwoju teorii i techniki fotogrametrii, która wyprzedziła w wielu dziedzinach osiągnięcia przodujących krajów kapitalistycznych. Opracowywanie zagadnień zdjęć lotniczych było przy tym podporządkowane zadaniu jak największego zredukowania zakresu polowych prac topograficzno-geodezyjnych jako najbardziej kosztownych i hamujących wydajność pracy przy sporządzaniu mapy topograficznej.

Szybki i nieprzerwany rozwój fotogrametrii tłumaczy się i tym, że w Związku Radzieckim praca naukowa jest ściśle związana z produkcją i że cały kolektyw pracowników produkcji aerofotogeodezyjnej bierze udział w doskonaleniu i dalszym rozwijaniu tej dyscypliny. Duże znaczenie przy jej szybkim opanowywaniu ma stosowanie nowych metod i przyrządów oraz odpowiednie wykorzystywanie doświadczeń przodujących robotników-stachanowców, pozwalające na wprowadzenie zmian do procesu technologicznego i do organizacji prac, co podnosi wydajność i zapewnia wysoką jakość produkcji.

Wielkie znaczenie dla rozwoju fotogrametrycznych metod sporządzania map mają prace teoretyczne uczonych radzieckich: zasłużonego działacza nauki i techniki RSFR N. M. Aleksapolskiego, członka-korespondenta Akademii Nauk ZSRR M. G. Kiella, prof. F. W. Drobyszewa, prof. M. N. Korszyna, prof. N. A. Urmajewa, prof. G. W. Romanowskiego, prof. A. S. Skirydowa i innych.

#### *Wykonywanie zdjęć lotniczych*

Wykonawstwu zdjęć lotniczych stawia się z jednej strony żądanie, aby były one najwyższej jakości i odpowiedniej dokładności, z drugiej zaś strony — aby jak najdokładniej spełniły postawione warunki co do pokrycia obszaru. Podstawowym wymaganiem jest jak największa dokładność wyniku końcowego (opracowanej mapy) przy jak najmniejszym zasięgu polowej osnowy geodezyjnej i jak największej prostocie opracowania fotogrametrycznego.

Zgodnie z tym zdjęcia lotnicze w ZSRR są wykonywane zawsze przy założeniu pionowego kierunku osi optycznej fotoaparatu; zdjęć ukośnych

nie stosuje się. Z tej przyczyny używa się tylko fotoaparatów jednoobiektywowych, a poprzednio używane wieloobiektywowe nie znajdują dziś zastosowania.

Do uzyskania możliwie największej dokładności zdjęć stosuje się jednoobiektywowe kamery lotnicze z dostatecznie wielkim kątem pola widzenia. Obecnie stosuje się obiektywy konstrukcji M. M. Rusinowa z kątem pola widzenia  $60^{\circ}$ ,  $100^{\circ}$  i  $120^{\circ}$  (za granicą obiektywy z kątem pola widzenia  $100^{\circ}$  zostały wyprodukowane przez firmę Zeiss dopiero w dwa lata po wyprodukowaniu obiektywów radzieckich, a przez firmę amerykańską dopiero 5 lat później. Obiektywów z kątem widzenia  $120^{\circ}$  do chwili obecnej nigdzie więcej nie wyprodukowano).

Obiektywy wmontowane w aerofotoaparaty (kamery lotnicze) typu „Topograficzskij elektriczeskij“ odznaczają się wysokimi zaletami pomiarowymi. W odróżnieniu od szeregu aerofotoaparatów zagranicznych (np. amerykańskich typu K-17B i innych) w aerofotoaparatach radzieckich płyta wyrównująca umieszczona jest w korpusie kamery, co daje gwarancję zachowania elementów orientacji wewnętrznej przy zmianie kaset. Standardowy wymiar zdjęć wynosi  $18 \times 18$  cm.

Przy zdjęciach lotniczych stosuje się samoloty o szybkości przelotowej do 350 km/godz.

Pokrycie zdjęć zakłada się na 60% w kierunku podłużnym (w celu zapewnienia fotogrametrycznego zagęszczenia osnowy poziomej i stereofotogrametrycznego opracowania rzeźby terenu) i na 30—40% w kierunku poprzecznym. Dla zapewnienia wzajemnej równoległości szeregów stosuje się kompasy słoneczno-cieniowe konstrukcji A. P. Lubimowa.

Długości szeregów ustala się w zależności od skali sporządzanej mapy, lecz nie mniejsze od poczwórnej szerokości trapezu arkusza odpowiedniej skali. Skalę zdjęcia obiera się zwykle około półtora raza mniejszą od skali sporządzanej mapy, z wyjątkiem zdjęć w skali 1 : 100 000 i 1 : 50 000, przy których, odwrotnie, skala zdjęcia jest półtora raza większa niż skala mapy (dla odczytania drobnych obiektów).

Samoloty do zdjęć lotniczych należy wyposażyć w statoskopy i wysokościomierze. Statoskop, oparty na zasadzie podanej przez wielkiego uczonego rosyjskiego D. I. Mendelejewa, pozwala na pomiar różnicy ciśnień w punktach fotografowania w odniesieniu do jednego z nich, przyjętego za wyjściowy, a tym samym wyznacza różnicę wysokości lotu.

Oprócz statoskopu na samolocie ustawiony jest wysokościomierz, który rejestruje rzeczywiste wysokości lotu w stosunku do terenu. Wskazania wysokościomierza fotografują się jednocześnie ze zdjęciem terenu i wskazaniami statoskopu, co umożliwia określenie skali dla każdego zdjęcia.

Obecnie przy wykonywaniu zdjęć w skalach 1 : 25 000 i 1 : 10 000 należy zalecić stosowanie jednoobiektywowych aerofotoaparatów typu „To-

pograficzeskij-elektriczeskij“, wyposażonych w obiektywy prof. M. M. Rusinowa o ogniskowej 70, 100 i 200 mm przy formacie zdjęcia  $18 \times 18$  cm. Zdjęcia lotnicze należy wykonywać bezwzględnie z rejestrowaniem wskazań statoskopu i wysokościomierza przy zastosowaniu kompasów słoneczno-cieniowych. Pokrycie podłużne należy przyjąć jako równe 60%, poprzeczne zaś — 30—40%. Skalę zdjęć należy ustalać w zależności od charakteru kartografowanego terenu oraz skali sporządzanej mapy, mniej więcej półtora raza mniejszą niż skala mapy.

#### *Fotogrametryczne zagęszczenie osnowy geodezyjnej*

Jak już wyżej wspomniano, podstawowa tendencja technicznego rozwoju aerofotogrametrii sprowadza się do możliwie jak największego zmniejszenia zakresu polowych prac geodezyjnych i do zastąpienia ich pracami kameralnymi. Dlatego też metody fotogrametrycznego zagęszczenia polowej osnowy geodezyjnej mają dominujące znaczenie we współczesnej produkcji aerogeodezyjnej.

Obecnie w Związku Radzieckim znajdują zastosowanie trzy grupy sposobów zagęszczenia fotogrametrycznego. W pierwszej grupie wyznacza się jednocześnie wszystkie trzy współrzędne przestrzenne, tzn. położenie poziome i cechy wysokości punktów. Sposoby tej grupy stosują się przy kartografowaniu rejonów górskich. Do drugiej grupy należą sposoby pozwalające na wyznaczenie tylko cech wysokości sfotografowanych punktów. Do trzeciej grupy należą takie sposoby, które pozwalają wyznaczyć tylko położenie sytuacyjne fotografowanych punktów. Sposoby tej grupy mają zastosowanie bądź to samodzielnie przy kombinowanej metodzie sporządzania mapy, bądź też w połączeniu ze sposobami drugiej grupy przy stereofotogrametrycznej metodzie sporządzania map terenów równinnych lub pagórkowatych. Należy zauważyć, że wykorzystanie wskazań statoskopu i wysokościomierza przy fotogrametrycznym zagęszczeniu pozwala na znaczne podniesienie dokładności sieci fotogrametrycznych.

Wyznaczenie wszystkich trzech współrzędnych przestrzennych dla sfotografowanych punktów osiąga się sposobem opartym na zastosowaniu multipleksu i sposobem nieskażonego modelu.

Rozwinięcie przestrzennej sieci fototriangulacyjnej na multipleksie sprowadza się do wykonania szeregu kolejnych etapów pracy na jednym i tym samym przyrządzie. W ZSRR skonstruowano multipleksy pozwalające na opracowanie zdjęć o różnych ogniskowych, włączając w to i 70 mm, co odpowiada kątowi  $120^\circ$  pola widzenia kamery rzutującej. Należy nadmienić, że w ZSRR opracowano metodę wykorzystania zdjęć z przekształceniem wiązek promieni rzutujących (prace prof. Korszyna i innych). Konieczność takiego przekształcenia powstaje wtedy, gdy kąt pola widzenia kamery rzutującej nie odpowiada kątowi pola widzenia kamery do zdjęć.



Metoda nieskażonego modelu oparta jest na wyznaczeniu poprawki do pomierzonej różnicy paralaks podłużnych na podstawie paralaksy poprzecznej.

Fotogrametryczne zagęszczenie samej tylko osnowy poziomej wykonuje się obecnie sposobami fotopoligonometrii i fototriangulacji. Największe zastosowanie znalazł sposób fotopoligonometrii oparty na wykorzystaniu wskazań wysokościomierza. Przy tym sposobie wyznacza się najpierw położenie poziome wszystkich wierzchołków ciągu, z których za pomocą wcięć znajduje się następnie położenie punktów do przetwarzania.

Sposób triangulacji poziomej znalazł zastosowanie w graficznym wariancie dla oddzielnych szeregów.

Do drugiej grupy sposobów, pozwalających na wyznaczenie tylko cech wysokości sfotografowanych punktów, należą: zróżnicowany sposób fototriangulacji przestrzennej, sposób linii prostej i sposób dowiązywania (przedłużania) na stereometrze.

W zróżnicowanym sposobie fototriangulacji przestrzennej cały proces zagęszczenia osnowy wysokościowej podzielony jest na szereg etapów, z których każdy wykonuje się oddzielnie. Etapy te są następujące: wyznaczenie elementów orientacji wzajemnej, obliczenie kątów nachylenia zdjęć w stosunku do jednej płaszczyzny nachylonej, pomiar różnic paralaks podłużnych, wprowadzenie do nich poprawek na kąty nachylenia zdjęć, obliczenie przewyższeń (różnic wysokości) i zewnętrzna orientacja modeli.

Sposób linii prostej polega na wybraniu trzech lub więcej punktów położonych na linii prostej, w przybliżeniu prostopadłej do bazy na jednym ze zdjęć, oraz na pomiarze odchylenia trzeciego punktu od prostej łączącej dwa pozostałe punkty na drugim zdjęciu. Odchylenie trzeciego punktu wyraża różnicę paralaks podłużnych, na podstawie której oblicza się jego przewyższenie w stosunku do prostej przestrzennej, łączącej dwa pozostałe punkty terenu. W chwili obecnej sposób linii prostej ma stosunkowo ograniczone zastosowanie.

Sposób dowiązywania (przedłużania) na stereometrze pozwala na wykonanie zagęszczenia osnowy wysokościowej w drodze kolejnego orientowania zdjęć na stereometrze.

W ten sposób w ZSRR opracowano dość dużą ilość sposobów fotogrametrycznego zagęszczenia osnowy poziomej i wysokościowej. Wszystkie te sposoby znajdują zastosowanie w zależności od skali sporządzanej mapy, fizyczno-geograficznych warunków kartografowanego terenu oraz szeregu innych czynników.

Zgodnie z powyższym w praktyce zagęszczenie osnowy poziomej w terenach pagórkowatych i równinnych należy wykonywać sposobem foto-

poligonometrii przy wykorzystaniu znanej skali zdjęć. W rejonach górskich zagęszczenie osnowy poziomej zaleca się przeprowadzać na multipleksie z wykorzystaniem wskazań przyrządów rejestrujących w czasie lotu elementy orientacji zewnętrznej. Zagęszczenie wysokościowe rejonów górzystych najlepiej przeprowadzać na multipleksie albo sposobem nieskażonego modelu; w rejonach pagórkowatych — sposobem zróżnicowanym fototriangulacji przestrzennej, a w rejonach równinnych — sposobem dowiązywania na stereometrze.

#### *Metody sporządzania oryginału mapy na podstawie zdjęć lotniczych*

W ZSRR stosowane są dwie podstawowe metody sporządzania oryginału mapy na podstawie zdjęć lotniczych: kombinowana i zróżnicowana. Metody te zostały opracowane przez uczonych radzieckich.

Przy metodzie kombinowanej kontury sytuacji na mapie otrzymuje się w wyniku fotomechanicznego lub optycznego przetwarzania pojedynczych zdjęć, a rzeźbę terenu zdejmuje się w polu posługując się metodami zdjęć stolikowych. Przy metodzie zróżnicowanej sytuację nanosi się na mapę w drodze przetwarzania optycznego pojedynczych zdjęć, a rzeźbę terenu zdejmuje się stereoskopowo za pomocą specjalnego przyrządu zwanego stereometrem.

#### *Metoda kombinowana*

Kombinowana metoda zdjęcia aerofototopograficznego została opracowana w roku 1924 pod kierunkiem zasłużonego działacza nauki i techniki RSFRR prof. N. M. Aleksapolskiego.

Zdjęcie przy tej metodzie przeprowadza się albo na fotoplanach, albo na pojedynczych odbitkach. Fotoplany zestawia się w tych przypadkach, kiedy błędy ze względu na rzeźbę terenu dla punktów leżących w obrębie roboczej powierzchni zdjęcia nie powodują na mapie błędów większych niż 0,4 mm.

Punkty oporowe, niezbędne do przetwarzania zdjęć i zestawienia fotoplanów, otrzymuje się w wyniku założenia sieci pomiarowej w polu i późniejszego jej zagęszczenia sposobami fotogrametrycznymi.

Przy zdjęciu na fotoplanach podstawowe procesy metody kombinowanej są następujące:

- 1) sporządzenie projektu technicznego,
- 2) polowe przygotowanie zdjęć,
- 3) zagęszczenie oporowej sieci poziomej,
- 4) przetworzenie zdjęć i zestawienie fotoplanów,
- 5) zdjęcie rzeźby terenu na fotoplane i odczytanie sytuacji.

Projekt techniczny sporządza się na mapie lub na reprodukcji prowizorycznego montażu zdjęć. Sporządzenie projektu technicznego powinno być poprzedzone starannym przestudiowaniem materiałów fotolotniczych i innych materiałów kartograficznych odnoszących się do obszaru prac. Na podstawie tych materiałów sporządza się na mapie lub też na reprodukcji prowizorycznego montażu projekt sieci poziomej i wysokościowej.

Punkty oporowe osnowy poziomej są niezbędne do redukcji sieci fotogrametrycznych. Odległości między tymi punktami zależą od skali zdjęcia oraz od jakości materiału aerofotogrametrycznego i dokładności fotogrametrycznego sposobu zagęszczenia sieci oporowej; projektuje się zastosowanie tego sposobu przy kameralnym opracowaniu zdjęć.

Punkty oporowe osnowy wysokościowej są niezbędne dla zdjęcia rzeźby terenu. Punkty te wyznacza się na podstawie punktów niwelacyjnych i geodezyjnych, istniejących na terenie robót. Odległość od dowolnego punktu na arkuszu mapy do najbliższego punktu wysokościowego nie powinna na mapie przekraczać 8 cm w terenie otwartym i 12 cm — w zakrytym. Przy projektowaniu osnowy wysokościowej zaznacza się trasy poligonów wysokościowych, trasy ciągów i położenie punktów odosobnionych.

Wybór sposobu wyznaczania punktów oporowych zależy w głównej mierze od fizyczno-geograficznych warunków kartografowanego rejonu. W terenie otwartym sieć oporową rozwija się w drodze wcięć z punktów triangulacyjnych. W terenie zakrytym wykonanie osnowy przeprowadza się za pomocą ciągów teodolitowych lub ciągów stolikowych, prostopadle do kierunku szeregow.

Prace polowe rozpoczyna się od wywiadu w terenie, co jest niezbędne dla podniesienia dokładności projektu technicznego oraz sporządzenia planu prac. Następnie, zgodnie z projektem technicznym, prowadzi się pomiary polowe i obliczenia, w wyniku których otrzymuje się współrzędne polowych punktów oporowych. Punkty oporowe odczytuje się i zaznacza na fotozdjęciach.

Zagęszczanie sieci oporowej sytuacyjnej wykonuje się bądź za pomocą fototriangulacji graficznej, bądź przy użyciu multipleksu, bądź też sposobem fotopoligonometrii.

Do przetwarzania fotozdjęć używa się różnych przetworników. Oryginalne konstrukcje przetworników zostały opracowane przez profesora N. M. Aleksapolskiego i P. P. Sokołowa.

Zdjęcie rzeźby terenu na fotopłanie przeprowadza się za pomocą stolika i kierownicy — wysokościomierza konstrukcji G. J. Stodołkiewicza. Równocześnie ze zdjęciem rzeźby terenu prowadzi się od-

czytywanie sytuacji. Na fotoplan nanosi się przy tym nieodtworzone przedmioty terenowe oraz przeprowadza się generalizację obrazu sytuacyjnego.

Z fotoplanu sporządza się niebieską odbitkę w odpowiedniej skali, a po wykreśleniu jej otrzymuje się oryginał arkusza mapy.

#### *Metoda zróżnicowana i metoda uniwersalna*

Zróżnicowana metoda zdjęcia aerofototopograficznego opracowana została w Centralnym Naukowo-Badawczym Instytucie Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii w latach 1932—1938 przez zespół uczonych, profesorów: F. W. Drobyszewa, M. D. Korszyna, G. W. Romanowskiego, a także przez G. P. Żukowa, N. P. Kalikowa, G. D. Kraszennikowa i innych. Metoda zróżnicowana w odróżnieniu od metody kombinowanej pozwala otrzymywać na podstawie fotozdzjęć nie tylko sytuację, lecz także i rzeźbę terenu. Poniżej podajemy opis tej metody.

Na odbitkach stykowych, otrzymanych z negatywów zdjęć lotniczych, rysuje się warstwice za pomocą stereometru i wykreśla się kontury sytuacji. Następnie warstwice i sytuację przenosi się z fotozdzjęć na planszet za pomocą projektora optycznego drogą przetwarzania pojedynczych zdjęć według stref.

W ten sposób do wykreślenia rzeźby terenu nie trzeba uprzednio przetwarzać nachylonych zdjęć lotniczych. Stanowi to wielką zaletę radzieckiej metody zróżnicowanej w stosunku do amerykańskiej metody Brokka, która polega na uprzednim dokładnym przetworzeniu zdjęć.

Dla orientowania zdjęć na stereometrze niezbędne jest posiadanie 4—6-oporowych punktów wysokościowych na każdej stereoparze, a dla przetwarzania zdjęć — 4 oporowych punktów osnowy poziomej na każdym fotozdzjęciu.

Podstawowe procesy metody zróżnicowanej są następujące:

- 1) sporządzenie projektu technicznego;
- 2) polowe przygotowanie fotozdzjęć;
- 3) zagęszczenie sieci oporowej;
- 4) zdjęcie rzeźby terenu na stereometrze;
- 5) sporządzenie mapy.

Projekt techniczny sporządza się na mapie lub na reprodukcji prozjorycznego montażu zdjęć. Na projekcie zaznacza się punkty trygonometryczne istniejących w rejonie robót, a także oporowe punkty osnowy poziomej i wysokościowej, podlegające wyznaczeniu w polu. Oprócz tego ustala się sposoby polowego przygotowania fotozdzjęć i wyznacza się kolejność wykonywania prac polowych. Odległości między punktami oporowymi zależą w głównej mierze od skali mapy.

Przygotowanie polowe fotozdzjęć składa się z wyznaczenia położenia punktów oporowych w stosunku do punktów triangulacyjnych i niwelacyjnych, z odczytania fotozdzjęć i z zebrania informacji w celu topograficznego opisu rejonu robót. Jako punkty oporowe obiera się punkty sytuacyjne. Punkty te odczytuje się i oznacza na fotozdzjęciach. Na podstawie odczytania w polu wykreśla się na fotozdzjęciach sytuację, która ma być przedstawiona na mapie. Odczytywanie polowe fotozdzjęć może być zupełne lub częściowe w zależności od skali zdjęcia i charakteru terenu. Na przykład przy zdjęciach w skali 1 : 100 000 w rejonach trudno dostępnych odczytuje się fotozdzjęcia lotnicze tylko dla charakterystycznych fragmentów terenu otrzymując w ten sposób wzorce. Pozostałe fotozdzjęcia odczytuje się w warunkach kameralnych według wzorców.

Zagęszczenie sieci oporowej wykonuje się różnymi sposobami:

- 1) sposobem zróżnicowanym Centralnego Naukowo-Badawczego Instytutu Geodezji, Aerofotogrametrii i Kartografii,
- 2) sposobem nieskażonego modelu,
- 3) sposobem fototriangulacji przestrzennej na przyrządach uniwersalnych.

Wybór tego czy innego sposobu określają takie czynniki, jak: rzeźba terenu, kąty nachylenia fotozdzjęć, posiadane przyrządy fotogrametryczne, przygotowanie kadr itd.

Zdjęcie rzeźby terenu przeprowadza się na stereometrze prof. F. N. Drobyszewa. Stereometr jest przyrządem oryginalnym w rodzaju stereokomparatora z urządzeniami korekcyjnymi, które automatycznie wprowadzają poprawki do pomierzonych różnic paralaks podłużnych. Dzięki temu pomierzone na stereometrze różnice paralaks podłużnych odnoszą się do normalnego przypadku zdjęcia, to znaczy, że są one wolne od wpływu kąta nachylenia fotozdzjęć i różnic wysokości fotografowania. Na podstawie pomierzonych na stereometrze różnic paralaks podłużnych można szybko obliczyć wysokości punktów terenu. Opracowanie fotozdzjęć na stereometrze polega na zorientowaniu stereogramu i wykreśleniu warstwicy.

Sporządzenie mapy polega na optycznym przetworzeniu fotozdzjęć za pomocą projektora. Z fotozdzjęć, na których są zarysowane warstwice i wykreślona sytuacja, sporządza się diapozytywy i rzutuje się je na planszet. Przetwarzanie fotozdzjęć przeprowadza się według punktów oporowych. Sytuację i warstwice przenosi się na planszet według stref. Wysokość strefy ustala się w ten sposób, aby błędy ze względu na rzeźbę terenu nie przekraczały na mapie 0,4 mm.

Metodę zróżnicowaną stosuje się szeroko przy sporządzaniu map w różnych skalach, a zwłaszcza przy sporządzaniu mapy w skali 1 : 100 000. Tłumaczy się to następującymi zasadniczymi zaletami metody zróżnicowanej:

1) szerokim zróżnicowaniem procesów, co pozwala na szybkie sporządzanie mapy dzięki jednoczesnej pracy licznych wykonawców;

2) możliwością opracowywania na przyrządach, stosowanych przy metodzie zróżnicowanej, zdjęć otrzymanych za pomocą dowolnych kamer lotniczych;

3) prostą budową przyrządów, co pozwala stosować je nie tylko w warunkach kameralnych, lecz i polowych;

4) możliwością zastosowania nieskomplikowanych sposobów wykorzystania wskazań statoskopu i innych elementów orientacji zewnętrznej zarejestrowanych w czasie lotu.

W rejonach górzystych mapy sporządza się metodą uniwersalną na multipleksach, pozwalających na przeprowadzenie zdjęcia sytuacji i rzeźby terenu.

#### *Zastosowanie metod aerofototopograficznych do sporządzania map w różnych skalach*

Wyżej wymienione metody fotogrametryczne stosuje się w ZSRR do sporządzania map w różnych skalach — od 1 : 2 000 do 1 : 100 000. Dla tych map przyjęto następujące wartości stopnia warstwicowego:

<i>Skala mapy</i>	<i>Stopień warstwicowy</i> (w metrach)
1 : 5 000	1; 2; 5
1 : 10 000	1; 2,5; 5
1 : 25 000	5
1 : 50 000	10
1 : 100 000	20

Dokładności map sporządzanych w terenach zagospodarowanych stawia się następujące podstawowe wymagania:

1) błędy wyznaczenia położenia опорowych sytuacyjnych nie powinny przekraczać 0,2 mm na mapie w terenie otwartym i 0,4 mm w terenie zakrytym;

2) błędy punktów osnowy wysokościowej nie powinny przekraczać stopnia warstwicowego w terenach równinnych i  $\frac{1}{3}$  stopnia warstwicowego w rejonach górzystych;

3) graniczny błąd w położeniu warstwicy wynosi  $\frac{1}{3}$  stopnia warstwicowego, jeżeli kąty nachylenia w terenie wynoszą od 2 do 6°.

Metody fotogrametryczne zapewniają spełnienie tych wymagań.

*Mapa 1 : 5000.* Zdjęcie w skali 1 : 5000 wykonuje się metodą kombinowaną, zróżnicowaną lub uniwersalną.

Zdjęcia lotnicze wykonuje się w rejonach górzystych aerofotoaparatami o ogniskowej 200 mm, a w rejonach równinnych i pagórkowatych

aerofotoaparatach o ogniskowej 70 lub 100 mm. Skala zdjęć wynosi około 1 : 8000.

Przy zdjęciu metodą kombinowaną wykonuje się tylko poziome dowiązanie zdjęć, a osnowę wysokościową tworzy się jednocześnie z rysunkiem rzeźby terenu. Przy zdjęciu metodą zróżnicowaną i uniwersalną wykonuje się dowiązanie zdjęć zarówno sytuacyjne, jak i wysokościowe.

Punkty oporowe osnowy poziomej zaznacza się w strefie poprzecznego pokrycia zdjęć. Odległości między tymi punktami wynoszą 3÷5 krótszej długości bazy przy fototriangulacji graficznej i 6÷7 krótszej długości bazy przy zakładaniu sieci poziomej na stereoplanigrafie lub przy sposobie fotopoligonometrii.

Dla każdego stereogramu wyznacza się cechy wysokości (koty) 4 punktów. Wyjątek stanowią tereny górzyste, dla których wyznacza się 4 punkty wysokościowe dla dwóch przyległych stereogramów.

Odczytywanie zdjęć wykonuje się w polu.

Mapę sporządza się na stereometrze i projektorze, jeżeli teren jest pagórkowaty, lub na multipleksie, jeżeli teren jest górzisty.

*Mapa 1 : 10 000.* Zdjęcie w skali 1 : 10 000 wykonuje się metodą kombinowaną oraz zróżnicowaną.

Zdjęcia aerofoto wykonuje się w skali 1 : 15 000 ÷ 1 : 17 000 za pomocą aerofotoaparatów o formacie zdjęć 18×18 cm. Przy zdjęciu terenów równinnych stosuje się aerofotoaparaty o ogniskowej 70 lub 100 mm; dla pozostałych terenów — aerofotoaparaty o ogniskowej 100 lub 200 mm.

W punkty oporowe osnowy poziomej zaopatruje się każdy szereg. Odległości między tymi punktami w kierunku szeregu nie przekraczają 9 km, jeżeli zagęszczenie osnowy poziomej wykonuje się na stereoplanigrafie lub sposobem fotopoligonometrii, bądź 7 km, jeżeli fototriangulację wykonuje się na multipleksie. W przypadku zastosowania fototriangulacji graficznej odległości pomiędzy punktami oporowymi osnowy poziomej nie powinny przekraczać 5 km.

Niekiedy punkty osnowy poziomej rozkłada się równomiernie na całym terenie zdejmowanego odcinka, lecz dowolnie w stosunku do szeregów. W tym przypadku graniczne odległości między tymi punktami zmniejsza się półtora raza w porównaniu z wymienionymi powyżej. Za osnowę wysokościową służą 4 punkty, położone w rogach każdego stereogramu.

Jeżeli zdjęcie wykonuje się metodą kombinowaną, wówczas rozkład wysokościowych punktów oporowych ustala się w zależności od charakteru terenu i przyjętego stopnia warstwicowego. Przy zdjęciu o stoniu warstwicowym 5 m zakłada się podstawowe ciągi wysokościowe tylko wzdłuż ramek arkusza. Dla zdjęcia o stopniu warstwicowym 2,5 m zakłada się podstawowe ciągi wysokościowe lub rozwija się sieci wyso-

kościowe tak gęsto, aby odległości, wzdłuż których trzeba będzie zakładać ciągi zdjęciowe, nie przekraczały 1,5—2 km.

Jeżeli zdjęcie wykonuje się przy stopniu warstwicyowym 1 m, podstawowe ciągi wysokościowe zakłada się metodą niwelacji geometrycznej.

Mapa 1 : 25 000. Mapy w skali 1 : 25 000 sporządza się jedną z następujących metod: kombinowaną, zróżnicowaną lub uniwersalną.

Zdjęcia lotnicze wykonuje się w skali 1 : 17 000 ÷ 1 : 30 000 za pomocą aerofotoaparatów o ogniskowych 200, 100 lub 70 mm.

Zdjęcie metodą kombinowaną wykonuje się zwykle na fotoplanach. Dla zestawienia fotoplanów wyznacza się co najmniej po 5 punktów osnowy poziomej na każdy arkusz. Punkty te powinny być rozmieszczone po rogach i w środku arkusza.

Dla zróżnicowanej i uniwersalnej metody sporządzania map wyznacza się taką samą ilość sytuacyjnych punktów oporowych. Dla zdjęć terenów górskich punkty osnowy wysokościowej rozmieszcza się na każdym szeregu pośrodku i przy ramkach arkusza. W terenach pagórkowatych punkty osnowy wysokościowej rozmieszcza się w rogach każdego fotozdjęcia.

Współrzędne punktów oporowych osnowy poziomej wyznacza się w wyniku utworzenia sieci triangulacyjnych i założenia ciągów poligonowych; wysokości punktów otrzymuje się drogą niwelacji geometrycznej.

W polu wykonuje się pełne odczytywanie fotozdjęć i zbiera się wiadomości potrzebne do sporządzenia opisu topograficznego rejonu prac.

Zagęszczenie sieci oporowej przeprowadza się metodą nieskażonego modelu lub na stereoplanigrafie.

Do sporządzenia mapy stosuje się multipleks, jeżeli teren jest górzysty, a także stereometr i projektor lub stereoplanigraf, jeżeli teren jest pagórkowaty.

Powyższe metody sporządzania map zostały opracowane szczegółowo i wszechstronnie i są sprawdzone w produkcji. Znalazły one szerokie zastosowanie w ZSRR. Można je zalecić do wielkoskalowego kartografowania jako współczesne metody wykonywania map na podstawie materiałów aerofoto.

Z powyższego można wyciągnąć następujące wnioski:

1. Wybitne osiągnięcia w rozwoju fotogrametrii w ZSRR są wynikiem stałej opieki i starań, których udziela nauce i technice partia i rząd radziecki.

2. Metody sporządzania map z materiałów aerofoto, opracowane przez uczonych radzieckich, są najbardziej doskonałe, ponieważ pozwalają na dokładne opracowanie fotozdjęć przy minimalnej osnowie geodezyjnej.

3. Skrócenie prac geodezyjnych w radzieckich metodach sporządzenia map osiąga się przez szerokie wykorzystanie elementów orientacji zewnętrznej fotozdjęć zarejestrowanych w czasie nalotu, a także w wyniku zastosowania przyrządów fotogrametrycznych o wysokiej dokładności.



4. Pod względem przemyslenia konstrukcji przyrządów oraz technologii opracowania zdjęć metody radzieckie przewyższają metody sporządzenia map stosowane w USA, Anglii i innych krajach kapitalistycznych.

W ten sposób radzieckie metody sporządzania map można szeroko stosować jako uzasadnione naukowo i gwarantujące wysoką jakość produkcji kartograficznej.

Na podstawie tego, co zostało powyżej podane, można postawić następujące wnioski, mające na celu rozwiązanie problemu kartografowania kraju:

1. Sporządzenie map jest najtańsze przy zastosowaniu metod aerofotogrametrycznych, a w szczególności: a) w terenach równinnych — metody kombinowanej, b) w terenach pagórkowatych — metody zróżnicowanej, c) w terenach górzystych — metody uniwersalnej.

2. Zdjęcia lotnicze należy wykonywać aerofotoaparatai jednoobiektywowymi przy żądanym pionowym położeniu optycznej osi kamery lotniczej oraz z rejestracją wskazań statoskopu i wysokościomierza.

3. Zagęszczenie osnowy poziomej najlepiej wykonywać następującymi metodami: a) w terenach równinnych i pagórkowatych — metodami fotopoligonometrii lub fototriangulacji, b) w terenach górzystych — na multiplksie.

Zagęszczenie osnowy wysokościowej najlepiej wykonywać następującymi sposobami: w terenach pagórkowatych — zróżnicowanym sposobem fototriangulacji przestrzennej; b) w terenach górzystych — na multiplksie i innych przyrządach uniwersalnych lub sposobem nieskażonego modelu.

#### РЕЗЮМЕ

Аэрофотограмметрия в Советском Союзе развивалась в тесной связи с развитием народного хозяйства. Хозяйственное планирование и его реализация на местности требовали от советской картографогеодезической службы хороших топографических карт в кратчайшие сроки. Решение этой задачи находилось в прямой зависимости от быстрого развития аэрофотограмметрии.

Развитие народного хозяйства в период первой сталинской пятилетки поставило перед аэрофотограмметрией задание сокращения сроков картографирования и выдвинуло новые требования [по отношению к содержанию и качеству карты. Требования эти привели в СССР к разработке комбинированного метода аэрофототопографической съемки. Комбинированный метод позволял сократить объем геодезических работ и наряду с этим создать полнокачественные топографические карты. Дальнейшее непрерывное развитие народного хозяйства требовало скорейшего составления топографических карт в масштабе 1 : 100 000 для всей территории СССР.

С целью обеспечения реализации этой задачи был разработан советский метод дифференцированных процессов стереофотограмметрической съемки а также различные способы фотограмметрического сгущения высотной основы.

Реализация замечательного сталинского плана преобразования природы требует создания в кратчайшие сроки крупномасштабных карт для больших пространств.

Задачи эти решаются сейчас на основе аэрофотосъемки и современных методов фотограмметрии.

Как видно в СССР аэрофотограмметрия служит интересам народного хозяйства и мирного строительства. Авторы статьи, проф. А. Лобанов и проф. М. Коншин, описывают применяемые в СССР методы аэрофотосъемки, способы фотограмметрического сгущения геодезической основы, имеющие целью сокращение до минимум объема полевых геодезических работ, а также применяемые в СССР методы создания карты на основе аэрофотоснимков — комбинированный и дифференцированный методы составления карт. В конце статьи авторы приводят основы применения аэрофотограмметрических методов для целей составления топографических карт в масштабах 1:5000, 1:10 000 и 1:25 000.—

### RÉSUMÉ

La photogrammétrie aérienne en URSS s'est développée en étroite liaison avec l'extension progressive de l'économie nationale. Les plans économiques et leur réalisation dans le pays nécessitaient du service géodésique-cartographique soviétique, la production de bonnes cartes topographiques, dans le plus bref délai. La condition requise pour accomplir cette tâche était un développement rapide de la photogrammétrie aérienne.

Le développement économique national pendant le premier quinquennat stalinien a imposé à l'aérophotogrammétrie la tâche d'abrégier les délais de la production cartographique et présenté de nouvelles exigences quant au contenu des cartes et à leur qualité. La conséquence de ces exigences fut l'élaboration d'une méthode combinée pour les prises de vues aérophototopographiques. C'est cette méthode combinée qui a permis de réduire le nombre des travaux géodésiques à effectuer et de produire des cartes topographiques de pleine valeur. Le développement économique et national qui est ininterrompu en URSS exigea dans la suite une très rapide préparation de cartes topographiques à l'échelle de 1:100 000 pour toute l'étendue du territoire soviétique. Pour s'assurer la réalisation de cette tâche, les Soviétiques ont créé la méthode différenciée qui sert à élaborer les prises de vues stéréophotogramétriques et ont aussi innové différentes autres méthodes photogramétriques pour l'aérotriangulation spatiale.

La réalisation de la transformation de la nature d'après l'admirable plan stalinien exigeait, à bref délai, la création de cartes à grandes échelles pour des territoires étendus. Ces problèmes sont actuellement résolus par les prises de vues aériennes et les méthodes modernes de la photogrammétrie.

On peut ainsi constater que l'aérophotogrammétrie en URSS est au service de l'économie nationale et des travaux de construction pacifiques.

Les auteurs de cet article, le prof. A. Łobanow et le prof. U. Konzsyn, décrivent les méthodes appliquées en URSS pour exécuter les prises de vues aériennes; ils donnent les moyens de franchir photogramétriquement les espaces dépourvus de repères d'altitude, ce qui a pour but de diminuer au minimum le nombre des travaux géodésiques champêtres. Ils décrivent également l'application en URSS des méthodes qui permettent d'exécuter des cartes, en se basant sur les prises de vues aériennes, c'est à dire la méthode combinée et la méthode différenciée.

En terminant, les auteurs donnent l'application des méthodes aérophotogramétriques pour l'exécution des cartes topographiques à l'échelle de 1:5 000, 1:10 000, et 1:25 000.

Stefan Hausbrandt

## Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłądności punktów nawiazania

Przy wyrównywaniu metodą najmniejszych kwadratów układów obserwacji w sieciach geodezyjnych przyjmuje się zasadę stałości punktów wyższorzędnych.

Zestawia się więc — jeżeli będziemy posługiwać się metodą spostrzeżeń pośredniczących — równania błędów dla obserwowanych elementów geodezyjnych. W równaniach tych jako zmienne niezależne, pośredniczące w procesie wyrównania obserwacji, figurują wyłącznie poprawki  $dx$ ,  $dy$ , jakie mają być w wyniku wyrównania przyporządkowane przybliżonym współrzędnym punktów wyznaczonych. Poprawki współrzędnych punktów wyższorzędnych przy zestawianiu tych równań przyjmuje się jako równe zeru. Z otrzymanego układu równań liniowych, który zgodnie z przyjętym zwyczajem przedstawimy w postaci:

$a_ix + b_iy + c_iz \dots + l_i = v_i$  o błędzie średnim  $m_i (i=1,2 \dots n)$  wyznacza się niewiadome, zakładając warunek minimum, czy to w formie ogólnej:

$$\left[ \frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum}$$

czy też, przy przyjęciu równości błędów średnich obserwowanych elementów, w formie uproszczonej:

$$[vv] = \text{minimum.}$$

Tego rodzaju postępowanie jest zupełnie usprawiedliwione w wypadku, gdy dokładność obserwacji na sieci wyższorzędnej jest znacznie większa od dokładności obserwacji na sieci wyrównywanej. Jeśli bowiem przyjmujemy, że poprawki współrzędnych punktów nawiazania są równe zeru, to tym samym stwierdzamy, że błędy średnie tych współrzędnych są znikome w porównaniu z błędami średnimi, jakimi obciążone będą współrzędne wyznaczanych punktów na skutek błędów pomiaru nawiazującego. W przypadku gdy sieć niższorzędna pod względem dokładności obserwacji

nie ustępuje sieci wyższorzędnej lub — co się obecnie niejednokrotnie zdarza — gdy sieć niższorzędna jest i lepiej zaobserwowana, i poprawniej skonstruowana od sieci wyższorzędnej, omawiane przyjmowanie zaniedbywalności błędów współrzędnych punktów nawiazania nie daje się logicznie usprawiedliwić. Powoduje ono w konsekwencji zniekształcenie dobrego materiału obserwacyjnego dla wypełnienia założeń rachunkowych, które nie są bynajmniej zgodne z metodą najmniejszych kwadratów.

Poprawniejsze naukowo podejście do zagadnienia wyrównywania tego rodzaju sieci można by sformułować jak następuje<sup>1</sup>. Znajomość współrzędnych  $x_w, y_w$  pewnego punktu sieci wyższorzędnej oraz znajomość średnich błędów  $m_x, m_y$  tych współrzędnych może być — z punktu widzenia rachunku wyrównawczego — uważana za równoznaczną z zaobserwowaniem długości  $x_w$  z błędem średnim  $m_x$  oraz długości  $y_w$  z błędem średnim  $m_y$ . Wprawdzie długości te nie były bezpośrednio obserwowane, lecz określono je na drodze rachunkowej, opierając się na związkach funkcyjnych zachodzących między tymi wielkościami a wielkościami elementów geodezyjnych obserwowanych w sieci wyższorzędnej. Niemniej jednak błąd średni wielkości  $x$  (bądź  $y$ ) ustalony został w oparciu o duży materiał obserwacyjny i tylko w przypadku, gdyby błąd ten istotnie był równy zeru, czyli gdyby miara dokładności pośredniej obserwacji nad współrzędną  $x$  (bądź  $y$ ) była nieskończenie wielka, byłoby słuszne z punktu widzenia rachunku wyrównawczego potraktowanie wielkości  $x$  (bądź  $y$ ) w aktualnym procesie wyrównawczym jako wielkości stałej. W przeciwnym, ogólnym przypadku wielkość tę — podobnie jak i wielkości faktycznie dokonanych obserwacji — należy w procesie wyrównania uważać za wielkość zmienną i poddać ją zniekształceniu zgodnemu z warunkiem minimum. W konsekwencji współrzędnych punktów nawiazania, scharakteryzowanym dokładnościowo przez błędy średnie  $m_x, m_y$  należy przyporządkować w procesie wyrównania poprawki  $v_x, v_y$ , podobnie jak całemu zespołowi wielkości obserwowanych bezpośrednio i scharakteryzowanych dokładnościowo przez błędy średnie  $m_1, m_2, \dots, m_n$  — przyporządkujemy poprawki  $v_1, v_2, \dots, v_n$ . Oczywiście musi być przy tym zachowany naczelny postulat wyrównania metodą najmniejszych kwadratów: suma kwadratów poprawek dzielonych przez kwadraty błędów średnich, odpowiadających obserwacji, musi być najmniejszością:

$$\left[ \frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum.}$$

<sup>1</sup> Zupełnie poprawnym podejściem byłoby łączne wyrównanie materiału obserwacyjnego dotyczącego obu sieci, co jednak ze względu na nadmierne koszty w grę oczywiście nie wchodzi.

Realizacja rachunkowa wyrównania sieci geodezyjnej przy proponowanym odrzuceniu założenia niezmienności punktów nawiazania wynika w prosty sposób z tego, co było wyżej powiedziane i ma następujący przebieg:

1. Dla każdej, dokonanej w sieci obserwacji geodezyjnej, tzn. dla każdego pomiaru kąta (względnie „kierunku“), pomiaru długości, czy też pomiaru kąta nawiazania astronomicznego — zestawia się równanie błędu danej obserwacji. Jako niewiadome w tych równaniach figurują poprawki wyrównawcze  $dx$ ,  $dy$ , współrzędnych wszystkich punktów sieci, a więc zarówno poprawki współrzędnych punktów wyznaczanych, jak i poprawki współrzędnych punktów nawiazania<sup>2</sup>.

Zestawienie równań obserwacji geodezyjnych tym tylko różni się będzie od zestawiania odnośnych równań w zwykłej sieci geodezyjnej, tj. sieci, przy wyrównaniu której zakłada się bezbłądność punktów nawiazania, że na miejscu zer symbolizujących w takiej sieci poprawki współrzędnych punktów nawiazania, będą figurować niewiadome  $dx$ ,  $dy$  z odpowiednimi wskaźnikami charakteryzującymi oznaczenie punktu.

2. Do otrzymanego zespołu równań dołączamy „równania błędów“ dla współrzędnych każdego z punktów nawiazania:

$$dx = v_x, \text{ o błędzie średnim } m_x,$$

$$dy = v_y, \text{ o błędzie średnim } m_y,$$

<sup>2</sup> Przypominamy postać tych równań:

$$\begin{array}{l} \text{Równanie błędu} \\ \text{obserwacji kątowej} \\ \text{(lub „kierunkowej“)} \end{array} \left| \begin{array}{cc} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{array} \right|_1 + a_{prz} - a_{obs} = v$$

$$\begin{array}{l} \text{Równanie błędu ob-} \\ \text{serwacji liniowej} \end{array} \left| \begin{array}{cc} dx_i & dy_i \\ -\cos \varphi_{ik} & -\sin \varphi_{ik} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_k & dy_k \\ \cos \varphi_{ik} & \sin \varphi_{ik} \end{array} \right|_2 + l_{prz} - l_{obs} = v$$

$$\begin{array}{l} \text{Równanie błędu kąta} \\ \text{nawiazania astrono-} \\ \text{micznego} \end{array} \left| \begin{array}{cc} dx_i & dy_i \\ A_{ik} & B_{ik} \end{array} \right| \left| \begin{array}{cc} dx_k & dy_k \\ -A_{ik} & -B_{ik} \end{array} \right|_1 + \varphi_{prz} - \varphi_{obs} = v$$

$\varphi_{prz}$  — oznacza tu wartość elementu geodezyjnego (kąta, linii, kąta nawiazania astronomicznego, tzn. kąta osiowego obliczonego z azymutu astronomicznego) obliczoną z obranych przybliżonych współrzędnych;  $\varphi_{obs}$  — oznacza wartość elementu zaobserwowanego i zredukowanego na płaszczyznę odwzorowania.  $A$ ,  $B$  — są współczynnikami kierunkowymi;  $dx$ ,  $dy$  — poprawkami przybliżonych współrzędnych. Bliższe szczegóły podaje w publikacjach Nr 13 i 16, Geodezyjnego Instytutu Naukowo-badawczego, Warszawa 1952, oraz w pracy *Rachunki geodezyjne*, Państwowe Przedsiębiorstwo Wydawnictw Kartograficznych, Warszawa 1953.

przy czym  $dx$  lub  $v_x$  oznacza poszukiwaną poprawkę, jaką współrzędna  $x$  danego punktu nawiązania otrzyma w procesie wyrównania, zaś  $dy$  lub  $v_y$  oznacza poszukiwaną poprawkę współrzędnej  $y$ <sup>3</sup>.

3. W zestawionym, w sposób omówiony w punkcie 1. i 2., układzie równań błędów dzielimy każde równanie przez średni błąd odpowiadającej obserwacji otrzymując w wyniku tego dzielenia „zrównoważony układ równań błędów“, lub — wyrażając się ściślej — układ równań, w którym stosunki poprawek obserwacji do ich błędów średnich określonych *a priori* wyrażono jako funkcje liniowe niewiadomych poprawek współrzędnych. Ten układ równań bez obawy o nieporozumienia zasymbolizować możemy jak następuje:

$$\frac{a_i}{m_i} x + \frac{b_i}{m_i} y + \frac{c_i}{m_i} z + \dots + \frac{l_i}{m_i} = \frac{v_i}{m_i} \quad (i=1, 2, \dots, n),$$

gdzie  $n$  oznacza ilość obserwacji geodezyjnych dokonanych w danej sieci zwiększoną o podwójną ilość punktów nawiązania.

4. Od zrównoważonego układu równań błędów w sposób ogólnie znany przechodzimy do układu równań normalnych Gaussa pozwalającego wyznaczyć wartości niewiadomych zagadnienia, spełniające postawiony warunek:

$$\left[ \frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum.}$$

Po wyznaczeniu wartości niewiadomych możemy podstawić te niewiadome do zrównoważonego układu równań błędów i wyznaczyć dla każdej obserwacji stosunek jej poprawki do błędu średniego przyjętego *a priori* oraz samą poprawkę.

<sup>3</sup> Oznaczmy przez  $x_{prz}$ ,  $y_{prz}$  przybliżone wartości współrzędnych punktu nawiązania, przez  $x_{obs}$ ,  $y_{obs}$  „zaobserwowane“ wartości tych współrzędnych, tzn. wartości tych współrzędnych wyznaczone z błędami średnimi  $m_x$ ,  $m_y$  w wyniku operacji obserwacyjnych i wyrównawczych w sieci wyższorzędnej. Wyrównaną wartość współrzędnej punktu nawiązania wyrazić możemy jako sumę wartości przybliżonej i poprawki wyrównawczej  $dx$  bądź  $dy$ , poszukiwanej w procesie wyrównania, lub też jako sumę wartości „zaobserwowanej“, tj. uzyskanej z sieci wyższorzędnej i poprawki obserwacyjnej  $v$ . Mieć więc będziemy:  $x_{prz} + dx = x_{obs} + v_x$  oraz  $y_{prz} + dy = y_{obs} + v_y$ . Stąd otrzymamy równania błędów:  $dx + x_{prz} - x_{obs} = v_x$  oraz  $dy + y_{prz} - y_{obs} = v_y$ .

Przy przyjęciu za wartości przybliżone współrzędnych ich wartości „zaobserwowanych“, tzn. uzyskanych z sieci wyższorzędnej, będzie:  $dx = v_x$  oraz  $dy = v_y$ .

Oczywiście równania te można również otrzymać z równania obserwacji liniowej w postaci ogólnej (patrz odsyłacz 2), podstawiając  $\cos \varphi = 0$  lub  $\sin \varphi = 0$ .

Pierwiastkując sumę kwadratów stosunków poprawek do błędów średnich podzieloną przez ilość spostrzeżeń nadliczbowych znajdziemy wartość  $m_0$ :

$$m_0 = \sqrt{\frac{\left[ \frac{vv}{mm} \right]}{k-2p}}, \quad (k - \text{ilość obserwacji, } p - \text{ilość punktów wyznaczanych}).$$

Od wartości  $m_0$  w znany sposób przejdziemy do wyznaczenia średnich błędów niewiadomych wyznaczonych z układu równań normalnych Gaussa. Stosując symbolikę krakowianową wyrazimy średni błąd  $i$  — tej niewiadomej układu wzorem:

$$m_i = m_0 \sqrt{(a^2)_{ii}^{-1}},$$

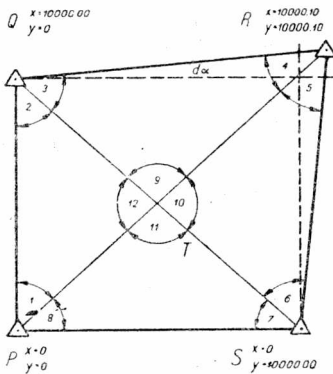
gdzie  $a$  jest krakowianem współczynnikowym zrównoważonego układu równań błędów.

Parę uwag należałoby jeszcze powiedzieć na temat apriorycznego ustalenia wartości średnich błędów. Sprawa ta jest bardzo istotna dla wyrównywania układów spostrzeżeń dokonywanych nad wielkościami o różnych wymiarach (kąty i linie). Jest rzeczą zrozumiałą, że wyrównywanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłądności punktów nawiązania dotyczyłoby wyłącznie niemal większych sieci wplecionych, zwanych u nas sieciami wypełniającymi. Punkty pojedyncze lub grupy punktów czwartorzędnych są bowiem z reguły skonstruowane i zaobserwowane (mówię o naszej praktyce) dużo mniej dokładnie i poprawnie od sieci punktów, do których zostają nawiązywane, a więc postawienie założenia bezbłądności punktów oparcia jest tam logicznie uzasadnione. W sieciach wypełniających poprawne ustalenie wartości średniego błędu obserwacji kątowej nie nastęrcza żadnych trudności. Obfitość materiału nadliczbowego pozwala na dokładne i szybkie oszacowanie przybliżonej wartości tego błędu choćby przez zastosowanie wzoru Ferrero. Nieco gorzej przedstawia się sprawa poprawnego szacowania wielkości średnich błędów współrzędnych, których rachunek w większości naszych sieci niestety przeprowadzany nie był. Trzeba tu oczywiście generalizować opierając się na praktyce państw sąsiednich, a więc przede wszystkim na praktyce radzieckiej i niemieckiej. Sądzę, że przyjęcie jako normy błędu średniego wyznaczenia punktu wielkości  $\pm 55$  mm, cytowanej jako średnia wartość w *Handbuch der Vermessungskunde* Jordana Eggerta, byłoby nieco optymistyczne, i że należałoby raczej mówić o średnim błędzie współrzędnej rzędu ca  $\pm 7$  cm. Nie należy zresztą — jak to się często robi — zbyt wyolbrzymiać znaczenia takiego czy innego obrania wag.

Istotą rzeczy jest w naszym zagadnieniu przyjęcie zmienności współrzędnych punktów nawiązania w procesie wyrównania. Jeżeli bowiem wartość któregoś z punktów nawiązania jest technicznie niska, to znaczy jeżeli współrzędne tego punktu są sprzeczne z rozważanym jako całość układem obserwacji i pozostałych współrzędnych — wówczas i tak punkt ten w wyniku procesu wyrównawczego ulegnie poważnemu przesunięciu, o co przecież właściwie tu chodzi, a obranie takiej czy innej wagi odgrywa już rolę raczej drugorzędą, tym bardziej że wątpliwości dotyczące zakresu zmienności wagi są z reguły niewielkie.

\*  
\*      \*

Ponieważ koncepcja wyrównywania sieci trygonometrycznych z odwołaniem założenia bezbłędności punktów nawiązania jest nieco obca przyzwyczajeniu geodety, wydaje się słuszne zilustrować celowość tej koncepcji na przykładzie liczbowym tak skonstruowanym, aby celowość ta była logicznie widoczna przed rozwiązaniem przykładu. Weźmy w tym celu układ przedstawiony na załączonym obok rysunku.



Rys. 1

W czworoboku PQRS o punkcie centralnym T zmierzono wszystkie kąty otrzymując jako rezultaty pomiarów kątów 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 — ściśle  $45^\circ$ , zaś jako rezultaty pomiarów kątów 9, 10, 11, 12 — ściśle  $90^\circ$ . Układ ten rozpatrywany w oderwaniu od punktów nawiązania jest układem obserwacyjnym wewnątrznie zgodnym, nie wymagającym zniekształcania rezultatów obserwacji, gdyż wszystkie warunki (cztery sumy kątów w trójkątach, jedna suma kątów wokółhoryzontalnych i jeden warunek sinusowy) są tu ściśle spełnione. Niech dalej współrzędne punktów nawiązania będą:

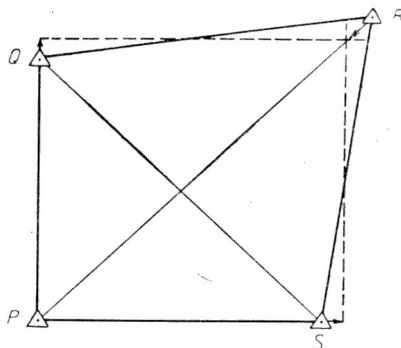
$x_P = 0$	$y_P = 0$
$x_Q = 10\ 000,00$	$y_Q = 0$
$x_R = 10\ 000,10$	$y_R = 10\ 000,10$
$x_S = 0$	$y_S = 10\ 000,00$

Łatwo zauważymy, że w największej zgodzie z układem obserwacyjnym jest tu punkt P. Obydwa bowiem kąty zmierzone na tym punkcie będą ściśle zgodne ze współrzędnymi tego punktu i punktów sąsiadujących. Mniej zgodne z układem obserwacyjnym będą punkty Q oraz S. Zmierzone na tych punktach kąty 2 oraz 7 będą wprawdzie ściśle zgodne



ze współrzędnymi tych punktów i sąsiadującego z nimi punktu  $P$ , natomiast kąty 3 oraz 6 zmierzone na tych punktach nie będą zgodne z wartościami tych kątów wyznaczonymi ze współrzędnych. Zarówno wartość zmierzona kąta 3, jak i wartość zmierzona kąta 6 będą mniejsze od wartości tych kątów obliczonych ze współrzędnych o wielkość (wyrażamy ją w mierze radialnej)  $da=0,00001$ . Najmniej zgodny z układem obserwacyjnym będzie punkt  $R$ . Obydwa bowiem zmierzone na nim kąty: 4 oraz 5 będą większe od wartości tych kątów obliczonych ze współrzędnych o wielkość  $da=0,00001$ .

W myśl tego, co zostało powyżej powiedziane, najlogiczniej będzie przypuścić, że kąty zaobserwowane obciążone są tu znikomymi błędami, natomiast współrzędne punktów nawiazania są wyłączną niemal przyczyną niezgodności układu. Współrzędne punktu  $P$  są przy tym prawdopodobnie obciążone błędami znikomymi, znikome również będą prawdopodobnie błędy rzędnej punktu  $Q$  oraz odciętej punktu  $S$ . Gdyby bowiem zmienić rzędną punktu  $Q$  lub odciętą punktu  $S$  — nie zmieniając współrzędnych punktu  $P$  i  $R$  — zgodność w kątach 1 i 8 przestałaby istnieć. Natomiast odcięta punktu  $Q$  oraz rzędna punktu  $S$  są prawdopodobnie nieco większe od wykazanych. Zwiększenie bowiem rzędnej punktu  $S$  oraz odciętej punktu  $Q$  o niewielkie długości spowoduje zwiększenie zgodności kątów 4 i 5, nie wpłynie zaś ujemnie na kąty 3 i 6. Wreszcie współrzędne punktu  $R$  dla zwiększenia zgodności w układzie powinny obydwie ulec zmniejszeniu, gdyż wpłynie to dodatnio na kąty 5, 6, 3, 4.



Rys. 2

Reasumując wyżej wypowiedziane uwagi dojdziemy do wniosku, że logiczne postawienie założeń przy czynnościach wyrównawczych powinno spowodować w efekcie wyrównania nadanie współrzędnym poprawek, których zwrot i stosunkową wielkość ilustruje rysunek 2.

Zaobserwowane wielkości kątów powinny ulec bardzo nieznacznym zmianom a to z uwagi na całkowitą zgodność wewnętrzną w zaobserwowanym układzie rozpatrywanym niezależnie od punktów nawiazania.

Jest przy tym bez omówień zrozumiałe, że wielkości poprawek w pewnym stopniu zależne będą od takiego czy innego obrania wag w układzie, to znaczy od tego, jakie błędy średnie przyporządkujemy kątom a jakie współrzędnym. Przystępujemy teraz do wyrównania układu obserwacji kątowych i współrzędnych punktów nawiazania łącznie, w sposób uprzednio omówiony, przy czym za błąd średni obserwacji kątowej przyjmujemy

$\pm 2''$ , to znaczy  $m = \pm 0,00001$ , zaś za błąd średni współrzędnej przyjmujemy  $\pm 0,10$  metra.

Dla obserwacji kątowych napiszemy tu 12 równań błędów, które mieć będą postać ogólną:

$$\begin{vmatrix} dx_L & dy_L \\ A_L & B_L \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_P & dy_P \\ -A_P & -B_P \end{vmatrix} \begin{vmatrix} dx_C & dy_C \\ -(A_L - A_P) & -(B_L - B_P) \end{vmatrix} + \alpha_{prz} - \alpha_{obs} = v, \quad (1)$$

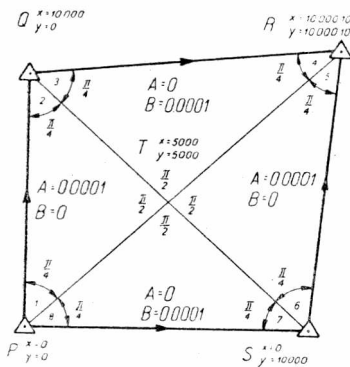
przy czym  $dx_L, dy_L$  są poprawkami współrzędnych punktu na lewym ramieniu kąta,  $dx_P, dy_P$  są poprawkami współrzędnych punktu na prawym ramieniu kąta,  $dx_C, dy_C$  są poprawkami punktu w centrum kąta,  $A, B$  są współczynnikami kierunkowymi (wskaźniki  $L$  dla lewego ramienia kąta, wskaźniki  $P$  dla prawego ramienia kąta), zdefiniowanymi przez równania:

$$A = \frac{\Delta x}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \quad B = \frac{\Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2},$$

$\alpha_{prz}$  jest wartością kąta obliczoną z obranych przybliżonych współrzędnych,  $\alpha_{obs}$  jest wartością kąta zaobserwowaną, wreszcie symbol  $v$  przy zespole tabel prostokątnych oznacza, że tabele te mają być w trakcie rachunku rozwinięte jako tabele wyznacznikowe, których wyznaczniki podlegają zsumowaniu.

Jest więc np.:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 7 - 2 \cdot 2 + 5 \cdot 4 - 3 \cdot 1.$$



Rys. 3

Przy liczbowym opracowywaniu układu równań błędów najwygodniej jest napisać na szkicu wartości współczynników kierunkowych, współrzędnych i wyników obserwacji kątowych. Robimy to na poniższym szkicu (rys. 3), co ułatwi czytelnikowi śledzenie opracowania.

Za współrzędne przybliżone punktów nawiązania przyjęliśmy oczywiście ich współrzędne wyjściowe, za współrzędne przybliżone punktu wyznaczanego  $T$  przyjmujemy  $x = 5000,00$  m  $y = 5000,00$  m.

Obranie współrzędnych jest tu zresztą mało istotne, gdyż wartości współczynników kierunkowych, jak również wartości kątów przybliżonych są tu łatwe do ustalenia bez bezpośredniego opierania się na wartościach współrzędnych.

Rachunek kątów prowadzimy w układzie radialnym, tj. piszemy  $\pi/2$  zamiast  $90^0$  itp. Po zastosowaniu wzoru ogólnego do poszczególnych kątów otrzymamy następujący układ:

$$\begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_Q & dy_Q & dx_T & dy_T & dx_P & dy_P \\ 0,0001 & 0 & -0,0001 & -0,0001 & 0 & 0,0001 \end{array} \right|_1 + 0 = v_1 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_T & dy_T & dx_P & dy_P & dx_Q & dy_Q \\ -0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & 0 & 0 & -0,0001 \end{array} \right|_1 + 0 = v_2 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_R & dy_R & dx_T & dy_T & dx_Q & dy_Q \\ 0 & 0,0001 & 0,0001 & -0,0001 & -0,0001 & 0 \end{array} \right|_1 + 0,00001 = v_3 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_T & dy_T & dx_Q & dy_Q & dx_R & dy_R \\ -0,0001 & -0,0001 & 0 & 0,0001 & 0,0001 & 0 \end{array} \right|_1 - 0,00001 = v_4 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_S & dy_S & dx_T & dy_T & dx_R & dy_R \\ -0,0001 & 0 & 0,0001 & 0,0001 & 0 & -0,0001 \end{array} \right|_1 - 0,00001 = v_5 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_T & dy_T & dx_R & dy_R & dx_S & dy_S \\ 0,0001 & -0,0001 & -0,0001 & 0 & 0 & 0,0001 \end{array} \right|_1 + 0,00001 = v_6 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_P & dy_P & dx_T & dy_T & dx_S & dy_S \\ 0 & -0,0001 & -0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & 0 \end{array} \right|_1 + 0 = v_7 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_T & dy_T & dx_S & dy_S & dx_P & dy_P \\ 0,0001 & 0,0001 & 0 & -0,0001 & -0,0001 & 0 \end{array} \right|_1 + 0 = v_8 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_Q & dy_Q & dx_R & dy_R & dx_T & dy_T \\ 0,0001 & -0,0001 & -0,0001 & -0,0001 & 0 & 0,0002 \end{array} \right|_1 + 0 = v_9 \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_R & dy_R & dx_S & dy_S & dx_T & dy_T \\ 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & -0,0001 & -0,0002 & 0 \end{array} \right|_1 + 0 = v_{10} \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_S & dy_S & dx_P & dy_P & dx_T & dy_T \\ -0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & 0,0001 & 0 & -0,0002 \end{array} \right|_1 + 0 = v_{11} \\
 \left. \begin{array}{cc|cc|cc} dx_P & dy_P & dx_Q & dy_Q & dx_T & dy_T \\ -0,0001 & -0,0001 & -0,0001 & 0,0001 & 0,0002 & 0 \end{array} \right|_1 + 0 = v_{12}
 \end{array}$$

Błąd średni każdego równania w tym układzie wynosi  $\pm 0,00001$ .

Dołączając do tego układu równania błędów współrzędnych punktów nawiązania:

$$dx_P = v_{13} \quad dy_P = v_{14} \quad dx_Q = v_{15} \quad dy_Q = v_{16} \quad dx_R = v_{17} \quad dy_R = v_{18} \quad dx_S = v_{19} \quad dy_S = v_{20}$$

o błędach średnich poszczególnych równań  $\pm 0,10$ , otrzymujemy całkowity zespół równań błędów, który najpierw sprowadzimy do „równoważności” dzieląc każde równanie przez odpowiadający błąd średni, a następnie przekształcimy na układ równań normalnych Gaussa. Dzieląc każde równanie przez jego średni błąd — przy jednoczesnym pisaniu równania w zwykłej postaci algebraicznej — znajdujemy:

$dx_P$	$dy_P$	$dx_Q$	$dy_Q$	$dx_R$	$dy_R$	$dx_S$	$dy_S$	$dx_T$	$dy_T$	1
10			-10					-10	10	0
	-10	-10						10	10	0
			10	10				-10	-10	1
		10			-10			-10	10	-1
				-10			10	10	-10	-1
					10	10		-10	-10	1
-10							-10	10	10	0
	10					-10		10	-10	0
		-10	-10	-10	10			20		0
				10	-10	-10	-10		20	0
10	-10					10	10	-20		0
-10	10	10	10							0
10										0
	10									0
		10								0
			10							0
				10						0
					10					0
						10				0
							10			0
								10		0
									10	0

Przekształcenie tej tabeli na tabelę układu równań normalnych Gaussa, daje:

500	-200	-100	-200	0	0	100	200	-400	200	0
-200	500	200	100	0	0	-200	-100	200	-400	0
-100	200	500	200	100	-200	0	0	-400	-200	+10
-200	100	200	500	200	-100	0	0	-200	-400	-10
0	0	100	200	500	-200	-100	-200	-400	200	-20
0	0	-200	-100	-200	500	200	100	200	-400	oraz: -20
100	-200	0	0	-100	200	500	200	-400	-200	-10
200	-100	0	0	-200	100	200	500	-200	-400	+10
-400	200	-400	-200	-400	200	-400	-200	1600	0	+20
200	-400	-200	-400	200	-400	-200	-400	0	1600	+20

przy czym pierwsza z napisanych tabel jest tabelą współczynnikową, zaś druga — kolumną wyrazów wolnych układu równań normalnych ustawionych po przeciwnej stronie równań.

Rozwiązując ten układ równań metodą nieoznaczoną napiszemy:

$$\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dx_Q \\ dy_Q \\ dx_R \\ dy_R \\ dx_S \\ dy_S \\ dx_T \\ dy_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ -20 \\ -20 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 & -4 & 2 \\ -2 & 5 & 2 & 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & 2 & -4 \\ -1 & 2 & 5 & 2 & 1 & -2 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & 5 & 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 & -2 & -1 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -2 & 5 & 2 & 1 & 2 & -4 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & -1 & 2 & 5 & 2 & -4 & -2 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & 5 & -2 & -4 \\ -4 & 2 & -4 & -2 & -4 & 2 & -4 & -2 & 16 & 0 \\ 2 & -4 & -2 & -4 & 2 & -4 & -2 & -4 & 0 & 16 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1 \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \frac{1}{100} \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dx_Q \\ dy_Q \\ dx_R \\ dy_R \\ dx_S \\ dy_S \\ dx_T \\ dy_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 10 \\ -10 \\ -20 \\ -20 \\ -10 \\ 10 \\ 20 \\ 20 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2484 & 64 & 844 & 896 & 116 & -64 & 716 & -896 & 1040 & -130 \\ 64 & 2484 & -896 & 716 & -64 & 116 & 896 & 844 & -130 & 1040 \\ 844 & -896 & 2484 & -64 & 716 & 896 & 116 & 64 & 1040 & 130 \\ 896 & 716 & -64 & 2484 & -896 & 844 & 64 & 116 & 130 & 1040 \\ 116 & -64 & 716 & -896 & 2484 & 64 & 844 & 896 & 1040 & -130 \\ -64 & 116 & 896 & 844 & 64 & 2484 & -896 & 716 & -130 & 1040 \\ 716 & 896 & 116 & 64 & 844 & -896 & 2484 & -64 & 1040 & 130 \\ -896 & 844 & 64 & 116 & 896 & 716 & -64 & 2484 & 130 & 1040 \\ 1040 & -130 & 1040 & 130 & 1040 & -130 & 1040 & 130 & 1365 & 0 \\ -130 & 1040 & 130 & 1040 & -130 & 1040 & 130 & 1040 & 0 & 1365 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ 1 \\ 4160 \cdot 100 \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix} dx_P \\ dy_P \\ dx_Q \\ dy_Q \\ dx_R \\ dy_R \\ dx_S \\ dy_S \\ dx_T \\ dy_T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 520 \\ 520 \\ 16120 \\ -520 \\ -16120 \\ -16120 \\ -520 \\ 16120 \\ 9100 \\ 9100 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 416000 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0012 \\ 0,0012 \\ 0,0387 \\ -0,0012 \\ -0,0387 \\ -0,0387 \\ -0,0012 \\ 0,0387 \\ 0,0219 \\ 0,0219 \end{pmatrix}$$

Jak widać z rozwiązania, przewidywania nasze dotyczące wielkości i kierunku poprawek współrzędnych punktów nawiązania spełniły się w zupełności: poprawki współrzędnych punktu P są znikome (1 mm), odcięta punktu Q i rzędna punktu S otrzymały znaczniejsze poprawki (39 mm), rzędna punktu Q i odcięta punktu S praktycznie się nie zmieniły (1 mm), przesunięcie punktu R jest największe a kierunkowo zgodne z przewidywaniem (po 39 mm na obu osiach).

Przystępujemy do obliczenia wartości błędów średnich położenia punktów sieci. Znajdziemy je mnożąc średni błąd jednostkowy  $m_0$  przez pierwiastki z elementów obliczonej już odwrotności położonych na głównej przekątnej. Będzie więc

Przystępujemy do obliczenia wartości błędów średnich położenia punktów sieci. Znajdziemy je mnożąc średni błąd jednostkowy  $m_0$  przez pierwiastki z elementów obliczonej już odwrotności położonych na głównej przekątnej. Będzie więc

$$\begin{aligned} m_{x_P} &= m_0 \sqrt{2484/416000} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 & m_{y_P} &= m_0 \sqrt{2484/416000} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 \\ m_{x_Q} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 & m_{y_Q} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 \\ m_{x_R} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 & m_{y_R} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 \\ m_{x_S} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 & m_{y_S} &= \text{„} \text{ „} = \sqrt{0,0060} \cdot m_0 \\ m_{x_T} &= m_0 \sqrt{1365/416000} = \sqrt{0,0033} \cdot m_0 & m_{y_T} &= m_0 \sqrt{1365/416000} = \sqrt{0,0033} \cdot m_0 \end{aligned}$$

Błędy średnie punktów nawiązania będą więc (zgodnie zresztą z założeniem) równe między sobą, zaś błąd średni punktu wyznaczanego będzie nieco mniejszy.

Dla obliczenia średniego błędu jednostkowego podstawimy otrzymane wartości poprawek  $dx$ ,  $dy$  do równań błędów znajdując dla poszczególnych obserwacji stosunki poprawek do błędów średnich  $v/m$ , po czym zsumujemy sumy ich kwadratów i podzielimy przez ilość spostrzeżeń nadliczbowych, równą 10.

Znajdziemy też poprawkę każdej obserwacji  $v=(v/m)m$ , co pozwoli nam wyraźnie porównać efekt wyrównania z przewidywaniami oraz skontrolować bezbłądność całego rachunku przez stwierdzenie zgodności w wyrównanej figurze.

Obliczenie stosunków  $v/m$  oraz poprawek obserwacyjnych  $v$  daje:

Obserwacja	$v/m$	$v$
1	0,0240	0,05''
2	0,0390	0,08''
3	0,1630	0,34''
4	-0,2260	-0,47''
5	-0,2260	-0,47''
6	0,1630	-0,34''
7	0,0390	0,08''
8	0,0240	0,05''
9	0,0630	0,13''
10	0,0630	0,13''
11	-0,0630	-0,13''
12	-0,0630	-0,13''
13	0,0120	0,0012 metra
14	0,0120	0,0012 „
15	0,3870	0,0387 „
16	-0,0120	-0,0012 „
17	-0,3870	-0,0387 „
18	-0,3870	-0,0387 „
19	-0,0120	-0,0012 „
20	0,3870	0,0387 „

Stąd suma kwadratów  $\frac{vv}{mm} = 0,7750$  i błąd jednostkowy  $m_0 = \sqrt{0,0775} = \pm 0,278$  jak również błędy średnie współrzędnych: dla punktów stałych  $0,278 \sqrt{0,0060}$ , tzn.  $\pm 0,022$ , oraz dla punktu wyznaczanego:  $0,278 \sqrt{0,0033}$ , tzn.  $\pm 0,016$ .

Błędy średnie położenia punktu  $m_p = \sqrt{m_x^2 + m_y^2}$  wyniosą: dla punktów stałych  $\pm 0,022 \cdot 1,41 = \pm 0,03$  oraz dla punktu wyznaczanego  $\pm 0,016 \cdot 1,41 = \pm 0,02$ .

Rzut oka na poprawki kątowe przekona nas, że ich układ jest najzupełniej zgodny z przewidywaniem: poprawki te są zupełnie znikome, największe poprawki otrzymały kąty 4 i 5, najmniej zgodne z współrzędnymi punktów stałych.

Wynik wyrównania i analizy dokładności dla naszego przykładu — przy odrzuceniu założenia nienaruszalności punktów oparcia — wysłowić możemy krótko jak niżej: *układ obserwacyjny został niemal że nie zmieniony — maksymalna poprawka kątowa jest nieco mniejsza od 0,5'' — współrzędne punktów nawiązania zostały przez wyrównanie nieznacznie*

skorygowane — maksymalna poprawka współrzędnej jest nieco mniejsza od 4 cm. Błąd średni punktu wyznaczanego wynosi  $\pm 0,02$ , błędy średnie położenia punktów nawiązania są w świetle analizy równe  $\pm 0,03$ .

Gdybyśmy przeprowadzili wyrównanie obstając przy zasadzie niezmienności punktów stałych otrzymalibyśmy — co łatwo sprawdzić wykonując na ostatnich kolumnach tabeli na str. 26 znane ogólnie działania — układ równań normalnych Gaussa:

$$\begin{aligned} 1600 dx_T + 0 dy_T - 20 &= 0 \\ 0 dx_T + 1600 dy_T - 20 &= 0 \end{aligned} \quad \text{skąd } dx_T = dy_T = 0,0125,$$

to znaczy praktycznie to samo co poprzednio. Jednak przyjęcie takiego układu wyrównawczego (współrzędne punktów  $PQR S$  bez zmiany, współrzędne punktu  $T: X_T = Y_T = 1500,012$ ) jest równoznaczne z wielokrotnie większym zniekształceniem obserwacji. Jeżeli bowiem obliczymy teraz wartości poprawek obserwacyjnych (mnożąc ostatnie kolumny tabeli na str. 26 przez 0,0125, 0,0125, 1,000) znajdziemy:

Obserwacja	$v/m$	$v$
1	0	0''
2	0,25	0,5''
3	0,75	1,5''
4	-1,00	-2,0''
5	-1,00	-2,0''
6	0,75	1,5'' $\left[ \frac{vv}{mm} \right] = 3,5$
7	0,25	0,5''
8	0	0''
9	0,25	0,5'' $m_0 = \sqrt{\frac{3,5}{10}} = \pm 0,59$
10	0,25	0,5''
11	-0,25	-0,5'' $m_{xT} = m_{yT} = \pm 0,59 \sqrt{\frac{1}{1600}} = \pm 0,148$
12	-0,25	-0,5'' $m_T = \pm 0,209$

Wynik wyrównania i analizy dokładności dla naszego przykładu, przy przyjęciu założenia bezbłędności punktów oparcia, wysłowić możemy jak następuje: układ obserwacyjny został wybitnie zniekształcony — maksymalna poprawka kątowa wynosi 2''; średnia kwadratów poprawek obserwacji kątowych jest 180 razy większa jak poprzednio — współrzędne punktów nawiązania zgodnie z założeniem zmianie nie uległy. Błąd średni punktu wyznaczanego wynosi  $\pm 0,21$ .

Ta paradoksalna odpowiedź, sprowadzająca się do tego, że dobry wewnętrznie zgodny układ obserwacyjny został uznany za wadliwy, zaś po-

prawnie wyznaczony punkt został formalnie obciążony ogromnym błędem średnim, jest tylko logiczną konsekwencją nieprawidłowego operowania rachunkiem wyrównawczym — skoro bowiem wiadomo jest, co zawsze zachodzi, że punkty nawiązania nie są bezbłędne, nie jest słuszne zakładanie ich bezbłędności w procesie wyrównawczym.

Zbyteczne wydaje się podkreślać, że autor nie zaleca stosowania opisanej metody przy wyrównaniu pojedynczych punktów oraz grup w niższych rzędach zdecydowanie słabszych dokładnościowo sieciach (o czym zresztą już w innym miejscu wspomniano). Aczkolwiek pojęciowo byłoby to uzasadnione i w takich wypadkach, jednak nie zachodzi tu obawa wybitniejszego zniekształcenia układu wyrównawczego przez nieprawidłowe wyrównanie.

Na zakończenie słusznie będzie rozważyć, gdzie byłoby celowe stosowanie wyrównania sieci geodezyjnych z zarzuceniem założenia bezbłędności punktów stałych. Wydaje mi się, że przede wszystkim dotyczy to wyrównania dużych układów obserwacyjnych w triangulacjach wypełniających. Istnieją dwie przyczyny przemawiające za celowością takiego podejścia w tego rodzaju sieciach.

Z jednej strony poziom techniczny tych sieci jest — zarówno z uwagi na pracę nowoczesnymi instrumentami, jak i na ogromną ilość obserwacji **nadliczbowych** — wyższy od poziomu sieci, do których zostają one nawiązane. Z drugiej strony w niektórych przypadkach spotykamy się z małą wartością techniczną współrzędnych punktów nawiązania, o czym z góry **nie jest wiadomo**. Powoduje to omijanie stosowania najracjonalniejszej metody wyrównania — metody spostrzeżeń pośrednich, pozwalającej na pełną charakterystykę dokładnościową efektu pracy (średnie błędy współrzędnych) — stosowanie metod nacechowanych większą czy mniejszą dowolnością założeń i nie pozwalających na pełną charakterystykę dokładnościową pracy lub czyniących tę charakterystykę niesłychanie kosztowną. Przy wprowadzeniu wyrównania sieci z zarzuceniem założenia bezbłędności punktów oparcia uzyskujemy też charakterystykę dokładnościową dla współrzędnych punktów oparcia, co wydaje się bardzo istotne już choćby z tego względu, że niejednokrotnie punkty te ulegają z biegiem czasu nieznacznym, lecz nie zaniedbywalnym przesunięciom.

**Inną dziedziną**, w której zarzucenie założenia bezbłędności punktów oparcia też wydawałoby się wskazane, byłyby pomiary o najwyższej precyzji, gdzie niewątpliwie przyjęcie założenia niezmienności punktu może mieć ujemny i wyraźny wpływ na układ obserwacyjny przy jego wyrównaniu.



## РЕЗЮМЕ

При уравнении наблюдений в триангуляционных сетях автор предлагает отбросить положение о безошибочности опорных пунктов, поскольку оно часто приводит к деформации высококачественных систем наблюдений, а вводить в процессе уравнения поправки как в непосредственно наблюдаемые величины так и в координаты опорных пунктов.

Принимая условие в общем виде:  $\left[ \frac{vv}{mm} \right] = \text{минимум}$  ( $v$  — поправка,  $m$  — ср. кв. ошибка, определенная *a priori*) следует:

1. написать систему уравнений ошибок для произведенных в сети геодезических наблюдений:

$$a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dx_2 + d_i dy_2 + \dots l_i = v_i \text{ со ср. кв. ош. } m_i;$$

2. присоединить к этим уравнениям уравнения поправок координат „неизменных“ пунктов в виде:

$$dx = V dx \text{ со ср. кв. ош. } m_x;$$

$$dy = V dy \text{ „ „ „ „ } m_y;$$

3. разделить каждое из уравнений полученной системы на соответствующую ср. кв. ошибку и перейти от такой „уравновешенной“ системы уравнений ошибок к системе нормальных уравнений Гаусса путем производства общеизвестных действий.

Описанный способ позволяет с одной стороны сохранить хорошую и внутренне сходимую систему наблюдений от деформации, вызываемой принятием неправильного положения о безошибочности опорных пунктов, с другой стороны позволяет дать характеристику точности определенных и исходных пунктов.

В работе приводится числовой пример иллюстрирующий процесс исчисления.

## RÉSUMÉ

Dans la compensation des réseaux de triangulation, l'auteur propose de ne pas tenir compte de l'hypothèse en cours qui admet les points d'appui comme exempts d'erreurs. Cette hypothèse cause souvent la déformation des systèmes d'observations de haute précision. L'auteur propose donc d'introduire au cours de la compensation des corrections tant des grandeurs observées directement, que des coordonnées des points d'appui. Partant du principe minimum de forme générale:  $\left[ \frac{vv}{mm} \right] = \text{minimum}$  (où  $v$  signifie la correction des compensations et  $m$  l'erreur moyenne correspondante établie *a priori*) le calcul exige alors ces trois points:

1) établir le système d'équations des erreurs pour les observations géodésiques accomplies dans le réseau:

$$a_i dx_1 + b_i dy_1 + c_i dx_2 + d_i dy_2 + \dots l_i = v_i \text{ erreur moyenne } m_i;$$

2) ajouter à ces équations la correction des coordonnées des points fixes sous cette forme:

$$dx = v dx \text{ où l'erreur moyenne est } m_x$$

$$dy = v dy \text{ où l'erreur moyenne est } m_y;$$

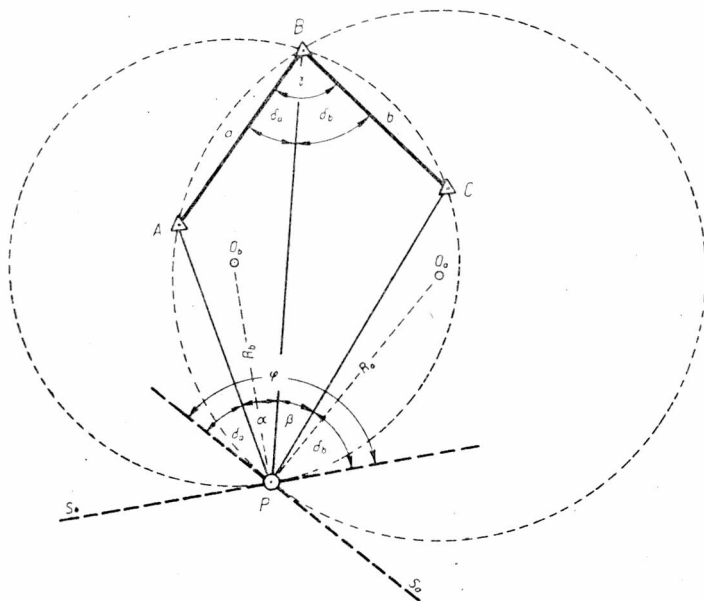
3) diviser chaque équation du système obtenu par l'erreur moyenne correspondante et passer d'un tel „système équilibré“ des équations normales de Gauss, en appliquant les règles généralement connues. Ce procédé permet de préserver d'une part ce système d'observations qui est bon et intérieurement concordant, contre la déformation qui s'en suivrait si l'on admettait l'hypothèse injustifiée où les points d'appui sont considérés comme exempts d'erreurs; d'autre part ce procédé permet de caractériser exactement aussi bien les points déterminés que les points donnés.

La note contient également un exemple numérique, illustrant le procédé des calculs.

Tadeusz Michalski

## Najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz

Wyznaczenie punktu  $P$  (rys. 1) za pomocą wcięcia wstecz wymaga określenia trzech wewnętrznych celowych (jednostronnych) z punktu  $P$  do trzech znanych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ . Określenie celowych następuje przez ustalenie wzajemnego ich ułożenia za pomocą kątów  $\alpha$  i  $\beta$ , pomierzonych



Rys. 1

z osobną metodą kątową, albo — jak to w praktyce najczęściej ma miejsce — przez pomierzenie na punkcie  $P$  kierunków do trzech znanych punktów metodą kierunkową.

Ostatecznie w zagadnieniu są znane kąty  $\alpha$  i  $\beta$  oraz odległości  $a$  i  $b$  między znanymi punktami jak również zawarty między nimi kąt  $\gamma$ , przy czym ostatnie trzy elementy mogą być obliczone na podstawie znanych współrzędnych punktów  $A$ ,  $B$  i  $C$ .

Z trygonometrii wiemy, że zależność między sinusem kąta i przeciwległym mu bokiem w trójkącie pozwala określić średnicę koła opisanego tegoż trójkąta. Przy wcięciu wstecz, gdzie istnieją dwa trójkąty o wspólnym boku  $PB$ , są ustalone dwa koła, mianowicie: koło o punkcie środkowym  $O_a$  przechodzące przez punkty  $P$ ,  $A$  i  $B$ , mające promień  $R_a$ , oraz koło o punkcie środkowym  $O_b$  przechodzące przez punkty  $B$ ,  $C$  i  $P$ , mające promień  $R_b$ . Wspomniane promienie wynoszą odpowiednio:

$$R_a = \frac{a}{2 \sin \alpha}, \quad R_b = \frac{b}{2 \sin \beta}. \quad (1)$$

Na ich podstawie można by określić współrzędne środków kół  $O_a$  i  $O_b$ . Następnie, znając te współrzędne, można by znów przy pomocy promieni  $R_a$  i  $R_b$  wyznaczyć współrzędne wciętego punktu  $P$ .

Z rysunku 1 widać, że geometryczna wartość wcięcia jest uzależniona od kształtu trójkąta  $O_b P O_a$ , a głównie od tego, jak przecinają się promienie  $R_a$  i  $R_b$ , bądź — ponieważ styczne poprowadzone w punkcie  $P$  układają się prostopadle do tych promieni — od kąta, pod którym przecinają się styczne  $S_a$  i  $S_b$ , czyli od kąta  $\varphi$ . Oznaczając kąt  $PBA$  przez  $\delta_a$  i kąt  $CBP$  przez  $\delta_b$ , przy czym  $\delta_a + \delta_b = \gamma$ , i biorąc pod uwagę znane z geometrii twierdzenie, że kąt zawarty między styczną i cięciwą równa się kątowi obwodowemu wspartemu na tej cięciwie, zauważymy charakterystyczny związek:

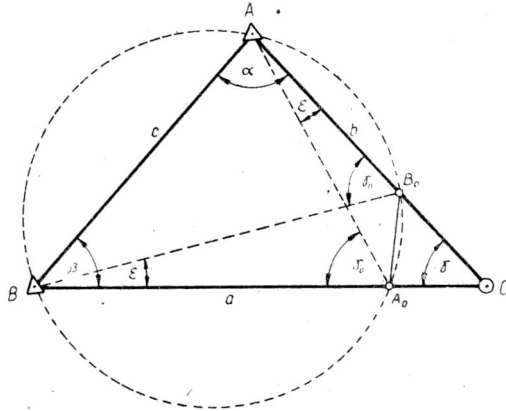
$$\varphi = (a + \beta) + (\delta_a + \delta_b) = (a + \beta) + \gamma, \quad (2)$$

czyli styczne przecinają się pod kątem równym sumie kątów pomierzonych i kąta danego zawartego między znanymi bokami  $a$  i  $b$ . Kąt ten może przybierać wartości między  $0^\circ$  a  $360^\circ$  i wobec tego jego wielkość decyduje o praktycznej przydatności wcięcia. Aby kąt  $\varphi$  zdołał do zera, punkty  $A$  i  $C$  muszą zdołać do nakrycia się, a punkty  $P$  i  $B$  muszą być położone wobec siebie w bardzo wielkiej odległości. Jeżeli kąt  $\varphi$  miałby zdołać do  $360^\circ$ , to wyznaczany punkt  $P$  musiałby zdołać do nakrycia się z punktem  $B$ . Oba przypadki przedstawiają momenty krytyczne, w których zadanie staje się nierozwiązalne. Oczywiście istnieje jeszcze, jak wiadomo, trzeci moment krytyczny, gdy środki obu kół dążą do nakrycia się, czyli gdy punkty dane i wyznaczany znajdują się na okręgu jednego koła. Wówczas styczne  $S_a$  i  $S_b$  pokrywają się, a kąt  $\varphi$  równa się  $180^\circ$ .

Z powyższego można wnioskować, że korzystne wcięcie wstecz ma miejsce wówczas, gdy styczne przecinają się pod kątem  $90^\circ$  bądź  $270^\circ$ , tzn. pośrodku przedziałów między momentami krytycznymi  $0^\circ$ ,  $180^\circ$  i  $360^\circ$ . W celu jednoznacznego zdefiniowania najkorzystniejszego przypadku wcięcia wstecz musimy więc przeprowadzić dodatkową analizę. W tym celu przyjrzyjmy się rys. 2. Jeżeli w trójkącie  $ABC$  kąt  $\gamma$  zwiększy się

o  $\varepsilon$ , to przy niezmiennym kącie  $\alpha$  — bok  $b$  zmniejszy się o wielkość  $CB_0 = \Delta b$ , a przy niezmiennym kącie  $\beta$  — bok  $a$  zmniejszy się o wielkość  $CA_0 = \Delta a$ . Łatwo zauważyć, że powstałe punkty  $A_0$  i  $B_0$  łącznie z punktami  $A$  i  $B$  tworzą czworobok wpisany w koło, ponieważ bok  $c$  jest widoczny zarówno z punktu  $A_0$ , jak i  $B_0$  pod kątem  $\gamma_0 = \gamma + \varepsilon$ .

Zauważmy dalej, że trójkąt  $A_0CB_0$  jest podobny do trójkąta  $ACB$ , czyli kąt  $B_0A_0C = \alpha$  i kąt  $CB_0A_0 = \beta$ , co wynika z następującego rozumowania: Kąt  $AA_0B_0$  jako wsparty na cięciwie  $AB_0$  równa się kątowi  $(\beta - \varepsilon)$ , zaś kąt  $B_0A_0C = 180^\circ - (\gamma_0 + \beta - \varepsilon)$ , a ponieważ wg (3)  $\gamma_0 - \varepsilon = \gamma$ , więc kąt  $B_0A_0C = 180^\circ - (\beta + \gamma) = \alpha$ .



Rys. 2

Wobec powyższego prosta  $A_0B_0$  jest równoległa do stycznej w punkcie  $C$  koła opisanego na trójkącie  $ABC$ , a odstęp punktu  $C$  od tej prostej oznacza wielkość przesunięcia stycznej, wywołanego zmianą kąta  $\gamma$  o  $\varepsilon$ . Jeżeli zmiana tego kąta jest bardzo mała, np. jeżeli  $\varepsilon$  oznaczałoby błąd obserwacji kąta  $\gamma$ , to prostą  $A_0B_0$  można utożsamić ze stycznymi w punktach  $A_0$  i  $B_0$  koła przedstawionego na rys. 2. Zanim przejdziemy do właściwego zagadnienia, wyznaczmy wielkość przesunięcia stycznej, wywołanego zmianą kąta  $\gamma$  o małą wielkość  $\varepsilon$ .

Odstęp ten wynosi:

$$z = A_0C \sin \alpha = \Delta a \cdot \sin \alpha. \tag{4}$$

W celu wyznaczenia wartości  $\Delta a$  zróżniczkujemy zależność:

$$a = \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin \gamma} \tag{5}$$

w założeniu, że  $\alpha$  i  $\gamma$  są zmienne:

$$da = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha \cdot d\alpha - \frac{c \sin \alpha}{\sin^2 \gamma} \cos \gamma \cdot d\gamma$$

zastępując różniczki różnicami  $\Delta a$ ,  $\Delta \alpha$  i  $\Delta \gamma$ , napiszemy:

$$\Delta a = \frac{c}{\sin \gamma} \cos \alpha \cdot \Delta \alpha - \frac{c \cdot \sin \alpha}{\sin^2 \gamma} \cos \gamma \Delta \gamma.$$

Po uwzględnieniu, że  $\Delta a = -\Delta \gamma = -\varepsilon$  i z uwagi na (5) otrzymujemy:

$$\Delta a = -\frac{\varepsilon}{\sin \gamma} (c \cdot \cos a + a \cdot \cos \gamma),$$

a ponieważ  $c \cdot \cos a + a \cdot \cos \gamma = b$  i wyrażając zmianę kąta w mierze łukowej, mamy ostatecznie:

$$\Delta a = -\frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot \frac{b}{\sin \gamma}. \quad (6)$$

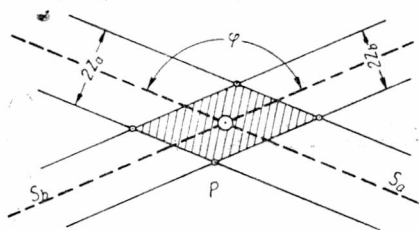
Podstawiając tę wartość do (4) i uwzględniając, że  $\sin a : \sin \gamma = a : c$ , otrzymujemy:

$$z = -\frac{\varepsilon''}{\rho''} \cdot \frac{a \cdot b}{c}, \quad (7)$$

czyli odstęp, o który przesunie się styczna na skutek zmiany kąta obwodowego, jest zależny od wielkości zmiany kąta i iloczynu jego ramion podzielonego przez cięciwę, o którą wsparty jest ten kąt.

Doszliśmy więc do wzoru podanego przez prof. Hausbrandta<sup>1</sup> przy omawianiu analizy wcięć metodą tzw. „wstęgi wahań“. Z rys. 2 widać, że chcąc wykreślić w punkcie C styczną do koła opisanego na trójkącie ABC, należy długość prawego ramienia odciąć na lewym ramieniu, a długość lewego ramienia na prawym, następnie przeprowadzić przez C równoległą do linii łączącej otrzymane punkty.

Posługując się „figurą błędów“ powstałą przez przecięcie się dwóch



Rys. 3

wstęg wahań, jakie można wykreślić dla wcięcia wstęcz, możemy ostatecznie rozstrzygnąć, który przypadek wcięcia jest najkorzystniejszy. Wróćmy więc do rys. 1. Na skutek błędów obserwacji kątów  $\alpha$  i  $\beta$  styczne  $S_a$  i  $S_b$  podlegają poprzecznym przesunięciom w prawo i lewo o wielkości  $z$  wyrażone wzorem (7). Szerokość każdej wstęgi wahań wynosi  $2z$ , a figura błędów jest równoległobokiem przedstawionym na rys. 3. Pole tej figury błędów w razie jednakowej dokładności pomiarów wynosi:

$$P = \frac{2z_a}{\sin \varphi} \cdot \frac{2z_b}{\sin \varphi} \cdot \sin \varphi = \frac{4\varepsilon^2}{\rho^2 \sin \varphi} \cdot \frac{AP \cdot BP}{a} \cdot \frac{BP \cdot CP}{b}. \quad (8)$$

<sup>1</sup> Zob. „Przegląd Geodezyjny“ nr 9—10 z r. 1949, str. 240—249.

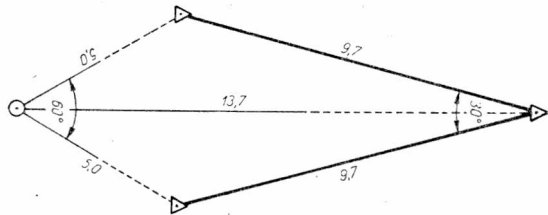
Oczywiście najkorzystniejszy przypadek wcięcia ma miejsce wówczas, gdy pole figury błędów będzie zdążyło do minimum. Warunek ten zaistnieje, jeżeli:

- 1)  $\sin \varphi$  osiągnie maksimum, tzn. gdy  $\cos \varphi = 0$ , czyli  $\varphi$  będzie równe  $90^\circ$  bądź  $270^\circ$ , w rezultacie więc — gdy figura błędów będzie kwadratem;
- 2) środkowa celowa  $BP$  (rys. 1), która we wzorze (8) występuje w drugiej potęgze — będzie możliwie krótka, a boki dane  $a$  i  $b$  możliwie długie;
- 3) błąd pomiaru kątów  $\varepsilon$  będzie możliwie nieduży.

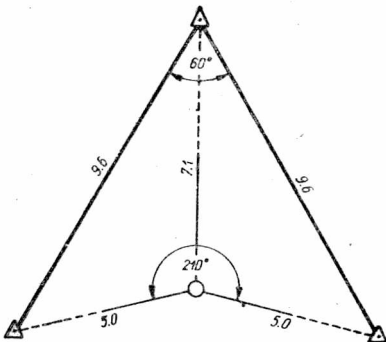
Posługując się wzorem (8) obliczmy teraz pola figur błędów dla kilku charakterystycznych przypadków, przyjmując długość celowych zasadniczych 5,0 km i średni błąd pomiaru kątów  $\pm 5''$ . Pole figur podamy w  $\text{cm}^2$ , a wyciągając pierwiastek kwadratowy otrzymamy szerokość wstęgi wahań.

Na rysunku 4 jest pokazane wcięcie wstecz, które spełnia warunek  $\varphi = 90^\circ$ , tzn. styczne przecinają się pod kątem prostym, a więc pole błędów jest kwadratem. Wynosi ono  $1156 \text{ cm}^2$ , a wstęga wahań ma szerokość 34 cm.

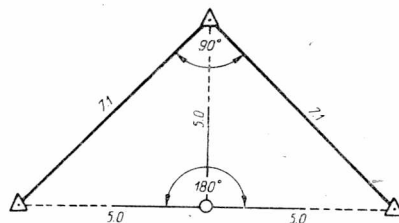
Rysunek 5 przedstawia wcięcie wstecz, spełniające warunek  $\varphi = 270^\circ$ , tzn. pole błędów jest także kwadratem. Jego wielkość wynosi  $324 \text{ cm}^2$ , a szerokość wstęgi wahań osiąga 18 cm.



Rys. 4



Rys. 5



Rys. 6

Na rysunku 6 mamy wreszcie wcięcie wstecz, które spełnia warunek  $\varphi = 270^\circ$ , czyli pole błędów jest kwadratem. Jego wielkość wynosi  $289 \text{ cm}^2$ , zaś wstęga wahań ma szerokość 17 cm.

Porównując wartości w poszczególnych przykładach widzimy, że do korzystnych przypadków wcięcia wstecz nie może być zaliczony przypadek, gdy  $\varphi = 90^\circ$ . Równocześnie należy zwrócić uwagę na wielkie pogorszenie się geometrycznej wartości wcięcia, o ile odstępimy od warunku korzystnego wcięcia (różnica między przykładem na rys. 5 i 6 jest minimalna).

Przypadek pokazany na rys. 6 wydaje się najbardziej korzystny, bowiem pole błędów jest najmniejsze, a styczne przecinają się pod kątem prostym. Tak jednak nie jest, ponieważ funkcja  $\sin \varphi$ , przy  $\varphi = 270^\circ$ , osiąga wprawdzie swe maksimum, jednak zmiany w otoczeniu tego miejsca nie są zbyt wielkie. Badając sprawę szczegółowiej ustalimy, że jeżeli w przypadku przedstawionym na rys. 5, gdzie punkty dane tworzą trójkąt równoboczny, punkt wyznaczany umieścimy w jego środku ciężkości i przyjmiemy jak na rys. 6 długość celowych wyznaczających po 5 km (wszystkie—jednakowo długie), to wprawdzie  $\varphi$  będzie równe  $300^\circ$ , czyli styczne nie będą się przecinać pod kątem prostym i pole błędów nie będzie kwadratem, jednak wielkość tego pola wyniesie tylko  $262 \text{ cm}^2$ , a długość boku figury błędów tylko  $16,2 \text{ cm}$ .

Łatwo jednak zauważyć, że różnice są minimalne i bez praktycznego znaczenia. Po tych wywodach możemy już ustalić kryterium ustalające najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz, mianowicie:

- 1) punkty dane powinny tworzyć trójkąt w przybliżeniu równoboczny;
- 2) suma pomierzonych kątów  $\alpha$  i  $\beta$  dodana do kąta zawartego między dwoma bokami danymi, powinna wynosić około  $270^\circ$ ;
- 3) wyznaczany punkt powinien znajdować się wewnątrz trójkąta, utworzonego przez punkty dane, w pobliżu jego środka ciężkości.

#### РЕЗЮМЕ

Темой статьи является установление критерия, согласно которому можно было оценить геометрическое качество обратной засечки по трем направлениям.

В начале статьи автор доказывает, что геометрическое качество обратной засечки зависит от угла  $\varphi$  между касательными  $S_a$  и  $S_b$  (рис. 1) обеих окружностей и приводит доказательство тому, что этот угол равен сумме измеренных углов  $\alpha$  и  $\beta$  и угла  $\gamma$  между известными сторонами  $a$  и  $b$ . Угол  $\varphi$  может изменяться в пределах от  $0^\circ$  до  $360^\circ$ . Автор доказывает, что существуют три критических момента, при которых задача не решается, а именно при  $\varphi = 0^\circ$ ,  $360^\circ$  и  $180^\circ$ , когда имеет место так нзв. „опасный круг“.

Отсюда автор выводит, что выгодная засечка может иметь место тогда, когда касательные пересекаются под углом  $90^\circ$  или  $270^\circ$ , т. э. посредине между критическими моментами.

С целью вывести однозначное определение найвыгоднейшего случая обратной засечки автор выводит зависимость между изменением угла и величиной перемещения касательной (формула 7), затем переходит к анализу вопроса на основании величины поля ошибок, полученного пересечением двух поясов колебаний (рис. 3).



Рассматривая три характерных примера автор доказывает, что при  $\varphi=90^{\circ}$  (рис. 4) обратную засечку нельзя причислить к выгодным случаям, а посему следует принимать во внимание только  $\varphi=270^{\circ}$ . Наименьшее поле ошибок (289 кв. см.) имеет случай, приведенный на рис. 6: дальнейший анализ показывает, что идеальный случай обратной засечки требует, чтобы данные пункты составляли равносторонний треугольник, а определяемая точка находилась в центре его тяжести. В этом случае, когда  $\varphi=300^{\circ}$ , поле ошибок достигнет величины 262 кв. см. а ширина поясов колебаний 16,2 см. по сравнению с 289 кв. см. и 17,0 см., вычисленных для примера, приведенного на рис. 6.

Поскольку разность получается минимальной, оба случая могут быть признаны выгодными.

### RÉSUMÉ

Cet article établit un critérium permettant de juger la valeur géométrique du relèvement basée sur trois visées.

Au début l'auteur démontre que la valeur géométrique du revèlement dépend de l'angle  $\varphi$  formé par l'intersection des tangentes  $S_a$  et  $S_b$  (dessin 1) aux deux cercles; il prouve que cet angle est égal à la somme des deux angles observés  $\alpha$  et  $\beta$  ainsi que l'angle  $\gamma$  contenu entre les côtés connus  $a$  et  $b$ . L'angle  $\varphi$  peut être compris entre les limites  $0^{\circ}$  et  $360^{\circ}$ . L'auteur démontre qu'il existe trois moments critiques où le problème reste insoluble, à savoir pour  $\varphi=0^{\circ}$  ou  $360^{\circ}$  et  $180^{\circ}$ , lorsque nous avons à faire au „cercle périlleux“. L'auteur en conclut qu'un relèvement avantageux peut avoir lieu lorsque les tangentes forment un angle droit ( $90^{\circ}$  ou  $270^{\circ}$ ), c'est à dire au milieu des intervalles entre les moments critiques.

Afin de définir d'une manière univoque le cas le plus avantageux du relèvement, l'auteur introduit la relation entre la variation de l'angle et la grandeur du déplacement de la tangente (formule 7). Il passe ensuite à l'analyse du problème en se basant sur la grandeur du champ d'erreurs formé par l'intersection des deux „bandes d'indécision“ (dessin 3). En examinant les trois cas caractéristiques l'auteur prouve que lorsque  $\varphi=90^{\circ}$  (dessin 4) le relèvement ne peut être classé parmi les cas avantageux, de sorte qu'il ne faut prendre en considération que le cas  $\varphi=270^{\circ}$ . C'est l'exemple que représente le dessin 6 qui a le moindre champ d'erreurs (289 cm<sup>2</sup>); cependant en poursuivant l'analyse on s'aperçoit que le cas idéal du relèvement exige que les points donnés forment un triangle équilatéral et que le point désigné se trouve à son centre de gravité. Dans ce cas bien que  $\varphi$  soit égal à  $300^{\circ}$  le champ d'erreurs s'élève à 262 cm<sup>2</sup> et la largeur de la bande d'indécision à 16,2 cm. tandis que les nombres respectifs pour le cas représenté par le dessin 6 étaient 289 cm<sup>2</sup> et 17,0 cm.

La différence étant minime, on peut considérer les deux cas comme des cas avantageux du relèvement.

Kazimierz Sawicki

## „Miernicka Nauka” Stanisława Grzepskiego

(Recenzja)

Pierwsze próby piśmiennictwa technicznego u nas odnoszą się tematycznie do miernictwa; były to łacińskie kompilacje ze źródeł średniowiecznych.

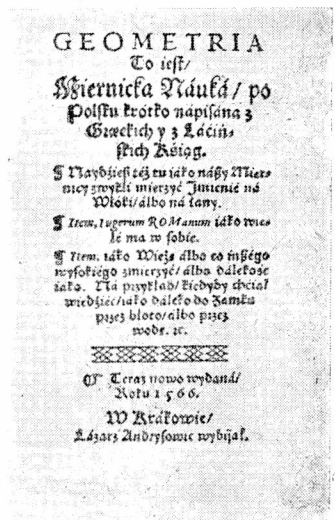
Za pierwszą z nich uchodzi „Practica geometriae” z końca XIV wieku, znajdująca się w bibliotece Jagiellońskiej. Drugą chronologicznie pracą w tej dziedzinie, wydaną na ziemiach naszych, jest rękopis pt. „Geometria Culmensis” (Chełmińska), obejmująca geometrię praktyczną, a ułożona z polecenia wielkiego mistrza Krzyżaków Konrada von Jungingen w roku 1407.

W połowie XV w. jeden z profesorów Akademii Krakowskiej, zwany dla biegłości w sztuce lekarskiej Marcinem Królem (*Rex in medicinis*), ułożył kurs geometrii praktycznej pt. „Geometria Regis”, gdzie streszcza znane wówczas metody pomiarowe i opisuje stosowane przy tych pomiarach narzędzia.

Były to więc — jak i większość ówczesnych prac naukowych — prace pisane po łacinie. Pierwszym polskim drukiem miała być wg Tadeusza Czackiego<sup>1</sup> „Nauka miernicza” Andrzeja z Łęczycy z r. 1555, której urywek oglądał on w Bibliotece Załuskich.

Druk ten jednak nie został odnaleziony, wobec czego za pierwszą książkę polską o miernictwie, a zarazem i za pierwszą w ogóle książkę techniczną polską należy uważać piękne dziełko Stanisława Grzepskiego pt. „Geometria to jest Miernicka Nauka” z r. 1566. Jest to tym bardziej słuszne, że Grzepski, piszący jedenaście lat później, nie tylko o Andrzeju z Łęczycy nie wspomina, lecz o książce swej mówi, że „jest to rzecz nowa, a w języku naszym przedtem niesłychana”.

Historyk nauk technicznych w Polsce prof. inż. F. Kucharzewski dochodzi do wniosku, że przeglądana przez Czackiego „Nauka Miernicza” nie była może wykładem miernictwa, lecz tylko nauką formalności przy rozgraniczeniu dóbr, stawianiu znaków granicznych itp.



<sup>1</sup> T. Czacki, „O litewskich i polskich prawach”, Warszawa 1901 r.

„Geometria“ Grzepskiego została wydana po raz drugi w r. 1861 jako facsimile oryginału przez Juliana Bayera. Po raz trzeci ukazała się ona w r. 1929, wydana przez inż. Wacława Krzyszkowskiego, jako fotolitograficzna odbitka wydania Bayera<sup>2</sup>

Na wstępie pokrótce omówię stronę typograficzną książki. Przede wszystkim — format.

Otóż książki naukowe były składane wówczas przeważnie *in folio* lub *in quarto*, tj. o wymiarach  $\frac{1}{2}$  i  $\frac{1}{4}$  arkusza; tu zaś mamy wymiar *in octavo minori* — małej ósemki, czyli format typowo kieszonkowy, przy wielkości kolumny stronicowej  $6\frac{1}{2} \times 12\frac{1}{2}$  cm. Nie jest to chyba przypadkowe. Chodziło na pewno o to, aby ówczesni nasi miernicy mieli podręcznik połowy<sup>3</sup>.

Tekst polski drukowany jest czcionką gotycką, tzw. „szwabachą“, a łaciński — „łacinką“ o dwóch krojach: antykwą (Geometria) i kursywą (Corpus, Iugerum, Linea). Poza tym są tam efektowne inicjały, a w miejscach wolnych między kolumnami — ładnie skomponowane ozdobniki. Całość zawiera kart nieliczbowanych 64. Literami od A do Q oznaczane są tylko poszczególne arkusze, bez paginowania.

Pod ostatnim wyrazem każdej strony (składki) są umieszczone tzw. „kustosze“, czyli początkowe wyrazy następnej strony; było to konieczne dla ułatwienia bezbłędnego składania, czyli falcowania poszczególnych arkuszy.

Rysunki wykonane w technice drzeworytniczej nie są na zbyt wysokim poziomie i mają pewne niedociągnięcia.

Zareagował na to w sposób na ogół nie praktykowany sam autor, dając pośrednio taką oto admonicję niezbyt utalentowanemu drzeworytnikowi: „Przy końcu tych tu książek mam cię upomnąć Czytelniku miły, iż figury nie wszędzie tak iakoby miały być, są uczynione: przeto iż Mistrz co ie rzezał, nie był po temu“.

Książkę tę, wydaną w Krakowie, „Łazarz Andryswic wybijał“. Był on pierwszym samodzielnym drukarzem narodowości polskiej i posiadał tytuł Królewskiego typografa<sup>4</sup>. Będąc dobrym fachowcem utrzymywał on na wysokim poziomie swój warsztat, znany jeszcze jako „Drukarnia Łazarzowa“ lub „Officina Lazari“. Tak się więc złożyło, że pierwszą polską książkę techniczną „wybijał“ pierwszy drukarz Polak, Łazarz Andryswic ze Strykowa, powiatu sieradzkiego.

Po karcie tytułowej (bez nazwiska autora) idą wiersze łacińskie, a następnie dedykacja polska: Stanisławowi Miłoszewskiemu, Łowczemu Bełzkiemu, który ongiś Autora „za praeceptora używać raczył“.

Dalej następuje „Do Czytelnika Przedmowa“, gdzie Grzepski perswaduje, aby nie zrażać się trudnościami studiów: „Przetoż ieśli zaraz nie wyrozumiesz czego, wyrozumiesz drugim razem, albo trzecim, według dowcipu. Rozum człowieczy iest takowy, im więcej co bierze przed sye, im częścicy co rozmyśla, tym przestrzeniey sobie w oney rzeczy czyni, tym więcej obacza y naydzie, czego przedtem nie obaczył, nie znalazł“. I dla zachęty czytelnika tak kończy: „... a im więcej sye będziesz tym bawił, tym lepszym będziesz Geometrem“.

Dalej następuje wykład geometrii elementarnej (planimetrii)<sup>5</sup> napisany piękną polszczyzną w sposób jasny i zrozumiały.

Grzepski miejscami objaśnia powoli, mozolnie, nieraz się powtarzając, byle tylko czytelnika nauczyć. Nie kładzie on przy tym nacisku na stronę dowodową i w nie-

<sup>2</sup> Reprodukacja strony tytułowej podana jest tu z wydania trzeciego.

<sup>3</sup> Wymiar III wydania jest identyczny z egzemplarzem oryginału, znajdującym się w bibliotece Uniwersytetu Warszawskiego.

<sup>4</sup> Pierwsi nasi drukarze jak Ungler, Haller, Szarfenberg i inni byli Niemcami.

<sup>5</sup> Kurs jest mniej więcej na poziomie klasy 8 naszej szkoły.

jednym miejscu pomija uzasadnienie danego twierdzenia. Materiał, ilustrowany wieloma rysunkami w tekście, podawany jest miejscami bez rozumowanego balastu dowodowego, szczególnie tam, gdzie twierdzenie jest oczywiste.

Opisując np. konstrukcję, niezbędną do wystawienia prostopadłej do danej prostej, kończy swój wywód w ten sposób: „A żeby to tak było, tegoby sye dowieść mogło, ale i kromie dowodów, każdy na figurę patrząc, obaczy że tak iest“. Opisując kąty naprzemianległe, dochodzi do wniosku, że: „Tu nie trzeba przedłużać dowodząc długo, bo y sam wzrok to okazuje, iż kąty te które są y tam y sam położone, dwa a dwa jeden drugiemu są równe“.

Tą metodą dydaktyczną Grzepskiego zachwyił się profesor matematyki A. M. Rusiecki, pisząc w r. 1930<sup>6</sup>: „Jaka szkoda, że po 360 latach poglądy Grzepskiego nie są powszechnie przyjęte, a nauczyciel sili się dowodzić uczniom rzeczy, które im się wydają tak oczywistymi, że nie trzeba przedłużać dowodząc długo“.

Nie znaczy to oczywiście, że wykład „Geometrii“ jest w ogóle pozbawiony pierwiastka rozumowego. Tam, gdzie autor uważa to za konieczne, mamy wiele przykładów pięknie i dowcipnie przeprowadzonych rozumowań przy dowodzeniu danych twierdzeń, jak np. o sumie kątów w trójkącie, powierzchni figur równoważnych i inne.

Na planimetrii kończą się wiadomości wstępne z geometrii. Stereometrii Grzepski nie podaje, tłumacząc to tym, „iż Geometria ieszcze nigdy w Polskim ięzyku nie była, ani sye ieszcze naszym takowym rzeczom przysłuchali, przetobych nie rad przedłużał ani zatrudniał, aby ci co czytać będą, łączniey się wyprawić mogli, a wszakże, gdy sye otrze naszym to o uszy może sye potem około tego y to co, y co drugiego da napisać“<sup>7</sup>.

Druga część wykładu zawiera mierzenie gruntów i wyczerpująco przeanalizowaną metrologię.

Podane tam są miary liniowe, jak: łokieć, laska, pręt i sznur oraz miary powierzchni. Przechodząc od mazowieckich miar powierzchni do używanych w innych częściach Polski, pracowicie analizuje autor różne pisma współczesne o mierzeniu łanów, porównywa je z włóką chełmińską a w końcu daje rozdziałek „O Morgu Rzyskim“.

Dla historii metrologii część wykładu o miarach gruntowych w Polsce wieku XVI jest źródłem pierwszorzędym.

Najciekawsza jednak wydaje się trzecia i ostatnia część wykładu: „O mierzeniu Wysokości, Dalekości y Głębokości“. Jest to niejako uwieńczenie całości kursu „nauki miernickiej“: podane są tu sposoby obliczania wielkości niedostępnych do bezpośredniego pomiaru w oparciu o zasadę podobieństwa trójkątów.

Jak tego rodzaju umiejętność była ważna dla ówczesnych „mierników“, świadczy fakt, że — według bezimiennego biografy — Grzepski do wydania swego dziełka „miał okazyą z przypadku znacznego, który się stał w Wilnie przy dworze króla Augusta, dla Geometrii głupiej Mierników na Podlasiu, którzy czasem przez pośredek izby sznur ciągnęli, dziury przewierciawszy“. Najwidoczniej miernicy podlascy, mając przeszkodę na trasie w postaci zabudowań wiejskich, nie umieli sobie dać z tym rady inaczej, jak dziurawiąc izby, gdyż sposoby obliczania odległości niedostępnych nie były im znane.

Chcąc dać próbkę stylu wykładów Grzepskiego, pozwolę sobie na nieco dłuższą cytataę o pomiarze wysokości przy pomocy laski:

<sup>6</sup> „Parametr“, czasopismo poświęcone nauczaniu matematyki, tom 1, zes. 3, 1930 r.

<sup>7</sup> Niestety dalszego ciągu „Geometrii“ Grzepski nie zdążył napisać, zmarł bowiem 1 grudnia 1570 r. mając lat 46.

„Kiedyby cieniu nie było, a Dyoptry by też nie miał, a chciałby zmierzyć co wysokiego, tedy tak uczyni: weźmi laskę, jako długą chcesz, postawże ją prosto na równiey, potym zchyl sye na ziemię, albo sye układź, patrzże z ziemię pomykając sye tak długo, aż przez samy wierch oney laski uźrżysz wierch wysokości tey którą chcesz zmierzyć. Jako na przykład: Niech będzie wysokość a. b. postawże laskę c. d. patrzże od ziemię przymykając sye, albo umykając tak długo, aż przez wierch laski d. uźrżysz wierch a. Punkt gdzie oko twoje na ziemi iesel, przezo-wiemy e. Tu widzisz, że dwa kliny są z równymi kąty...“ itd.

Wywód podany jest piękną polszczyzną, w sposób prosty, a jednocześnie tak plastyczny (chciałoby się powiedzieć: „namacalny“), że nawet załączony tam rysunek wydaje się zbędny.

Godnym uwagi poza tym jest polskie słownictwo matematyczno-techniczne. Nie miał tu Grzepski zadania łatwego: trzeba było zebrać istniejące odpowiedniki, których w matematyce wówczas na pewno prawie nie było, a brakujące — tworzyć.

„Na stworzenie nowego wyrazu tyle prawie trzeba talentu, ile na stworzenie nowej myśli“ — pisał Jan Śniadecki z okazji wprowadzania przez Kołłątaja do Akademii Krakowskiej polszczyzny jako języka naukowego zamiast przyjętej jeszcze wówczas łaciny.

Słownikarz dzisiejszej doby — inż. H. Chmielewski — wręcz twierdzi, że jak wykazała dotychczasowa praktyka, „narodziny nowego słowa trwają w mozolnym trudzie niekiedy całe lata“<sup>8</sup>.

Niektóre próby Grzepskiego są dość nieśmiałe, jak np. *Linea*, w pierwszym przypadku ma formę łacińską, a w innych niejako spolszczoną: Liniey, Linią i liczba mnoga: Lineae, Linie, Lineami itp. Natomiast charakterystyka linii jest już ściśle polska: „Okrągła Linea“ (na rysunku okrąg), „Zatoczona“ (na rys. spirala), „Krzywa“ (na rys. coś w rodzaju sinusoidy), „Zamotana“ (brak definicji i rysunku).

Podając łacińskie: *circulus* i *circum-ferentia*, nazywa je „koło“ i „obwód“, czyli rozróżnia pojęcia koła i okręgu koła. „Corpus, które może być rzeczono hrubość“, jest to ciało lub bryła, a grubość nazywa się „miąższość“. Trójkąt nazywa „klinem“. „Dno“ jest to podstawa trójkąta lub innej figury. „Równia“ — płaszczyzna, „Nie równia“ — powierzchnia nie płaska. „Kończasty kąt“ — ostry, „tępy kąt“ — rozwarty. „Węgieł“ — wierchołek figury. „Zwierchność“ — powierzchnia. „Położ oko na Liniey“ — celuj. Jest jeszcze wiele innych, lecz wprost uderzający swą trafnością wydaje mi się „promień wzrokowy“ na określenie celowej.

Należy więc uznać jeszcze jedną zasługę Grzepskiego: był on pierwszym naszym słownikarzem w dziedzinie matematyczno-geodezyjnej. Terminologię polską ma przy tym znacznie lepszą niż niektóre późniejsze książki matematyczne innych autorów.

Każde wydanie „Geometrii“ miało swój oddźwięk wśród uczonych. Słynny nasz matematyk z XVII wieku — Jan Brożek, profesor Akademii Krakowskiej, tak ocenił tę książkę, że po roku 1629 wydał rozprawę pt. „Księdza Jana Brosciusa Przydatek pierwszy do Geometryey Polskiej Stanisława Grzepskiego“ i widać miał zamiar napisać więcej tych przydatków. Miał Brożek poza tym specjalny sentyment do tej pięknej książki, gdyż — jak wspomina w jednym ze swych dzieł — uczył go z niej geometrii ojciec.

Pod koniec XVII w. książka ta była widocznie wyczerpana, gdyż przestała być znana. Stanisław Solksi w swym obszernym dziele „Geometria Polski“, wydanym w latach 1683—1686, nie wspomina o niej; później znano już tylko Solskiego.

<sup>8</sup> Inż. H. Chmielewski, „O polskie słownictwo techniczne“, „Przegląd Techniczny“ nr 6 z 1953 r.

Nie znał wcale Grzepskiego Tadeusz Czacki i dopiero Bogumił Linde umieścił „Geometrię“ wśród źródeł do swego „Słownika języka polskiego“, wydanego w r. 1805.

Wydanie drugie (z roku 1861) spowodowało obszerną recenzję matematyka prof. S. Dicksteina, a później nieco — monografię prof. F. Kucharzewskiego<sup>9</sup>. Wydanie trzecie (z roku 1929) ukazało się jednocześnie z wyżej wymienioną monografią, gdzie prof. Kucharzewski nadmienia, iż „Geometrię“ słuszniej zaliczyć wypada „do naszego piśmiennictwa technicznego niż matematycznego“.

Nie minęło to również bez echa. W sposób niezmiernie żywy i interesujący zareałował na to jako matematyk prof. A. M. Rusiecki w swej recenzji w „Parametrze“: „Czarna niewdzięczność! Nie dość, że miernictwo opiera swe metody pracy niemal wyłącznie na geometrii, ale jeszcze chce przywłaszczyć sobie pierwsze polskie dzieło pod tytułem «Geometria», uważając je za należące «do naszego piśmiennictwa technicznego». Wprawdzie sama geometria powstała na podłożu miernictwa (bo egipskie «omętry» byli pierwszymi geometrami), a nawet sama nazwa geometrii zdradza to jej pochodzenie, ale tym niemniej ma ona samodzielny żywot, o wiele bujniejszy od żywota swego protoplasty miernictwa“.

Inaczej mówiąc zagadnienie to sprowadził prof. Rusiecki do pytania: czy „Geometria“ Grzepskiego jest „nauką czystą“, czy „stosowaną“? Otóż geometria egipska była tą sztuką o której świadczy jej nazwa grecka — wcale już nie odpowiadająca jej treści w późniejszym ujęciu Euklidesa — sztuką „mierzenia ziemi“, bardzo potrzebną tam, gdzie coroczne dobroczynne powodzie Nilu niszczyły miedze graniczne między łanami. Była to więc oczywiście „nauka stosowana“, nie „czysta“.

Zapłodniła ona myśl naukową Greków, twórców geometrii jako „nauki czystej“, która w dalszym ciągu ma już swój samodzielny żywot i staje się między innymi bazą, na której z kolei opiera się sztuka mierzenia ziemi. Klasycznym tego przykładem jest właśnie podręcznik Grzepskiego: daje wstęp z geometrii „czystej“, aby z kolei przejść do geometrii praktycznej, czyli „stosowanej“, gdyż celem jest tu nauczanie sztuki mierzenia ziemi.

Każdy więc geodeta powie: „Grzepski jest nasz i Miernicka jest jego Nauka“.

Ręczę poza tym, że i sam Grzepski przytaknąłby nam cytata z swej „Geometrii“: „Nic sye iedno od drugiego nie odstrzela, y owszem sye iedno z drugim zgadza“.

Na zakończenie chcę jeszcze nadmienić, że do „Geometrii“ Grzepskiego nie należy podchodzić wyłącznie jak do ciekawostki bibliofilskiej, mogącej zainteresować miłośników naszej kultury narodowej z zakresu matematyki i techniki. Pomimo swej nieznacznej objętości niezwykła ta książka jest bogatym materiałem źródłowym do badań naukowych nie tylko dla bibliotekarzy, nauczycieli, badaczy metrologii i historyków, lecz z uwagi na piękną polszczyznę również i dla polonistów.

Czwarte wydanie tego klejnotu naszej literatury matematyczno-technicznej powinno by — z okazji Roku Odrodzenia — ukazać się jak najrychlej<sup>10</sup>.

<sup>9</sup> S. Dickstein, „Geometria elementarna“, odbitka z „Encyklopedyi wychowawczej“, Warszawa 1889.

F. Kucharzewski, „Nasza najdawniejsza książka o miernictwie“, Warszawa 1895.

<sup>10</sup> Redakcja kwartalnika informuje, że Komitet Geodezji PAN, na posiedzeniu w dniu 4 listopada 1953 r. powziął uchwałę w sprawie czwartego wydania książki St. Grzepskiego pt. „Geometria to jest Miernicka Nauka“. Prace przygotowawcze w toku.



## SPIS TREŚCI

A. Łobanow, M. Konszyn (Moskwa) — Metody sporządzania map topograficznych na podstawie zdjęć lotniczych i zasad fotogrametrii . . . . .	3
Stefan Hausbrandt — Wyrównanie sieci trygonometrycznych z odrzuceniem założenia bezbłądności punktów nawiązania . . . . .	17
Tadeusz Michalski — Najkorzystniejszy przypadek wcięcia wstecz . . . . .	33
Kazimierz Sawicki — „Miernicka Nauka“, Stanisława Grzebskiego . . . . .	40

## СОДЕРЖАНИЕ

А. Лобанов, М. Коншин (Москва) — „Методы создания топографических карт на основе аэрофотосъемки и фотограмметрии“ . . . . .	3
Стефан Гаусбрандт — „Уравнивание триангуляционных сетей с учетом ошибок опорных пунктов“ . . . . .	17
Тадеуш Михальски — „Найвыгоднейший случай обратной засечки“ . . . . .	33
Казимеж Савицки — Станислава Гржебского „Miernicka Nauka“ . . . . .	40

## SOMMAIRE

A. Łobanow, M. Konszyn (Moscou) — Méthode servant à élaborer les cartes typographiques d'après les prises de vues aériennes et les principes de la photogrammétrie . . . . .	3
Stefan Hausbrandt — Une compensation des réseaux trigonométriques où est rejetée l'hypothèse des points de liaison exempts d'erreurs . . . . .	17
Tadeusz Michalski — Le cas le plus avantageux du relèvement . . . . .	33
Kazimierz Sawicki — „Miernicka Nauka“ de Stanislas Grzebski . . . . .	40

**PRENUMERATA NA ROK 1954**  
**CZASOPISM NAUKOWYCH**  
**POLSKIEJ AKADEMII NAUK I TOWARZYSTW NAUKOWYCH**  
 wydawanych przez  
**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE**

T y t u ł	Ilość nr w roku	Prenumerata roczna zł	T y t u ł	Ilość nr w roku	Prenumerata roczna zł
Acta Biochemica Polonica	4	60	Folia Biologica . . . . .	4	48
Acta Geologica Polonica	4	80	Geodezja i Kartografia .	4	40
Acta Geophysica Polonica	4	48	Kwartalnik Historyczny	4	60
Acta Microbiologica Pol.	4	40	Kwart. Hist. Kult. Mat.	4	60
Acta Physica Polonica .	4	48	Kwart. IPR + Sovietica	4	40
Archiwum Bud. Maszyn	4	60	Kwartalnik Neofilolog. .	4	60
Archiwum Hydrotechn.	4	60	Myśl Filozoficzna . . . .	4	60
Archiwum Górn. i Hutn.	4	60	Nauka Polska . . . . .	4	80
Archiwum Elektrotechn.	4	60	Postępy Fizyki . . . . .	4	40
Archiw. Mech. Stosow. .	4	60	Postępy Hig. i Med. Dośw.	4	48
Biul. PAN Wydz. II	4	20	Przegląd Geograficzny .	4	40
Biul. PAN „ III	10	50	Przegląd Historyczny .	4	48
Biul. PAN „ IV	4	20	Przegląd Statystyczny	4	48
Biul. PAN „ II	4	20	Przegląd Orientalist. . .	4	48
Biul. PAN „ III	10	50	Roczniki Chemii . . . . .	4	80
Biul. PAN „ IV	4	20	Sprawozdania z czynno-		
Chrońmy Przyrodę Ojcz.	6	24	ści i prac PAN . . . . .	4	20
Ekonomista . . . . .	4	60	Wszechświat . . . . .	10	40

Organ. Min. Szkol. Wyższego i Głównego Zarz. Zw. Zaw. Nauczycielstwa Polskiego  
 — **Życie Szkoły Wyższej** — 12 × w roku — 96 zł rocznie.

\*

Prenumeratę na rok 1954 przyjmuje Centralna Ekspedycja PPK „Ruch“ Warszawa, Srebrna 12, na konto **PKO 1-110-28504**. Nakłady ograniczone. Regularną dostawę czasopism zapewni tylko prenumerata.