

**POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI**

**ARCHIWUM  
ELEKTROTECHNIKI**

**TOM III · ZESZYT 2**

**K W A R T A L N I K**

**PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1954**

SPIŚ TREŚCI

M. Jeżewski, L. Szklarski i Z. Kawecki: Badania magnetycznych pól rozproszenia, pochodzących od uszkodzeń w linach drucianych w związku z elektromagnetyczną metodą badania lin . . . . .	127
R. Kulikowski: Obliczanie liniowych układów impulsowych . . . . .	157
J. Keller i J. Ekiel: Nowa metoda odwzorowania przestrzennego prądów czynnościowych serca . . . . .	181
T. Cholewicki: Macierze składowych symetrycznych . . . . .	231

СОДЕРЖАНИЕ

М. Ежевски, Л. Шклярски и З. Кавецки: Исследования магнитных полей рассеяния, происходящих от повреждений в проволочных канатах в связи с электромагнитным методом испытания канатов. . . . .	127
Р. Куликовски: Расчёт линейных импульсных устройств. . . . .	157
И. Келлер и И. Экель: Стереокардиограф. . . . .	181
Т. Холевички: Матрицы симметрических составляющих. . . . .	231

CONTENS

M. Jeżewski, L. Szklarski and Z. Kawecki: Investigation of the magnetic leakage fields deriving from defects in wire ropes in connection with the magnetic wire rope testing method . . . . .	127
R. Kulikowski: The calculation of linear-pulse-circuits . . . . .	157
J. Keller and J. Ekiel: The spatial vectorcardiograph . . . . .	181
T. Cholewicki: Matrices of symmetrical components . . . . .	231

POLSKA AKADEMIA NAUK  
INSTYTUT PODSTAWOWYCH PROBLEMÓW TECHNIKI

# ARCHIWUM ELEKTROTECHNIKI

TOM III • ZESZYT 2

KWARTALNIK

PAŃSTWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE  
WARSZAWA 1954

R A D A R E D A K C Y J N A :

PROF. JANUSZ LECH JAKUBOWSKI, PROF. BOLESŁAW KONORSKI,  
PROF. IGNACY MALECKI, PROF. WITOLD NOWICKI, PROF. PAWEŁ SZULKIN,  
PROF. STANISŁAW SZPOR

K O M I T E T R E D A K C Y J N Y :

*Redaktor Naczelny*

PROF. JANUSZ GROSZKOWSKI

*Z-ca Redaktora Naczelnego*

PROF. PAWEŁ NOWACKI

*Sekretarz*

WACŁAW ZWOLAKOWSKI

ADRES REDAKCJI :

*Politechnika — Warszawa, ul. Koszykowa 75*  
*Zakład Elektroniki PAN*

STWOWE WYDAWNICTWO NAUKOWE — W A R S Z A W A 1954	
ad 558+100	Oddano do składania 24/II 1954
wyd. 14,5, druk. 11,5	Podpisano do druku 7/VI 1954
er dr. sat. 70 g 70×100/16 V kl.	Druk ukończono 18/VI 1954
Cena zł 15,-	Zamówienie nr 181/19 K-5-10558
POZNAŃSKA Drukarnia Naukowa — POZNAŃ, FREDRY 10	

621.317.49:677.72

M. JEZEWSKI, L. SZKLARSKI i Z. KAWECKI

## Badania magnetycznych pól rozproszenia pochodzących od uszkodzeń w linach drucianych w związku z elektromagnetyczną metodą badania lin

*Rękopis dostarczono 11. 7. 1953*

**Streszczenie.** Aby zbadać, od jakich parametrów zależy rejestracja uszkodzeń w linach drucianych za pomocą metody elektromagnetycznej, wykonano szereg doświadczeń polegających na tym, że na linę nie uszkodzoną nakładano druty z różnymi uszkodzeniami, a następnie te same uszkodzone druty wprowadzano do rurki mosiężnej umieszczonej wewnątrz liny zamiast duszy konopnej, po czym zdejmowano wykresy tych uszkodzeń za pomocą aparatu poprzednio skonstruowanego. Identyczne doświadczenia powtórzono ze specjalnie do tego celu zbudowanym oscylografem, zaopatrzonym we wzmacniacz prądu stałego. Odchylenie plamki oscylografu było dokładnie proporcjonalne do napięcia przyłożonego na wejściu. Wykresy, dawane przez oscylograf przy przesuwaniu się uszkodzeń przez cewkę pomiarową, fotografowano. Doświadczenia te pozwalają na zorientowanie się, jak dalece metoda elektromagnetyczna może być ulepszona i jakie są granice jej dokładności.

### 1. WSTĘP

Przy trwających szereg lat badaniach lin stalowych w kopalniach; na kolejach linowych i w laboratorium, za pomocą aparatu do magnetycznego badania naszej konstrukcji, stwierdziliśmy, że jakkolwiek daje on o stanie lin bardzo dużo wiadomości, jednak przy rozplataniu zbadanych odcinków i porównywaniu znalezionych uszkodzeń ze wskazaniami aparatu zauważyliśmy również pewne niezgodności. Gdy na przykład uszkodzenia leżą bardzo blisko siebie, pierwsze jest rejestrowane dużym wychyleniem, drugie — małym lub jest pomijane przez aparat; nie zawsze również większe wychylenie odpowiada większemu uszkodzeniu. Przyczyny tych niezgodności mogły być różne: aparat na przykład nie miał dokładnie liniowej charakterystyki, mógł więc nieco zniekształcać impulsy SEM-ej przychodzące z cewki pomiarowej. W aparacie znajduje się wzmacniacz napięć zmiennych. Czy stała czasowa obwodów w aparacie była odpowiednio dobrana, aby nie zniekształcać otrzymywanych impul-

sów, nie można było tego wiedzieć, nie znając dokładnie czasu trwania i kształtu impulsów SEM-ej. O ile by te impulsy były bardzo krótkotrwałe, galwanometr piszący mógł mieć zbyt dużą bezwładność, aby je rejestrować. Wreszcie kształt pól rozproszenia mógł być tego rodzaju, że mogły one powodować błędy wskazań. Aby móc stwierdzić, czy jest możliwy dalszy postęp przy konstrukcji aparatów do magnetycznego badania lin, należało zbadać wszystkie czynniki, jakie mogły tu wchodzić w grę.

Rozpoczęliśmy zatem systematyczną serię doświadczeń. Pierwsza część pracy poświęcona była dokładnemu zbadaniu wskazań aparatu w związku z różnorodnymi możliwymi uszkodzeniami. Doświadczenia przeprowadzono w laboratorium na urządzeniu doświadczalnym, opisanym w naszej poprzedniej pracy. Ponieważ okazało się praktycznie niemożliwe robienie setek rozmaitych uszkodzeń na odcinkach lin w celu zbadania, jak reaguje na nie aparat, postąpiliśmy w sposób następujący. Na ramie żelaznej, poruszanej z odpowiednią prędkością przez silnik elektryczny, została napięta lina drucziana bez żadnych uszkodzeń. Z liny usunięto dużą konopną i zamiast niej umieszczono w środku rurkę mosiężną średnicy wewnętrznej 7 mm. Druty z rozmaitymi uszkodzeniami nakładano na linę, przymocowywano je do niej mocno, po czym za pomocą aparatu zdejmowano wykres. Te same druty z uszkodzeniami mogły być wsuwane do rurki mosiężnej we wnętrzu liny. W ten sposób można było porównywać wykresy przy identycznych uszkodzeniach zewnętrznych i wewnętrznych.

## 2. BADANIA WSKAZAŃ APARATU W ZALEŻNOŚCI OD RODZAJU USZKODZEŃ

### 2. 1. Zależność wskazań aparatu od długości uszkodzenia w kierunku osi liny

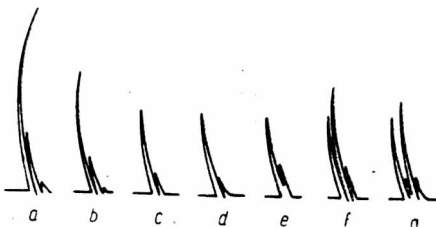
Pierwsza seria doświadczeń miała na celu zbadanie, jak zmieniają się wskazania aparatu przy zmieniającej się długości uszkodzenia. W tym celu drut, przecięty na dwie części, nałożono na linę i przymocowano do niej za pomocą klamer mosiężnych. Na początku dwa jego końce zostały doprowadzone do zetknięcia. Po uzyskaniu wykresu w aparacie przesuwno druty tak, aby końce ich rozsuwały się stopniowo aż do odległości około 25 cm, zdejmując wykresy przy całym szeregu różnych odległości końców. Otrzymane wykresy wykazały, że nawet przy zetkniętych końcach przeciętego drutu aparat daje wychylenie, lecz jest ono niewielkie; przy rozsuwaniu końców drutu wzrasta stopniowo, osiąga maksimum przy odległości wynoszącej od 20 do 40 mm, następnie znów maleje, wreszcie przy odległości wynoszącej około 80 mm pojawiają się dwa wychylenia, przy czym drugie jest znacznie mniejsze od pierwszego. Przy dalszym rozsuwaniu końców drutu wykres już się nie zmienia. Tę zależność wychylenia od długości uszkodzenia przedstawia krzywa kreskowana na rys. 7.

Doświadczenia były powtarzane przy dwóch cewkach pomiarowych<sup>1</sup>, jednej bardzo wąskiej, której przeciwległe uzwojenia znajdowały się w średniej odległości 9 mm, drugiej, znacznie szerszej, o odległości przeciwległych uzwojeń 26 mm. Obie cewki dają wykresy analogiczne, lecz przy cewce szerokiej stosunek maksymalnego wychylenia do minimalnego (przy stykających się końcach) jest większy. Czułość cewki szerokiej przy tej samej liczbie zwojów jest znacznie większa niż wąskiej.

Ten sam przecięty drut, umieszczony wewnątrz liny, daje — zależnie od długości uszkodzenia — od 30 do 70% tego wychylenia, jakie przy takim samym uszkodzeniu daje drut zewnętrzny; przebieg zmiany wychyleń jest przy tym analogiczny.

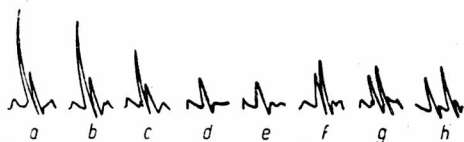
## 2. 2. Wskazania aparatu przy dwóch bliskich uszkodzeniach

Druga seria doświadczeń dokonana była nad rejestracją dwóch bliskich uszkodzeń. Kilka jednakowych drutów przecięto, a następnie wlutowano do cienkościennych rurek mosiężnych, tak że między ich końcami była przerwa we wszystkich drutach możliwie jednakowej długości około 3 mm. Dwa takie druty nałożono na linę i do niej przymocowano w taki



Rys. 1. Wykresy otrzymane przy stopniowym przesuwaniu dwóch uszkodzeń jedno względem drugiego, cewka pomiarowa wąska.

a) uszkodzenia w tym samym przekroju; b) uszkodzenia w odległości 15 mm; c) uszkodzenia w odległości 25 mm; d) uszkodzenia w odległości 40 mm; e) uszkodzenia w odległości 60 mm; f) uszkodzenia w odległości 75 mm; g) uszkodzenia w odległości 120 mm.



Rys. 2. Wykresy otrzymane przy stopniowym przesuwaniu uszkodzeń względem siebie wewnątrz liny.

a) uszkodzenia w tym samym przekroju; b) uszkodzenia w odległości 10 mm; c) uszkodzenia w odległości 25 mm; d) uszkodzenia w odległości 35 mm; e) uszkodzenia w odległości 45 mm; f) uszkodzenia w odległości 75 mm; g) uszkodzenia w odległości 100 mm; h) uszkodzenia w odległości 200 mm.

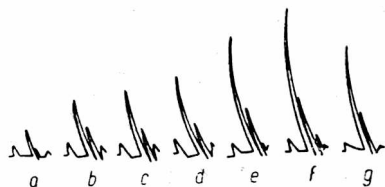
sposób, aby oba uszkodzenia schodziły się dokładnie jedno z drugim. Po otrzymaniu wykresu za pomocą aparatu przesuwano jeden drut względem drugiego, wskutek czego uszkodzenia rozchodziły się stopniowo. Za każ-

<sup>1</sup> Konstrukcję cewek pomiarowych opisano dalej.

dym razem po niewielkim przesunięciu zdejmowano wykres. Okazało się, że wychylenie galwanometru było największe, gdy uszkodzenia schodziły się razem. Przy stopniowym przesuwaniu jednego drutu względem drugiego wychylenia na wykresie malały. Przy odległości uszkodzeń około 20—25 mm wychylenie galwanometru jest mniej więcej takie, jak przy pojedynczym uszkodzeniu. Przy odległości większej od 60 mm na wykresie pojawiają się dwa wychylenia (rys. 1). Zupełnie podobny przebieg miały wykresy przy przesuwaniu dwóch uszkodzonych drutów, umieszczonych wewnątrz liny (rys. 2).

### 2. 3. Reagowanie aparatu na korozję drutów

Następną serię doświadczeń wykonano w celu zbadania czy aparat wykazuje korozję i jak na nią reaguje. W tym celu na linę został nałożony drut bez żadnych uszkodzeń. Drut został na niewielkiej długości (około 1,5 cm) zwilżony roztworem soli kuchennej z małym dodatkiem wody utlenionej. Po obu stronach tego miejsca został pocynowany, aby rdza się nie rozszerzała, lina zaś zaparafinowana, aby rdza na nią nie przeszła.



Rys. 3. Wykresy powiększającego się uszkodzenia drutu przez rdzę.

- a) po dwóch dniach; b) po trzech dniach; c) po czterech dniach; d) po pięciu dniach; e) po sześciu dniach; f) po tygodniu; g) ten sam drut jak pod f wewnątrz liny.

Codziennie zdejmowano wykres, a następnie zwilżano drut tym samym roztworem. Już po dwóch dniach na wykresach pojawiło się wychylenie rosnące stopniowo. Po tygodniu galwanometr dawał już bardzo znaczne wychylenie (rys. 3). Doświadczenie powtórzono następnie z drutem zwilżonym i wskutek tego zardzewiałym na długości około 30 cm. Galwanometr dawał wówczas kilka znacznych wychyleń. Wychylenia te są znacz-

nie większe niż przy drucie pękniętym, gdy drut zardzewiał na większej długości, na przykład paru centymetrów, jest równoważny drutowi przerwanemu, którego końce rozsunięte są na znaczniejszą odległość, wskutek czego aparat reaguje bardzo znacznym wychyleniem. Ten sam drut zardzewiał, umieszczony wewnątrz liny, dawał nieco mniejsze wychylenia (rys. 3g). W ten sposób stwierdziliśmy z wszelką pewnością, że aparat reaguje na rdzę.

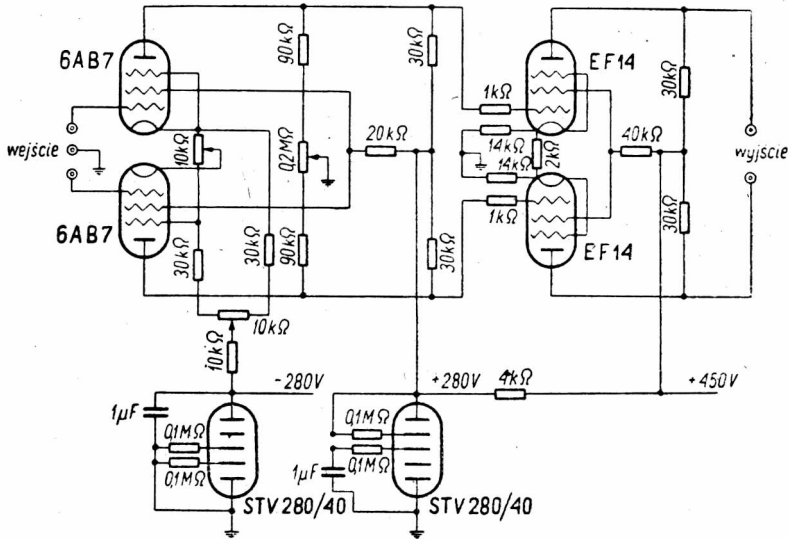
Należało teraz wyjaśnić, czy zależność wskazań aparatu od długości uszkodzenia oraz od wzajemnej odległości kilku uszkodzeń jest winą aparatu, czy też kształt pól magnetycznych rozproszenia jest taki, że wywołuje zmianę wychyleń, a więc czy możliwe jest dalsze ulepszanie elektromagnetycznej metody badania lin. Było wprawdzie rzeczą prawie oczywi-



stą, że na przykład przy zmniejszaniu się przerwy w drucie pole rozproszenia musi się kurczyć. Lecz również można było podejrzewać, że i bezwładność galwanometru może się przyczyniać do zmniejszania wychyleń. Biorąc pod uwagę, że przy prędkości liny 1 m/sec małe uszkodzenie, na przykład pęknięty drut o końcach rozsuniętych o 1 mm, przesuwa się przez cewkę pomiarową w czasie wynoszącym około setnej części sekundy, można było przypuszczać, że galwanometr nie zdąży się wychylić. Aby się zorientować, jakiej długości impulsy galwanometr może rejestrować, należało zmierzyć czas trwania jego wychylenia. W tym celu zastosowaliśmy metodę następującą. Na tarczy osadzonej na osi silnika gramofonowego, obracającego się ze stałą regulowaną prędkością, osadzono blaszki mosiężne, mogące zwiercać obwód elektryczny i w ten sposób dawać impuls SEM-ej. Impuls był doprowadzany do siatki pierwszej lampy w aparacie. Taśma papierowa, na której galwanometr kreślił swe wychylenia, była przesuwana z prędkością 1 m/sec. Zmieniając szerokość blaszki i prędkość obrotu silnika można było zmieniać w szerokich granicach długość trwania prostokątnego impulsu. W ten sposób otrzymywaliśmy wykresy, na których można było zmierzyć dokładnie czas wychylenia się galwanometru i powrotu do położenia zerowego. Następnie mogliśmy stwierdzić, jak długo musi trwać impuls, aby wywołać pełne wychylenie galwanometru, i jak się ono zmniejsza, gdy czas trwania impulsu coraz bardziej się skraca. Pomiaru te wykazały, że czas wychylenia galwanometru oraz powrotu do położenia zerowego (półokres) trwa 0,06 sec. Do wywołania pełnego wychylenia galwanometru, jak można było przypuszczać, wystarcza impuls trwający w przybliżeniu połowę tego czasu, tj. 0,03 sec. Przy dalszym skracaniu impulsu wychylenia galwanometru szybko maleją. Sprawdziliśmy również, że do wywołania dwóch wychyleń galwanometru impulsy muszą następować po sobie nie prędzej jak w 0,06 sec. Przy krótszym czasie oddzielającym impulsy od siebie galwanometr daje jedno tylko wychylenie.

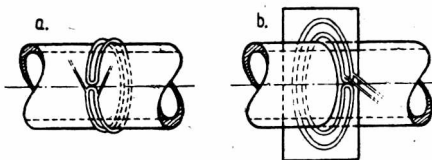
Żeby się dowiedzieć, czy aparat reaguje we właściwy sposób na impulsy siły elektromotorycznej powstające w cewce pomiarowej przy przesuwaniu się uszkodzeń, należało stwierdzić, jakie są impulsy, jak długo trwają i jakiej są wartości. Prócz tego należało zbadać, jak sąsiedztwo bliskich uszkodzeń zmienia kształt pól rozproszenia pochodzących od poszczególnych uszkodzeń, a przez to kształt i czas trwania impulsu. Przy takich badaniach należało się uniezależnić od bezwładności przyrządu, jak również uniknąć wszelkich możliwych zniekształceń impulsów, które mógł wprowadzać tak galwanometr, jak i wzmacniacz. W tym celu zbudowano specjalny oscylograf o dwustrumieniowej lampie oscylograficznej. Do oscylografu wkudowano dwa dwustopniowe wzmacniacze napięć stałych (rys. 4). Nieliniowość charakterystyk lamp została wyrównana przez

umieszczenie w każdym stopniu wzmocnienia dwóch lamp połączonych przeciwobnie. Pomiary wykazały dokładną proporcjonalność wychylenia plamki oscylografu do napięcia przyłożonego na wejściu. Czułość całego urządzenia wynosiła 0,02 wolta na milimetr wychylenia plamki.



Rys. 4. Schemat wzmacniacza użytego do oscyloskopu.

Na urządzeniu do przeciągania liny przez elektromagnes umieszczono wyłącznik, który w momencie, gdy uszkodzenie zbliżało się do cewki pomiarowej, wyzwał automatycznie ruch plamek oscylografu. Plamki poruszały się tak, że czas ich przebiegu przez ekran oscylografu trwał 0,35 sec. Przebiegi były fotografowane, przy czym na płytki odchylające drugi strumień elektronów przykładano napięcie z generatora prądów zmiennych o częstotliwości akustycznej i w ten sposób jednocześnie fotografowano sinusoidę pozwalającą na dokładne odczytanie czasu trwania impulsu. Generator zwykle nastawiano na częstotliwość 100 lub 200 Hz, tak że czas trwania przebiegów na ekranie można było ocenić z dokładnością do tysięcznych części sekundy.



Rys. 5. Cewki używane do pomiarów.

W ten sposób otrzymywane wykresy oddawały dokładnie kształt i wartość impulsów SEM-iej otrzymywanych z cewki pomiarowej, rejestrując jednocześnie czas ich trwania.

Do wszystkich doświadczeń z oscylografem (prócz ostatniej serii) uży-

wano cewki pomiarowej o 1800 zwojach nawiniętych przeciwsobnie z drutu w emalii średnicy 0,07 mm, owiniętej taśmą i nakładanej na drewnianą szpulę, która była umocowana na elektromagnesie (rys. 5a); boki jej mogły być zbliżane ku sobie lub oddalane. Przy ostatniej serii doświadczeń użyto podobnie nawiniętej cewki, lecz zwoje jej znajdowały się w jednej płaszczyźnie (rys. 5b).

#### 2. 4. Doświadczenia z oscylografem

Fierwsza seria doświadczeń z oscylografem była powtórzeniem pierwszej serii pomiarów wykonanych aparatem. A więc znów na linie umieszczono przecięty drut, którego części były rozsuwane stopniowo. Po każdej zmianie odległości końców przeciętego drutu przepuszczano linę ze stałą prędkością 1 m/sec przez elektromagnes z umocowaną na nim cewką pomiarową, a otrzymywany impuls fotografowano. Jak wykazały zdjęcia, impuls powstaje zawsze, nawet przy całkowitym zetknięciu końców przeciętego drutu, lecz jest niewielki (rys. 6a). Przy rosnącej odległości końców impuls szybko wzrasta; również wzrasta czas trwania impulsu, lecz o wiele wolniej. Tablica 1 podaje wysokość impulsu na zdjęciach i czas ich trwania.

Tablica 1

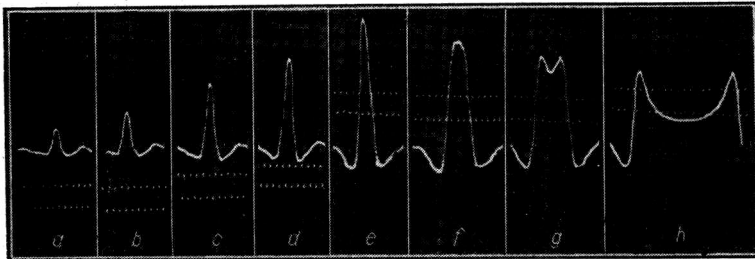
**Pomiary wielkości impulsów SEM-ej i czasu ich trwania przy rosnącej długości uszkodzenia**

Odległość końców rozciętego drutu w mm	Wysokość impulsu na zdjęciu w mm	Czas trwania impulsu w sekundach
0	7	0,025
0,6	12	0,031
1	21,5	0,034
2	28	0,034
3	32	0,039
5	37	0,045
10	42	0,045
20	40,5	0,050
30	33,5	0,065
50	dwa wierzchołki 27	0,085
160	dwa impulsy 21,5	0,15
250	14	

Wyniki te przedstawiono również na rys. 6.

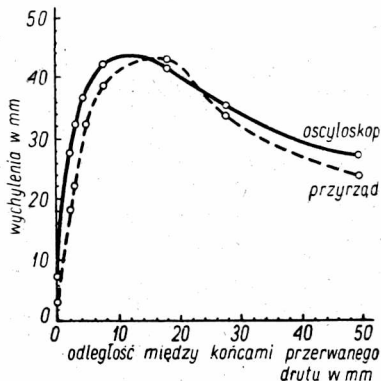
Z powyższych liczb widać, że impuls ma maksymalną wysokość przy przerwie w drucie wynoszącej około 10 mm. Jest wtedy 6 razy wyższy niż przy stykających się końcach drutu. W przypadku gdy cewka jest

szersza, stosunek impulsu maksymalnego do minimalnego jest znacznie większy. Przy schodzących się końcach drutu impuls jest wyższy tylko o około 20% niż przy cewce wąskiej.



Rys. 6. Impulsy SEM-ej powstające w cewce pomiarowej przy przesuwaniu się linii z przerwanym drutem zewnętrznym. a) długość przerwy 0; b) długość przerwy 0,6 mm; c) długość przerwy 1 mm; d) długość przerwy 2 mm; e) długość przerwy 10 mm; f) długość przerwy 30 mm; g) długość przerwy 50 mm; h) długość przerwy 160 mm.

Jak z powyższych doświadczeń wynika, przy zsuwaniu końców rozciętego drutu pole rozproszenia kurczy się. Im bliższe są końce, tym



Rys. 7. Porównanie wychyleń plamki oscylografu i galwanometru piszącego przy rosnącej długości przerwy w drucie. Krzywa pełna — wychylenie plamki oscylografu; krzywa kreskowana — wychylenie galwanometru piszącego.

impuls SEM-ej jest mniejszy i każdy aparat musi dawać mniejsze wychylenie. Wykres na rys. 7 daje porównanie zależności wielkości wychylenia plamki oscylografu i galwanometru piszącego. Przy bardzo zbliżonych końcach aparat daje mniejsze wychylenie niż oscylograf. Łatwo to wytłumaczyć: czas trwania impulsu jest wtedy nieco za krótki, aby galwanometr reagował pełnym wychyleniem. Podobny wynik dają doświadczenia, gdy drut jest umieszczony wewnątrz liny, tylko wychylenia są wtedy mniejsze. Z tych doświadczeń wynika, że wielkość impulsu SEM-ej jest funkcją trzech parametrów: wielkości uszkodzenia, długości i głębokości uszkodzenia. Przy tym *caeteris paribus* impuls jest proporcjonalny do wielkości uszkodzenia, w niezbyt zaś wielkim stopniu zależy od głębokości, na

<sup>2</sup> W linach z duszą konopną druty uszkodzone zwykle znajdują się na niewielkiej głębokości pod powierzchnią.

Oczywiście impuls SEM-*ej* zależy w znacznym stopniu także od prędkości przesuwania się liny przez cewkę pomiarową. Tego jednak nie potrzebowaliśmy brać pod uwagę, ponieważ nasz aparat dzięki doprowadzeniu na siatkę lampy o zmiennym nachyleniu charakterystyki napięcia proporcjonalnego do prędkości liny daje wychylenie w dość szerokich granicach, niezależne od jej prędkości.

Druga seria doświadczeń z oscylografem została przeprowadzona w celu wyjaśnienia wzajemnego wpływu pól rozproszenia, pochodzących od bliskich uszkodzeń. Założono więc na linę dwa druty przecięte z końcami rozsuniętymi w przybliżeniu o 3 mm i przesuwano jedno uszkodzenie względem drugiego tak samo, jak w poprzednio opisanym doświadczeniu, w którym wykres zdejmowano aparatem. Wyniki doświadczeń podano w tablicy 2.

Tablica 2

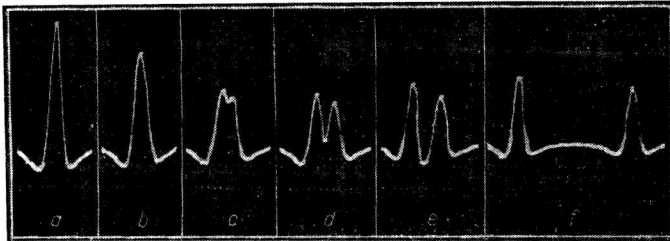
**Pomiary wielkości impulsów SEM-*ej* i czasu ich trwania przy dwóch bliskich uszkodzeniach**

Odległość dwóch uszkodzeń w mm	Wysokość impulsu w mm		Czas trwania impulsu w sekundach
0	51		0,042
4	48		0,052
8	39		0,055
	dwa wierzchołki		
16	26,5	22,5	0,065
25	26	21	0,078
	dwa impulsy		
30	27	20	0,044 i 0,05
40	27	22	
50	27,5	22	
80	28	21	
120	28	21	
160	28	24	

Wyniki powyższe zilustrowano zdjęciem na rys. 8.

Z doświadczeń tych widać, że pola rozproszenia bliskich uszkodzeń wpływają na siebie nawzajem. Przy bardzo bliskiej odległości uszkodzeń cewka pomiarowa daje impuls SEM-*ej* równy w przybliżeniu sumie impulsów wywoływanych przez poszczególne uszkodzenia. Przy rosnącej odległości uszkodzeń impuls maleje. Przy odległości 16 mm na krzywej

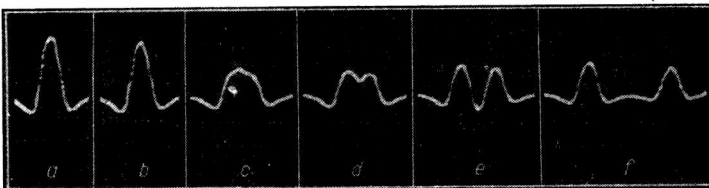
pojawiają się dwa wierzchołki, rozdzielające się przy odległości 30 mm na dwa impulsy, z których każdy równa się impulsowi od pojedynczego uszkodzenia. Przy szerszej cewce pomiarowej (26 mm) dwa wierzchołki



Rys. 8. Impulsy SEM-ey powstające w cewce pomiarowej przy przesuwaniu liny z dwoma bliskimi uszkodzeniami, cewka pomiarowa wąska.

- a) uszkodzenia w jednym przekroju; b) odległość uszkodzeń 8 mm; c) odległość uszkodzeń 16 mm; d) odległość uszkodzeń 25 mm; e) odległość uszkodzeń 40 mm; f) odległość uszkodzeń 160 mm.

na krzywej pojawiają się dopiero przy odległości uszkodzeń równej 30 mm, a całkowicie rozdzielają się przy odległości 40 mm (rys. 9).



Rys. 9. Impulsy SEM-ey powstające w cewce pomiarowej przy przesuwaniu liny z dwoma bliskimi uszkodzeniami, cewka pomiarowa szeroka.

- a) uszkodzenia w jednym przekroju; b) odległość uszkodzeń 8 mm; c) odległość uszkodzeń 25 mm; d) odległość uszkodzeń 30 mm; e) odległość uszkodzeń 50 mm; f) odległość uszkodzeń 120 mm.

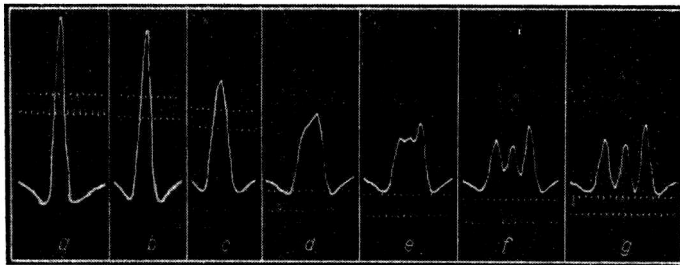
Podobny przebieg wykazują zdjęcia trzech uszkodzeń, których odległość stopniowo wzrasta. Doświadczenie zostało wykonane w sposób analogiczny do poprzedniego. A więc trzy druty z uszkodzeniami zostały nałożone i przymocowane do liny, a następnie przesuwane względem siebie niewielkimi skokami. Za każdym przesunięciem oscylografowano otrzymywane w cewce pomiarowej impulsy. Wyniki doświadczeń podano w tablicy 3.

Tablica 3

**Pomiary wielkości impulsów SEM-ej i czasu ich trwania przy trzech bliskich uszkodzeniach**

Odległość uszkodzeń w mm	Wysokość impulsów w mm			Czas trwania impulsu w sekundach
0	65			0,049
4	57			0,050
8	38			0,059
12	28			0,069
	trzy wierzchołki			
16	19	19	24	0,079
20	18	16	23	0,089
25	18	16	23	0,1
	trzy impulsy			
30	18,5	16	23	

Wyniki te przedstawiono na rys. 10.

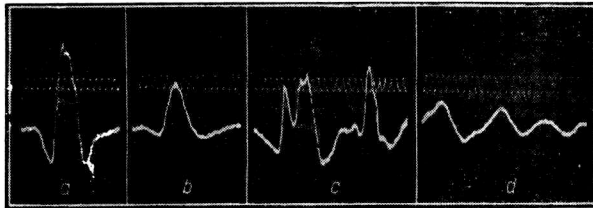


Rys. 10. Impulsy SEM-ej powstające w cewce pomiarowej przy przesuwaniu linii z trzema bliskimi uszkodzeniami.

- a) uszkodzenia w jednym przekroju; b) odległość uszkodzeń 4 mm;  
 c) odległość uszkodzeń 8 mm; d) odległość uszkodzeń 12 mm;  
 e) odległość uszkodzeń 16 mm; f) odległość uszkodzeń 25 mm;  
 g) odległość uszkodzeń 30 mm.

Jak widać z powyższych liczb, również pola rozproszenia pochodzące od trzech bliskich uszkodzeń wpływają nawzajem na siebie, gdyż na końcach przerwanych drutów wytwarzają się bieguny przeciwnych znaków. Przeciwnie bieguny dwóch lub też trzech drutów znajdują się obok siebie i działania ich na zewnątrz prawie się znoszą. Pole rozproszenia pochodzące od kilku uszkodzeń oddalonych o jakieś 10 do 12 mm jest podobne do pola pochodzącego od jednego uszkodzenia o większej długości. Dopiero przy odległości uszkodzeń większej od 15 mm linie rozproszenia najwidoczniej uzyskują kształt tego rodzaju, że na impulsie pochodzącym od takiego uszkodzenia występuje kilka wierzchołków.

Następną serię doświadczeń wykonano nad drutami zardzewiałymi na małej długości (rys. 11a, b) oraz na większej długości (rys. 11c, d). Najpierw druty te były umieszczone na zewnętrznej powierzchni liny (rys. 11a, c), a następnie wewnątrz (rys. 11b, d).

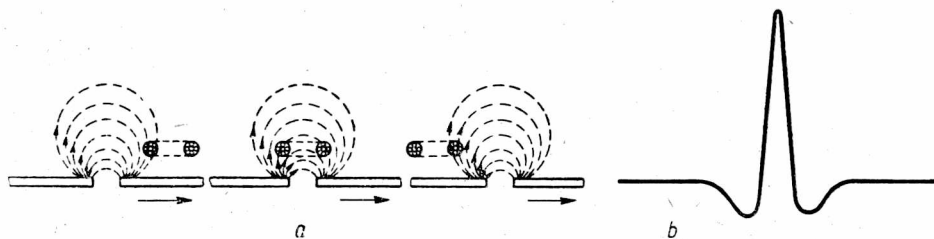


Rys. 11. Impulsy SEM-ej otrzymywane w cewce pomiarowej przy przesuwaniu liny z drutem zardzewiałym.

a) drut zardzewiały na długości 1,5 cm zewnątrz liny; b) ten sam drut wewnątrz liny; c) drut zardzewiały na długości 30 cm zewnątrz liny; d) ten sam drut wewnątrz liny.

Szczególnie pouczające jest zdjęcie impulsów, jakie daje drut zardzewiały na większej długości. Wykazuje ono jasno, że wskutek nadgryzienia drutu przez rdzę w rozmaitym stopniu powstają pola rozproszenia wywołujące przy przesuwaniu się drutu kilka bliskich impulsów SEM-ej. Zrozumiałe jest więc, że przy przesuwaniu się liny zaatakowanej przez rdzę, w której oczywiście znaczna liczba drutów może być zardzewiała, otrzymuje się bardzo znaczną liczbę bliskich siebie dużych impulsów.

Ostatnią wreszcie serię doświadczeń wykonano z cewką, której zwoje leżą w jednej płaszczyźnie. Cewki używane przy poprzednich pomiarach nawijano w ten sposób, że zwoje ich leżały na poboczniczy walca. Gdy zwoje takiej cewki przesuwają się przez pole rozproszenia, powstają



Rys. 12. Powstawanie impulsu przy przesuwaniu się cewki pomiarowej pierwszego rodzaju przez pole rozproszenia.

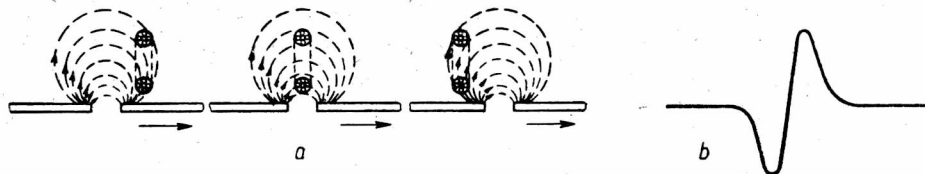
a) cewka przesuwająca się przez pole; b) impuls.

w niej właściwie trzy impulsy SEM-ej. Mianowicie, gdy linie pola przecinają jeden bok cewki, powstaje słaby impuls w jednym kierunku. Gdy cewka przesuwa się przez środek pola rozproszenia, powstaje impuls o kierunku przeciwnym, znacznie większy, wreszcie gdy drugi bok cewki



opuszcza pole rozproszenia, powstaje znów impuls o tym samym kierunku co pierwszy, znacznie słabszy (rys. 12a). W rezultacie oscylograf daje wykres pokazany na rys. 12b.

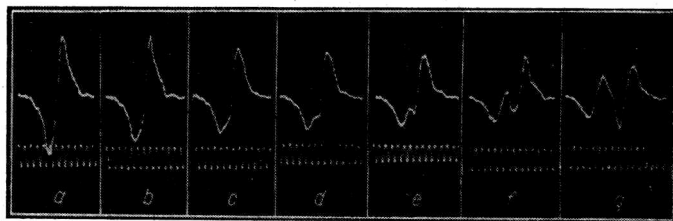
Na cewkę o zwojach znajdujących się w jednej płaszczyźnie pole rozproszenia działa inaczej. Gdy tego rodzaju cewka przesuwa się przez pole rozproszenia, działa na nią różnica natężeń pola, wzbudzając w bliższym uzwojeniu siłę elektromotoryczną, większą niż w dalszym. Gdy cewka



Rys. 13. Powstawanie impulsu przy przesuwaniu się cewki pomiarowej drugiego rodzaju przez pole rozproszenia.

a) cewka przesuwająca się przez pole; b) impuls.

znajduje się po środku pola, zwoje poruszają się równoległe do linii pola i SEM-a znika. Przy wyjściu cewki z pola rozproszenia powstaje SEM-a przeciwnie skierowana. Zatem każde uszkodzenie wywołuje dwa impulsy o kierunku przeciwnym (rys. 13). Próbę z tego rodzaju cewką



Rys. 14. Impulsy powstające przy przesuwaniu się liny z dwoma bliskimi uszkodzeniami przez cewkę pomiarową drugiego typu (o zwojach leżących w jednej płaszczyźnie).

a) uszkodzenia w jednym przekroju; b) odległość uszkodzeń 8 mm; c) odległość uszkodzeń 12 mm; d) odległość uszkodzeń 16 mm; e) odległość uszkodzeń 20 mm; f) odległość uszkodzeń 30 mm; g) odległość uszkodzeń 50 mm.

wykonaliliśmy w celu przekonania się, czy nie będzie ona miała większej zdolności rozdzielczej od poprzedniej, a zatem czy nie będzie przy mniejszej odległości uszkodzeń dawać dwóch impulsów. Doświadczenia dały wynik negatywny. Jak widać na zdjęciach (rys. 14), nie jest ona lepsza od cewki poprzedniej konstrukcji. Dopiero przy odległości uszkodzeń równej 20 mm pojawiają się na wykresie dwa wyraźne wierzchołki.

## 3. WNIOSKI

Jak to wynika z powyżej opisanych doświadczeń, drut pęknięty, nawet gdy jego końce się stykają, wytwarza pole rozproszenia, które przy przesuwaniu się przez cewkę pomiarową wzbudza niewielki impuls SEM-ej. Impuls taki, trwający bardzo krótko (około 0,02 sec), przy odpowiednim wzmocnieniu i za pomocą szybko reagującego galwanometru może być zarejestrowany. W naszym dotychczasowym aparacie z powodu zbyt długiego okresu drgań własnych galwanometru te krótkie impulsy były zmniejszane. Pęknięty drut, umieszczony w samym środku, daje również krótkotrwały impuls, mniejszy niż pęknięty drut zewnętrzny. Przy oddalaniu się końców pękniętego drutu impuls wzrasta aż do mniej więcej sześciokrotnej wielkości. Wartość otrzymywanego impulsu *caeteris paribus* jest proporcjonalna do ilości pękniętych drutów, czyli do procentowego zmniejszenia przekroju liny. Impuls SEM-ej, a zatem i wychylenie przyrządu zależne jest od trzech parametrów zmiennych (o ile pominiemy zależność od prędkości, która przy naszym urządzeniu kompensacyjnym w aparacie nie gra roli). Sprawa jednak upraszcza się o tyle, iż końce pękniętych drutów wewnętrznych rozsuwają się bardzo nieznacznie. Nie stwierdziliśmy dotychczas nigdy, aby końce pękniętego drutu wewnątrz liny rozsunęły się na większą odległość. Impulsy więc powstające przy pękniętych drutach w e w n ę t r z n y c h zależałyby tylko od jednego parametru: od liczby pęknięć, czyli zmniejszenia czynnego przekroju liny. W zewnętrznej warstwie splotów końce pękniętych drutów rozsuwają się, a obsługa zwykle je wyłamuje. W linach przeciwzwitych wyłamanie powoduje kilkucentymetrową przerwę, co wywołuje duże pole rozproszenia i znaczny impuls. W przypadku lin współzwitych drut wyłamuje się na większej przesłrzeni i daje wtedy dwa impulsy mniejszej wielkości. Ponieważ obsługa zwykle zna miejsca pękniętych drutów, łatwo takie większe wychylenia zidentyfikować i obliczyć zmniejszenie wytrzymałości. W przypadku, gdy w danym miejscu uszkodzenie jest nieznanie obsłudze, można przez obejrzenie liny (z wykresu dokładnie można wyznaczyć miejsce uszkodzenia) stwierdzić czy w danym miejscu znajduje się uszkodzenie zewnętrzne, czy wewnętrzne. Jak nasze dotychczasowe doświadczenie wykazało, w linach przeciwzwitych pękają przeważnie druty zewnętrzne, w linach współzwitych — druty wewnętrzne.

Jeżeli w linie znajduje się kilka bliskich uszkodzeń, to gdy ich odległość wynosi nie więcej jak jakieś 5 mm, impuls indukowany w cewce jest taki sam lub niewiele mniejszy, niż w przypadku gdy uszkodzenia znajdują się w jednym przekroju. Wtedy aparat będzie prawidłowo wskazywał wielkość uszkodzenia: impulsy sumują się. Natomiast przy większym oddaleniu uszkodzeń impuls maleje i przy odległości około 12 mm jest

do 25% mniejszy. Zatem przy odległościach uszkodzeń 6 ÷ 10 mm aparat oparty na zasadzie rejestrowania pól magnetycznych rozproszenia musi dawać nieco zbyt małe wskazania. Możliwe, że z długości trwania impulsów można by wnioskować o obecności bliskich uszkodzeń.

Oczywiście, prawdopodobieństwo większej liczby miejsc, w których znajdują się pęknięcia w drutach w odległościach 5 do 10 mm, jest bardzo małe.

Nasz dotychczasowy aparat nie ma takiej zdolności rozdzielczej jak oscylograf i jako oddzielne uszkodzenia rejestruje dwie przerwy w drutach dopiero przy ich odległości większej od 60 mm. Ulepszenie galwanometru piszącego (skrócenie własnego okresu drgania), co jest możliwe, pozwoliłoby na rejestrację bardzo nawet bliskich uszkodzeń.

Najtrudniej sprawa przedstawia się z oceną uszkodzenia w linie zardzewiałej. Ponieważ skutek rdzy następuje zmniejszenie czynnego przekroju drutów na większej długości i w różnych miejscach w różnym stopniu, zardzewiała lina wywołuje przy przesuwaniu się przez cewkę pomiarową wiele dużych impulsów. Wykres dawany przez aparat czy też oscylograf jest w tym przypadku charakterystyczny, gdyż składa się z wielu bliskich sobie, bardzo dużych oraz na przemian nieco mniejszych impulsów<sup>3</sup>, tak że od razu można rozpoznać, iż lina jest zardzewiała. Impulsy SEM-owej wywoływane przez rdzę, a więc i wychylenia przyrządu zapisującego, zależą głównie od długości uszkodzeń i wielkości zmniejszenia przekroju czynnego, głębokość natomiast uszkodzonych drutów wewnątrz liny ma wpływ znacznie mniejszy. Gdy jednak nawet zaniedbamy wpływ głębokości, to pozostaje jeszcze zależność impulsów od dwóch parametrów, wobec czego w zasadzie trudno byłoby z wykresu wysnuwać jednoznaczne wnioski co do wytrzymałości liny. Jak z dotychczasowych naszych doświadczeń wynika, dość usprawiedliwiona byłaby hipoteza, że wychylenia przy obecności rdzy odpowiadają w przybliżeniu takiej długości uszkodzeń, które wywołują maksymalne impulsy SEM-owej (a więc są około 6 razy większe niż przy pękniętych drutach o stykających się końcach). W takim razie zależność wychyleń od długości uszkodzeń mogłaby być wyeliminowana i pozostałaby tylko zależność od jednego parametru: wielkości zmniejszenia przekroju czynnego liny. Obliczenie wytrzymałości byłoby możliwe. Aby powyższą hipotezę sprawdzić, należałoby przeprowadzić badanie większej ilości zardzewiałych odcinków lin, obliczyć przy wymienionym tu założeniu wytrzymałość metodą inż. Z. Kaweckiego [3]<sup>4</sup>, a następnie sprawdzić obliczenia przez rozrywanie tych odcinków w całości. Jeżeliby wyniki otrzymane przy rozrywaniu niezu-

<sup>3</sup> Porównaj rys. 10c w pracy [2].

<sup>4</sup> O ile nam wiadomo, jest to jedyna propozycja sposobu obliczenia wytrzymałości liny ze wskazań metody elektromagnetycznej.

pełnie zgadzały się z obliczeniami, można by do wzorów wprowadzić pewne współczynniki, które pozwoliłyby na dokładniejszą ocenę wytrzymałości.

Badania opisane w niniejszej pracy potwierdziły nasze dawniejsze wnioski, iż metoda elektromagnetyczna daje zupełnie realne wskazania co do stanu lin stalowych. W świetle tych badań widać, że metoda ta może być jeszcze ulepszona i wtedy dawać będzie dokładniejsze dane odnośnie uszkodzeń. Szczególnie pewne wnioski o stanie liny dają się wysnuwać, gdy liny kadane są periodycznie w określonych równych odstępach czasu, jak to na przykład ma miejsce na Kolejach Linowych w Zakopanem i Krynicy. Z kolejnych otrzymywanych wykresów widać od razu czy stan liny zmienia się szybko, czy powoli i jakie uszkodzenia stopniowo w niej występują.

Wyrazamy niniejszym podziękowanie inż. J. Szrednickiemu za konstrukcję i montaż doskonałego oscylografu, inż. Dziewońskiemu za pomoc w wykonywaniu doświadczeń oraz mechanikowi S. Wojtowowi (pracownikowi Akademii Górniczo-Hutniczej) za wykonanie różnych potrzebnych do doświadczeń urządzeń. Praca wykonana była z subwencji Polskiej Akademii Nauk.

*Zakład Fizyki Technicznej  
Zakład Elektryfikacji Urządzeń Górniczych  
Akademii Górniczo-Hutniczej w Krakowie*

#### WYKAZ LITERATURY

1. Jeżewski M., Szklarski L. i Kawecki Z. — Patent nr 34170.
2. Jeżewski M., Szklarski L. i Kawecki Z. — Bull. Int. de l'Académie Polonaise, 1, 1, 1950.
3. Kawecki Z. — Przegląd Górniczy, nr 10, 1948, s. 1136.

М. ЕЖЕВСКИ, Л. ШКЛЯРСКИ и З. КАВЕЦКИ

#### ИССЛЕДОВАНИЯ МАГНИТНЫХ ПОЛЕЙ РАССЕЯНИЯ ПРОИСХОДЯЩИХ ОТ ПОВРЕЖДЕНИЙ В ПРОВОЛОЧНЫХ КАНАТАХ В СВЯЗИ С ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫМ МЕТОДОМ ИСПЫТАНИЯ КАНАТОВ

Резюме

##### 1. ВВЕДЕНИЕ

При многолетних исследованиях проволочных канатов были констатированы некоторые несогласия между показаниями построенного для исследования канатов аппарата [1], [2] и действительными повреждениями, найденными при расплетении исследованных канатных отрезков. Желая убедиться, можно ли устранить источники ошибок и получать более точные данные о повреждениях, был предпринят ряд опытов для исследования всех факторов, могущих влиять на показания аппарата (дефектоскопа). Так как производство разного рода искусственных повреждений канатов в практике оказалось невозможным принят был следующий способ: на опытном устройстве описанном в предыдущем труде [2] был заложен проволочный

канат без всяких повреждений. Пеньковый сердечник этого каната был устранён и на его место вставлена латунная трубка диаметром в 7 мм. Проволоки с разного рода повреждениями были уложены и прикреплены к канату, а затем те же проволоки были вложены внутрь каната. Таким образом стало возможным исследовать электромагнитным методом повреждения разного рода, а затем сравнить данные, полученные при тождественных внутренних и внешних повреждениях.

## 2. ИССЛЕДОВАНИЯ ПОКАЗАНИЙ АППАРАТА В ЗАВИСИМОСТИ ОТ РОДА ПОВРЕЖДЕНИЙ

### 2. 1. Зависимость показаний дефектоскопа от длины повреждения по направлению оси каната

Целью первой серии опытов являлось исследование, каким образом изменяются показания дефектоскопа при изменении длины повреждения. И так, перерезанная проволока была наложена и прикреплена к канату, после чего диаграммы были сняты при постепенно увеличивающемся расстоянии между концами перерезанной проволоки. По мере этого увеличения отклонения пишущего гальванометра быстро увеличиваются достигая максимума при расстоянии концов в 30 до 40 мм затем отклонения уменьшаются и наконец при 80 мм появляются два отклонения. Зависимость между отклонением гальванометра и длиной повреждения показана на рис. 7 штрихованной кривой. Те же опыты были повторены с помещением перерезанной проволоки внутри каната. Диаграммы дали аналогичные результаты.

### 2. 2. Показания аппарата (дефектоскопа) при двух близлежащих повреждениях

Вторая серия опытов была проведена над исследованием двух близлежащих повреждений, Несколько одинаковых проволок после их перерезания было впаяно в тонкостенные латунные трубки, так что между концами проволок было расстояние ок. 3 мм. Две такие проволоки были наложены на канат и укреплены таким образом, чтобы оба повреждения находились в одном сечении каната. После получения диаграммы одна из перерезанных проволок была перемещена по отношению к другой. После каждого небольшого перемещения снималась диаграмма, причём оказалось, что отклонения аппарата постепенно уменьшаются. При расстоянии между повреждениями ок. 20—25 мм отклонение пишущего гальванометра было приблизительно такое же, как и при одном повреждении. При расстоянии свыше 60 мм аппарат реагировал, отклоняясь два раза (рис. 1). Точно такие же результаты дали диаграммы при двух взаимно передвигаемых повреждениях внутри каната (рис. 2).

### 2. 3. Реагирование дефектоскопа на коррозию проволок

Следующая серия опытов была исполнена для исследования, указывает ли аппарат коррозию и каким образом он на неё реагирует. Для этой цели на канат была наложена новая проволока, которая ежедневно на отрезке в 1,5 см. длиной смачивалась раствором поваренной соли с добавлением перекиси водорода, вследствие чего она быстро на этом отрезке ржавела. Диаграмма снималась ежедневно. Оказалось, что уже после двух дней появилось отклонение, которое затем постепенно увеличивалось. Неделю спустя пишущий гальванометр давал значительное отклонение (рис. 3). Тот же опыт был повторен с проволокой, смоченной на отрезке 30 см. Несколько дней спустя гальванометр давал в этом месте несколько больших отклонений. Те же проволоки помещенные внутри каната давали несколько меньшие отклонения. Таким образом было достоверно установлено, что аппарат реагирует на ржавчину.

Для отдания себе отчёта в том, какой продолжительности импульсы может регистрировать наш пишущий гальванометр, было измерено время его отклонения, при приложении у входа аппарата коротких импульсов с известной их продолжительностью. Пишущий гальванометр чертил кривую на быстро передвигаемой бумажной ленте. Зная скорость передвижения ленты, легко было определить время отклонения пишущего гальванометра. Измерения эти доказали, что время отклонения пишущего гальванометра и возврата его в нулевое положение (полупериод) продолжается 0,06 сек. Продолжающийся 0,03 сек. импульс достаточен для полного отклонения пишущего гальванометра. При сокращении этой продолжительности импульса отклонения пишущего гальванометра быстро уменьшались. Для регистрации двух следующих друг за другом импульсов между ними необходим промежуток времени не менее 0,06 сек.

Затем возник вопрос: не были ли результаты опытов искажены инерцией пишущего гальванометра или несовершенством усилительного устройства или, наконец, не лежит ли причина некоторого несогласия регистрации в величине повреждения в форме полей рассеяния. Для решения этого вопроса следовало установить форму и величину импульсов электродвижущей силы в измерительной катушке, дающих поля рассеяния вызываемые повреждениями. Для точного исследования этих импульсов был построен специальный осциллоскоп с двухлучевой осциллографической лампой. В осциллоскоп встроено два усилителя постоянного тока (рис. 4), дающие на выходных зажимах напряжения точно пропорциональные изменениям напряжения на входе. К пластинкам, отклоняющим второй поток электронов, было приложено напряжение генератора переменного тока с частотой 100 или 200 гц. Благодаря этому можно было точно измерить продолжительность импульсов.

#### 2. 4. Опыты с осциллоскопом

Все прежние опыты были проделаны на осциллокопе. Итак: первая серия снимков была исполнена при постоянно раздвигающихся концах перерезанной проволоки. Табл. 1 даёт зависимости силы (высоты) импульсов и их продолжительности от длины повреждения. Оказалось, что импульсы также возрастают с увеличением длины повреждения, но в меньшей степени, чем это показывает дефектоскоп. Иллюстрируют это фотографии на рис. 5.

Вторая серия снимков была исполнена с двумя повреждёнными проволоками. Повреждения передвигались по отношению друг к другу. На табл. 2 показаны результаты опытов. Фотографии на рис. 8 иллюстрируют эти числа. Оказалось здесь, что с увеличением расстояния между повреждениями импульсы электродвижущей силы уменьшаются подобно показаниям дефектоскопа. Но уменьшение импульса не очень велико.

При расстоянии повреждений в 16 мм на кривой появляются уже две вершины. При более широкой измерительной катушке соотношения эти представляются хуже.

При трёх передвигаемых по отношению друг к другу повреждениях получается подобная картина. Сначала импульс уменьшается, а при расстоянии повреждений равном 16 мм на кривой появляются 3 вершины (рис. 10). На табл. 3 показаны результаты.

Следующая серия опытов была исполнена с заржавленными проволоками на малом (рис. 11-а, б) и на большом (рис. 11-с, д) протяжениях. Особенно поучителен снимок импульсов, даваемых проволокой заржавевшей на большое протяжение. Снимок этот отчётливо показывает, что вследствие коррозии проволоки ржавчиной в различной степени, в разных местах, возникают поля рассеяния, вызывающие при пе-

редвижении проволоки через измерительную катушку несколько близких друг к другу импульсов электродвижущей силы.

Последняя серия опытов была исполнена с измерительной катушкой, отличающейся от ранее применяемых катушек (рис. 5-а) тем, что витки её находились в одной плоскости (рис. 5-б). Возбуждаемые в такой катушке импульсы имеют другую форму (рис. 13-б), нежели импульсы возбуждаемые в прежних катушках (рис. 12-б). Опыт с этой катушкой был проделан для проверки, на будет ли её раздельная способность выше в сравнении с предыдущими при измерении близ лежащих повреждений. Результат оказался отрицательным.

#### 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Как видно из выше описанных опытов, лопнувшая проволока, если концы её соприкасаются, вызывает слабое поле рассеяния. При передвижении через измерительную катушку она возбуждает незначительный импульс электродвижущей силы. Продолжительность такого импульса очень мала, ок. 0,02 сек. При соответственном усилении он может быть отмечен быстро реагирующим приспособлением. Пишущий гальванометр в употребляемом нами до сих пор дефектоскопе уменьшает эти короткие импульсы вследствие слишком продолжительного собственного периода. Лопнувшая проволока, помещенная в самой середине каната, даёт также краткий импульс, меньший, нежели лопнувшая внешняя проволока. При возрастающем расстоянии концов лопнувшей проволоки импульс увеличивается приблизительно в 6 раз. Величина полученного импульса при неизменных остальных условиях пропорциональна числу лопнувших проволок или процентному уменьшению сечения каната. Импульс зависит, следовательно, от трёх следующих переменных параметров: величины повреждения в данном сечении, длины повреждения и его глубины (если не принимать во внимание влияния скорости, которая при компенсационном устройстве в нашем аппарате не играет роли). Вопрос определения величины повреждения свиду кажется трудным, однако он упрощается благодаря тому, что, как это было нами констатировано, концы лопнувшей внутренней проволоки никогда не раздвигаются на большое расстояние. В таком случае импульсы возникающие при лопнувших внутренних проволоках зависят от одного только параметра, а именно от числа лопнувших проволок, т. е. от уменьшения активного сечения каната. В наружном слое свитков концы лопнувших проволок раздвигаются а обслуживающие обыкновенно эти концы ломают. В канатах крестовой свивки выламывание вызывает перерыв в несколько сантиметров, что в свою очередь вызывает большое поле рассеяния и значительный импульс. При соскрученных канатах проволока выламывается на большей длине, что даёт два меньших импульса. Так как обслуживающим обыкновенно известны места лопнувших проволок, то нетрудно установить такие значительные отклонения и рассчитать уменьшение прочности. В случае, если в данном месте повреждение обслуживающим неизвестно, можно при осмотре каната (по диаграмме место повреждения можно точно определить) установить, произошло ли внутреннее или внешнее повреждение. Наши опытные данные подтверждают, что в канатах крестовой свивки лопаются по большей части внешние а, в соскрученных канатах — внутренние проволоки.

Если в канате имеется несколько близлежащих повреждений, то если их взаимное расстояние не превышает ок. 5 мм, импульс получается такой же или почти такой же как при наличии повреждений в одном сечении. В таких случаях указания дефектоскопа будут правильны, т. к. импульсы суммируются. При несколько большем расстоянии между повреждениями, однако, импульс уменьшается и при расстоянии ок. 12 мм его уменьшение доходит до 25%.

Поэтому, при расстоянии между повреждениями ок. 6—10 мм — аппарат базирующийся на принципе регистрирования магнитных полей рассеяния должен давать показания несколько меньшие надлежащих. Продолжительность импульсов позволит, быть может, судить о близости повреждений.

Вероятность большого количества мест, в которых находятся лопнувшие проволоки на протяжении 5 до 10 мм очевидно очень мала.

Употребляемый нами до сих пор дефектоскоп не обладает такой разделительной способностью как осциллограф и он регистрирует два перерыва проволоки как отдельные повреждения только при расстоянии их большем чем 60 мм. Усовершенствование пишущего гальванометра (сокращение собственного периода, что вполне возможно) дало бы возможность регистрировать очень близкие друг к другу повреждения. Труднее всего вопрос оценки повреждений в заржавленном канате. Ввиду того, что ржавчина вызывает уменьшение активного сечения каната на большом протяжении, а кроме того в различной степени в разных местах, заржавленный канат вызывает много сильных импульсов при передвижении его через измерительную катушку. Диаграмма заржавленного каната, получаемая при помощи дефектоскопа или осциллоскопа, имеет много близлежащих очень сильных и попеременно несколько меньших импульсов; такая диаграмма дана нами в одном из предшествующих трудов [2], рис. 10-с. Она настолько характерна, что сразу можно определить заржавленный канат. Импульсы электродвижущей силы вызванные ржавчиной, а следовательно и величины отклонений пишущего аппарата зависят главным образом от длины повреждений и от величины уменьшения активного сечения каната, в то время как глубина повреждения проволок внутри каната имеет гораздо меньшее влияние. Но если мы даже пренебрежем влиянием глубины, остаётся еще зависимость импульсов от двух параметров и поэтому является в принципе затруднительным сделать достоверные выводы о прочности каната по полученной диаграмме. Наши опыты позволяют принять обоснованное предположение, что отклонения при заржавленном канате соответствуют приблизительно такой длине повреждения, которая вызывает максимальные импульсы электродвижущей силы, т. е. приблизительно в 6 раз больше чем импульсы вызванные лопнувшей проволокой при соприкасающихся концах. В таком случае зависимость отклонений от длины повреждения была бы устранена и осталась бы зависимость от одного параметра, а именно от величины уменьшения активного сечения каната. Это позволило бы рассчитывать его прочность. Для проверки нашего предположения следовало бы исследовать значительное количество заржавленных канатных отрезков, рассчитать по методу инж. З. Кавецкого [3] их прочность, принимая во внимание наше вышеприведенное предположение, а затем проверить расчёты, разрывая целые отрезки канатов.

Если бы оказалось, что данные разрыва не вполне соответствуют расчёту, можно было бы ввести в формулы некоторые коэффициенты, которые позволили бы рассчитывать прочность с большей точностью.

Описанные в настоящем труде исследования подтвердили наши прежние предположения, что электромагнитный метод даёт вполне реальные указания относительно состояния проволочных канатов. Эти исследования указывают также на возможность усовершенствований необходимых для получения более точных данных относительно повреждений. Особенно надежные заключения о состоянии канатов получаются в тех случаях, когда осмотры канатов производятся в определённые и одинаковые сроки, как напр. в канатных фуникулерах в Закопаном и Крынице. Из очередных диаграмм сразу видно, изменяется ли состояние каната быстро или медленно, и какого рода повреждения постепенно в нём появляются.



M. JEZEWSKI, L. SZKLARSKI and Z. KAWECKI

## INVESTIGATION OF THE MAGNETIC LEAKAGE FIELDS DERIVING FROM DEFECTS IN WIRE ROPES IN CONNECTION WITH THE MAGNETIC WIRE ROPE TESTING METHOD

## 1. INTRODUCTION

After several years of wire ropes testing in coal-mines and cable-ways and in laboratory by means of an apparatus constructed by the authors [1], [2] it may be stated that though the tests undoubtedly gave considerable information on the condition of the rope, nevertheless some discrepancy was observed after untwisting the rope tested and comparing the defects thus discovered with those recorded by the apparatus. It was found for instance, that if the defects are placed near one another, the first will be shown by a marked deflection of the recording device, while the other will be registered as a smaller deflection or even unrecorded. In addition to this, the deflection is not always proportional to the defect. This may be due to several causes: the characteristic of the apparatus is not exactly linear, which may cause the deformation of e.m.f. pulses coming from the search-coil; the voltage amplifier used was of an a. c. resistance type and it was not known if the timeconstants of the galvanometer as well as those of the circuits in the amplifier had been properly chosen until the duration of the particular e.m.f. pulses and their shape have been established. Moreover, the leakage fields may have had such a shape as to cause an error in the registered indications of the apparatus.

In order to achieve further improvements in the electromagnetic rope-testing method, it was necessary to investigate all the factors which might influence the indications of the apparatus. Consequently a series of experiments was carried out. The first part of this research work was devoted to the investigation of the changing indications of the apparatus according to different defects of wire ropes. The tests were carried out in the Physical Laboratory of the Academy of Mining and Metallurgy in Kraków, by means of the testing device described in the previous paper [2]. As it was impossible in practice to make several different defects in the pieces of rope to be tested, the following method was chosen. In order to obtain the possibility of varying the extent and kind of defect, a piece of rope without any flaw and with its core removed was used. Instead of the core, a brass tube 7 mm in diameter was inserted in the centre of the rope. The rope was then stretched within an iron frame moving at a suitable speed. Wires with various defects were fastened tightly along the rope. A graph was thus obtained. The wires could also be placed inside the rope within the brass tubing mentioned above. Thus the graphs for similar external and internal defects of the rope could be compared.

## 2. TESTS OF THE INDICATIONS OF APPARATUS IN RELATION TO KIND OF DEFECT

## 2.1. Dependence of the indications of apparatus on the axial length of the defect

The object of the first series of tests was to ascertain how the indications of the apparatus vary in relation to the varying lengths of defects. For this purpose the wire was cut into two parts and then fastened on to the rope with brass clasps.

At the beginning both ends of the broken wire were touching each other. After the oscillograph had been obtained the distance between the two ends of the wire

was gradually increased. It was thus possible to obtain several defects of varying lengths up to 250 mm. Oscillographs were obtained by the apparatus for defects of various lengths. These oscillographs showed that even when the ends of the broken wire touch each other, the apparatus produces a small deflection of the recorder. This deflection increases with the distance between the two ends of broken wire. The maximum value of the deflection was obtained when the distance between the ends of wire was 20—40 mm. Then the deflections diminished again, and at a distance of 80 mm there appeared two deflections corresponding to the two ends of the broken wire. One of the deflections was larger than the other. After a further increase in the distance between the two ends of the broken wire, the oscillograph showed no change. The variation of the deflections with the length of defect is shown by the dotted curve in Fig. 7.

Tests were carried out with two types of search-coil<sup>1</sup>, one very narrow, with the average distance between the two windings amounting to 9 mm, and the other much wider with the distance between the two windings reaching 25 mm. Both coils produced similar graphs, except that the ratio of the maximum deflection to the minimum (when both ends of the wire were touching each other) was greater with the wider coil. The sensitivity of a wider coil with the same number of windings was much higher. A cut wire placed inside the rope produces a deflection 30—70 per cent of the magnitude produced by the same wire put upon the surface of the rope. The magnitude of these deflections depends on the length of the defect, but the character of the oscillograph change is similar.

## 2.2. Indications of the apparatus with two breaks near each other

In the second series of experiments the tests were made with two breaks near each other. Two similar wires were cut and soldered into a small piece of thin brass tubing so that the gap between the two ends of the wire was 3 mm. Two similarly prepared wires were fastened to the rope in such a way that both defects were brought into one cross-section. After the first oscillograph had been taken, the wires were moved so as to increase the distance between the two defects. A number of oscillographs were thus taken for several distances. It was found that at a distance of 20—25 mm between the defects, the deflection of the recorder is the same as when there is one defect. At a distance greater than 60 mm two distinct deflections appear (Fig. 1). The oscillographs obtained for two internal defects in the rope had a similar character (Fig. 2).

## 2.3. The response of the apparatus to corrosion of wires

The next series of experiments was carried out in order to check the influence of corrosion on the indications of the apparatus. For this purpose an undefected wire was fastened to the surface of the rope. This wire was moistened along a length of 15 mm with a solution of common salt with an addition of hydrogen peroxide. The wire was tinned on both sides of this spot to prevent any further spread of rust. The rope was further protected from rust with paraffin. An oscillograph was obtained every day and then the wire was again moistened with the same solution. After two days a deflection appeared and it grew bigger every day. After a week the deflections of the galvanometer reached a considerable value (Fig. 3). The expe-

<sup>1</sup> The construction of the search-coils is described later in this paper.

riment was repeated with the wire rusted over a length of 30 cm. The galvanometer then recorded several large deflections. The deflections produced by corrosion are much greater than those produced by a broken wire. This may be explained as follows: a wire covered with rust over a fairly great length, e. g. several centimetres, produces the same leakage field as a broken wire with its ends moved a considerable distance apart. The apparatus then indicates a large deflection. When the wire is put inside the rope it produces a somewhat smaller deflection (Fig. 3g). In this way it was shown that the apparatus reacts to corrosion.

Next it had to be found out if the indications obtained from the apparatus, depending on the length of the defect and the distance between the defects, were affected by faults in the apparatus, or merely by the shape of the leakage fields. These data would help to decide whether the apparatus for the magnetic rope tests could be improved. It was more or less evident that the diminution of the gap between the broken ends of the wire decreases the leakage field. But on the other hand it could be supposed that the inertia of the galvanometer might reduce its deflections. If, for instance, there was a broken wire with a gap of 1 mm in a rope moving at a speed of 1 m per sec., the given defect would pass through the search-coil in about 0.01 sec. It might be supposed that the galvanometer could not move so quickly. In order to ascertain what duration of pulse could be recorded with the galvanometer it was necessary to determine its deflection period. For this purpose a disc was employed driven by a gramophone motor with a constant but adjustable speed. On this disc there were fastened contact brass lamellae. The contacts closed an electric circuit, so causing e.m.f. pulses. The pulses were sent to the grid circuit of the first tube of the amplifier of the rope-testing apparatus. The paper band on which the galvanometer records its deflections moved at a speed of 1 m per sec. By changing the width of the contact lamellae and the speed of the disc the duration of the e.m.f. pulses was altered. In this way were obtained the graphs that made it possible to check the duration of the full deflection and return to the home position of the recording galvanometer. Thus it was determined how long the e.m.f. pulse had to last in order to cause the full deflection of the galvanometer. It appeared that half an oscillation period of the galvanometer amounts to 0.06 sec. The duration of pulse needed to obtain a full deflection of the galvanometer may thus approximately amount to half that time, i. e. 0.03 sec. The deflections decrease quickly when the duration of the pulses decreases. It was observed that two pulses following one another would produce two separate deflections of the galvanometer if they appeared at an interval of not less than 0.06 sec. For a shorter period the galvanometer produced only one deflection.

In order to find out if the apparatus can respond properly to the e.m.f. pulses induced in the search-coil it was necessary to determine accurately the shape and size of the e.m.f. pulses and the influence of the adjacent defects upon the shape of the leakage fields. This influence might cause a change in the shape and the duration of the pulses. In order to avoid the influence of the time-constants of the galvanometer and the amplifier a special cathode-ray oscilloscope was constructed with two two-stage direct-coupled amplifiers (Fig. 4). The linearity of the characteristics of the amplifiers was obtained by using the push-pull arrangement in each stage. The measurements proved perfect proportionality between the deflection of the spot and the applied input control voltage of the amplifier. The sensitivity of the oscilloscope as a whole reached 0.02 volts per mm.

A special switch was put on the rope pulling device. This switch acted shortly before the defect approached the search-coil, and set into action the run of the

cathode-ray tube sweep. The sweep speed was 0.35 sec. The oscillographs were photographed.

Alternating voltage from the audio-oscillator was applied to the deflecting plates of the second system of the tube to obtain a visible time scale.

All experiments except the last series were carried out with a search-coil consisting of 1800 turns. The windings were bound with a silk ribbon. The coils were wound on a rectangular form and then bent around a wooden bobbin so that the horizontal sides of the coil were touching each other (Fig. 5a). This bobbin was fastened to an electromagnet. The distance between the sides of the coil itself could be varied.

The last series of experiments was carried out with a similar coil but with the windings placed one above the other in a vertical plane (Fig. 5b).

#### 2.4. Tests with the oscilloscope

The first series of experiments with the use of the oscilloscope was a repetition of the first test made with the rope-testing apparatus. Thus the broken wire was put on the rope again.

The break gap was gradually varied. After each change the rope with artificial defect was pulled through the electromagnet with the search-coil on it at a constant speed of 1 m per sec. The pulses received were photographed. The photographs showed that the pulse always appeared even when both ends of the broken wire were in full contact, though it was small (Fig. 6a). With an increase in the break gap the pulses increased quickly. The duration of the pulses also rose, but much more slowly. Table 1 shows the amplitude of the pulse and its duration as calculated from the photograph (Fig. 6).

Table 1  
Measurements of the e. m. f. pulses and their duration  
with an increasing break gap

Break gap of broken wire in mm	Pulse amplitude in photograph in mm	Duration of pulse in seconds
0	7	0.025
0.6	12	0.031
1	21.5	0.034
2	28	0.034
3	32	0.039
5	37	0.045
10	42	0.045
20	40.5	0.050
30	33.5	0.065
50	two peaks 27	0.085
160	two pulses 21.5	0.15
250	14	

As may be seen from Table 1 the amplitude reaches its maximum when the break gap is 10 mm. This indicates that the maximum amplitude is six times higher than that of the defect when the gap is at its minimum (when the ends of broken wire touch

each other). When the ends of a broken wire touch each other the pulse produced by a wide coil is some 20 per cent higher than with a narrow coil.

As shown by the above experiments the drawing together of the ends of broken wire causes a narrowing of the leakage field. The nearer the ends of wire the smaller the e.m.f. pulse and any apparatus will give a smaller deflection. The graphs in Fig. 7 show the comparison of the deflections of the spot of the oscilloscope with that of the recording galvanometer. When the break gap is very small the apparatus gives smaller deflections than the oscilloscope. This may be easily explained: the duration of a pulse is too short for the galvanometer to respond fully.

Similar results were obtained during the experiments when the wire was placed inside the rope but the deflections were smaller.

It follows that the magnitude of the e.m.f. pulse is a function of three parameters: the magnitude, length, and depth of the defect. Other factors being equal, the pulse is proportional to the magnitude of the defect, and to a small degree depends on its depth<sup>1</sup>. It greatly depends on the length of the defect.

The e.m.f. pulses evidently depend very much on the speed with which the rope passes through the search-coil. But this can be neglected because the negative voltage, proportional to the passage speed of the rope, applied to the grid of the variable- $\mu$  tube of the amplifier causes the deflections of the galvanometer to be independent of the rope movement over a wide range of speeds.

The second series of experiments with the use of an oscilloscope was carried out in order to check the mutual influence of the leakage fields deriving from the adjacent defects. For this purpose two broken wires with the ends 3 mm apart were put on the rope and the distance between the two defects was varied as described when the graphs were made by using a rope-testing apparatus. Table 2 shows the results of the tests.

Table 2  
Measurements of e. m. f. pulses and their duration for two adjacent defects

Distance between defects in mm	Pulse height in mm	Pulse duration in seconds
0	51	0.042
4	48	0.052
8	39	0.055
	two peaks	
16	26.5 22.5	0.065
25	26.5 21	0.078
	two pulses	
30	27 20	
40	27 22	0.044 and 0.05
50	27.5 22	
80	23 21	
120	28 21	
160	28 24	

Fig. 8 illustrates the above table.

It follows from the above experiments that the leakage fields of adjacent defects affect one another. When the distance between them is very small, the pulse pro-

<sup>1</sup> In ropes with a jute core the broken wires are usually placed near the surface of the rope.

duced by the search-coil is approximately equal to the sum of the pulses caused by the separate defects.

As the distance increases, the pulses get smaller. At a distance of 16 mm two peaks appear which break into two separate pulses each of which is equal to the pulse of one defect. When the search-coil is wider (26 mm) the two peaks appear at a distance of 30 mm between the defects and divide completely at a distance of 40 mm (Fig. 9).

A similar effect was obtained for three defects, when the distances were gradually increased. The experiment was carried out in a similar manner. Three wires with artificial defects were attached to the rope and the distance between the defects was gradually varied. After every change the oscillographs of the pulses were photographed. Table 3 shows the results of the tests calculated on the basis of the photographs (Fig. 10). As can be seen from the above table the leakage fields deriving from the three defects affect one another.

Table 3  
Measurements of the e. m. f. pulses and their duration for three adjacent defects

Distance between defects in mm	Pulse height in mm	Pulse duration in seconds
0	65	0.049
4	57	0.050
8	38	0.059
12	28	0.069
	Three peaks	
16	19 19 24	0.079
20	18 16 23	0.089
25	18 16 23	0.1
	Three pulses	
39	18.5 16 23	

This may be explained as follows: opposite magnetic poles appear at the ends of the broken wires. The opposite poles of two or three of the wires are near one another and their resultant effect is almost neutralized.

The next series of experiments was carried out with the wires rusted over shorter (Fig. 11a and 11b) or longer (Fig. 11c and 11d) distances. At first the wires were placed on the surface of the rope (Fig. 11a and 11c), and then inside it (Fig. 11b and 11d). The photograph of a pulse produced by the wire rusted over a considerable length is especially instructive. It shows clearly that as a consequence of different stages of corrosion of the wire, there appear some leakage fields causing several adjacent e.m.f. pulses with the movement of the rope.

It is apparent that with the movement of a rusty rope in which a considerable number of wires may be corroded the rope-testing apparatus gives a record consisting of several adjacent and large pulses.

The last series of experiments was made by means of a search-coil wound in one plane. The search-coils used for the first series of experiments had been wound in such a way that their windings were placed in the generant of a cylinder. When moving the windings of such a coil through a leakage field, the latter produces three e.m.f. pulses in the coil. When the leakage flux lines cross one side of the coil

a small e. m. f. pulse appears in one direction. When the coil passes the middle of the leakage field, the opposite large e. m. f. pulse appears, and finally when the second side of the coil leaves the leakage field, a new small pulse appears in the same direction as the first (Fig. 12a). This is demonstrated in Fig. 12b.

The action of the leakage field in a coil with its windings placed in one plane is different. When such search-coil crosses the leakage field, the difference of the field intensities induces a greater e. m. f. in the nearer winding and a smaller in the farther winding (Fig. 13a).

When the coil moves in the central part of the leakage field, the windings move parallel to the lines of flux and the e. m. f. disappears. As the coil leaves the leakage field the opposite e. m. f. appears. Any defect thus causes two pulses in the opposite directions (Fig. 13b). The tests with this coil were carried out in order to check if this system had a better resolving time than the search-coil of the former type, i. e. if the new type could produce two separate peaks when the distance between the two defects was smaller. The results were rather negative. As may be seen from the photographs (Fig. 14) a coil of the latter type has no advantage over a coil of the former type. The two peaks appear when the distance between the two defects is 20 mm (Fig. 14e).

### 3. CONCLUSIONS

It follows from the described experiments, that a broken wire produces a leakage field, though very small, even when both ends of the wire are in full contact. When passing through the search-coil this field causes a small e. m. f. pulse. This pulse lasts a very short time, approximately 0.02 sec. A quickly acting galvanometer may register it after a considerable amplification. The galvanometer used in the described apparatus had a greater natural period and therefore reduced the deflections of the short pulses. A broken wire placed inside the rope produces a pulse of short duration, smaller than that produced by an external broken wire. After increasing the distance between the ends of the broken wire the pulse grows until it gets 6 times its initial size. Other factors being equal the magnitude of the pulse obtained is proportional to the number of broken wires, i. e. to the decrease in percentage of the cross-section of the rope.

The e.m.f. pulses and therefore the deflection of the recorder depends on three variable parameters: the magnitude of the defect in the given cross-section, its length and its depth (the influence of the speed could be neglected, as in the described apparatus it was compensated and did not play any part). The matter seems to be very difficult but actually is simplified by the fact that the ends of the internal broken wires move very little apart.

Hitherto we have not been able to confirm the movement of the ends of an internal broken wire at any considerable distance. Thus the pulses caused by the *internal* broken wires depend on one parameter only: the number of breaks, i. e. on the decrease of the acting cross-section of the rope. The loose ends of broken wires in the outer strands project and are usually cut off. In regular-lay ropes the severing causes a gap of several centimetres, which produces a large leakage field and a considerable pulse. In Lang's-lay ropes the broken wires are removed over considerable distances. Then the wire produces two pulses of smaller size.

As the position of external broken wires is usually known, the identification of these greater pulses and the calculation of the decrease in strength of the rope is a simple matter. If the defect occurring at a certain spot is not visible (the position of a defect may be exactly determined from the graph recorded), a superficial

examination will confirm if it is external or internal. Experience indicates that in regular-lay ropes it is usually the outer wires which break, while in Lang's-lay ropes it is the inner wires.

If there are several adjacent defects in a rope at intervals not exceeding 5 mm, the pulse induced is much the same or somewhat smaller than when the defects lie in one cross-section. In this case the pulses will be added one to another and the apparatus will give a correct indication of the magnitude of the defects. On the other hand, when the distance between the defects is increased the pulse diminishes and when the distance is about 12 mm the pulse is nearly 25 per cent smaller. This means that the indications of an apparatus based on the principle of registering the leakage fields will be somewhat smaller for the distances between defects from 6 to 10 mm. Perhaps the pulse duration might indicate the presence of several adjacent defects.

The probability of a number of defects in the wires at a distance of 5—10 mm is of course very small.

The resolving ability of the present apparatus is worse than that of an oscilloscope; the deflections are recorded separately only if the distance between them exceeds 60 mm. Improvements of the recording galvanometer (the shortening of its natural period) could be achieved and would make it possible to register defects even when very close to one another.

The greatest difficulty arises as regards the estimation of a defect caused by rust in the rope. As rust causes a decrease in the active cross-section of the rope over a considerable length in different places and in varying degrees, a rusted rope causes many large pulses when moving through the search-coil. The graph produced by the galvanometer or the oscilloscope is so characteristic in this case (several large pulses close together), followed by smaller pulse; this graph was shown in one of our previous articles [2], (Fig. 10c), that it may immediately be ascertained that the rope is rusted. The magnitude of the e.m.f. pulses caused by rust, i. e. the size of the deflections recorded, depends mainly on the length of the defect and the decrement of the active cross-section. The depth of the defect has much smaller effect. Even if the influence of the depth is neglected, there remain two more factors that affect the pulses. Thus it would be difficult to obtain a certain conclusion of the rope strength from the graph recorded. It follows from the authors experience, that a hypothesis may be justified according to which the deflections caused by corrosion are in approximate relation to the length of the defects producing the maximum e. m. f. pulses (i. e. the are about six times greater than when the ends of the broken vires are touching).

In this case the dependence of the deflections on the length of the defectes may be eliminated and the influence of one parameter only remains: the decrease in the active cross-section of the rope. The calculation of the rope strength is then possible. In order to check the above hypothesis a considerable number of pieces of rusted rope would have to be tested, and the rope strength calculated according to the principle mentioned above by means of the method proposed by Z. Kawecki [3]<sup>2</sup>. Next the calculations would have to be checked by breaking the tested samples. If the results thus obtained differ from those calculated, it will be possible to introduce certain coefficients into the formulae in order to raise the precision of this method of rope strength calculation.

<sup>2</sup> As far as we know it is the only method hitherto proposed for the calculating of rope strength from the indications of the magnetic testing method.



The experiments described in this article have confirmed the former conclusion of the authors that the magnetic testing method gives true indications of the conditions of steel ropes. The experiments have shown that the method may be improved and will then give more accurate data of the defects. In particular, positive conclusions as to the conditions of ropes may be obtained if testing is carried out periodically, as it is done on the cable-ways in Zakopane and Krynica. From the graphs obtained from successive tests it may be seen if the condition of the rope is changing quickly or slowly and what defects are developing in it.

#### 4. ACKNOWLEDGEMENTS

The authors should like to acknowledge their indebtedness to the Polish Academy of Science for supporting these experiments. They express their gratitude to Mr. J. Szrednicki for the construction and setting up of the excellent oscilloscope, to Mr. Z. Dziewoński for his assistance in carrying out the experiments, and to Mr. S. Wojtów, engineer in the Academy of Mining and Metallurgy, for making several devices necessary for the research.



R. KULIKOWSKI

## Obliczanie liniowych układów impulsowych

*Rękopis dostarczono 5. 8. 1953.*

**Streszczenie.** W artykule niniejszym rozpatrzono metodę obliczania liniowych układów impulsowych, opartą na najlepszym (tzw. Czebyszewa) przybliżeniu zadanych chwilowych charakterystyk układu. Na podstawie twierdzeń teorii najlepszego przybliżenia funkcji sformułowano warunki minimalnego zniekształcenia sygnału impulsowego w układzie liniowym. Zastosowanie różnych metod najlepszego przybliżenia funkcji zilustrowano na kilku przykładach obliczania konkretnych układów impulsowych.

### 1. WSTĘP

Przy obliczaniu liniowych układów dynamicznych zwykle stawia się zadanie, aby wyznaczone wielkości elementów układu były optymalne z punktu widzenia zadośćuczynienia określonym własnościom tego układu. Inaczej mówiąc, odchylenie rzeczywistych charakterystyk układu od zadanych idealnych charakterystyk powinno być nie tylko małe, ale najmniejsze możliwe w danych warunkach. Żądanie to jednak traci wszelki sens, jeżeli nie podaje się określonego kryterium „bliskości“ zadanych i otrzymanych charakterystyk układu. Przy wyborze odpowiedniego kryterium należy uwzględnić charakter i przeznaczenie obliczanego układu. Tak na przykład przy obliczaniu układów na częstotliwości akustyczne w celu otrzymania minimalnych zniekształceń sygnałów charakterystyka amplitudy układu liniowego powinna w zadanym zakresie częstotliwości odchyłać się od stałej wartości nie więcej niż o zadaną wielkość (na przykład 3 dB). Kryterium to jest zupełnie dostateczne, ponieważ reakcja ucha ludzkiego na sygnał akustyczny wykazuje logarytmiczną zależność od zmian amplitudy tego sygnału, a prawie zupełnie nie zależy od jego fazy. Jednakże przy obliczaniu układów impulsowych (np. wzmacniaczy i generatorów impulsów, układów korekcji impulsów itd.), gdzie główne znaczenie odgrywają

---

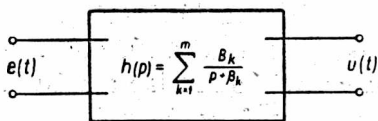
\* Artykuł opracowano na podstawie referatu wygłoszonego przez autora na konferencji naukowo-technicznej MEIS w Moskwie 6. V. 1953 r.

zniekształcenia kształtu impulsu, powyższe kryterium staje się niedostateczne, ponieważ nie uwzględnia zniekształceń fazowych poszczególnych częstotliwości harmonicznych sygnału. Czasami układy impulsowe oblicza się na podstawie zadanych charakterystyk amplitudy i fazy. Jednakże optymalne wartości elementów układu, odpowiadające tym charakterystykom, na ogół się nie pokrywają. Wynika to stąd, że charakterystyki te nie mogą być rozpatrywane oddzielnie, chociażby ze względu na ich związek analityczny, wyrażający się dla układów typu minimalno-fazowego (do których należą prawie wszystkie stosowane w praktyce układy) znanymi przekształceniami całkowymi Bode<sup>1</sup>. Dlatego też przy obliczaniu układów impulsowych, gdzie główną rolę odgrywają zniekształcenia kształtu impulsów, należy posługiwać się charakterystykami chwilowymi.

Przy obliczaniu elementów układów liniowych na częstotliwości akustyczne (na przykład przy obliczaniu filtrów elektrycznych) W. Cauer, C. C. Kogan, A. F. Bielecki zastosowali aparat najlepszego przybliżenia funkcji oparty na pracach P. L. Czebyszewa i E. J. Żołotariewa. W związku z powyższym powstaje pytanie dotyczące możliwości zastosowania teorii najlepszego przybliżenia funkcji do znajdowania optymalnych wielkości elementów układów impulsowych. Jednakże przy aproksymacji zadanych idealnych charakterystyk chwilowych za pomocą funkcji przestępnych, jakimi wyrażają się charakterystyki chwilowe układów liniowych, stykamy się z trudnościami charakteru matematycznego, ponieważ klasyczne metody aproksymacji stosowane we wspomnianych pracach nie mogą być wykorzystane. Dlatego w pracy niniejszej przy obliczaniu konkretnych układów impulsowych wykorzystamy niektóre nowe pojęcia i wywody konstruktywnej teorii funkcji, a w szczególności prace S. Bernsteina [3], Remeza [10], Pinskera i Nowodworskiego [9].

## 2. WARUNKI NAJMNIEJSZYCH ZNIEKSZTAŁCEŃ IMPULSÓW W UKŁADACH LINIOWYCH

Rozpatrzmy układ liniowy zawierający skupione elementy  $R L C$ , który w postaci czwórnika przedstawiono na rys. 1. Interesujące nas własności tego układu określa funkcja przekazywania



$$h(p) = \sum_{k=1}^{k=m} \frac{B_k}{p + \beta_k}, \quad (1)$$

Rys. 1. Układ liniowy.

<sup>1</sup> Przy sposobności należy zauważyć, że w praktyce często zadaje się metodologicznie niewłaściwie sformułowane pytanie: co jest ważniejsze z punktu widzenia zniekształceń, zniekształcenia fazy czy zniekształcenia amplitudy? Pytanie takiego rodzaju jest pozbawione sensu. Forma zjawiska zasłania tu całkiem jego treść.

gdzie  $\beta_k$  są to wielkości rzeczywiste dodatnie lub zespolone sprzężone, z rzeczywistą częścią większą od zera.

Na wejściu tego układu działa SEM-na, którą przedstawimy w następującej postaci:

$$E(t) = \sum_{k=1}^{k=p} C_k e^{-\gamma_k t}, \quad (2)$$

gdzie  $\gamma_k$  są to wielkości rzeczywiste dodatnie lub zespolone sprzężone, z rzeczywistą częścią większą od zera.

Napięcie na wyjściu układu  $U(t)$  wyraża się wielomianem wykładniczym z wykładnikami  $\beta_k$  i  $\gamma_k$ , tj.:

$$U(t) = \sum_{k=1}^m B'_k e^{-\gamma_k t} + \sum_{k=1}^v C'_k e^{-\beta_k t}, \quad (3)$$

gdzie  $B'_k$ ,  $C'_k$  są to rezydua funkcji  $u(p) = h(p) \cdot e(p)$  w biegunach  $\beta_k$  i  $\gamma_k$ .

Łatwo zauważyć, że większość zagadnień obliczania układów impulsowych można sprowadzić do następujących dwóch podstawowych zadań:

#### Zadanie 1.

Obliczyć elementy układu przedstawionego na rys. 1, tak aby zniekształcenia kształtu impulsów w układzie były minimalne. Inaczej mówiąc, wielomian

$$P(t) = U(t) - kE(t) \quad (4)$$

na danym odcinku  $[t_1, t_2]$  powinien jak najmniej odchyłać się od zera<sup>4</sup>. Zadania takiego typu spotyka się przy obliczaniu układów przenoszenia impulsów, wzmacniaczy impulsów itd.

<sup>3</sup> Czasami określa się reakcję układu na napięcia wejściowe mające kształt impulsów prostokątnych, trójkątnych lub tp. Jednakże takiego typu SEM-ne rzadko spotyka się w praktyce, gdyż wskutek nieuniknionego wpływu szkodliwych elementów impulsy mają kształty „wyglądzone”. Tak na przykład czoło prostokątnego impulsu otrzymywanego z multiwibratora może być dokładniej wyrażone wzorem  $A(1 - e^{-at})$  niż za pomocą funkcji prostokątnej. Napięcie podstawy czasu może być dokładniej aproksymowane sumą członów  $A_k(1 - e^{-a_k t})$  niż za pomocą zależności prostopolinyowej.

<sup>3</sup> Gdzie  $k$  — czynnik stały, określający tłumienie bądź wzmocnienie układu.

<sup>4</sup> W tym przypadku, gdy ważne jest odtworzenie na wyjściu układu impulsu opóźniającego się o pewną wartość czasu  $t_0$ , zamiast  $E(t)$  należy napisać  $E(t - t_0) =$

$$= \sum_{k=1}^v C_k e^{-\gamma_k(t-t_0)} = \sum_{k=1}^v C_{1k} e^{-\gamma_k t}, \quad \text{gdzie } C_{1k} = C_k \cdot e^{\gamma_k t_0}.$$

## Zadanie 2.

Obliczyć elementy układu (rys. 1), tak aby na wyjściu tego układu otrzymać napięcie danego kształtu, na przykład:  $U_0(t) = \sum_{k=1}^{k=p} D_k e^{-\alpha_k t}$ . W tym przypadku otrzymujemy następujący warunek: wielomian

$$P(t) = U(t) - U_0(t) \quad (5)$$

powinien w przedziale  $[t_1, t_2]$  jak najmniej odchyłać się od zera. Zadania takiego typu spotyka się przy obliczaniu układów kształtowania impulsów, korekcji zniekształceń impulsów itd.

Jak widzimy, większość zadań techniki impulsowej wymaga znalezienia współczynników wielomianu typu

$$P(t) = \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{-\alpha_k t}, \quad (6)$$

który w przedziale  $[t_1, t_2]$  powinien jak najmniej odchyłać się od zera. Jako kryterium oceny zniekształceń, tj. odchylenia wielomianu (6) od zera, A. A. Charkiewicz [4] wprowadził wielkość

$$\delta = \int_{t_1}^{t_2} P^2(t) dt. \quad (7)$$

Kryterium to ocenia stopień niepożądanego tego lub innego odchylenia odpowiednio do kwadratu modułu, niezależnie od momentu czasu, w którym odchylenie to miało miejsce.

Jedną z przyczyn szerokiego rozpowszechnienia powyższego kryterium jest jego prostota matematyczna, ponieważ do określenia wielkości (7) nie jest potrzebne znajdowanie pierwiastków charakterystycznego równania układu.

W pracy niniejszej jako kryterium oceny zniekształceń przyjmujemy minimum bezwzględnej wartości wyrażenia

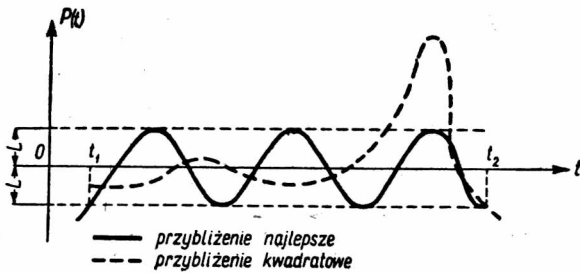
$$L = \max_{[t_1, t_2]} |P(t)|. \quad (8)$$

Rozwiązanie szeregu zagadnień matematycznych opartych na wyrażeniu (8) (tj. na tak zwanym najlepszym przybliżeniu funkcji) zawdzięczamy P. L. Czebyszewowi i jego szkole.

W przypadku gdy  $P(t) = \sum_{k=1}^n a_k u_k(t)$ , gdzie  $u_k(t)$  jest układem funkcji liniowo niezależnych, mającym w  $[t_1, t_2]$  nie więcej niż  $n$  pierwiastków (tzw. wielomian układu Czebyszewa), najlepsze przybliżenie charakteryzuje się następującymi własnościami:

- istnieje tylko jeden wielomian najmniej odchyłający się w  $[t_1, t_2]$  od zera;
- liczba punktów maksymalnego odchylenia, które ze zmianą znaku następują po sobie kolejno, wynosi  $n+1$ ;
- punkty maksymalnego odchylenia mają jednakowe amplitudy, przy czym na końcach odcinka  $[t_1, t_2]$  odchylenia są też maksymalne.

Porównamy teraz przybliżenie kwadratowe z przybliżeniem najlepszym (rys. 2). Przy przybliżeniu kwadratowym krzywa błędu  $P(t)$  na ogół przebiega blisko zera, chociaż w poszczególnych punktach możliwe są duże odchylenia. Przy przybliżeniu najlepszym odchylenia są najmniejsze możliwe, chociaż w pewnych zakresach  $P(t)$  odchyła się więcej niż przy przybliżeniu kwadratowym. Zatem jeżeli chcemy dostać na wyjściu układu napięcie aproksymujące zależność liniową (na przykład impuls podstawy czasu), to



Rys. 2. Charakterystyki przybliżenia najlepszego i przybliżenia kwadratowego.

w przypadku obliczania układu na podstawie przybliżenia kwadratowego odchylenia w pewnych punktach mogą być znacznie większe niż te, które określa zadany współczynnik nieliniowości. Obecność „ostrych“ odchylen jest niepożądana również w przypadku innych układów impulsowych, jak na przykład generatory impulsów prostokątnych, wzmacniacze impulsów itd. Dlatego w tych przypadkach lepiej posługiwać się metodą najlepszego przybliżenia.

Wracając do wielomianu (6) rozpatrzmy prosty i najbardziej ważny przypadek, gdy  $a_k = ka$ , gdzie  $a$  — jest wielkością daną, większą od zera.

Otrzymany wielomian

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^{k=n} A_k e^{-kat} \quad (9)$$

należy do układu Czebyszewa na dowolnym odcinku  $(0, \infty)$ , ponieważ ilość rzeczywistych pierwiastków tego wielomianu na tym odcinku nie przewyższa  $n$ , co wynika z uogólnionego twierdzenia Déscartes'a [3].

Warunki najmniejszego odchylenia się wielomianu (9) od zera formuluje następujące twierdzenie.

*Twierdzenie:* Ze wszystkich wielomianów (9), mających przy  $e^{-iat}$  taki sam współczynnik, jak i wielomian:

$$LT_n \left( \frac{2e^{-at} - e^{-at_2} - e^{-at_1}}{e^{-at_1} - e^{-at_2}} \right) = L \cos n \arccos \left( \frac{2e^{-at} - e^{-at_2} - e^{-at_1}}{e^{-at_1} - e^{-at_2}} \right); \quad (10)$$

ostatni najmniej odchyła się od zera na odcinku  $[t_1, t_2]$  półosi dodatniej, przy czym odchylenie to równa się  $\pm L$ .

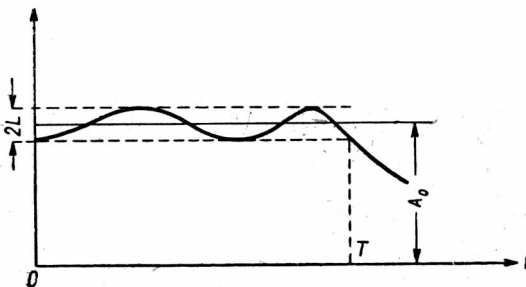
Rozmieszczenie  $n+1$  punktów największego odchylenia wyraża się wzorem

$$t_k = -\frac{1}{a} \ln \left[ \frac{(e^{-at_1} - e^{-at_2}) \cos \frac{k\pi}{n} + e^{-at_2} + e^{-at_1}}{2} \right]. \quad (11)$$

Twierdzenie to otrzymujemy bezpośrednio z twierdzenia S. N. Bernsteina [3] o wielomianie algebraicznym  $T_n \left( \frac{2x-a-b}{a-b} \right)$  najmniejszego odchylenia od zera na odcinku  $[a, b]$ , w którym zamiast  $x$  podstawiono  $e^{-at}$ , zamiast  $a$  i  $b$  —  $e^{-at_1}$ ,  $e^{-at_2}$ .

Z twierdzenia tego wynika, że dla zmniejszenia zniekształceń  $L$  trzeba powiększyć stopień wielomianu  $n$ , co jest równoważne powiększeniu stopnia funkcji przekazywania układu, a zatem i ilości elementów układu.

Na podstawie tego twierdzenia, uważając za zadany określony człon  $A_1 e^{-iat}$ , możemy określić współczynniki przy pozostałych członach, a następnie znaleźć optymalną funkcję przekazywania układu. Ze znalezionej funkcji przekazywania znajdujemy elementy układu.



Rys. 3. Najlepsze przybliżenie szybkości podstawy czasu.

W niektórych zagadnieniach (na przykład przy obliczaniu generatorów i wzmacniaczy podstawy czasu, generatorów i wzmacniaczy impulsów prostokątnych) okazuje się bardziej wygodne uważać za zadaną wielkość

$$\xi = \frac{2L}{A_0},$$

która charakteryzuje amplitudę oscylacji na wierzchołku impulsu o wysokości  $A_0$  (rys. 3). Uważając za za-

dany współczynnik  $A_0$  widzimy, że ze wszystkich wielomianów wykładniczych (9) wielomian (10) ma najmniejszy współczynnik zniekształceń  $\xi$ .

<sup>5</sup>  $T_n(x)$  oznacza tu wielomian Czebyszewa  $n$ -tego rzędu.



Jako przykład rozpatrzmy przypadek  $n=2$ ;  $t_1=0$ ;  $t_2=T$ , tj. inaczej mówiąc, rozpatrzmy najlepsze przybliżenie wierzchołka impulsu o wysokości  $A_0$  za pomocą sumy

$$P_2'(t) = A_0 - P_2(t) = -(A_1 e^{-at} + A_2 e^{-2at})$$

na odcinku  $[0, T]$ .

Oznaczając  $e^{-at} = a$ , z równania (10) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} P_2(t) &= L \left\{ T_2 \left( \frac{2e^{-at} - a - 1}{1-a} \right) \right\} = L \left\{ 2 \left( \frac{2e^{-at} - a - 1}{1-a} \right)^2 - 1 \right\} = \\ &= L \left[ \frac{8}{(1-a)^2} e^{-2at} - \frac{8(1+a)}{(1-a)^2} e^{-at} - \frac{(a+1)^2 + 4a}{(1-a)^2} \right], \end{aligned} \quad (12)$$

$$\xi = \frac{2L}{A_0} = \frac{2(1-a)^2}{(a+1)^2 + 4a}. \quad (13)$$

Zatem wielomian najlepszego przybliżenia  $A_0$  przybiera postać

$$P_2'(t) = A_2 [(1+a)e^{-at} - e^{-2at}], \quad (14)$$

gdzie  $a$  na podstawie równania (13) określić można ze wzoru

$$a = \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 - \frac{1}{2}\xi} - \sqrt{\left( \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 - \frac{1}{2}\xi} \right)^2 - 1}, \quad (15)$$

natomiast

$$a = -\frac{\ln a}{T}, \quad (16)$$

$A_2$  zaś jest stałą, której wartość określa się z warunków zadania.

Opierając się na pracach Czebyszewa i jego szkoły, poświęconych wielomianom algebraicznym najmniejszego odchylenia od zera, drogą przekształcenia  $x = e^{-at}$  można otrzymać rozwiązanie szeregu innych ciekawych zagadnień.

Na przykład, zamiast uważać za zadany współczynnik przy określonym członie  $e^{-kat}$ , można uważać za zadane wartości liniowej kombinacji współczynników, przy czym kombinację taką tworzy na przykład wartość szukanego wielomianu w określonym punkcie.

<sup>6</sup> Pierwiastek  $a > 1$  nie ma tu sensu.

Można też uważać za zadaną wartość pochodnej wielomianu w jakimś punkcie. Przypadki te były rozpatrzone przez B. A. i A. A. Markowa [7]. Zamiast jednego odcinka aproksymacji można wprowadzić dwa lub trzy odcinki, jak to uczynił Achiezer [1].

Jednakże w bardziej skomplikowanych przypadkach, gdy na przykład zadana jest duża liczba współczynników  $A_k$  lub też gdy  $\alpha_k$  są wielkościami zespolonymi, rozwiązanie zadania w ogólnej postaci analitycznej może okazać się dosyć trudne lub niemożliwe. Wtedy należy posługiwać się innymi sposobami teorii najlepszego przybliżenia, na przykład tak zwaną metodą wyrównywania maksimów [9], [10], która daje zbiór wielomianów jednostajnie zbieżnych do wielomianu najlepszego przybliżenia.

Zgodnie z tą metodą zbiór wielomianów  $\{U(t)\}$  powinien spełniać następujące warunki interpolacyjne:

1. każda funkcja  $\{U(t)\}$  jednoznacznie określa się współzrędnymi  $n+1$  punktów i zależy od nich w sposób ciągły;
2. dwie funkcje należące do zbioru  $\{U(t)\}$  są identyczne, jeśli ich różnica ma więcej niż  $n$  zer.

Istnieje wtedy taki wielomian  $U^{(0)}(t)$ , który przybiera w  $n+1$  punktach

$$a \leq t_0^{(1)} < t_1^{(1)} < \dots < t_n^{(1)} \leq b \quad (17)$$

zadanego odcinka  $[a, b]$  wartości zmieniające kolejno znaki.

Niech zbiór (17) zawiera punkt, w którym  $U^{(0)}(t)$ , uzyskuje maksymalne (co do modułu) wartości  $E^{(0)}$ , tj.

$$\max_{\{j\}} |U^{(0)}(t_j^{(1)})| = E^{(0)}.$$

Utworzymy teraz taki wielomian  $U^{(1)}(t)$ , który w punktach (17) przyjmuje równą i zmieniającą się kolejno (według znaku) wartość  $\pm L^{(1)}$ .

W tym celu należy rozwiązać układ równań

$$U^{(0)}(t_j^{(1)}) = (-1)^j L^{(1)}, \quad (18)$$

Następnie można znaleźć taki zbiór punktów

$$a \leq t_0^{(2)} < t_1^{(2)} < \dots < t_n^{(2)} \leq b, \quad (19)$$

dla którego

$$\max_{\{j\}} |U^{(1)}(t_j^{(2)})| = E^{(1)},$$

$$\min_{\{j\}} |U^{(1)}(t_j^{(2)})| \geq L^{(1)}.$$

Utworzymy teraz funkcję  $U^{(2)}(t)$ , mającą w punktach (19) wartości równe z kolejno zmieniającymi się znakami  $\pm L^{(2)}$  itd.

Utworzony w ten sposób szereg funkcji  $U^{(k)}(t)$  jednostajnie dąży do funkcji najmniej odchylającej się od zera, tj. mającej  $n+1$  punktów maksymalnego odchylenia ze zmieniającymi się kolejno znakami.

W następnych rozdziałach w kilku przykładach obliczania prostych układów impulsowych podano zastosowanie różnych metod najlepszego przybliżenia funkcji.

### 3. OBLICZANIE GENERATORA PODSTAWY CZASU

Praca większości generatorów podstawy czasu opiera się na zasadzie okresowego ładowania (bądź rozładowania) pojemności. Napięcie otrzymywane z generatora takiego typu zmienia się według funkcji wykładniczej czasu, tj. szybkość zmian tego napięcia zmniejsza się z biegiem czasu. Odchylenie tej szybkości od stałej wartości określa stopień nieliniowości podstawy czasu wyrażony za pomocą współczynnika

$$\xi = 2 \frac{\dot{U}_{\max} - \dot{U}_{\min}}{\dot{U}_{\max} + \dot{U}_{\min}}, \quad (20)$$

gdzie  $\dot{U}_{\max}$  i  $\dot{U}_{\min}$  oznaczają największą i najmniejszą szybkość podstawy czasu w zadanym przedziale  $(0, T)$ .

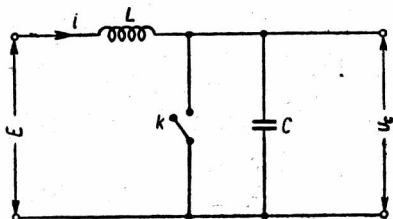
Dla zmniejszenia nieliniowości krzywej ładowania stosuje się różne metody (na przykład podwyższenie napięć zasilających, sprzężenie zwrotne itp.), jednakże wykładniczy charakter podstawy czasu nie ulega zmianie. Inne metody linearyzacji podstawy czasu (na przykład zastosowanie dużej indukcyjności w obwodzie ładowania kondensatora, formujących czwórników [5] itp.) charakteryzują się tym, że napięcie podstawy czasu wyraża się sumą funkcji wykładniczych bądź trygonometrycznych, dobranych w ten sposób, że szybkość podstawy czasu nieznacznie tylko odchyła się od stałej wartości  $A_0$  (rys. 3). Im mniejsze odchylenie krzywej podstawy czasu  $L$  od stałej  $A_0$ , tym nieliniowość, którą wyrazi się (jak to widać z rys. 3) przez

$$\xi = 2 \frac{\dot{U}_{\max} - \dot{U}_{\min}}{\dot{U}_{\max} + \dot{U}_{\min}} = \frac{2L}{A_0}, \quad (21)$$

będzie mniejsza. Prawidłowe obliczanie generatorów, w których zastosowano taką metodę linearyzacji, związane jest z zagadnieniem najlepszego przybliżenia stałej  $A_0$  za pomocą wielomianów wykładniczych lub trygonometrycznych, tj. z takim przybliżeniem, gdzie amplitudy punktów największego odchylenia mają wartości równe i różnią się tylko znakami.

Przykładem aproksymacji podstawy czasu za pomocą wielomianów wykładniczych może być praca [5].

Jako przykład aproksymacji  $A_0$  za pomocą funkcji trygonometrycznych rozpatrzmy pracę generatora z ładowaniem pojemności przez indukcyjność. Układ zastępczy tego generatora przedstawiono na rys. 4, gdzie  $K$  oznacza klucz (rolę którego spełnia zwykle lampa), za pomocą którego następuje rozładowywanie pojemności  $C$ . Równanie układu (przy otwartym kluczu  $K$ ) można napisać w następującej postaci:



Rys. 4. Schemat generatora podstawy czasu.

$$\frac{E}{p} + Li_0 = ipL + U_c, \quad (22)$$

$$Cu_0 = U_cpC + i,$$

gdzie  $u_0$  i  $i_0$  są początkowymi wartościami napięcia na kondensatorze i prądu w cewce  $L$ . Rozwiązanie tych równań wyraża się następującymi wzorami:

$$i = (E - u_0) C \omega \sin \omega t + i_0 \cos \omega t,$$

$$U_c = E(1 - \cos \omega t) + i_0 L \omega \sin \omega t + u_0 \cos \omega t,$$

gdzie  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Proces ustalania się napięcia  $u_c$  i prądu  $i$  przy periodycznej pracy układu przedstawiono na rys. 5a,b,c, przy czym zakłada się, że w czasie gdy klucz  $K$  jest zamknięty, prąd w cewce nie ulega zmianie.

Jak widać z tych rysunków, po ustaleniu się procesu, napięcie podstawy czasu ma prawie liniowy charakter narastania, a jego pochodna

$$\dot{U}_c = (E - u_0) \omega \sin \omega t + \frac{i_0}{C} \cos \omega t,$$

wykres której pokazano na rys. 5c; nieznacznie tylko odchyła się od stałej  $A_0$ .

Zażądamy, żeby punkty największego odchylenia  $\dot{U}_c$  od  $A_0$   $[0, T/2, T]$  spełniały warunki najlepszego przybliżenia tj., aby

$$\dot{U}_c(0) = A_0 - L,$$

$$\dot{U}_c\left(\frac{T}{2}\right) = A_0 + L,$$

$$\dot{U}_c(T) = A_0 - L,$$

czyli 
$$\frac{i_0}{C} = A_0 - L = A_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \xi \right), \tag{23a}$$

$$(E - u_0) \omega \sin \frac{\omega T}{2} + \frac{i_0}{C} \cos \omega \frac{T}{2} = A_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \xi \right), \tag{23b}$$

$$(E - u_0) \omega \sin \omega T + \frac{i_0}{C} \cos \omega T = A_0 \left( 1 - \frac{1}{2} \xi \right), \tag{23c}$$

gdzie  $\xi = \frac{2L}{A_0}$  jest współczynnikiem nieliniowości podstawy czasu.

Dla zadośćuczynienia tym równaniom (jak wynika z równań 23a, c) prąd  $i_0$  powinien wyrażać się wzorem

$$i_0 = (E - u_0) C \omega \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T}. \tag{24}$$

Wtedy współczynnik nieliniowości wyraża się jako

$$\xi = \frac{2L}{A_0} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4}, \tag{25}$$

a amplituda podstawy czasu

$$A_0 T = (E - U_0) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4}} \cdot \omega T. \tag{26}$$

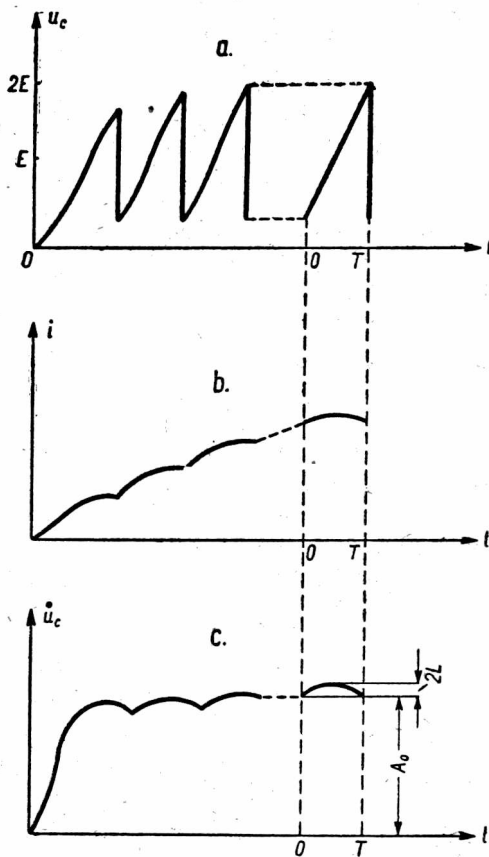
Łatwo wykazać, że dla ustalonego procesu  $i_0$  rzeczywiście wyraża się wzorem (24). Jak widać z rys. 5c, przyrost prądu  $i_0$  w ciągu jednego okresu powinien być równy zeru tj.

$$i(T) - i_0 = (E - u_0) C \omega \sin \omega T - i_0 (1 - \cos \omega T) = 0,$$

stąd znajdujemy

$$i_0 = (E - u_0) \omega C \frac{\sin \omega T}{1 - \cos \omega T},$$

co jest zgodne z (24).

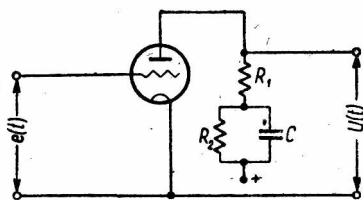


Rys. 5. Krzywe napięcia i prądu w generatorze podstawy czasu.

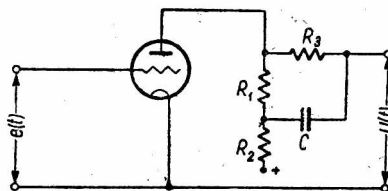
## 4. OBLICZANIE NIEKTÓRYCH WZMACNIACZY IMPULSÓW

Rozpatrzmy teraz metodę obliczania wzmacniaczy podstawy czasu z charakterystyką liniową, w których korekcję nieliniowości podstawy czasu osiąga się przez zastosowanie elementów korygujących RC.

Niektóre stosowane w praktyce układy pokazano na rys. 6 i 7. Układ przedstawiony na rys. 7 ma swój odpowiednik  $RL$ , który znalazł zasto-



Rys. 6. Schemat korekcji impulsów elektrostatycznej podstawy czasu.



Rys. 7. Inny schemat korekcji impulsów elektrostatycznej podstawy czasu.

sowanie przy korekcji impulsów prądu w generatorze elektromagnetycznej podstawy czasu (Rys. 8).

Funkcja przekazywania tych układów może być przedstawiona w postaci

$$h(t) = A(1 - e^{-at}) + Be^{-at}, \quad (27)$$

gdzie

1. w przypadku układu rys. 6:

$$A = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_i},$$

$$B = \frac{R_1}{R_1 + R_i},$$

$$\alpha = \frac{R_i + R_1 + R_2}{(R_1 + R_i) R_2 C},$$

2. w przypadku układu rys. 7:

$$A = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_i},$$

$$B = \frac{R_2(R_1 + R_i)}{R_1 R_3 + (R_2 + R_i)(R_1 + R_3)},$$

$$\alpha = \frac{R_i + R_1 + R_2}{C [R_1 R_3 + (R_i + R_2) R_1 + R_3]},$$

$R_i$  jest wewnętrzną opornością lampy.

Napięcie na wyjściu wzmacniacza  $U(t)$  przy włączeniu na jego wejście napięcia  $e(t) = 1 - e^{-2at}$  wyraża się za pomocą całki Duhamela:

$$U(t) = \int_0^t e'(\tau) h(t - \tau) d\tau.$$

Podstawiając odpowiednie wartości, otrzymujemy

$$U(t) = A + 2(B - A)e^{-at} - (2B - A)e^{-2at}.$$

Pochodna tego wyrażenia

$$\dot{U}(t) = 2a[(A - B)e^{-at} - (A - 2B)e^{-2at}] \quad (28)$$

powinna w przedziale  $[0, T]$  charakteryzować się współczynnikiem nieliniowości  $\xi$ . Będzie to wtedy, gdy wyrażenie (28) będzie proporcjonalne do wyrażenia (14), tj. gdy

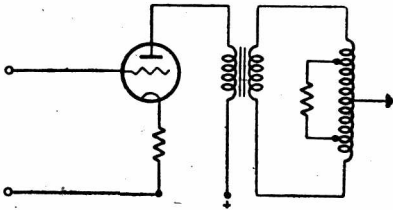
$$\frac{A - B}{A - 2B} = 1 + a, \quad a = -\frac{\ln a}{T}; \quad (29)$$

przy czym

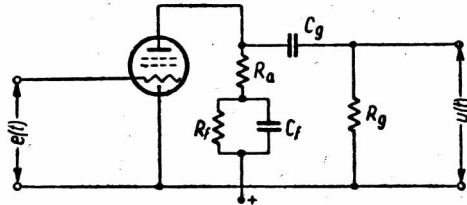
$$a = \frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 - \frac{1}{2}\xi} - \sqrt{\left(\frac{1 + \frac{3}{2}\xi}{1 - \frac{1}{2}\xi}\right)^2 - 1}.$$

Z równań tych, dla zadanego  $\xi$  i  $T$ , można określić elementy układu spełniające warunki najlepszej korekcji.

Układ przedstawiony na rys. 6 znalazł zastosowanie również przy korekcji zniekształceń impulsów prostokątnych.



Rys. 8. Schemat korekcji impulsów elektromagnetycznej podstawy czasu.



Rys. 9. Schemat wzmacniacza impulsów prostokątnych.

Na rys. 9 przedstawiono schemat takiego wzmacniacza z uwzględnieniem rozdzielających elementów  $R_g, C_g$ .

Funkcja przekazywania tego układu, przy założeniu że wewnętrzna oporność lampy jest dostatecznie duża, wyraża się następująco:

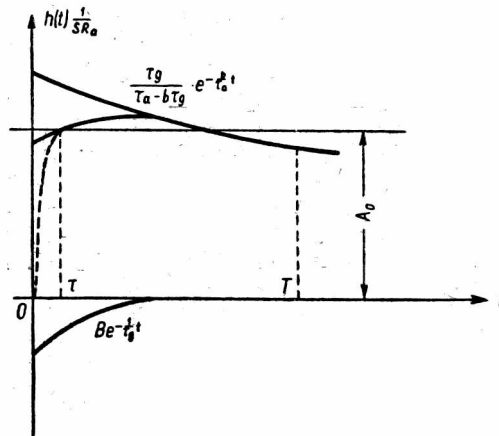
$$h(t) \frac{1}{SR_a} \approx \frac{\tau_g}{\tau_a - b\tau_g} \left[ e^{-\frac{b}{\tau_a}t} - \left(1 + b - \frac{\tau_a}{\tau_g}\right) e^{-\frac{t}{\tau_g}} \right], \quad (30)$$

gdzie

$$\tau_a = R_a C_f; \quad \tau_g = R_g C_g; \quad b = \frac{R_a}{R_f},$$

$S$  jest nachyleniem lampy.

Wykres tej funkcji podano na rys. 10. Jak wynika z tego wykresu, zagadnienie najlepszego odtworzenia kształtu impulsu sprowadza się do najlepszego przybliżenia w przedziale  $[0, T]$  stałej  $A_0$  za pomocą sumy



Rys. 10. Procesy przejściowe we wzmacniaczu impulsów prostokątnych.

(30). Znajdzie to wtedy, gdy wyrażenie (30) będzie proporcjonalne do wyrażenia (14), tj. gdy:

$$\frac{1}{1+b-\frac{\tau_a}{\tau_g}} = 1+a, \quad \frac{b}{\tau_a} = a, \quad \frac{1}{\tau_g} = 2a,$$

skąd otrzymujemy

$$b = \frac{R_a}{R_f} = \frac{a}{1+a}; \quad (31a)$$

$$\tau_a = R_a C_f = \frac{b}{a}; \quad (31b)$$

$$\tau_g = R_g C_g = \frac{1}{2a}. \quad (31c)$$

Rozpatrzmy teraz przykład następujący.

Obliczyć wzmacniacz impulsów prostokątnych o długości 2 ms, który daje zniekształcenie kształtu impulsu  $\xi = \frac{2L}{A_0} \leq 3\%$ .

Podstawiając  $\xi = 0,03$  w (15) otrzymujemy  $a = 0,71$ , a następnie ze wzorów (16), (31a), (31b), (31c) dostajemy:

$$a = 172; \quad b = 0,415; \quad \tau_a = 0,0025; \quad \tau_g = 0,0029.$$



Przyjmując  $R_a = 10 \text{ k}\Omega$ ;  $C_g = 0,005 \text{ }\mu\text{F}$  obliczamy pozostałe elementy:  $R_f \geq 24 \text{ k}\Omega$ ;  $R_g \geq 580 \text{ k}\Omega$ ;  $C_f \geq 0,24 \text{ }\mu\text{F}$ .

Jak widać, obliczanie elementów korygujących jest zupełnie proste i nie wymaga dodatkowych wykresów.

Jeśli uwzględnić jeszcze wpływ pojemności szkodliwych (na przykład pojemności anoda-katoda lampy), to do funkcji przenoszenia wchodzi jeszcze jeden człon wykładniczy (wykres tej funkcji przedstawiono linią przerywaną na rys. 10). W tym przypadku przedział aproksymacji powinien być zmniejszony o określony czas narastania czoła impulsu  $\tau$ .

##### 5. OBLICZANIE DWÓJNIKÓW FORMUJĄCYCH IMPULSY PROSTOKĄTNE

Jak wiadomo, częścią składową generatora impulsów dużej mocy jest tzw. dwójnik formujący, który odgrywa rolę akumulatora energii [8]. Po włączeniu takiego naładowanego dwójnika na obciążenie o małej oporności, nagromadzona w polu elektrycznym lub magnetycznym dwójnika energia wydziela się w stosunkowo krótkim okresie czasu w tym obciążeniu w postaci impulsu określonego kształtu.

Funkcja przekazywania układu formującego składającego się z kombinacji pojemności i indukcyjności (bez uwzględnienia obciążenia) wyraża się sumą funkcji sinusoidalnych nieparzystych z dodatnimi współczynnikami:

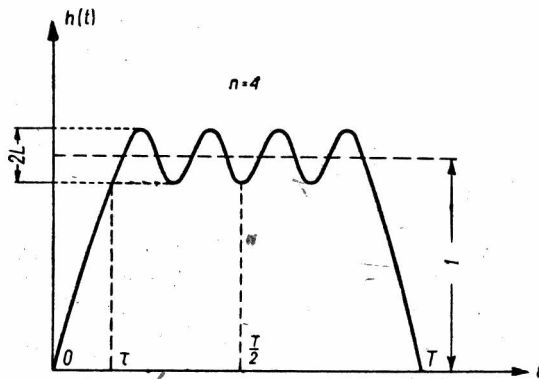
$$h(t) = \sum_{k=1}^n a_{2k-1} \sin (2k-1) t. \quad (32)$$

Kryterium minimalnego kwadratowego odchylenia funkcji przekazywania od zadanej formy impulsu sprowadza się do rozłożenia impulsu na szereg Fouriera. Jednakże w przypadku impulsów prostokątnych (i w ogóle wszystkich kształtów impulsów, których pochodna nie wypełnia warunków Lipschitza dodatniego rzędu [8]) nie można osiągnąć jednostajnej zbieżności szeregu trygonometrycznego, co przejawia się w postaci „ostrych“ odchyień na czole impulsu nawet przy nieskończonej ilości członów szeregu (tzw. zjawisko Gibbsa).

Dla otrzymania jednostajnej zbieżności L. Mejerowicz zastosował metodę S. N. Bernsteina sumowania szeregów Fouriera, która pozwala uniknąć odchyień na czole impulsów kosztem pewnego powiększenia czasu narastania czoła [6].

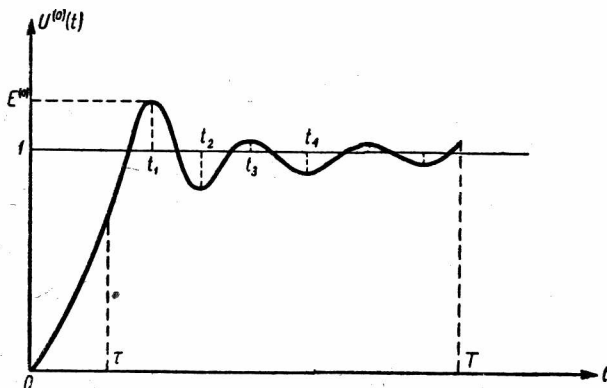
Inna metoda [2], zapewniająca równomierną i szybką zbieżność, polega na tym, że zamiast impulsu prostokątnego rozkłada się impuls z łagodnie wznoszącym się czołem wyrażonym wielomianem algebraicznym, odcinkiem hiperbolicznego tangensa itp. Jednakże nawet przy jednostajnej zbieżności szeregu Fouriera otrzymywane przybliżenie jest znacznie gorsze

niż przybliżenie najlepsze (Czebyszewa). Dlatego dużego znaczenia nabiera zagadnienie najlepszej aproksymacji impulsu prostokątnego. Zadanie takiego typu może być rozwiązane za pomocą metody wyrównywania maksimów.



Rys. 11. Najlepsze przybliżenie impulsu prostokątnego.

Ponieważ rozpatrywany impuls o długości  $T$  i wysokości  $h = 1$ , jest symetryczny względem  $\frac{T}{2}$ , będziemy rozpatrywali najlepsze przybliżenie 1 na odcinku  $\left(\tau, \frac{T}{2}\right)$  za pomocą sumy (32). Przyjmijmy, że krzywa  $U^{(0)}(t)$  (przedstawiona na rys. 12) mająca w  $\left(\tau, \frac{T}{2}\right)$  liczbę  $n+1$  punktów maksymalnego odchylenia od 1 jest dana. Krzywą tę można otrzymać rozkładając na szereg Fouriera impuls prostokątny lub trapezowy.



Rys. 12. Krzywa pierwszego przybliżenia impulsu prostokątnego.

malnego odchylenia od 1 jest dana. Krzywą tę można otrzymać rozkładając na szereg Fouriera impuls prostokątny lub trapezowy.

Proces wyrównywania maksimów wymaga rozwiązania układu równań następujących:

$$a_1^{(k)} \sin \tau + a_3^{(k)} 3\tau + \dots + a_{2n-1}^{(k)} \sin (2n-1) \tau - 1 = -L^{(k)},$$

$$a_1^{(k)} \sin t_1^{(k)} + a_3^{(k)} \sin 3t_1^{(k)} + \dots + a_{2n-1}^{(k)} \sin (2n-1) t_1^{(k)} - 1 = L^{(k)},$$

$$a_1^{(k)} \sin \frac{T}{2} + a_3^{(k)} \sin 3 \frac{T}{2} + \dots + a_{2n-1}^{(k)} \sin (2n-1) \frac{T}{2} - 1 = (-1)^n L^{(k)}.$$

Rugując  $L^{(k)}$  dostajemy układ  $n$  równań liniowych z  $n$  niewiadomymi  $(a_1^{(k)} \dots a_{2n-1}^{(k)})$

$$\left. \begin{aligned} a_1^{(k)} (\sin t_1^{(k)} + \sin \tau) + a_3^{(k)} (\sin 3t_1^{(k)} + \sin 3\tau) + \dots \\ \dots + a_{2n-1}^{(k)} [\sin (2n-1) t_1^{(k)} + \sin (2n-1) \tau] = 2, \\ a_1^{(k)} (\sin t_2^{(k)} - \sin \tau) + a_3^{(k)} (\sin 3t_2^{(k)} - \sin 3\tau) + \dots \\ \dots + a_{2n-1}^{(k)} [\sin (2n-1) t_2^{(k)} - \sin (2n-1) \tau] = 0, \\ \dots \\ a_1^{(k)} \left[ \sin \frac{T}{2} (-1)^n \sin \tau \right] + \dots + a_{2n-1}^{(k)} \left[ \sin (2n-1) \frac{T}{2} - \right. \\ \left. - (-1)^n \sin (2n-1) \tau \right] = 1 - (-1)^n, \end{aligned} \right\} (33)$$

który rozwiązuje się w sposób prosty.

Po znalezieniu  $a_1^{(1)} \dots a_{2n-1}^{(1)}$  rysujemy  $U^{(2)}(t)$  i znajdujemy nowe wartości  $t_k^{(2)}$  itd. Dla ułatwienia pracy można posługiwać się syntezatorem.

Rozpatrzmy przykład następujący.

Czas narastania czoła impulsu  $\tau = 15^\circ$ . Znaleźć sumę najlepszego przybliżenia impulsu prostokątnego złożoną z trzech wyrazów

$$U(t) = a_1 \sin t + a_3 \sin 3t + a_5 \sin 5t.$$

Jako funkcję pierwszego przybliżenia  $U^{(0)}(t)$  weźmiemy szereg Fouriera. Wykres  $U^{(0)}(t)$  przedstawiono na rys. 13. Jak wynika z tego wykresu,

$t_1 = 30^\circ, t_2 = 60^\circ, \frac{T}{2} = 90^\circ$ ; zatem równania (33) przedstawiają się następująco:

$$a_1^{(1)}(\sin 30^\circ + \sin 15^\circ) + a_3^{(1)}(\sin 90^\circ + \sin 45^\circ) + a_5^{(1)}(\sin 150^\circ + \sin 75^\circ) = 2,$$

$$a_1^{(1)}(\sin 60^\circ - \sin 15^\circ) + a_3^{(1)}(\sin 180^\circ - \sin 45^\circ) + a_5^{(1)}(\sin 300^\circ - \sin 75^\circ) = 0,$$

$$a_1^{(1)}(\sin 90^\circ + \sin 15^\circ) + a_3^{(1)}(\sin 270^\circ + \sin 45^\circ) + a_5^{(1)}(\sin 450^\circ + \sin 75^\circ) = 2,$$

czyli 
$$0,759a_1^{(1)} + 1,707a_3^{(1)} + 1,466a_5^{(1)} = 2,$$

$$0,607a_1^{(1)} - 0,707a_3^{(1)} - 1,772a_5^{(1)} = 0,$$

$$1,259a_1^{(1)} - 0,293a_3^{(1)} + 1,966a_5^{(1)} = 2.$$

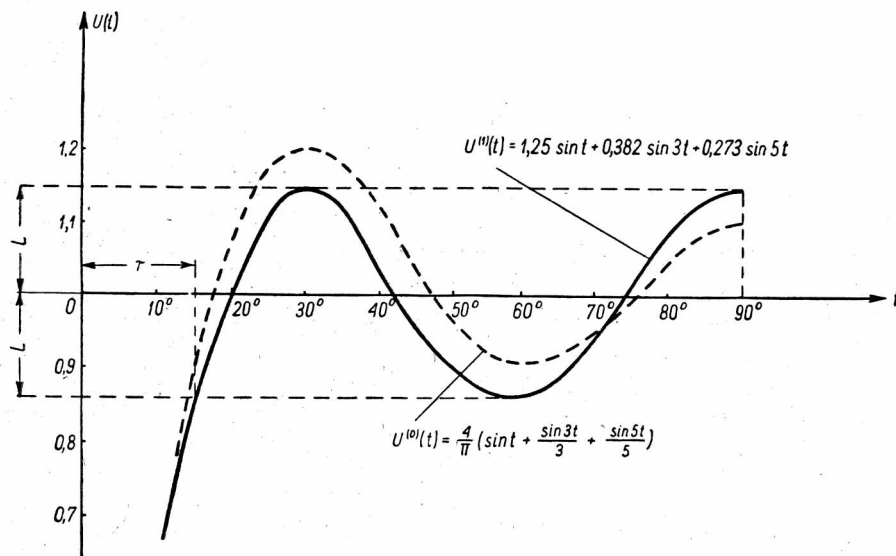
Stąd znajdujemy

$$a_1^{(1)} = 1,25; \quad a_3^{(1)} = 0,382; \quad a_5^{(1)} = 0,273.$$

Zatem

$$U^{(1)}(t) = 1,25 \sin t + 0,382 \sin 3t + 0,273 \sin 5t.$$

Wykres  $U^{(1)}(t)$  przedstawiono również na rys. 13. Jak widać z tego rysunku, już pierwsze wyrównanie maksimów daje prawie najlepsze przybliżenie impulsu. Przedłużając proces wyrównywania można otrzymać



Rys. 13. Przybliżenie najlepsze i kwadratowe wierzchołka impulsu prostokątnego.

jeszcze lepsze przybliżenie. Otrzymana krzywa pokazuje, że amplituda oscylacji w zadanym przedziale  $[\tau, T - \tau]$  jest wielkością stałą.

Zagadnienie obliczania elementów dwójników formujących na podstawie zadanej funkcji przekazywania jest obszernie opisane w literaturze [6] i dlatego nie jest rozpatrywane w niniejszej pracy.

## 6. ZAKOŃCZENIE

Rozpatrzone przykłady wskazują na możliwość i celowość zastosowania metod najlepszego przybliżenia funkcji do obliczania liniowych układów impulsowych. Szczególnie pożyteczne okazują się te metody w przypadku obliczania elementów korygujących w układach, gdzie stosuje się impulsy o kształtach płaskich i liniowych, gdyż pozwalają one obliczyć dany układ na podstawie zadanego współczynnika zniekształceń (np. współczynnika nieliniowości podstawy czasu lub współczynnika oscylacji na wierzchołku impulsu). Oprócz tego w wielu zadaniach możliwe jest bardziej ogólne ujęcie zagadnienia obliczania układów korygujących i formujących, a mianowicie wychodząc z warunków najlepszego przybliżenia kształtu impulsów za pomocą wielomianów wykładniczych, wyrażających napięcie na wyjściu układu, można znaleźć schemat tego układu i wartości jego elementów. Zagadnienie to może być rozwiązane drogą syntezy układów impulsowych na podstawie danej funkcji napięcia wyjściowego.

W rozpatrzonych prostych przykładach, które sprowadzały się do aproksymacji zadanych charakterystyk za pomocą wielomianów wykładniczych lub trygonometrycznych, ograniczaliśmy się do układów zawierających dwa typy elementów ( $LC$  i  $RC$ ). Jasne, że metoda powyższa może być zastosowana i do układów  $RL$ , ponieważ procesy przejściowe w układach  $RL$  wyrażają się też wielomianami wykładniczymi.

## WYKAZ LITERATURY

1. Achiezer N. — Lekcii po teorii aproksymacii — GILT, 1949.
2. Ajzinow M. M. — O sintezie cepi po zadannoj formie signala — Radiotekhnika nr 2, 1951.
3. Bernstein S. N. — Ekstremalnyje swojstwa polinomow — ONTI, 1937.
4. Charkiewicz A. A. — O primienienii kriterija kwadraticznoj pogresznosti k ocenke liniejnych iskażenij — ŽTF. 7, 1937.
5. Kulikowski R. — Rasczot formirujuszczich cepiej — Radiotekhnika nr 4, 1952.
6. Łukin F. W. — Pieriechodnyje processy w liniejnych elementach radiotekhniceskich ustrojstw — Moskwa 1950.
7. Markow A. A. — Izbrannyje trudy — OGIZ, 1948.
8. Natanson I. P. — Konstruktiwnaja teorija funkcij — GIGL, 1949.
9. Nowodworski B. P., Pinsker N. Sz. — Proces urawniwania maksimumow — Uspiechi Mat. Nauk nr 6, 1951.
10. Remez E. — Pro metodi najkraszczogo w rozumini Czebiszowa nablizenogo predstavlenja funkcij — Akad. Nauk USRR, Kijów 1935.

Р. КУЛИКОВСКИ

## РАСЧЁТ ЛИНЕЙНЫХ ИМПУЛЬСНЫХ УСТРОЙСТВ

Резюме

На практике большой интерес представляет решение следующих задач:

Задача 1. Расчитать элементы системы, представленной на рис. 1, так, чтобы искажения формы импульса в системе получались минимальными, т. е. чтобы разность  $U(t) - ke(t)^1$  в заданном промежутке  $[t_1, t_2]$  была возможно меньше. Задачи такого типа встречаются при расчёте систем передачи импульсов, усилителей видеосигналов и т. д.

Задача 2. Расчитать элементы системы (рис. 1) так чтобы на выходе системы получить напряжение заданной формы  $U_0(t)$ . В этом случае имеем следующее условие: функция  $U(t) - U_0(t)$  должна в заданном промежутке  $[t_1, t_2]$  минимально уклоняться от нуля.

Задачи такого типа встречаются при расчёте схем формирования импульсов, коррекции искажений импульсов и т. д.

Напряжение на выходе линейной системы представляется экспоненциальным многочленом, т. к. входная э. д. с. может быть выражена при помощи экспоненциального многочлена. Затем отмеченные уже задачи требуют определения коэффициентов многочлена:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-a_k t}, \quad (6)$$

который в промежутке  $[t_1, t_2]$  минимально уклоняется от нуля. В настоящей работе в качестве критерия оценки искажений т. е. отклонения от нуля многочлена (6) принимается минимум значений абсолютного максимума:

$$L = \max_{[t_1, t_2]} |U(t) - U_0(t)|. \quad (8)$$

В частном случае, когда  $a_k = ka$ , ( $k=1, 2, \dots, n$ ) получаем, так называемый, многочлен системы Чебышева. Коэффициенты этого многочлена можно найти на основе следующей теоремы.

Из всех многочленов (6), где  $a_k = ka$ , имеющих тот же коэффициент  $A_1$  при  $e^{-lat}$  что и многочлен

$$LT_n \left( \frac{2e^{-at} - e^{-at_2} - e^{-at_1}}{e^{-at_1} - e^{-at_2}} \right) = L \cos n \arccos \left( \frac{2e^{-at} - e^{-at_2} - e^{-at_1}}{e^{-at_1} - e^{-at_2}} \right), \quad (10)$$

последний наименее уклоняется от нуля на отрезке  $[t_1, t_2]$  положительной полуоси, причём это уклонение равно  $\pm L$ .

В конкретном случае:  $n=2$ ;  $t_1=0$ ;  $t_2=T$ ; т. е., в случае приближения импульса высотой в  $A_0$  при помощи суммы  $P_2(t)$  на отрезке  $[0, T]$ , получаем

$$P_2(t) = A_2 [(1+a)e^{-at} - e^{-2at}], \quad (14)$$

<sup>1</sup> Где  $k$  — постоянный фактор, определяющий затухание системы.

<sup>2</sup> Так называемое наилучшее или Чебышевское приближение функции  $P_n(t)$  к нулю.

где

$$a = \frac{1 + \frac{3}{2} \xi}{1 - \frac{\xi}{2}} \sqrt{\left( \frac{1 + \frac{3}{2} \xi}{1 - \frac{\xi}{2}} \right)^2 - 1}, \quad \alpha = -\frac{\ln a}{T}, \tag{15}$$

$\xi$  — коэффициент искажений =  $\frac{2L}{A_0}$ ,  
 $A_0$  — постоянная.

В случае, когда строгое аналитическое решение задачи о наилучшем приближении оказывается невозможным, целесообразно пользоваться приближенными методами. Например, так называемым методом уравнивания максимумов, который позволяет получить совокупность многочленов равномерно сходящихся к многочлену наименьшего отклонения от нуля.

Для пояснения метода расчёта рассматривается ряд конкретных примеров. В качестве первого примера рассматривается генератор развертки, работа которого состоит в периодическом заряде ёмкости  $l$  через индуктивность.

Решая уравнения системы, определяем производную напряжения на конденсаторе

$$\dot{U}_c = (E - U_0) \omega \sin \omega t + \frac{i_0}{C} \cos \omega t$$

где  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ .

Требуя, чтобы выражение это минимально уклонялось от постоянной величины  $A_0$ , получаем следующие уравнения

$$\begin{aligned} \dot{U}_c(0) &= A_0 - L, \\ \dot{U}_c\left(\frac{T}{2}\right) &= A_0 + L, \\ \dot{U}_c(T) &= A_0 - L, \end{aligned}$$

на основе которых определяется коэффициент нелинейности развертки

$$\xi = \frac{2L}{A_0} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4} \tag{25}$$

и амплитуда развертки

$$A_0 T = (E - U_0) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4}} \omega T. \tag{26}$$

В качестве следующего примера рассматривается метод расчёта корректирующих схем для усилителей импульсов развертки (см. рис. 6, 7) и прямоугольных импульсов (рис. 9).

В случае импульсов развертки оказывается, что производная выходного напряжения выражается экспоненциальным многочленом:

$$\dot{U}(t) = 2a[(A - B)e^{-\alpha t} - (A - 2B)e^{-2\alpha t}]. \tag{28}$$

Приравнивая коэффициенты этого многочлена к коэффициентам многочлена (14), получаем следующие уравнения:

$$\frac{A-B}{A-2B} = 1+a, \quad a = -\frac{\ln a}{T}; \quad (29)$$

где  $A$ ,  $B$  и  $a$  — определяются значениями элементов схемы (рис. 6, 7). Тем же методом были найдены формулы для расчёта усилителей прямоугольных импульсов

$$\frac{R_a}{R_f} = \frac{1}{1+a}; \quad R_a C_f = \frac{a}{(1+a)a}; \quad R_g C_g = \frac{1}{2a}; \quad (31)$$

где обозначения элементов указываются на рис. 9.

В качестве последнего примера рассмотрим расчёт формирующих двухполюсников прямоугольных импульсов.

Применение метода наилучшего приближения разрешает избежать резких выбросов на фронтах импульсов, которые получаются в случае расчёта этих систем методом разложения в ряд Фурье. Рассматриваемую задачу решается методом уравнивания максимумов.

Оптимальные значения коэффициентов тригонометрического ряда получается путем решения простой системы линейных уравнений (33).

Рассматривается простой численный пример.

R. KULIKOWSKI

## THE CALCULATION OF LINEAR-PULSE-CIRCUITS

### Summary

The majority of problems concerning the calculation of pulse circuits may be reduced to the following two basic cases:

**Example 1:** to calculate the elements of the linear-circuits, shown in Fig. 1, with the minimum distortions of the pulse shape in this circuit. In other words, the expression  $U(t) - ke(t)$ , (where  $k$  is within the damping constant of the circuit), should in the given limits  $[t_1, t_2]$  deviate as little as possible from zero. Examples of this type are met during the calculation of pulse-transmission-circuits, video-amplifiers etc.

**Example 2:** to calculate the elements of the circuit (Fig. 1) so as to get the voltage of the specified shape  $U_o(t)$  at the output. In this case we have the following condition: the expression  $U(t) - U_o(t)$  should deviate from zero as little as possible within the limits  $[t_1, t_2]$ .

Examples of this kind are encountered when calculating the pulse-forming-circuits, when correcting the pulse distortions etc.

As the input E. M. F. may be expressed by an exponential polynomial, the voltage at the output of the linear-circuit is also expressed by an exponential polynomial. Consequently the quoted examples require finding the polynomial coefficients of the type:

$$P_n(t) = \sum_{k=1}^n A_k e^{-a_k t} \quad (6)$$

which within the limits  $[t_1, t_2]$  should be as close to zero as possible.



In this work we will assume the minimum value of the absolute maximum as the criterion for estimating the distortions (i. e. the deviation from zero for the polynomial (6):

$$L = \max_{[t_1, t_2]} |U(t) - U_0(t)| \quad (8)$$

In the special case, when  $\alpha_k = k\alpha$ , ( $k=1,2,\dots,n$ ), we get the so called polynomial of Tchebyshev's system. The coefficients of this polynomial may be determined on the base of the following theorem.

Of all the exponential polynomials (6) where  $\alpha_k = k\alpha$ , which have at  $e^{-\alpha t}$  the same coefficient as

$$LT_n \left( \frac{2e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2}} \right) = L \cos n \arccos \left( \frac{2e^{-\alpha t} - e^{-\alpha t_2} - e^{-\alpha t_1}}{e^{-\alpha t_1} - e^{-\alpha t_2}} \right), \quad (10)$$

the last one deviates least from zero within  $[t_1, t_2]$  on the positive coordinate  $t$  and this deviation is equal to  $\pm L$ .

In the given case  $n=2$ ,  $t_1=0$ ,  $t_2=T$ , i. e. in the case when the pulse of the height  $A_0$  is approximated with the help of the sum

$$P_2(t) = -(A_1 e^{-\alpha t} + A_2 e^{-2\alpha t}) \text{ on the sector } [0, T]$$

we get

$$P_2(t) = A_2 [(1 + a) e^{-\alpha t} - e^{-2\alpha t}], \quad (14)$$

where

$$a = \frac{1 + \frac{3}{2} \xi}{1 - \frac{\xi}{2}} - \sqrt{\left( \frac{1 + \frac{3}{2} \xi}{1 - \frac{\xi}{2}} \right)^2 - 1}, \quad \alpha = -\frac{\ln a}{T}, \quad (15)$$

$$\xi \text{ — distortion coefficient} = \frac{2L}{A_0},$$

$A_2$  constant value determined from the conditions of the example.

In the case when an exact analytical solution of the problem is impossible, an approximate method should be used, e. g. the method of *equalizing of the maxima*, which gives a series of polynomials uniformly convergent to the function of the best approximation.

In order to explain the calculation method a series of concrete examples are considered. As the first example there is a time-base generator the action of which depends on a periodic capacity loading by an inductance.

Solving the equation of the circuit we determine the voltage derivative in the condenser:

$$\dot{U}_c = (E - U_0) \omega \sin \omega t + \frac{i_0}{C} \cos \omega t,$$

where  $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

<sup>1</sup> The co-called best or Tchebyshev's approximation of the function  $P_2(t)$  to zero.

Requiring the closest approximation of this expression to the constant value  $A_0$  we get the following three equations:

$$\begin{aligned}\dot{U}_c(0) &= A_0 - L, \\ \dot{U}_c\left(\frac{T}{2}\right) &= A_0 + L, \\ \dot{U}_c(T) &= A_0 - L,\end{aligned}$$

whence is determined the unlinearity of the time-base

$$\xi = \frac{2L}{A_0} = 2 \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4} \quad (25)$$

and the time-base-amplitude

$$A_0 T = (E - U_0) \frac{\operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\omega T}{4}} - \omega T. \quad (26)$$

The next example is the method of calculating the correction circuits for the time-base-pulse (Fig. 6, 7) and rectangular pulse amplifiers (Fig. 9). In the case of the time-base-pulses it appears that the voltage derivative at the circuit output is expressed by the exponential polynomial:

$$\dot{U}(t) = 2a[(A - B)e^{-at} - (A - 2B)e^{-2at}]. \quad (28)$$

Equating the coefficients of this polynomial to the coefficients of the polynomial (6), we get the following relations:

$$\frac{A - B}{A - 2B} = 1 + a, \quad a = -\frac{\ln a}{T}, \quad (29)$$

where  $A$ ,  $B$  and  $a$  are expressed by the values of the circuit-elements (Fig. 6, 7).

In a similar way simple formulae for circuit calculations of amplifier-corrections of rectangular pulses have been derived:

$$\frac{R_a}{R_f} = \frac{1}{1+a}, \quad R_a C_f = \frac{a}{(1+a)a}, \quad R_g C_g = \frac{1}{2a}, \quad (31)$$

where  $R_a$ ,  $R_f$ ,  $C_f$ ,  $R_g C_g$  are the values of elements according to the definitions in the figure 9.

A simple numerical example of correction-circuit calculations is given.

Finally there is an example of calculating two-terminal circuits forming rectangular pulses.

The application of the method of the best approximation allows to avoid sharp changes on the sides of the pulse-waves, obtained when calculating these circuits by means of Fourier's series. The considered problem is solved by the maxima-equalizing method.

The best of the coefficient values of a trigonometric series are obtained from an ordinary system of linear equations (33).

A simple example is considered.

611.12:621.3.083.94:616-073.

J. KELLER i J. EKIEL

## Nowa metoda odwzorowania przestrzennego prądów czynnościowych serca

Rękopis dostarczono 7. 9. 1953

**Streszczenie.** Omówiono charakter zjawisk elektrycznych zachodzących w sercu oraz wyprowadzono przybliżony wzór wiążący pole potencjałów w pacjencie z *wektorem elektrycznym*, który wyraża w uproszczeniu działalność elektryczną mięśnia sercowego. Opisano pokrótce współczesne metody kliniczne rejestracji zjawisk elektrycznych w sercu (kardiografia liniowa) oraz metody stosowane w pracowniach badawczych (wektokardiografia rzutów i modeli). Na podstawie analizy braków, które wykazują opisane metody, omówiono nową metodę bezpośredniej stereoskopowej obserwacji i rejestracji przestrzennego wektokardiogramu. Podano fotografie, schemat blokowy urządzenia, schematy i opisy działania głównych fragmentów aparatury do wektokardiografii stereoskopowej, zbudowanej w Zakładzie Budowy Aparatów Elektromedycznych Politechniki Warszawskiej. Opisano szereg nowych rozwiązań technicznych oraz trudności, które należało przezwyciężyć dla uzyskania wiernego i czytelnego obrazu przestrzennej pętli wektokardiograficznej. Omówiono krótko korzyści diagnostyczne, jakie daje opracowana metoda przy użyciu nowej aparatury elektrokardiograficznej.

### C z ę ś ć I

#### Podstawy biologiczne i techniczne wektokardiografii

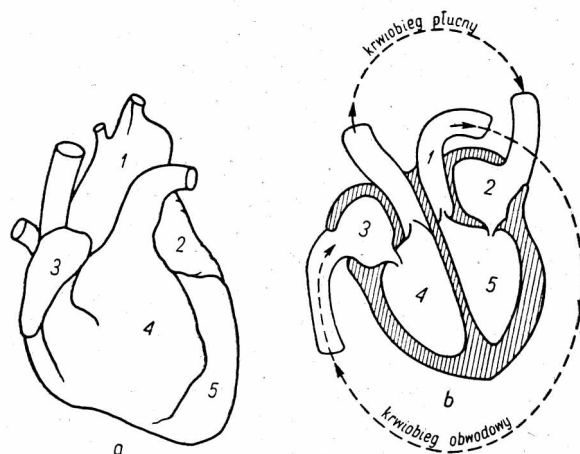
##### 1. PRĄDY CZYNNOŚCIOWE SERCA<sup>1</sup>

W skład narządu krążenia wchodzi organ centralny — serce — oraz układ przewodów: tętnice, żyły, naczynia włosowate itd. Organ centralny pełni funkcję podwójnej pompy tłoczącej. Zbudowany jest z mięśnia o postaci worka, który zawiera dwie niezależne części: prawą i lewą, odgródzone od siebie ścianką mięśniową (rys. 1). Jednokierunkowe wentyle (zastawki) oddzielają od siebie przedsionek, komorę i tętnice obu części serca. Ściany serca kurczą się rytmicznie, przez co wymuszają

<sup>1</sup> Patrz literatura 1, 4, 27, 24.

przepływ krwi: prawa część serca w obiegu płucnym, lewa — w obiegu dużym, obwodowym.

Skurcze mięśnia sercowego wywołane są przez bodźce autonomiczne<sup>2</sup>, powstające i przewodzone w specjalnej tkance, zbliżonej budową do tkanki mięsnej. Z drugiej strony, na częstość i siłę skurczu wpływają obie przeciwstawne składowe wegetatywnego układu nerwowego organizmu, a mianowicie układ sympatyczny i parasympatyczny. Komórki,



Rys. 1. Szkic serca:

a) widok z przodu, b) przekrój czołowy.

1) aorta, 2) lewy przedsionek, 3) prawy przedsionek, 4) prawa komora, 5) lewa komora.

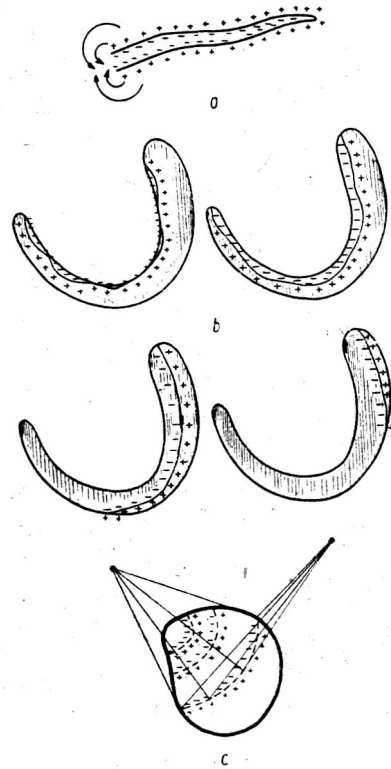
z których składa się mięsień sercowy, kurczą się w ustalonej kolejności, w wyniku czego powstaje *fala skurczu*, która przebiega w postaci warstwy w poprzek mięśnia sercowego. Następujący po pobudzeniu okres refrakcji (niewrażliwości na bodźce) jest dla wszystkich komórek sercowych synchroniczny. Ogranicza to częstotliwość skurczów mięśnia sercowego i zabezpiecza przed przykurczem stałym.

Praca mięśnia sercowego, tak jak wszystkie przemiany metaboliczne żywych komórek, związana jest ze zjawiskami elektrycznymi. Z uwagi na wielkość mięśnia sercowego, uporządkowanie i synchroniczność przebiegów zachodzących w poszczególnych jego komórkach, jak i bogate unerwienie serca zjawiska elektryczne towarzyszące pracy serca są szczególnie silne i pozwalają wyciągnąć daleko idące wnioski o jego stanie i pośrednio o stanie układu naczyń krwionośnych.

<sup>2</sup> Wypreparowane serce w odpowiednich warunkach kurczy się rytmicznie po oddzieleniu od centralnego układu nerwowego.

Głównym źródłem zjawisk elektrycznych serca jest gruby mięsień otaczający obie komory [7]. Kształt jego w przekroju czołowym (równoległym do klatki piersiowej) może być przedstawiony w uproszczeniu jako pochylona litera U o grubszym ramieniu odpowiadającym lewej komorze. *Działalność elektryczna komórek tego mięśnia może być przedstawiona w postaci warstwy dipolowej, przebiegającej przez mięsień tak, jak pokazano na rys. 2.*

Komórki mięśniowe mają kształt wydłużony ( $\sigma = 9 - 20 \mu$ ), przy tym łączą się wzajemnie w pewnego rodzaju kontynuuum tworzące mięsień sercowy. W stanie spoczynku między wnętrzem komórki a stroną zewnętrzną jej otoczki istnieje różnica potencjałów rzędu kilkudziesięciu miliwoltów — komórka i mięsień są wtedy w stanie *polaryzacji*. W wyniku małej grubości otoczki (rzędu  $10^{-6}$  cm) pole elektryczne w otoczce jest stosunkowo silne (rzędu 10 kV/cm). Energia elektryczna zgromadzona w tym polu pochodzi z energii ruchów termicznych. Selektynie przewoźca otoczka przepuszcza jony dodatnie  $\text{NaOH}^+$  pędzone ruchami cieplnymi na zewnątrz otoczki. Jony te zatrzymują się na zewnętrznej stronie otoczki, ponieważ przyciągane są przez ujemny ładunek pozostały wewnątrz komórki. W spoczynku komórka nie wytwarza pola elektrycznego na zewnątrz, ponieważ działania ładunków kompensują się wzajemnie. Pod wpływem otrzymanego bodźca otoczka komórki mięśniowej zaczyna w miejscu pobudzenia przewodzić, następuje miejscowa *depolaryzacja* otoczki, tworzy się warstwa dipolowa, która przesuwa się w kierunku podłużnym komórki z szybkością rzędu 1 metra na sekundę. Fala depolaryzacji i następująca poniżej *fala repolaryzacji* poprzedza mechaniczny skurcz komórki mięśniowej. W mięśniu sercowym stan pobudzenia przekazywany jest z komórki do komórki w kierunku poprzecznym mięśnia. W rezultacie pobudzone komórki tworzą wypadkową warstwę dipolową



Rys. 2. Przebieg pobudzenia: a) żywej komórki mięśniowej, b) w przekroju poprzecznym mięśnia sercowego, c) po powierzchni serca.

pobudzenia, która przebiega w kierunku grubościowym mięśnia sercowego powodując jego skurcz.

Przebieg zjawiska pobudzenia w przekroju poprzecznym (czołowym) mięśnia przedstawiono na rys. 2b. Szybkość przesuwania się zaburzenia jest w przybliżeniu jednakowa dla wszystkich kierunków poprzecznych mięśnia i dlatego warstwa dipolowa trwa dłużej w ścianie grubszej, należącej do lewej komory serca. Na rys. 2c przedstawiono szkic perspektywiczny z zaznaczonymi kolejnymi położeniami krańca zaburzenia. Serce jako pewnego rodzaju generator dipolowy powoduje w tułowiu rozptył prądów, uzależniony od ukształtowania i rozmieszczenia poszczególnych organów. Wypadkowy rozkład pola elektrycznego tułowia dla szczytowego momentu pracy serca przedstawiono orientacyjnie na rys. 3b.

## 2. POLE ELEKTRYCZNE W PACJENCIE

Pole elektryczne w pacjencie jest wynikiem działania bardzo wielu dipoli utworzonych przez pobudzone komórki mięśnia sercowego. W stanie spoczynku komórka nie wytwarza w ośrodku ani pola prądów, ani pola elektrycznego. Po pobudzeniu komórki powstaje warstwa dipolowa (rys. 2a). Pole elektryczne tej warstwy zależy od wielkości momentu dipola, od kąta bryłowego, pod którym z danego punktu pola widać brzeg otworu przewodzącego komórki, oraz od rozmieszczenia stałych elektrycznych ośrodków. Pole elektryczne w przestrzeni, pochodzące od jednej komórki wynika z pierwszego prawa Maxwella jako

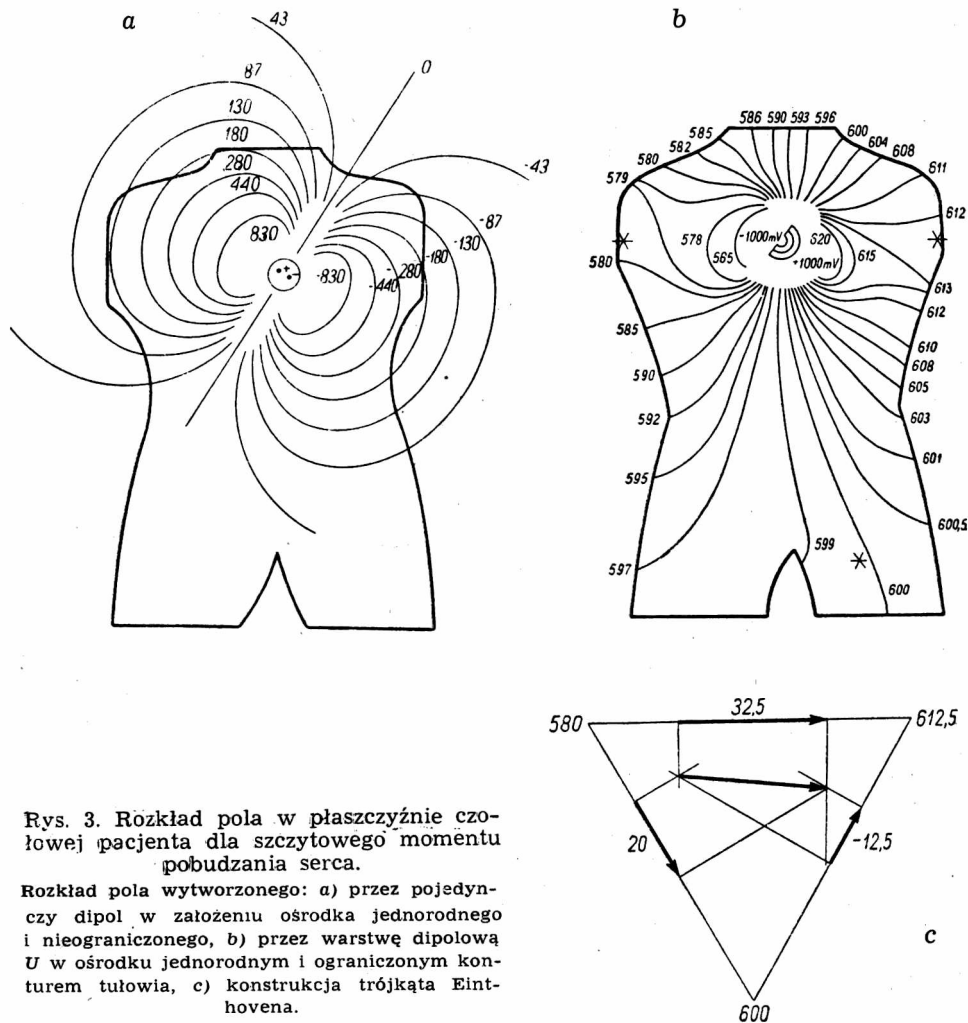
$$\operatorname{div} \left( \varepsilon \frac{\partial \bar{\mathbf{E}}}{\partial t} + \sigma \bar{\mathbf{E}} \right) = 0,$$

przy czym dane jest początkowe rozmieszczenie ładunków na powierzchni dipola (tj. zaraz po pobudzeniu)

$$\operatorname{div} \varepsilon \bar{\mathbf{E}} = \rho.$$

Prąd przesunięcia płynie głównie w ścianie otoczki, gdzie natężenie pola jest duże, a jego przedłużeniem w ośrodku są prądy przewodzenia. Po-  
przez otoczkę komórki płynie prąd przewodzenia jedynie na odcinku pobudzenia, tj. przy „otworze“, który przesuwa się wzdłuż komórki ze względnie małą szybkością i powoduje skracanie się dipola (depolaryzacje). Ponieważ pole wytworzone przez dipol nie zależy od jego długości, napięcie zaś na powierzchni dipolowej ulega tylko nieznacznemu obniżeniu w czasie trwania dipola, można przyjąć, że komórka w czasie swej aktywności wytwarza w przybliżeniu pole stacjonarne. Wielkość wypadkowa pola elektrycznego zależy od ilości i od rozmieszczenia komórek jednocześnie pobudzonych w danej fazie cyklu pracy serca.

Częstotliwość repetycji przebiegów elektrycznych w sercu wynosi około 0,9 c/s, najwyższa harmoniczna krzywej prądów serca, która przedstawia jeszcze wartość dla diagnozy, wynosi około 250 c/s. Ze względu na małą częstotliwość nawet najwyższych harmonicznych wpływ zmiennego pola magnetycznego, towarzyszącego prądom płynącym w pacjencie (innymi słowy — wpływ indukcyjności pacjenta), jest do pominięcia.



Rys. 3. Rozkład pola w płaszczyźnie czołowej pacjenta dla szczytowego momentu pobudzenia serca.

Rozkład pola wytworzonego: a) przez pojedynczy dipol w założeniu ośrodka jednorodnego i nieograniczonego, b) przez warstwę dipolową  $U$  w ośrodku jednorodnym i ograniczonym konturem tułowia, c) konstrukcja trójkąta Einthovena.

Również prądy przesunięcia są bez znaczenia, mimo dużej stałej dielektrycznej ośrodka ( $\epsilon=80$ ). W rezultacie, pole elektryczne w pacjencie jest typu stacjonarnego<sup>3</sup>, a rozpyły prądów jest uwarunkowany rozkładem

<sup>3</sup> Tzn. typu pola prądów stałych.

przewodności ośrodka i kształtem wypadkowej powierzchni dipolowej w sercu.

Właściwości pola stacjonarnego wynikają z ogólnych Maxwellowskich równań pola elektromagnetycznego przy zaniedbaniu wszystkich pochodnych względem czasu. Pole w tym przypadku będzie scharakteryzowane przez bezwirowość

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0,$$

a rozptyw prądów (wyłącznie prądów przewodzenia) będzie bezźródłowy

$$\operatorname{div} \sigma \bar{E} = 0.$$

W obszarach nieciągłości  $\epsilon$  i  $\sigma$  będzie istniał ładunek

$$\rho = \operatorname{div} \epsilon \bar{E} = \epsilon \operatorname{div} \bar{E} + \bar{E} \operatorname{grad} \epsilon. \quad ^4$$

Podstawiając z zależności

$$\operatorname{div} \sigma \bar{E} = \sigma \operatorname{div} \bar{E} + \bar{E} \operatorname{grad} \sigma = 0$$

wielkość

$$\operatorname{div} \bar{E} = -\frac{1}{\sigma} \bar{E} \operatorname{grad} \sigma$$

otrzymamy rozmieszczenie ładunku zgodnie z wyrażeniem

$$\rho = \epsilon \bar{E} \left( \frac{\operatorname{grad} \epsilon}{\epsilon} - \frac{\operatorname{grad} \sigma}{\sigma} \right).$$

Jak widać z równań pola stacjonarnego

$$\operatorname{rot} \bar{E} = 0 \quad \text{i} \quad \operatorname{div} \sigma \bar{E} = 0,$$

rozkład pola elektrycznego będzie analogiczny do rozkładu pola elektrostatycznego, z tym, że funkcję stałej dielektrycznej spełnia przewodność ośrodka, a funkcję źródeł pola elektrostatycznego, tj. funkcję ładunków ( $\operatorname{div} \epsilon \bar{E} = \rho$ ), spełnia dywergencja siły przyłożonej  $\bar{E}_p$ , która utrzymuje różnicę potencjałów obu stron wypadkowej warstwy dipolowej mimo wpływu ładunków<sup>5</sup>. Równanie słuszne dla wszystkich punktów pola (tj. punktów warstwy dipolowej i wszystkich innych) przedstawia się następująco:

$$\operatorname{div} \sigma (\bar{E} - \bar{E}_p) = 0.$$

<sup>4</sup> Zastosowano tu praktyczny układ jednostek.

<sup>5</sup> Siła przyłożona  $\bar{E}_p$  wyraża fenomenologicznie zjawisko zastępowania w mięśniu sercowym częściowo wyładowanych składowych dipoli przez coraz to nowe dipole o pełnym ładunku. W składowych dipolach przez otoczkę płynnie faktycznie prąd przesunięcia, a nie prąd przewodzenia, tak jakby to wynikało z założenia istnienia siły elektromotorycznej.



Równanie to można wyrazić analogicznie jak dla pola elektrostatycznego

$$\operatorname{div} \bar{E} = \operatorname{div} \bar{E}_p - \bar{E} \frac{\operatorname{grad} \sigma}{\sigma}.$$

W przypadku ośrodka jednorodnego otrzymuje się:

$$\operatorname{div} \bar{E} = \operatorname{div} \bar{E}_p,$$

albo

$$\nabla^2 \varphi = \operatorname{div} \bar{E}_p,$$

gdzie  $\operatorname{grad} \varphi = \bar{E}$ .

Jedynym rozwiązaniem tego równania jest

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\operatorname{div} \bar{E}_p}{r} dv. \quad (1)$$

Uwzględniając zależność

$$\operatorname{div} \frac{\bar{E}_p}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \bar{E}_p + \bar{E}_p \operatorname{grad} \frac{1}{r}$$

otrzymamy

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left( \operatorname{div} \frac{\bar{E}_p}{r} - \bar{E}_p \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dv.$$

Pierwsza część całki w przypadku dostatecznie dużej odległości od dipola równa się zeru, tak że

$$\varphi = \frac{1}{4\pi} \iiint \left( \bar{E}_p \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} \right) dv.$$

Gdy siła przyłożona  $\bar{E}_p$  jest stała w obszarze cylindrycznym  $v = s a$ , gdzie tworząca  $a \parallel \bar{E}_p$ , to

$$\varphi = \frac{s \bar{E}_p}{4\pi} a \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{\bar{p}}{4\pi \epsilon} \operatorname{grad} \frac{1}{r}. \quad (2)$$

Wielkość  $\bar{p} = \epsilon \bar{E}_p v$  jest równa momentowi dipola punktowego, który w polu elektrostatycznym wytworzyłby taki sam rozkład potencjałów.

### 3. WEKTOR ELEKTRYCZNY SERCA

Pole elektryczne przedstawione na rys. 3b zdjęto w niżej opisany sposób. Z grubej bibuły wycięto profil korpusu i nasycono słabym roztworem soli. Odizolowane wzajemnie elektrody metalowe o kształcie podwójnej litery U połączono ze źródłem napięcia wolnozmiennego. Następnie za pomocą nieobciążającego miliwoltomierza zdjęto kształt powierzchni ekwipotencjalnych. Odwrotne zagadnienie, tj. odtworzenie na pod-

stawie rozkładu potencjałów na powierzchni skóry pacjenta kształtu i przebiegu w czasie omówionej poprzednio warstwy dipolowej jest możliwe tylko w grubym przybliżeniu.

W przypadkach uproszczonej analizy można warstwę dipolową serca zastąpić przez równoważny dipol pojedynczy o momencie tak dobranym pod względem wielkości i kierunku, aby rozkład pola elektrycznego i potencjałów w odległościach dostatecznie dużych od serca pozostał taki sam jak przy warstwie dipolowej [7].

Z podanego ostatnio wzoru na potencjał pola stacjonarnego

$$\varphi = \frac{sE_p}{4\pi} a \text{ grad } \frac{1}{r} = ka \frac{\bar{r}}{r^3}$$

wynikają ważne konsekwencje praktyczne. Mianowicie, jeżeli odległości dwóch punktów pola od dipola są jednakowe  $r_1 = r_2 = r$ , to różnica potencjałów między nimi jest

$$U_{12} = ka \frac{\bar{r}_1 - \bar{r}_2}{r^3} = k' a r_{12}, \quad (3)$$

czyli jest proporcjonalna do rzutu momentu na oś łączącą oba punkty i do odległości wzajemnej  $r_{12}$  obu punktów. Mierząc zatem różnicę potencjałów pomiędzy trzema parami odpowiednio dobranych punktów przestrzeni można jednoznacznie odtworzyć moment dipola wytwarzający pole.

W czasie każdego cyklu pobudzenia wektor momentu, czyli tzw. wektor elektryczny serca, zmienia się rytmicznie, a jego chwilowy kierunek w przestrzeni wyznacza chwilową oś elektryczną serca. Na rys. 4 przedstawiono rzuty zastępczego wektora elektrycznego serca na płaszczyznę czołową, strzałkową i poziomą oraz obwiednię końców tego wektora.

Zwrot wektora elektrycznego serca na osi przyjęto przeciwny do zwrotu pola elektrycznego, który wynika z pola potencjałów wytwarzanych przez dipol. W wyniku tego wektor elektryczny serca odtwarza pod względem kierunku w przestrzeni i zwrotu siłę przyłożoną  $\bar{E}_p$  w warstwie dipolowej, której zwrot jest również przeciwny do zwrotu pola wytwarzanego przez ładunki warstwy<sup>6</sup>.

Podane wyżej zależności są słuszne w przestrzeni nieograniczonej i jednorodnej, w dostatecznie dużej odległości od dipola i przy niezmiennych jego wartości w czasie. Żaden z tych warunków nie jest spełniony w przypadku fizjologicznego generatora dipolowego. Zamiast pola stacjonarnego jest pole niby-stacjonarne i to w przestrzeni niejednorodnej.

<sup>6</sup> Odwrotne założenie spotyka się jedynie w niektórych pracach Sulzera i Duchosala.

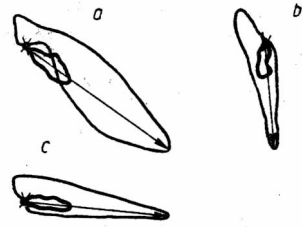
Wprawdzie wpływ zmian dipola w czasie na dokładność przytoczonych wzorów jest do pominięcia, tak że pole wektora prądu przewodzenia pokrywa się z polem stacjonarnym, to jednak deformujący wpływ niejednorodnego rozkładu przewodnictwa i wpływ skończonych wymiarów ośrodka przewodzącego nie są bez znaczenia. Podobnie niewielka odległość od serca elektrod przyłożonych do skóry czyni nieściśłą interpretację warstwy dipolowej przez pojedynczy dipol. Na rys. 3a dla porównania zaznaczono pole jakie wytwarza pojedynczy dipol według wzoru

$$\varphi = \frac{k}{r^3} ar. \quad (4)$$

Z drugiej strony, choć otrzymany na podstawie niedokładnie spełnionych założeń obraz dipola odbiega od obrazu faktycznego, to jednak wobec stosowania przy diagnozie w znacznej mierze metody porównawczej obrazu patologicznego z normalnym, niedokładność bezwzględna dipola, podobna dla wszystkich badanych przypadków, traci na znaczeniu.

#### 4. STAN TECHNIKI WSPÓŁCZESNEJ ELEKTROKARDIOGRAFII <sup>7</sup>

Rozwój elektrokardiografii uzależniony był całkowicie od aparatury technicznej, jaka była do dyspozycji. Pierwsze poważne osiągnięcia datują się od czasu wprowadzenia w 1903 r. przez Einthovena galwanometru strunowego, a następnie w 1924 r. wzmacniaczy z lampami próżniowymi. Wzmacniacze te z wyjściem na prosty galwanometr lusterkowy <sup>8</sup>, rejestrujący promieniem świetlnym na papierze fotograficznym, stosowane są powszechnie jeszcze dotychczas. Wprowadzona w ubiegłym wieku elektrokardiografia napięciowa, polegająca na rejestracji w czasie różnicy potencjałów różnych punktów organizmu, nie uległa do dziś zmianie mimo znacznego postępu techniki. W miarę poznawania zjawisk zachodzących w sercu zwiększała się głównie ilość i rodzaj stosowanych *odprowadzeń*, tj. miejsc i sposobów podłączania par elektrod wejściowych wzmacniaczy, oraz bogaciła się interpretacja kliniczna otrzymywanych wyników. Obecnie elektrokardiografia liniowa (tj. zapis napięcia serca w funkcji czasu)



Rys. 4. Rzuty zastępczego wektora elektrycznego serca oraz obwiedni końców tego wektora na płaszczyźnie: a) czołową, b) strzałkową, c) poziomą.

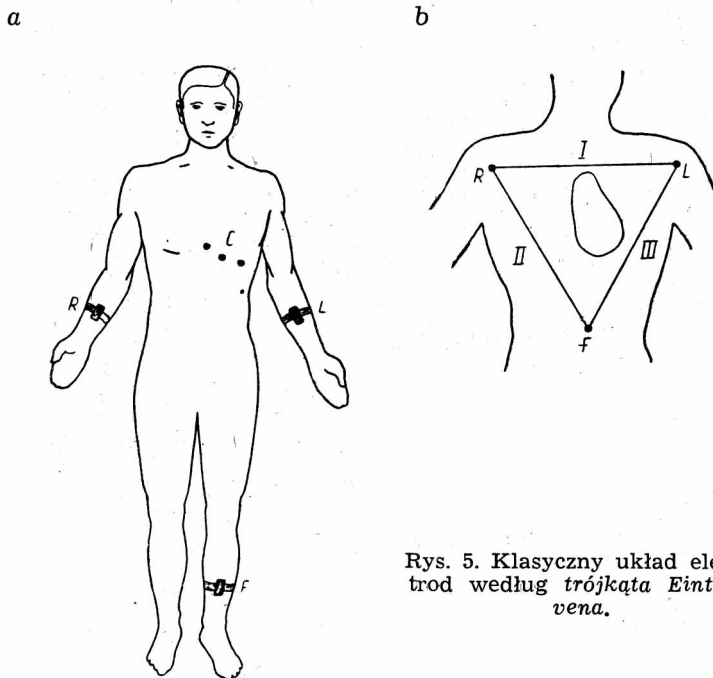
Rysunek odnosi się do przypadku zdrowego serca o prawidłowym położeniu w klatce piersiowej.

<sup>7</sup> Patrz literatura 7, 2, 31, 5.

<sup>8</sup> Prąd wysterowania typowego „galwanometru“ jest rzędu 1 mA.

stała się niezastąpionym narzędziem umożliwiającym pokonanie wielu trudności rozpoznawczych w chorobach serca.

Najklasycyzniejsze i powszechnie stosowane są trzy odprowadzenia podane jeszcze przez Einthovena; elektrody umieszcza się na przegubach rąk i przy kostce lewej nogi (rys. 5a).

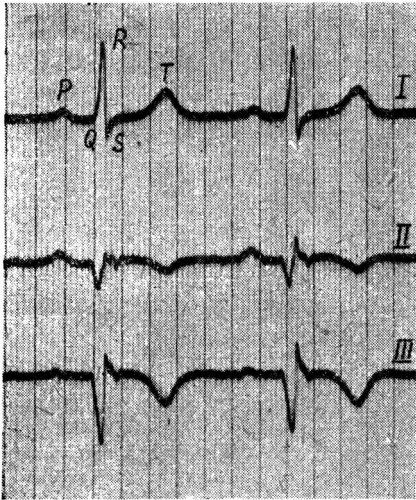


Rys. 5. Klasyczny układ elektrod według trójkąta Einthovena.

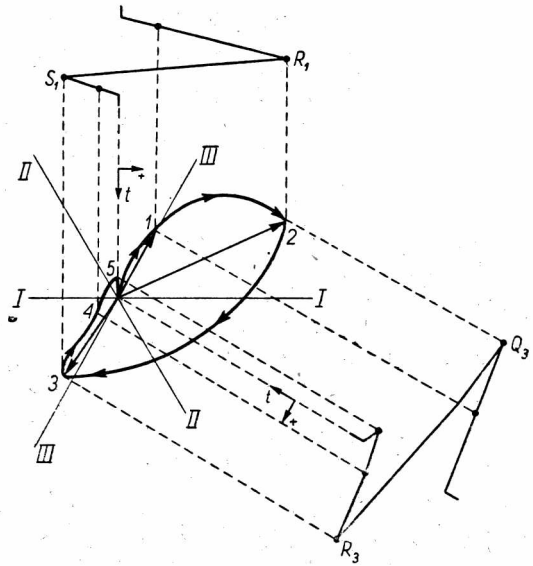
Wybór tych odprowadzeń wynikał w znacznym stopniu z ich praktycznej dogodności. Wskutek tego, że prądy czynnościowe serca nie zamykają się przez kończyny, chwilowa wartość potencjału, np. przegubu prawej ręki, jest taka sama jak potencjału prawego barku. W rezultacie trzy napięcia między trzema odprowadzeniami kończynowymi równają się w przybliżeniu napięciom między wierzchołkami równobocznego trójkąta Einthovena z rys. 5b. Przykład trzech zapisów zdejmowanych synchronicznie z trzech odprowadzeń kończynowych przedstawiono na rys. 6a. Na wykresie podano znormalizowane oznaczenia *PQRST* załamków wykresu. Zespół *QRS* poprzedza skurcz komór (odpowiada omówionej na wstępie fali depolaryzacji mięśnia sercowego), załamek *T* poprzedza rozkurcz komór, załamek *P* poprzedza i współistnieje ze skurczem przedsionków. Dla diagnozy ważny jest kształt i amplituda każdego z załamków, odległość między nimi, miarowość repetycji itd.

Następnym powszechnie stosowanym odprowadzeniem jest układ z tzw. sztucznym zerem Wilsona. Trzy elektrody kończynowe łączy się wza-

jemnie w gwiazdę za pośrednictwem trzech oporów o 5 tysięcy omów. Środek gwiazdy — sztuczne zero — zostaje połączony z jednym biegunem wzmacniacza (zazwyczaj uziemionym). Drugi biegun wzmacniacza łączy się z *elektrodą czynną*, która zostaje przyłożona do określonych miejsc *przedsercowych* na klatce piersiowej (rys. 5a). Ekgram (elektrokardiogram) zdjęty w ten sposób pozwala wyciągnąć wnioski odnośnie do obszaru serca leżącego tuż pod elektrodą badawczą oraz w jej sąsiedztwie.



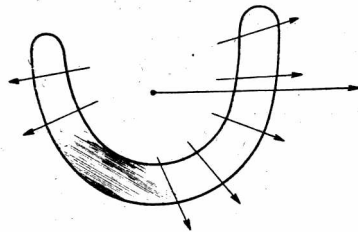
a



b

Rys. 6. Jedna z metod diagnozy przy pomocy elektrokardiogramów liniowych.

a) trzy klasyczne ekgramy liniowe, b) konstrukcja geometryczna wkgramu zespołu QRS (przez porównanie z obwiednią z rys. 4a można uchwycić odchylenie od normy), c) rozpoznanie schorzenia: *residua* po zawale tylnej ściany mięśnia sercowego (zaznaczone ciemną plamą).



c

Otrzymane z kilku odprowadzeń krzywe napięć w funkcji czasu interpretuje się przez odniesienie do konturów serca głównie w płaszczyźnie czołowej. Podawany przez niektóre nowoczesne podręczniki lekarskie sposób wykorzystania ekgramów kończynowych przedstawiono na rys. 6. Zgodnie z rozważaniami z poprzedniego rozdziału ekgramy kończynowe przedstawiają przebieg w czasie rzutów wektora elektrycznego serca na trzy osie równoległe do boków trójkąta Einthovena, w którego środku

jest serce. Umożliwia to odtworzenie za pomocą konstrukcji geometrycznej przebiegu w czasie obwiedni wektora elektrycznego serca, tj. wkgramu (wektokardiogramu) płaskiego czołowego. Możliwe jest przy tym naniesienie podziałki czasowej na otrzymaną krzywą.

Konstruowanie geometryczne wkgramów z ekgramów liniowych jest nie tylko zmusne, ale i mało dokładne. Wymiary poszczególnych załamek wynoszą od kilku do kilkunastu milimetrów, a względnie niewielkie przesunięcia fazy załamek między składowymi ekgramami liniowymi dają znaczne różnice w kształcie wkgramu. W 1936 roku po raz pierwszy zastosowano lampę oscyloskopową do bezpośredniego uzyskania wkgramu. Dwa prostopadłe napięcia potrzebne do tego celu uzyskano również z odprowadzeń kończynowych. Napięcie z pierwszego odprowadzenia (rys. 5) użyto do odchylenia poziomego, natomiast do odchylenia pionowego użyto napięcie występujące pomiędzy kończyną dolną a środkiem potencjometru załączonego na pierwsze odprowadzenie. Ponieważ punkt na ciele pacjenta odpowiadający pod względem napięcia środkowi potencjometru (okolica gardła) leży bliżej serca niż pozostałe trzy punkty, uzyskane w wyżej podany sposób *napięcie pionu* należało wzmocnić silniej zgodnie ze wzorem (3). Obecnie szereg firm produkuje kardiосkopy z lampami oscyloskopowymi, które pozwalają bądź na rejestrację w czasie ekgramu liniowego, bądź na odtworzenie wkgramu w jednej z trzech podstawowych płaszczyzn: czołowej, strzałkowej lub poziomej. W przypadku wkgramów podziałka czasowa zostaje naniesiona na rysowaną pętlę przez modulację (wygaszanie) jasności wykresu z określoną częstotliwością, np. 400 c/s. Wektokardiосkopy tego rodzaju nie znalazły jeszcze w Europie szerszego zastosowania, jakkolwiek literatura lekarska dotycząca wektokardiografii obejmuje już kilkaset pozycji.

##### 5. WADY METODY I APARATURY ELEKTROKARDIOGRAFICZNEJ

Jak to przedstawiono w publikacji: „Zależność kardiogramu od przestrzennego położenia serca“ [21], kształt ekgramów liniowych może w niektórych przypadkach nietypowego położenia serca w klatce piersiowej prowadzić do mylnego rozpoznania choroby i na odwrót — istniejące stany chorobowe mogą ulec zamaskowaniu<sup>10</sup>. Ponadto okazuje się, że jedną z zasadniczych wytycznych przy diagnozie jest kąt  $p r z e s t r z e n n y$ , jaki tworzy pętla załamek  $T$  z pętlą zespołu  $QRS$ . I wreszcie — znormalizowana skala napięcia ekgramów liniowych i związana z tym precyzja rejestracji przebiegów napięcia jest za mała w stosunku do współczesnych możliwości diagnostycznych.

<sup>9</sup> Patrz literatura 17, 21.

<sup>10</sup> Badanie rentgenologiczne nie pozwala na ustalenie przestrzennej pozycji serca.

Poczynając od roku 1938, w przodujących pracowniach lekarskich zaczęto zwracać coraz większą uwagę na przestrzenny charakter zjawisk elektrycznych zachodzących w sercu<sup>11</sup>. Do jednoznacznego wyznaczenia przestrzennego przebiegu wektora elektrycznego serca wystarczają zazwyczaj rzuty jego obwiedni na dwie dowolne płaszczyzny. Ze względu na nieidentyczność kolejnych cykli pobudzenia serca oba rzuty muszą być zdjęte synchronicznie i muszą posiadać wspólną podziałkę czasową. Dokładność wyznaczenia przebiegu przestrzennego zależy od technicznej precyzji wykonania rzutów. Obserwując jednak pętle uwidocznione na rys. 4 stwierdza się, że nawet przy dużej rutynie uzmysłowienie przestrzenne przebiegu wektora wymaga dużej wyobraźni, jest trudne i niedokładne. Trudności te potęgują się jeszcze w przypadku nietypowych objawów chorobowych czy nietypowego położenia serca.

Również przy nauce czytanie przestrzenne rzutów płaskich wymaga od uczącego się szczególnie dużego wysiłku. Można przypuszczać, że to właśnie jest jedną z głównych przyczyn, z powodu których metoda wektokardiografii (w skrócie: *wkgrafii*) jeszcze się nie rozpowszechniła, mimo że jest niewątpliwie korzystna pod wieloma względami.

Aby przezwyciężyć omówione trudności, zaczęto konstruować z drutu modele przestrzenne pętli kardiograficznych, które następnie fotografowano aparatem do zdjęć stereoskopowych. Modele te wykonywano bądź to na podstawie wektokardiogramów, bądź kardiogramów liniowych (jedno odprowadzenie w kierunku grubościowym pacjenta) [11], [9]. Metoda ta ma niewątpliwie zalety w zastosowaniu do publicystyki i dydaktyki, jednakże ze względu na niedokładność odwzorowania rzeczywistego przebiegu, żmudność oraz długi czas potrzebny na wykonanie modelu jak również wysoki koszt jego wykonania, metoda ta nie nadaje się do zastosowania nie tylko w praktyce klinicznej, ale i przy pracach badawczych.

Aby wykorzystać w pełni nowe możliwości, jakie otwiera odwzorowanie wektora elektrycznego serca [15] należy:

1. ułatwić uzmysłowienie przestrzennego przebiegu wektora przez *umożliwienie bezpośredniej obserwacji przestrzennej przebiegów elektrycznych z dowolnie obranego kierunku*,
2. umożliwić rejestrację synchroniczną dwóch rzutów obwiedni wektora na dowolne dwie płaszczyzny, ze szczególnym uwzględnieniem pary rzutów umożliwiających obserwację stereoskopową,
3. zwiększyć skalę obserwowanych i rejestrowanych przebiegów, jak również umożliwić bezpośrednią obserwację i rejestrację fragmentów przebiegu (np. załamka T) w dużym powiększeniu.

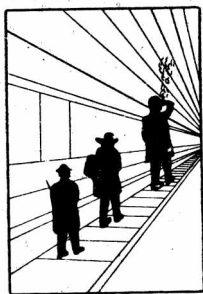
<sup>11</sup> Bibliografia lekarska na temat wektokardiografii przestrzennej zawiera już około stu pozycji.

Spełnienie powyższych zadań usunie w znacznym stopniu trudności wynikające z nietypowego położenia serca, ułatwi uzmysłowienie przestrzennego przebiegu bezpośrednio przy badaniu, jak i potem przy korzystaniu z dokumentacji, ułatwi proces uczenia się i sprawozdawczość (publikacje). Powiększenie skali przy zachowaniu bezwzględnej wierności odtworzenia ułatwi obserwację i umożliwi uchwycenie nowych właściwości dla diagnozy.

Jednym ze sposobów prowadzących do uzyskania założonego wyżej odtworzenia przestrzennego przebiegów elektrycznych serca jest metoda stereoskopowa.

## 6. ODWZOROWANIE STEREOSKOPOWE<sup>12</sup>

Przestrzenność przedmiotu w polu widzenia zależy od szeregu czynników zarówno subiektywnych obserwatora, jak i obiektywnych obserwowanego układu. Aby za pomocą układu płaskiego uzyskać złudzenie trójwymiarowości, należy wyeliminować zarówno w obserwowanym układzie, jak i u obserwatora te czynniki, które *zwracają uwagę* oczu na faktyczną płaskość przedmiotu. Na odczucie subiektywne *głębokości* składają się przede wszystkim następujące cztery czynniki: perspektywa, widzenie dwuoczne oraz akomodacja soczewek i ustawienie gałek ocznych.



Rys. 7. Trzy postacie mają faktycznie jednakowy wymiar pionowy.

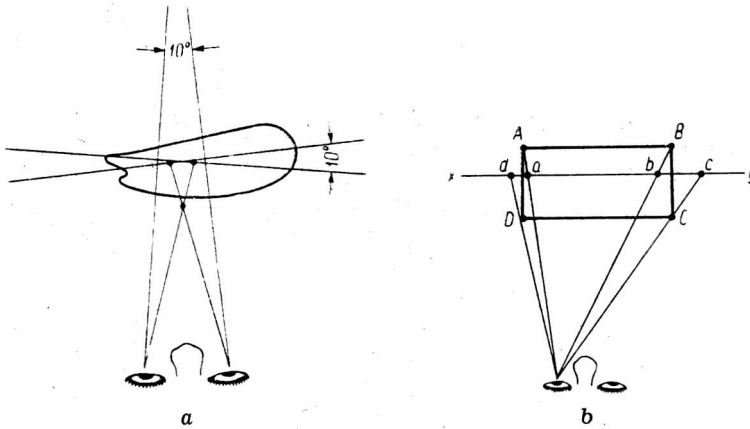
Znaczenie pierwszego czynnika, czyli perspektywy, jest największe, na jego działaniu opiera się malarstwo, sztuka filmowa itd. Warunkiem niezbędnym działania perspektywicznego jest u p r z e d n i a znajomość przedmiotu z wcześniejszych doświadczeń, co nie jest jednoznaczne i może być przyczyną poważnych błędów. Na rys. 7 przedstawiono przykład siły działania *przyzwyczajzeń perspektywicznych*. Obserwowane na tym rysunku trzy osoby wydają się różnych wzrostów, pomimo iż wysokość ich jest w rzeczywistości jednakowa. Zastosowanie efektu perspektywicznego do obserwacji pętli jest oczywiście niemożliwe.

Trzeci i czwarty czynnik, tj. wrażenia pochodzące od mięśni oka, dają efekt stosunkowo słaby, nie należy o nim jednak zapominać, gdyż działanie jego jest zazwyczaj czynnikiem utrudniającym uzyskanie złudzenia perspektywicznego.

<sup>12</sup> Patrz literatura 23, 29.



Do wykorzystania pozostaje zatem wrażenie przestrzenności wynikłe z równoczesnej obserwacji nieidentycznych obrazów przez każde oko obserwatora (rys. 8a). Metoda ta ma szereg niedogodności. Zakłada ona, oczywiście, posiadanie obu oczu zdrowych; ewentualne różnice między nimi powinny być wyrównane za pomocą szkieł. Ponieważ obserwowany w kierunku głąbokościowym kształt zależy od nieznacznych różnic między obu obrazami, różnice te muszą być możliwie dokładnie odtworzone,



Rys. 8. Zasada widzenia stereoskopowego.

a) kąt stereoskopowy, b) poprawka perspektywiczna obrazów stereoskopowych. Dla prostości pokazano pętlę w postaci prostopadłościanu leżącego w płaszczyźnie oczu. Obserwowany obraz  $cd$  przedniego boku  $CD$  jest większy od rzutu tego boku na płaszczyznę odwzorowania  $xy$  i odwrotnie w przypadku tylnego boku  $AB$ .

aby nie zafalszowały wypadkowego obrazu. Siła wrażenia przestrzenności przy obserwacji tej samej pary obrazów płaskich jest różna osobniczo. Specyficzną cechą jest możliwość wyrobienia sobie przez ćwiczenie zdolności *spostrzegania przestrzennego*. Początkujący obserwator przy pierwszych oględzinach niejednokrotnie nie widzi różnic między obserwacją jedno i dwuoczną, a nawet widzi mylnie — podwójny obraz. Zazwyczaj wkrótce następuje nagłe dostrzeżenie głąbokości; obserwator po godzinnym ćwiczeniu może dojść do takiej wprawy, że jest w stanie zaobserwować niedokładności w *różnicach stereoskopowych* obu płaskich obrazów [29].

Cechą specyficzną stereoskopowej obserwacji pary obrazów jest to, że im bardziej skomplikowany jest obraz, tym wyraźniej występuje jego przestrzenność. Uchwycenie i ocenę głąbokości obrazu można ułatwić przez *narzucenie* na dródkę elektrycznej podziałki głąbokościowej na obraz obserwowany na lampie oscyloskopowej. Podobnie jak w urządzeniach

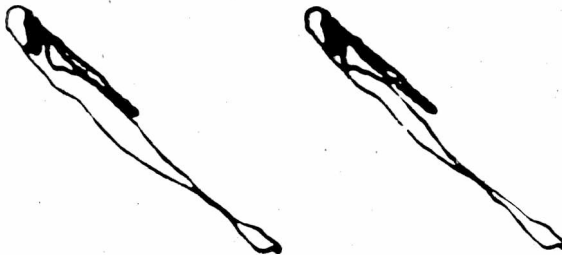
radarowych, po podziałce tej może się ślizgać nastawiany ręcznie wskaźnik, za pomocą którego można bezpośrednio pomierzyć odległość poszczególnych punktów pętli w kierunku głębokościowym. Pomiaru tego rodzaju w przypadku wkgrafii miałyby tylko pomocnicze znaczenie, ponieważ do pomiarów dokładnych są zawsze do dyspozycji rzuty płaskie obwiedni wektora serca.

W przypadku pętli wektokardiograficznej technika odwzorowania stereoskopowego jest znacznie ułatwiona, ponieważ wymiary (rozciągłość) obiektu są stosunkowo niewielkie. Można z powodzeniem przyjąć, że:

1. cały obiekt mieści się w płaszczyźnie poziomej,
2. głębokość całkowita pętli jest niewielka, tj. że żadna jej część nie jest ani bardzo blisko, ani bardzo daleko od obserwatora.

Pierwsze założenie umożliwia zaniechanie wpływu kąta elewacji na wymiary obrazu, drugie pozwala zaniechać tzw. poprawkę perspektywiczną. Przy uwzględnieniu poprawki należałoby regulować skalę obrazu (tj. wzmocnienie napięć obrazów płaskich) zgodnie z chwilową odległością punktu obrazu od obserwatora (rys. 8). Zaniechanie poprawki perspektywicznej powoduje pozorne zmniejszenie wymiarów tej części pętli, która jest bliska obserwatora, a powiększenie — części odległej. Wobec tego, że w metodyce lekarskiej stosuje się w znacznym stopniu metodę porównawczą, ten niezręczny błąd traci całkowicie na znaczeniu.

Metody obserwacji pary obrazów stereoskopowych są najrozmaitsze [29], wybór metody zależy od rozmiaru obrazów, od wymaganej łatwości obserwacji i od ilości osób,



Rys. 9. Para stereoskopowa pętli wektokardiograficznych. Do obserwacji przestrzennej odtworzonej pętli należy posłużyć się kawałkiem sztywnego papieru ( $5 \times 15$  cm) ustawionego przed oczami tak, aby każde oko widziało tylko jeden obraz składowy. Obrazy pętli powinny być trzymane równoległe do oczu.

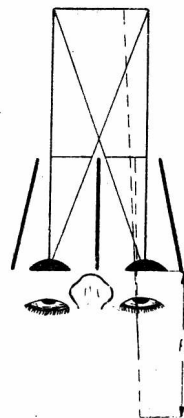
które mają równocześnie obserwować obraz. W najprostszym przypadku, tj. przy małym wymiarze pętli i jednym obserwatorze, nie jest potrzebne żadne urządzenie optyczne. Do obserwacji przestrzennej pętli przedstawionej na rys. 9 wystarcza kawałek sztywnego papieru, o wymiarach około  $5 \times 15$  cm, trzymany między oczami w ten sposób, aby każde oko widziało tylko jedną pętlę

płaską. Przy pewnym wysiłku ze strony obserwatora gałki oczne ustawią się tak, że składowe obrazy padną na odpowiadające sobie partie siatkówki dając wspólny obraz przestrzenny. Większy od normalnego kąt

rozstawienie gałek ocznych wymaga tym większego wysiłku od obserwatora, im większa jest odległość między składowymi obrazami.

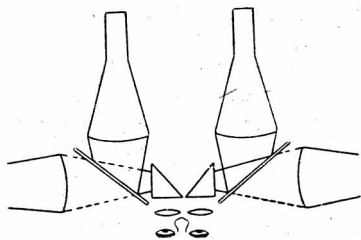
Następny bardzo prosty sposób polega na obserwowaniu składowych obrazów przez soczewki po około  $+7$  dioptrii każda (rys. 10). W tym przypadku odległość między środkami obrazów powinna być nieco mniejsza od odległości między źrenicami ocznymi (soczewkami). Wtedy urojone obrazy składowe, widziane przez obserwatora tak ulegają przesunięciu, że stają się zbieżne (pokrywają się wzajemnie) przy naturalnym nieprzymuszonym ustawieniu oczu, jak to pokazano na rys. 10. Przy rozstawieniu obrazów mniejszym od rozstawienia oczu maleje wrażenie głębokości [23]. Z tych względów dla celów amatorskiej fotografii stereoskopowej stosuje się rozstawienie obrazów równe rozstawieniu gałek ocznych, mimo znacznego utrudnienia w uzyskiwaniu wrażenia zbieżności obrazów. W przypadku wektokardiografii *optyczne* zmniejszenie się wrażenia głębokości jest korzystne, ponieważ maleje błąd w odtwarzaniu przestrzennym, spowodowany przez niezamierzoną różnicę między składowymi obrazami (różnicę wynikłą z niedoskonałości technicznej urządzenia), podczas gdy powiększenie elektryczne właściwej różnicy stereoskopowej składowych obrazów nie sprawia trudności. Przy tej metodzie szerokość obrazu składowego nie może być wiele większa od około 30 mm, tj. od połowy odległości między oczami. Dla celów wkgrafii jest to całkowicie wystarczające, ponieważ na skutek działania soczewek obserwowane urojone obrazy pętli ulegną nie tylko nasunięciu na siebie, ale i około dwukrotnemu powiększeniu.

Istnieje cały szereg metod optycznych, które pozwalają obserwować przestrzennie obrazy o dużych wymiarach. W przypadku tym do *nałożenia obrazów na siebie* stosuje się pryzmaty i lustra. Z uwagi na niewielkie wymiary pętli wkgraficznych metody te nie mają zastosowania, chyba że obserwacja obrazu przestrzennego ma być umożliwiona większej ilości osób równocześnie. Zadanie to może być zrealizowane na przykład w układzie przedstawionym na rys. 11. Przy użyciu okularów ze szklami polaryzującymi i zastosowaniu polaroidów przy każdym pryzmacie (rys. 11) staje się możliwa obserwacja zbiorowa w zakresie dość dużego kąta przestrzennego. Projekcja na ekran obu obrazów z nowoczesnych



Rys. 10. Układ optyczny okularu pozwalający na *nałożenie na siebie* pary obrazów stereoskopowych. Przebieg promieni obrazu obserwowanego przez lewe szkło okularu jest symetryczny do zaznaczonego dla szkła prawego.

projekcyjnych lamp oscyloskopowych i użycie polaroidów umożliwia obserwację przestrzenną dużej ilości osób [29].



Rys. 11. Układ umożliwiający obserwację stereoskopową dużych obrazów.

W przypadku wektokardiografii możliwe są prostsze rozwiązania techniczne, nadające się zarówno do obserwacji zbiorowej, jak i do publicystyki. Ze względu na geometryczny charakter obu obrazów wystarcza zastosowanie obrazów składowych o różnych barwach, np. zielonego i czerwonego, i obserwacja przez dwukolorowe okulary. Przy uzgodnieniu barwy składowego obrazu z barwą szkła okularu każde oko widzi tylko jeden obraz z dwóch obrazów nałożonych wprost jeden na drugi. Sposób ten nadaje się szczególnie do dydaktyki przy użyciu epidiaskopu. Koszt wykonania okularów z kawałka tektury i dwóch barwnych krążków celofanowych jest minimalny.

#### 7. UKŁAD ELEKTROD PACJENTA I ELEKTROD OSCYLOSKOPU PRZY WEKTOKARDIOGRAFII STEREOSKOPOWEJ

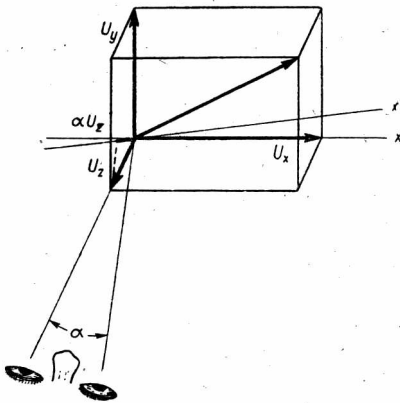
Do otrzymania rzutu wektora serca na płaszczyznę wystarczają rzuty tego wektora na dwie dowolne osie leżące w tej płaszczyźnie. Znając przebieg tych rzutów w czasie można utworzyć rzut obwiedni wektora. W jednym z wektokardioskopów do wykreślenia płaskiego wkgramu zastosowano galwanometr o lusterku obracającym wokół dwóch osi tworzących kąt  $120^\circ$ . Dzięki temu do uzyskania pętli płaskiej można było użyć dwóch klasycznych odprowadzeń według trójkąta Einthovena.

Jeżeli jednak do odwzorowania pętli ma być użyta lampa oscyloskopowa, staje się konieczne uzyskanie rzutów wektora serca na dwie osie wzajemnie prostopadłe. Jeden ze sposobów, polegający na wyzyskaniu do tego celu napięć kończynowych, opisano w rozdziale 4. Sposób ten ma jednak tę zasadniczą wadę, że do napięć pochodzenia sercowego dodają się zakłócające napięcia biologiczne, pochodzące z drżenia mięśni kończynowych. Napięcia te czynią często niecelowe stosowanie wzmocnienia większego niż wzmocnienie odpowiadające czułości znormalizowanej  $1 \text{ cm/mV}$ , a przez to ograniczają wymiary pętli do około 1 centymetra. Aby móc uzyskać duży i czytelny obraz pętli, który pozwoliłby na nowe obserwacje diagnostyczne, staje się konieczne przeniesienie elektrod bezpośrednio na korpus pacjenta. W tym przypadku, oczywiście, odpada dogodność stosowania odprowadzeń według trójkąta, przy czym spośród

szeregu innych stosowanych odprowadzeń z korpusu pacjenta, najbardziej celowy jest układ trójprostopadły, który pokazano na rys. 12 [13], [22]<sup>13</sup>.

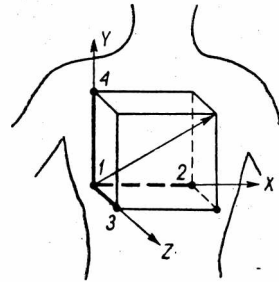
Zaletą układu (rys. 12) jest to, że wewnątrz sześciangu wypełnia ośrodek w znacznym stopniu jednorodny, a mianowicie tkanka płucna. W wyniku tego maleją błędy odwzorowania omówione uprzednio, z drugiej zaś strony układ ten dostarcza wprost napięć potrzebnych dla płytek typowego oscyloskopu. Ponieważ odległość strzałkowa między elektrodami 1—3 (rys. 12) jest nieco mniejsza od dwóch pozostałych, wzmocnienie tej składowej należy powiększyć o około 10% zgodnie ze wzorem (3). Otrzymane po wzmocnieniu  $K$  trzy napięcia z trzech odprowadzeń sześciangu:  $U_x = KU_{12}$ ;  $U_y = KU_{41}$  i  $U_z = 1.1KU_{13}$  są proporcjonalne do rzutów elektrycznego wektora serca  $V$  na trzy osie  $xyz$ . Oznaczając współczynnik proporcjonalności przez  $a$ , geometryczna suma rzutów tworzy wektor  $aV = iU_x + jU_y + kU_z$ .

Aby uzyskać dwa obrazy pary stereoskopowej, najdogodniej jest zastosować jedną lampę oscyloskopową o dwóch promieniach rysujących równocześnie obrazy lewy i prawy dla lewego i prawego oka. Do odchylania pionowego obu promieni służy to samo napięcie  $U_y$ . Zakładając, że lewe oko obserwatora patrzy na pętlę wzdłuż osi  $z$  z dostatecznie dużej odległości, można do odchylenia poziomego lewego obrazu użyć wprost napięcia  $U_x$ . Napięcie odchylające w poziomie promień prawy musi odpowiadać rzutowi wektora serca na oś  $x'$ , odchyloną w poziomie od osi  $x$  o kąt zależny od żądanego złudzenia głębokości. W tym celu stosowano dodatkową elektrodę w punkcie 2' przesuniętą nieco względem elektrody 2 pokazanej na rys. 12 [28].



Rys. 13. Dodatek stereoskopowy.

Przy metodzie tej jednak właściwa zmiana napięcia, wynikająca z rzutowania wektora serca na nową oś 1—2', maskowana jest przez wpływ deformacji pola wynikający z krańca ośrodka przewodzącego. Podobnie nie-



Rys. 12. Układ elektrod według sześciangu.

<sup>13</sup> W piśmiennictwie lekarskim układ ten nazywany jest układem ostróżupa prostokątnego lub sześciangu.

jednakowe zamocowanie elektrod (od przypadku do przypadku) powoduje niejednoznaczność wyników, nawet dla tego samego pacjenta.

Dla otrzymania napięcia odpowiadającego rzutowi wektora serca na nową obróconą oś  $x'$  nie potrzeba wcale nowego odprowadzenia; napięcie to można uzyskać prościej i dokładniej stosując transformację współrzędnych. Uwzględniając, że kąt  $\alpha$  obrotu osi  $x$  jest niewielki (około  $10^\circ$ ), można z powodzeniem zaniedbać zmianę wielkości napięcia  $U_x$  ( $\cos \alpha = 1$ ), a jedynie dodać do niego algebraicznie rzut  $U_z$  na nową oś  $x'$  (rys. 13)

$$U_z \cos(90^\circ - \alpha) \doteq \alpha U_z.$$

W rezultacie napięcie odchylające poziome prawego obrazu będzie się różniło od napięcia poziomego lewego obrazu o niewielki *dodatek stereoskopowy* wyrażony przez  $\alpha U_z$ .

#### 8. ZMIANA KIERUNKU OBSERWACJI

Transformacja współrzędnych pozwala na drodze elektrycznej zmienić kierunek obserwacji pętli bez potrzeby przemieszczania elektrod. Oznaczając przez  $z'$  nowy kierunek, z którego patrzy na pętlę lewe oko, a przez  $x'$  — nową oś, która razem z osią  $z'$  wyznacza płaszczyznę przechodzącą przez obie źrenice, i wreszcie przez  $y'$  — trzecią oś prostopadłą do  $x'$  i  $z'$ , otrzymamy następujące wzory na trzy nowe napięcia odpowiadające rzutom wektora serca na trzy nowe osie:

$$\begin{aligned} U'_x &= \cos \alpha_x U_x + \cos \alpha_y U_y + \cos \alpha_z U_z, \\ U'_y &= \cos \beta_x U_x + \cos \beta_y U_y + \cos \beta_z U_z, \\ U'_z &= \cos \gamma_x U_x + \cos \gamma_y U_y + \cos \gamma_z U_z. \end{aligned} \quad (5)$$

We wzorach tych  $\alpha, \beta, \gamma$  oznaczają kąty kierunkowe, jakie tworzą osie  $x', y', z'$  z osiami  $xyz$  układu podstawowego.

Jeżeli za pomocą potencjometrów według powyższych wzorów zostaną utworzone dwa nowe napięcia  $U'_y$  i  $U'_x$  z trzech wzmocnionych napięć pacjenta  $U_x, U_y, U_z$ , to otrzymana na oscyloskopie pętla będzie odpowiadać tej samej co poprzednio pętli przestrzennej, rzutowanej z nowego kierunku  $z'$ . Drugi obraz pary stereoskopowej powstanie analogicznie jak poprzednio przy użyciu do odchylania napięć  $U'_y$  i  $U'_x + \alpha U'_z$ .

Posługując się potencjometrami można dogodnie „obejrzeć“ pętlę ze wszystkich stron a potem ustawić ją w znormalizowanym położeniu nie-

zależnie od osobniczego położenia serca. Przy zastosowaniu do tego celu potencjometrów o charakterystykach kosinusoidalnych nastawiony kierunek patrzenia można odczytać wprost na liniowych skalach pokręteł [29].

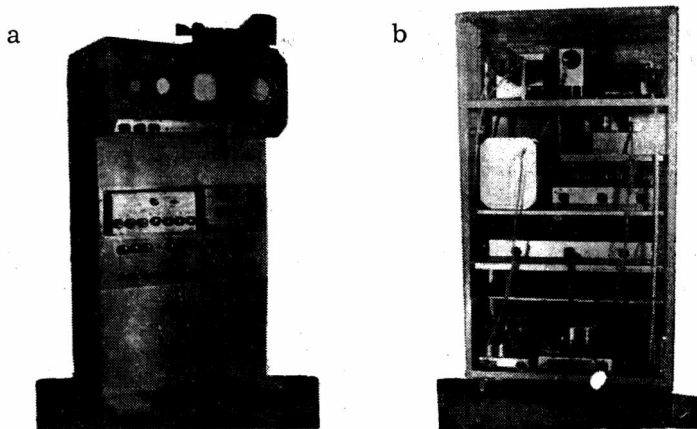
## Część II

### Stereokardiograf wykonany w Zakładzie Budowy Aparatów Elektromedycznych Politechniki Warszawskiej

Aby wykorzystać możliwości, jakie otwiera dla diagnozy odwzorowanie wektora elektrycznego serca, zastosowana metoda odwzorowania musi spełniać wymagania postawione w rozdziale 5, pkt 1—3. W Zakładzie Budowy Aparatów Elektromedycznych Politechniki Warszawskiej w latach 1951—1953 opracowywano metodę oraz równolegle budowano aparaturę, która spełniałaby w warunkach klinicznych wymienione wyżej wymagania<sup>14</sup>.

#### 1. UKŁAD OGÓLNY

Widok ogólny urządzenia pokazano na rys. 14. Schemat blokowy stereokardiografu przedstawiono na rys. 15.



Rys. 14. a) Widok ogólny stereokardiografu, b) widok od tyłu, po zdjęciu płyt osłonowych.

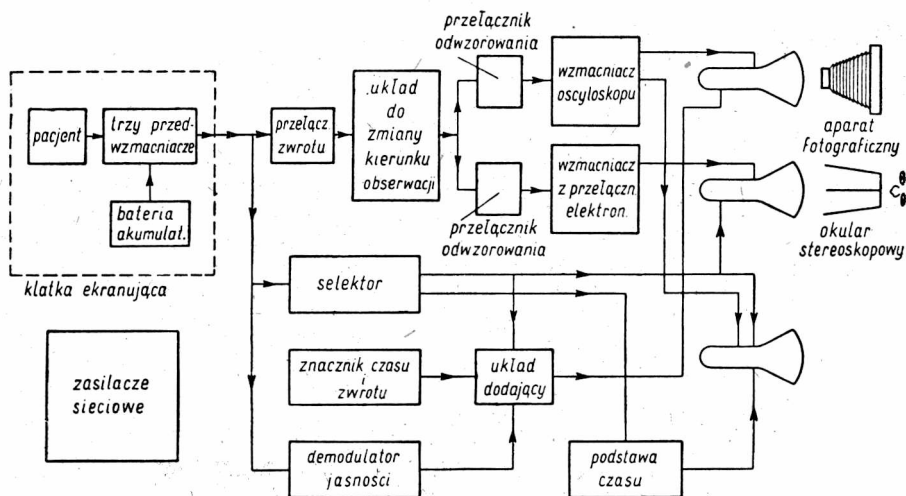
Wewnątrz klatki — na stanowisku pacjenta — znajdują się: pacjent, przedwzmacniacze, bateria i akumulator.

Wzmocnione napięcia pacjenta doprowadzone są z klatki do stanowiska lekarskiego. Na stanowisku lekarskim znajdują się: układy elektroniczne

<sup>14</sup> Od Redakcji: Opracowana metoda i zbudowana aparatura zostały odznaczone w 1953 r. nagrodą państwową w dziedzinie nauki.

transformacji współrzędnych, układy do utworzenia napięć odpowiadających parze płaszczyzn stereoskopowych, wzmacniacze końcowe, przełącznik elektronowy, szereg urządzeń pomocniczych oraz lampy oscyloskopowe do obserwacji i rejestracji przebiegów elektrycznych serca.

Zasilanie wymienionych układów jest wyłącznie sieciowe.



Rys. 15. Schemat blokowy stereokardiografu.

## 2. WZMACNIANIE I TRANSFORMACJA SYGNAŁU PACJENTA

### 2. 1. Przedwzmacniacze

Jeżeli jeden z punktów na ciele pacjenta zostanie uziemiony, to potencjały pobrane z innych punktów ciała będą miały względem ziemi, w typowych warunkach, dwie składowe: jedną — pochodzącą od biologicznych prądów czynnościowych — i drugą — indukowaną w pacjencie przez pola elektryczne i magnetyczne sieci [16]. Szczytowa wartość chwilowa napięcia czynnościowego serca jest rzędu 1 mV, podczas gdy napięcie zakłóceń sieciowych może być sto i więcej razy silniejsze, zależnie od warunków miejscowych. W przodujących rozwiązaniach technicznych aparatów komercyjnych do kardiografii liniowej stosuje się specjalny układ wzmacniacza oraz żarzenie prądem wielkiej częstotliwości lamp pierwszego stopnia wzmacniacza. Ze względu na założone uprzednio (rozdział 5) pięciokrotne powiększenie wektokardiogramu w stosunku do obrazu wynikającego ze znormalizowanego wzmocnienia (przy niezmienionym poziomie przeszkód na wyjściu) konieczne stało się zaekranowanie pacjenta oraz przedwzmacniaczy za pomocą klatki.



Ze względu na eksperymentalny charakter urządzenia zastosowano do przedwzmacniaczy zasilanie bateryjno-akumulatorowe. Aby zmniejszyć zakłócenia biologiczne, pochodzące głównie od drżenia mięśni szkieletowych (o amplitudzie bardzo różnej osobniczo), umieszczono elektrody nie na kończynach, lecz bezpośrednio na korpusie (patrz rys. 12).

Wszystkie trzy kanały wzmacniające trzech napięć *wzajemnie prostopadłych* są typu encefalograficznego, przy czym każdy z kanałów posiada cztery przeciwsołbne stopnie wzmacnienia o dużej dyskryminacji sygnału i przeszkód. Schemat uproszczony dwóch pierwszych stopni przedwzmacniacza jednego kanału przedstawiono na rys. 16a, schemat ideowy — na rys. 16b, a widok ogólny — na rys. 17.

Układ przedstawiony na rys. 16 pozwala pracować przy nieuziemionym pacjencie i nie wymaga, aby wzmacniacze wstępne wszystkich kanałów miały jedną wspólną elektrodę. Ta ostatnia właściwość może stać się korzystna, gdyby w przyszłości okazało się, że lepiej jest pracować przy inaczej rozmieszczonych elektrodach.

Cechą specyficzną wzmacniacza z rys. 16 jest duży nieobciążony kondensatorem opór katodowy, znacznie większy, niż jest to potrzebne do uzyskania właściwej polaryzacji siatki. Przy założeniu idealnej symetrii wzmacniacza z układu zastępczego (rys. 16c) wynikają następujące uproszczone zależności charakteryzujące działanie wzmacniacza:

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{2} S \cdot \left[ (U_1 - U_2) + \frac{1}{D} (U_1 + U_2) \right], \\ J_2 &= \frac{1}{2} S \cdot \left[ (U_2 - U_1) + \frac{1}{D} (U_1 + U_2) \right], \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie  $S$  jest nachyleniem pentod w punkcie pracy, a  $D = 2 SR_k$  jest współczynnikiem dyskryminacji układu [16], [4].

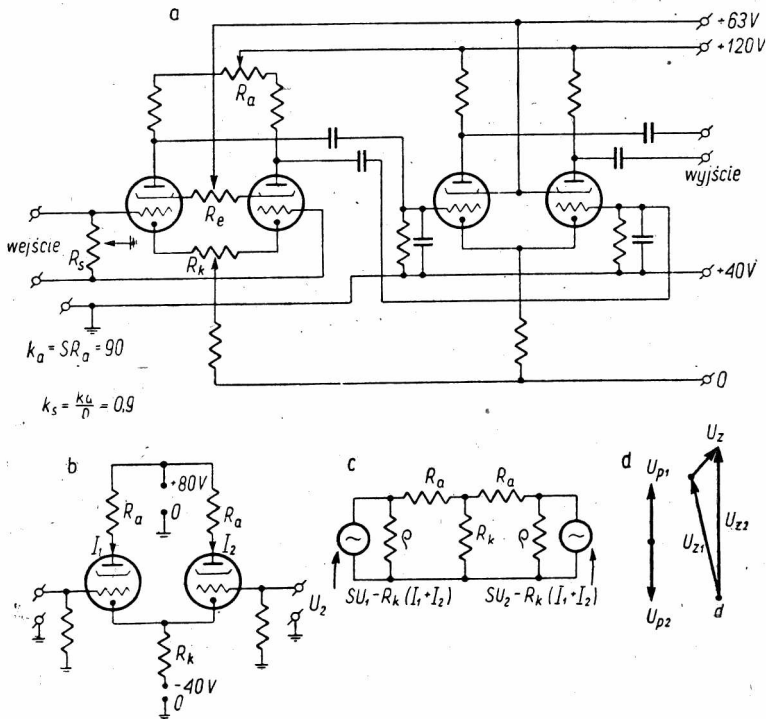
Z podanych wzorów wypływają ciekawe wnioski. Oba napięcia  $U_1$  i  $U_2$  sterujące wzmacniacz (rys. 16b) składają się z napięć  $U_p$  i  $U_z$  wytworzonych przez pacjenta i przez pole zakłóceń sieciowych. Działanie ich dogodnie jest rozpatrzyć osobno. Napięcia pacjenta  $U_p$  doprowadzone do siatek wejściowych wzmacniacza są w antyfazie, tj.

$$U_{p1} = -U_{p2} = \frac{1}{2} U_p.$$

Wzmocnienie tych napięć jest typowe i wynosi

$$k_a = SR_a = 1 \text{ mA/V} \cdot 90 \text{ k}\Omega = 90 \text{ V/V}.$$

Napięcia zakłóceń, pochodzące głównie od pola elektrycznego sieci [16], są synfazowe na obu siatkach  $U_{z1} = U_{z2} = U_z$ . Oscyloskop włączony różnicowo na końcu wzmacniacza nie odtworzy, oczywiście, napięć sterujących



Rys. 16. Przedwzmacniacz sygnału pacjenta jednego kanału.

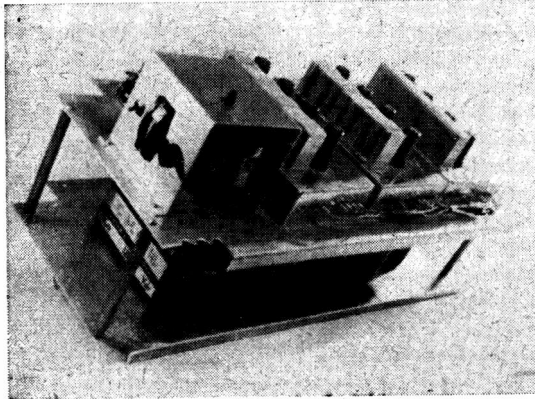
jednakowo obie siatki wejściowe wzmacniacza. Jednak nie można tu zastosować zwykłego wzmacniacza przeciwsobnego, gdyż przy wzmocnieniu potrzebnym do uzyskania właściwej amplitudy napięć serca stopień końcowy wzmacniacza byłby przesterowany zakłóceniami. W zastosowanym układzie  $D = 2SR_k = 100$ , tak że wzmocnienie synfazowe

$$k_s = k_a / D = 90 \text{ V/V} : 100 = 0,9$$

jest mniejsze od jedności. Pozwala to pracować przy napięciu wejściowym zakłóceń wielokrotnie większym od napięcia pacjenta bez obawy przesterowania wzmacniacza.

W dotychczasowych uproszczonych rozważaniach przyjęto dwa założenia: pierwsze, że napięcia zakłóceń sieciowych są na obu siatkach lamp wejściowych identyczne, drugie, że wzmacniacz jest idealnie symetryczny. Oba założenia są w praktyce spełnione tylko w przybliżeniu. Sygnały zakłóceń sieciowych nie są całkiem identyczne na obu siatkach, choćby

skutkiem oddziaływania pola magnetycznego sieci (rys. 16d) [16]. W ujęciu symbolicznym  $U_{z2} = U_{z1} + U_z$ , gdzie napięcie różnicowe zakłóceń  $U_z$  określa różnicę geometryczną między obu zakłócającymi napięciami. W tym przypadku można uważać, że oprócz identycznych synfazowych napięć zakłócających  $U_{z1}$  i  $U_{z2} - U_z$  działa jeszcze jedno napięcie  $U_z$ , ale już tylko na jedną siatkę. Ze wzoru (6) dla tego napięcia wypada wzmocnienie równe  $0,5 k_a = 45 \text{ V/V}$ . W rezultacie, wzmocnione napięcie jednej siatki ukaże się na obu anodach — zarówno lampy sterowanej, jak



Rys. 17. Zespół trzech przedwzmacniaczy sygnału pacjenta (po zdjęciu osłonnego pudła).

i drugiej lampy tej samej pary — i to z równą amplitudą i odwrotną fazą. Okazuje się, że układ ma właściwości symetryzacji, tj. że sygnał przyłożony na jedną tylko siatkę tak zostaje wzmocniony, jakby to samo napięcie było przyłożone różnicowo między obie siatki wejściowe. Ta właściwość układu powoduje, że niesymetryczne zakłócenia mogą sterować oscyloskop.

Podobnie jak założona uprzednio symetria przeszkód tak i idealna symetria elementów i lamp wzmacniacza nigdy nie jest spełniona całkowicie w praktyce i może spowodować wystąpienie na oscyloskopie silnych zakłóceń, nawet przy identycznych zakłóceniach na wejściu. Wynika to z tego, że wskutek niecałkowitej symetrii wzmacniacza napięcia synfazowe o równej amplitudzie po przejściu przez pierwszy stopień wzmacniacza nie będą miały jednakowej amplitudy na wyjściu, w wyniku czego dalsze stopnie wzmacniacza będą sterowane napięciem równym różnicy między nimi. Napięcie to zostanie w pełni wzmocnione i odtworzone na oscyloskopie. Z drugiej strony, dla rzeczywistego wzmacniacza o niecałkowitej symetrii istnieje taki stosunek napięć wejściowych, przy którym zniknie napięcie różnicowe na wyjściu.

W zbudowanym układzie zastosowano dwie metody dodatkowego zwalczania zakłóceń sieciowych. Jedna polega na doprowadzaniu stosunku napięć zakłócających do takiej wartości, przy której znika napięcie różnicowe na wyjściu (potencjometr  $R_s$ , rys. 16a); druga metoda polega na do-regulowaniu parametrów lamp i wielkości elementów wzmacniacza do zakłócających napięć wejściowych (potencjometry:  $R_e$ ,  $R_k$  i  $R_a$ ). Obie metody są skuteczne, jeżeli napięcia zakłócające nie są przesunięte w fazie lub odkształcone w różny sposób.

Na skutek symetryzującego działania wzmacniacza oba napięcia wyjściowe są praktycznie jednakowe co do wartości bezwzględnej, niezależnie od tego czy wzmacniacze są sterowane symetrycznie, czy też niesymetrycznie. Nieidealne wyrównanie elementów wzmacniaczy ma większy wpływ na nierówności napięć wyjściowych niż sposób sterowania.

W zbudowanym wzmacniaczu włączenie napięć wejściowych (dołączenie elektrod) może być symetryczne bądź niesymetryczne, zależnie od potrzeb i lokalnych warunków zakłóceń (dobroci klatki). Napięcia wejściowe wszystkich trzech przedwzmacniaczy wykorzystywane są do dalszej pracy jako niesymetryczne; pozwala to na wybór między dwoma napięciami o fazach odwróconych wzajemnie o  $180^\circ$ .

Pasma częstotliwości przenoszonych przez przedwzmacniacz wynosi  $0,04 \div 2500$  c/s, a więc spełnia (z dużym zapasem) wymagania stawiane dla kardiografów przez normy.

Do cechowania czułości wzmacniacza na jego wejście może być włączone napięcia wzorcowe 0,2 lub 0,5 mV otrzymywane z dzielnika oporowego oraz baterijki 1,5 V kontrolowanej woltomierzem. Układ kalibrujący znajduje się przy przedwzmacniaczach, ale może być włączany przez lekarza z zewnątrz, bez potrzeby wchodzenia do klatki.

## 2. 2. Zmiana kierunku obserwacji pętli<sup>15</sup>

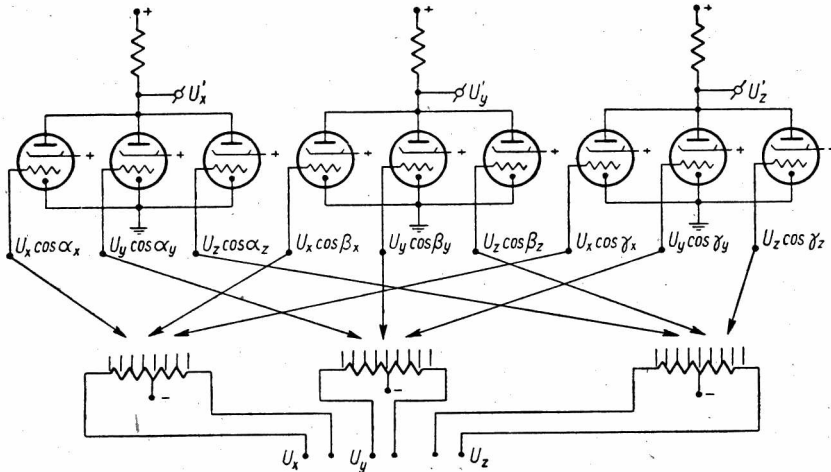
Aparat zawiera układ elektronowy, pozwalający na obrót elektryczny pętli, zarówno dla rejestracji pary rzutów na różne płaszczyzny, jak i do obserwacji oraz rejestracji stereoskopowej z różnych kierunków patrzenia. Pozwala to dogodnie obejrzeć pętlę ze wszystkich stron, a w razie potrzeby ustawić ją według normalnej pozycji serca.

Dla osiągnięcia tego celu przebadano układy, których zasadę działania przedstawiają uproszczone schematy na rys. 18 oraz 19.

Układ przedstawiony na rys. 18 pozwala na wykonanie ogólnej transformacji współrzędnych, zgodnej z równaniami (5). Napięcia przeznaczone do transformacji czerpane są z potencjometrów skokowych, zasilanych

<sup>15</sup> Patrz literatura 29, 8.

symetrycznie z wyjścia przedwzmacniaczy. Dodawanie trzech napięć odpowiadających trzem podstawowym kierunkom następuje przez sumowanie się spadków napięć, które dają trzy prądy anodowe płynące przez wspólny opór anodowy trzech pentod. W rezultacie, w układzie tym potrzeba 9 lamp do zrealizowania pełnej transformacji współrzędnych. Dla zmniejszenia ilości lamp i uproszczenia układu można pentody zastąpić przez duotriody, z tym że należy pracować małymi amplitudami, aby uniknąć wzajemnego oddziaływania napięć poprzez zakrzywienia cha-



Rys. 18. Układ do transformacji współrzędnych.

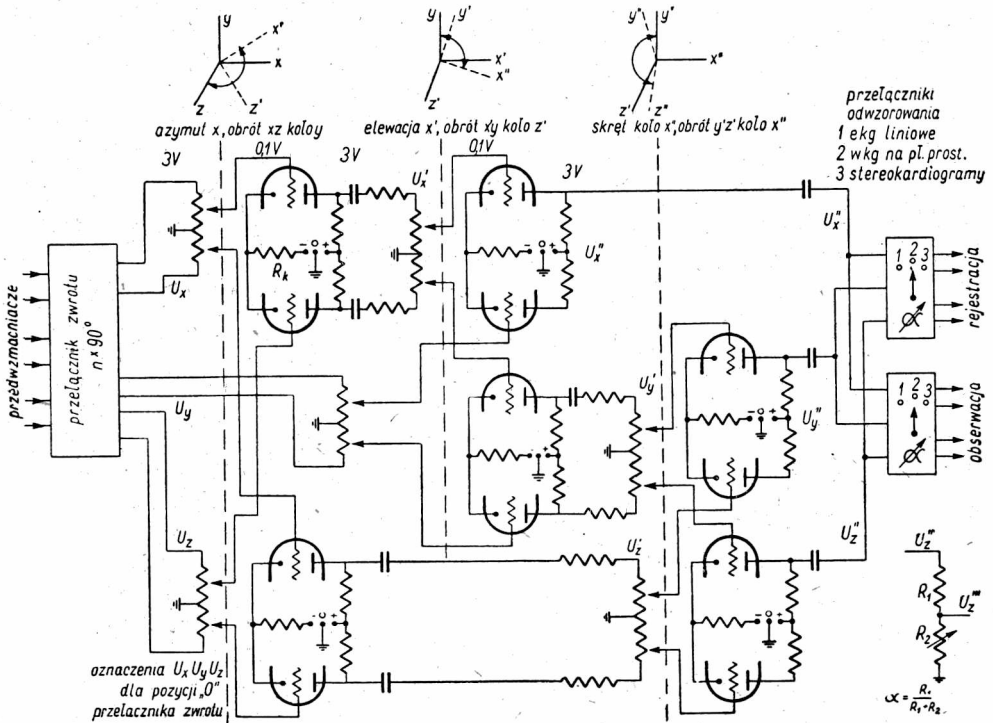
rakterystyk lamp (wpływu zmiany napięcia anodowego, powodowanego przez jedną triodę, na wzmocnienie dwu pozostałych triod). Sprężenie pojemnościowe kanałów przez pojemności międzyelektrodowe może być pominięte dzięki niskiemu zakresowi częstotliwości prądów serca.

Aby otrzymane na wyjściu układu trzy nowe napięcia odpowiadały rzutom wektora elektrycznego serca na trzy nowe kierunki, należy odpowiednio uzgadniać położenie dziewięciu przełączników napięć wejściowych. Uzgadnianie to jest kłopotliwe, ponieważ przy zmianie położenia jednego z przełączników należy doregulować położenie innych, wprowadzenie zaś sprężenia mechanicznego pomiędzy przełącznikami powoduje uciążliwe rozbudowanie przełączników i montażu. Z tych względów bardziej praktyczny jest układ przedstawiony na rys. 19, który choć zawiera więcej lamp niż poprzedni, to jednak pozwala na prostą i przejrzystą zmianę kierunków odwzorowania<sup>16</sup>. Trzy przełączniki, każdy o dziewięciu pozycjach i czterech szczotkach kontaktowych (po dwie na dwu piętrach), wystarczają aby regulować:

<sup>16</sup> Patent Nr 37233

1. azymut — obrót płaszczyzny  $xz$  koło  $y$ ,
2. elewację — obrót płaszczyzny  $x'y$  koło  $z'$ ,
3. skręt — obrót  $y' z'$  koło  $x''$ .

Pozwala to przy nietypowej pozycji serca regulować odchylenie koniuszka serca w przód i w tył albo w górę i w dół.



Rys. 19. Schemat uproszczony układu do zmiany kierunku obserwacji pętli.

Wpływ obrotu układu współrzędnych na wygląd wektokardiogramów przedstawiono na rys. 21 i 23.

Napięcia przeznaczone do transformacji czerpane są symetrycznie z wyjścia przedwzmacniaczy. Za pomocą przełącznika zwrotu obraz pętli może być obrócony skokiem dokoła każdego z kierunków podstawowych o wielokrotność kąta prostego. W dalszej części układu za pomocą trzech przełączników (azymutu, elewacji i skrętu  $x$ ) odbywa się obrót pętli co  $10^\circ$  w granicach  $\pm 40^\circ$ . Po superpozycji przekształceń zmiana kierunku obserwacji pętli może następować co  $10^\circ$  w granicach kąta pełnego ( $360^\circ$ ). Układ składa się z sześciu jednakowych układów cząstkowych, z których każdy sumuje algebraicznie dwa napięcia pacjenta o wielkościach i fazach odpowiadających nastawionemu na przełącznikach kątowi obrotu.

Układy cząstkowe posiadają duży opór katodowy, zapewniający jednakowe wzmocnienie obu lamp układu sumującego.

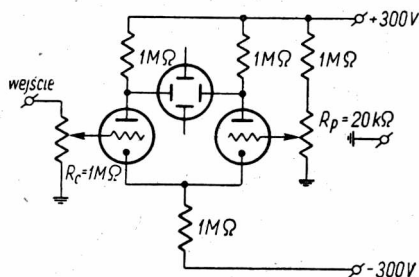
Po przeprowadzonym obrocie współrzędnych składowe napięcia przechodzą na przełączniki obserwacji i rejestracji. Przełączniki te umożliwiają uzyskanie na ekranach lamp oscyloskopowych elektrokardiogramów liniowych oraz kompletu rzutów prostopadłych lub stereoskopowych, odpowiadających nastawionym uprzednio kierunkom obserwacji. Głębina odwzorowania stereoskopowego może być regulowana (rys. 19) przez zmianę tej części składowego napięcia, w kierunku głębokościowym  $U_z''$ , które jako *dobatek stereoskopowy* jest dosumowywane do napięcia  $U_x''$  odchylającego światlik jednego obrazu pary stereoskopowej.

### 3. REJESTRACJA PRZESTRZENNYCH PRZEBIEGÓW ELEKTRYCZNYCH SERCA<sup>17</sup>

#### 3.1. Odwzorowanie na płaszczyznach prostopadłych

Najczęściej spotykanym dotychczas odwzorowaniem przebiegów wektora elektrycznego serca jest rejestracja rzutów pętli utworzonej przez obwiednię końców wektora na dwie płaszczyzny: czołową  $xy$  oraz strzałkową  $yz$  (rys. 12). Aby rzuty te wyznaczały jednoznacznie kształt przestrzenny pętli, konieczna jest rejestracja synchroniczna obu rzutów. W zbudowanym aparacie zastosowano do tego celu lampę oscyloskopową dwustrumieniową oraz trzy wzmacniacze oscyloskopowe, sterowane napięciami jednego z przełączników odwzorowania układu transformacji współrzędnych.

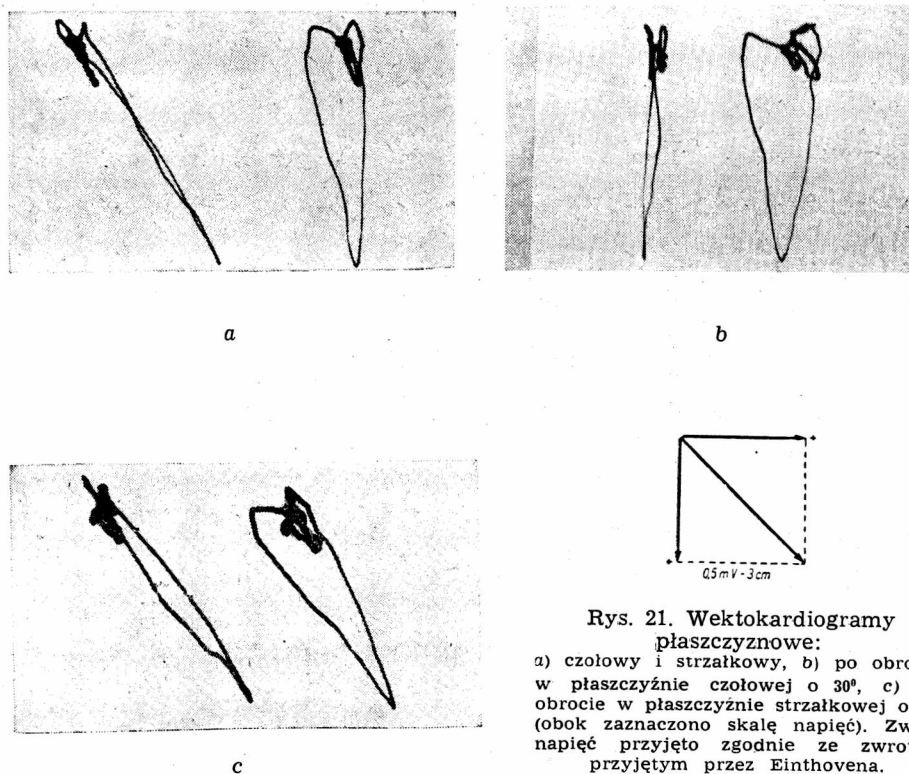
Schemat uproszczony jednego z trzech wzmacniaczy oscyloskopu przedstawiono na rys. 20. Napięcie sterujące, otrzymane z przełącznika odwzorowania, doprowadzone jest niesymetrycznie do jednej tylko siatki wzmacniacza. Regulacja wzmocnienia odbywa się za pomocą pojedynczego potencjometru  $R_c$ . Dzięki symetryzującym właściwościom układu (Cz. II, rozdz. 2. 1) napięcia wyjściowe sterują symetrycznie obie płytki odchylające lampy oscyloskopowej. Przesuw obrazu na ekranie odbywa się przez zmianę potencjału siatki drugiej lampy wzmacniacza. Regulacja ta powoduje symetryczną zmianę składowych stałych napięcia obu płytek oscyloskopu, przy czym przesuw następuje bez opóźnienia.



Rys. 20. Schemat uproszczony wzmacniacza oscyloskopu.

<sup>17</sup> Patrz literatura 10.

Przy nastawieniu przełącznika odwzorowań w położenie *płaszczyzny prostopadłe* i przy zerowym położeniu układu do transformacji współrzędnych płytki odchylające w pionie obu systemów lampy dwustrumieniowej sterowane są tym samym wzmożonym napięciem z odprowadzenia 1—4 (rys. 12). Równocześnie płytki odchylenia poziomego jednego



Rys. 21. Wektokardiogramy płaszczyznowe:

a) czołowy i strzałkowy, b) po obrocie w płaszczyźnie czołowej o  $30^\circ$ , c) po obrocie w płaszczyźnie strzałkowej o  $30^\circ$  (obok zaznaczono skalę napięć). Zwrot napięć przyjęto zgodnie ze zwrotem przyjętym przez Einthovena.

systemu sterowane są wzmożonym napięciem 1—2, drugiego zaś systemu — napięciem 1—3. W rezultacie powstają wektokardiogramy płaskie: czołowy i strzałkowy, które mogą być rejestrowane za pomocą nadbudowanego aparatu fotograficznego na wspólnej błonie o wymiarach  $6 \times 9$  cm. Po przeregulowaniu układu transformacji współrzędnych można rejestrować rzuty pętli na dowolną parę prostopadłych płaszczyzn.

Dla kanałów sterowanych napięciami  $U_x$  oraz  $U_y$ , wypadkowe wzmożnienie wynosi około  $200 \text{ V/mV}$ . Wzmocnienie kanału  $U_z$  jest o 10% większe zgodnie z rozważaniami w rozdziale 7. Przy tych wzmożnieniach ekran lampy oscyloskopowej o średnicy 90 mm jest w pełni wykorzystany.



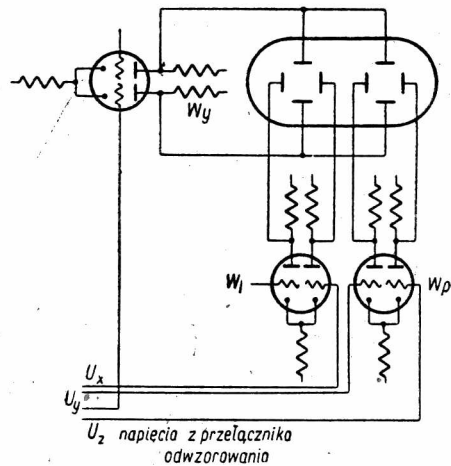
Na rys. 21a przedstawiono w skali 1:1 fotografię stykową, otrzymaną z aparatu fotograficznego wektokardiografu, a na rys. 21 b, c — obrazy obrysu elektrycznego tego samego serca po obrocie współrzędnych w azy-mucie oraz elewacji o  $30^\circ$ .

Cechowanie czułości kanału odbywa się za pomocą napięcia wzorcowego, włączonego w szereg z napięciem pacjenta. Cechowanie to pozwala ponadto na określenie zwrotu napięcia pacjenta dla każdego kierunku.

### 3. 2. Odzworowanie na płaszczyznach stereoskopowych

Do celów fotografii stereoskopowej można na ekranie tej samej lampy oscyloskopowej utworzyć dwa rzuty pętli na dwie płaszczyzny nachylone wzajemnie pod niewielkim kątem ( $8 \div 12^\circ$ ) zgodnie z rozważaniami w rozdziale 7. W położeniu *płaszczyzny stereoskopowej* przełącznik odzworowania kojarzy wzmacniacze oscyloskopowe według rys. 22<sup>18</sup>. Przy zerowym położeniu przełączników obrotu wzmacniacz  $W_y$ , stereowany napięciem  $U_y$  (rys. 13), odchyła oba świetliki w pionie. Lewy wzmacniacz  $W_l$ , stereowany napięciem  $U_x$ , odchyła lewy świetlik w poziomie, tworząc obraz pętli dla lewego oka (rys. 13). Wzmacniacz  $W_p$  sterowany jest zarówno napięciem  $U_x$  jak i dodatkowym stereoskopowym  $U_z$ , pochodzącym od napięcia „głębokościowego” (rozdział 7). Napięcie między anodami wzmacniacza  $W_p$  zmienia się proporcjonalnie do różnicy obu sterujących napięć. Prawy obraz pętli na oscyloskopie, przeznaczony dla prawego oka, odpowiada rzutowi pętli na płaszczyznę odchyloną od płaszczyzny czołowej o kąt stereoskopowy.

Dla ścisłości należy zaznaczyć, że obserwując opisane obrazy pętli przez okular widzi się w rzeczywistości przestrzenną pętlę nie od przodu, ale z kierunku odchylonego od protopadłego (osi  $z$ ) o połowę kąta stereosko-



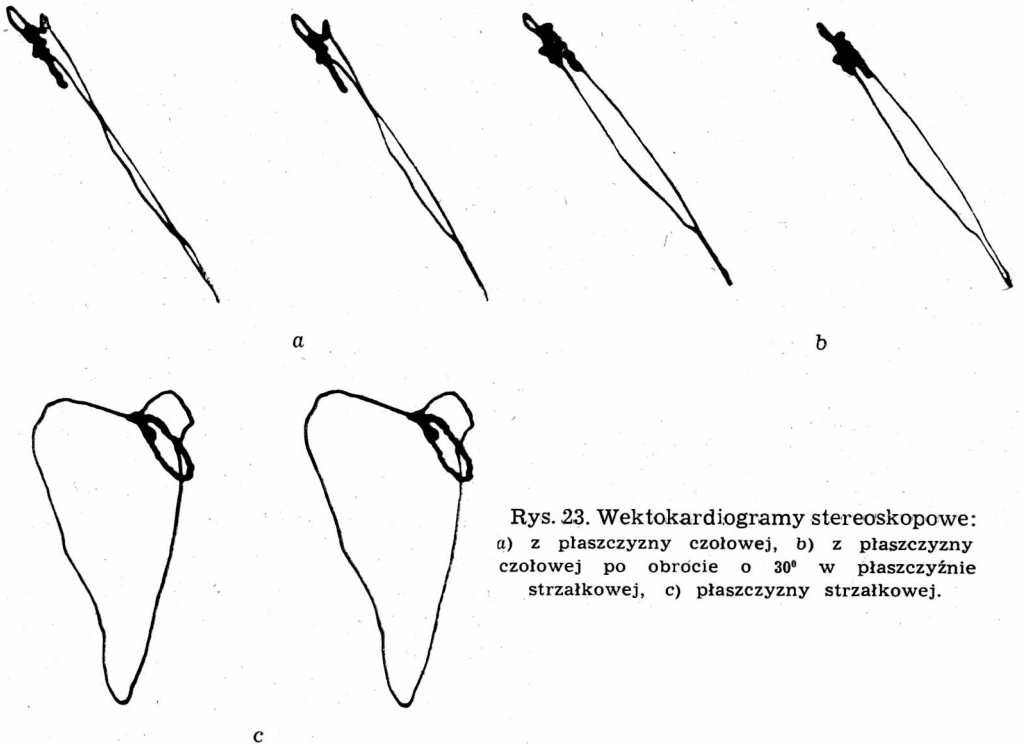
Rys. 22. Uproszczony schemat skojarzenia wzmacniaczy oscyloskopowych dla odzworowania stereoskopowego.

<sup>18</sup> Patent Nr 37 232.

powego. Odchylenie to, upraszczające nieco układ elektryczny, jest praktycznie bez znaczenia.

Nasuwają się pytania, czym należy się kierować przy wyborze kąta stereoskopowego  $\alpha$ , od którego zależy wrażenie głębokości. Jaki kąt stereoskopowy jest *prawdziwy*? Czy obrazy składowe i obraz wypadkowy widziany przez okular przy różnych wartościach współczynnika  $\alpha$  odpowiadają tej samej *pętli rzeczywistej*?

Wrażenie głębokości odczuwane przy patrzeniu na przestrzenne rzeczywiste przedmioty jest osobniczo różne. Pomijając wpływy psychologiczne, pochodzi to chociażby z różnego rozstawienia gałek ocznych u różnych obserwatorów; ponadto kąt stereoskopowy i wrażenie głębokości



Rys. 23. Wektokardiogramy stereoskopowe: a) z płaszczyzny czołowej, b) z płaszczyzny czołowej po obrocie o  $30^\circ$  w płaszczyźnie strzałkowej, c) płaszczyzny strzałkowej.

zależy od odległości patrzącego od obiektu obserwowanego. Dla obiektów *płytkich* i niezbyt bliskich kąt ten jest praktycznie jednakowy dla wszystkich punktów obiektu. Przy założeniu 65 mm jako przeciętnego rozstawienia oczu, otrzymuje się największy możliwy kąt stereoskopowy dla obiektu zbliżonego do oczu na odległość punktu bliskiego<sup>19</sup>. Odległość

<sup>19</sup> Punkt bliski odpowiada najmniejszej odległości, przy której jest możliwa akomodacja soczewek ocznych.

ta w wieku młodym wynosi 12 cm i dla osób starszych o zdrowym wzroku powiększa się do 50 cm. Odpowiada to kątom stereoskopowym od  $15^{\circ}$  (0,26 rad) do  $2^{\circ}$  (0,035 rad). Z punktu bliskiego w polu dokładnego widzenia (tj. na żółtej plamce siatkówki) znajduje się tylko część obrazu pętli widzianej w powiększeniu przez okular ( $2 \times 3$  cm). Z tego względu przewidziano w aparacie mniejsze kąty stereoskopowe, przeznaczone dla mniejszych obrazów — *dalej umieszczonych*.

Zasadniczo przy zmianie kąta stereoskopowego należałoby zmieniać i wymiary obrazu, np. przy zmniejszaniu  $U_z$  zmniejszać i  $U_y$ , ponieważ pętla *oddala się od obserwatora*. W praktyce dogodniej jest obserwować pełny obraz pętli. Przy dużym kącie stereoskopowym będzie on odpowiadał mniejszej i bliższej pętli *rzeczywistej*, przy mniejszym zaś kącie stereoskopowym — większej i dalszej pętli, jednak zawsze pętli o tych samych proporcjach. Należy oczekiwać, że w przyszłości na podstawie doświadczeń klinicznych wielkość kąta stereoskopowego, jak i wymiary obrazu zostaną znormalizowane.

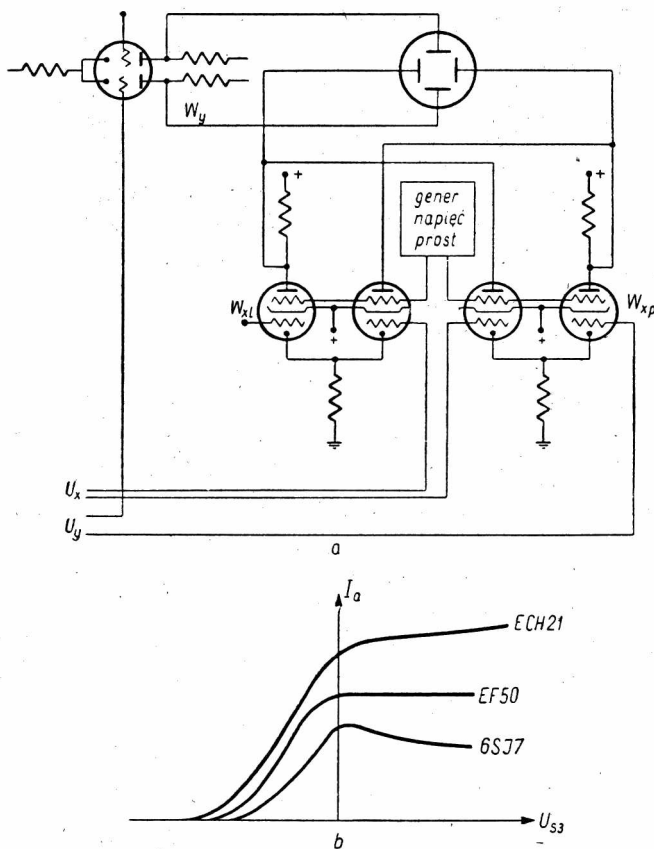
Dla uzyskania wiernych obrazów stereoskopowych należy dobrać egzemplarze lamp oscyloskopowych o systemach dokładnie równoległych, doregulować czułość poszczególnych systemów lamp oscyloskopowych oraz wzmocnienie wzmacniaczy. W przeciwnym razie obrazy stereoskopowe będą odpowiadały innemu kątowi stereoskopowemu niż ten, jaki wynika z dzielnika  $\alpha$ , przy czym może powstać obraz odpowiadający bliżej nieokreślonemu obróceniu pętli w przestrzeni. Na rys. 23 *a, b, c* przedstawiono trzy wektorkardiogramy stereoskopowe. Efekt stereoskopowy otrzymuje się po umieszczeniu kartki pomiędzy obrazami tak, aby oddzieliła lewy i prawy obraz dla lewego i prawego oka. Obrazy należy obserwować z odległości 15 do 30 cm, przy czym obrazy powinny być równoległe do oczu.

#### 4. BEZPOŚREDNIA OBSERWACJA PRZEBIEGÓW ELEKTRYCZNYCH SERCA

Do dogodnej obserwacji kształtu pętli potrzebna jest lampa oscyloskopowa o możliwie długiej poświacie ekranu, a to dlatego, że czas trwania przebiegów elektrycznych serca jest względnie krótki, około 0,1 sec., tj. około 10% czasu trwania jednej ewolucji serca. Wobec braku dwustrumieniowych lamp o długiej poświacie zastosowano do obserwacji lampę jednostrumieniową z ekranem typu P7, a potrzebne do obserwacji stereoskopowej dwa równoczesne obrazy uzyskano za pomocą przełącznika elektonowego. Oczywiście, w tym zastosowaniu przełącznik przełącza nie jak zwykle dwa obrazy *w pionie* ale dwa obrazy *w poziomie*.

Uproszczony schemat działania przełącznika przedstawiono na rys. 24a.

Przełącznik wykonany jest w postaci układu symetrycznego z zastosowaniem jako przełącznika lamp EF50. Lampy te pracują na przemian (parami) na wspólne opory anodowe. Napięcia sterujące wzmacniacze przełącznika elektronowego pochodzą z drugiego przełącznika odwzorowania (rys. 16), analogicznego do przełącznika przeznaczanego do grafii. Przez zastosowanie dwóch przełączników odwzorowania uniezależniono wza-



Rys. 24. Uproszczony schemat skojarzenia wzmacniaczy i przełącznika elektronowego dla skopii.

jemnie napięcia sterujące obu oscyloskopów, co umożliwiło np. równoczesną obserwację stereoskopową na jednej lampie oraz fotografię rzutów prostopadłych z drugiej lampy. Przełączanie przełącznika elektronowego następuje w takt przeskoków generatora napięcia prostokątnego, który steruje "trzecią siatką" lamp wzmacniacza. Lampa EF50 w zastosowaniu do przełącznika elektronowego wyróżnia się dobrą charakterystyką prądu

anodowego w funkcji napięcia trzeciej siatki. Na rys. 24b podano wspomnianą charakterystykę, na której widać wyraźny zakres stałości prądu anodowego; dla porównania podano równocześnie charakterystyki dwóch innych lamp mniej nadających się do tego celu.

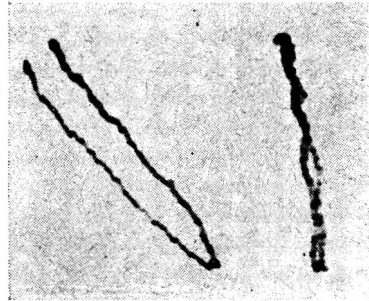
Częstotliwość przełączania wybrano równą 5000 c/s jako kompromis; przy większej częstotliwości powiększa się zamazywanie obrazu przez linie powstające przy przeskoku, przy mniejszej częstotliwości składowe kreski obu obrazów obserwowane przez okular nie zlewają się w jeden ciągły obraz przestrzenny.

Czas przeskoku świetlika wynosi kilka mikrosekund, tak że strata na jasności obrazów nie przekracza 5%.

## 5. URZĄDZENIA POMOCNICZE

### 5. 1. Selektor<sup>20</sup>

Pętle odtwarzane w kolejnych cyklach pracy serca nie są identyczne, nieuniknioną bowiem przyczyną zmienności są ruchy klatki piersiowej przy oddechu. W rezultacie wypadkowy obraz obserwowany na ekranie lub zarejestrowany przez aparat fotograficzny staje się po kilku ewolucjach serca nieczytelny. Wyświetlenie „ręczne“ jednego cyklu przebiegów za pomocą przycisku włączającego *jasność oscyloskopu*, jak również utrafienie właściwej części wektokardiogramu za pomocą wężyka spustowego aparatu fotograficznego są uciążliwe, niedokładne i powodują znaczny odpad wykonanych fotografii. Z tego względu zaopatrzone urządzenie w układ, który samoczynnie wyświetla na ekranach lamp oscyloskopowych ustalony z góry odcinek ewolucji serca (rys. 25). Dodatkowym zadaniem układu jest synchronizacja podstawy czasu kardiografu liniowego (szczegóły w Cz. I, rozdz. 5.3).



Rys. 25. Rzut czołowy i strzałkowy załamek T wybrany za pomocą selektora.

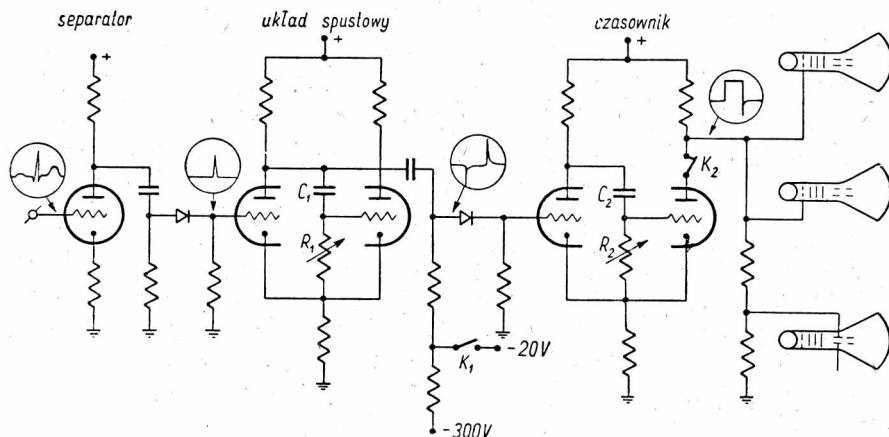
Uproszczony schemat blokowy selektora przedstawiono na rys. 26.

Napięcie czynnościowe serca, pobrane z wyjścia jednego ze wzmacniaczy wstępnych, doprowadzone jest przez separator na wejście selektora. Napięcie to po wzmocnieniu i częściowej eliminacji wolnych składowych uruchamia załamek R (rys. 6a) układ spustowy, który po czasie opóźnienia zależnym od wielkości  $R_1$   $C_1$  daje krótki impuls spustowy o stałej

<sup>20</sup> Patent Nr 37218.

amplitudzie (niezależnie od wielkości załamka  $R$ ). Zakres regulacji opóźnienia impulsu spustowego za pomocą oporu  $R_1$  wynosi  $0,1 \div 1,5$  sec.

Przy załączonym włączniku  $K_1$  impuls spustowy określa początek działania czasownika, ten z kolei wytwarza impuls prostokątny, rozjaśniający świetliki oscyloskopów. Czas rozjaśniania może być regulowany oporem  $R_2$  w zakresie  $0,1 \div 1,5$  sec. Start czasownika i rozjaśnianie świetlika może następować również ręcznie, bez opóźnienia, za pomocą przycisku  $K_2$ . W tym przypadku wyświetlenie obrazu trwa nie krócej od okresu nast-



Rys. 26. Uproszczony schemat selektora.

wionego na czasowniku, a może być przedłużone przez stałe przyciskanie klucza  $K_2$ .

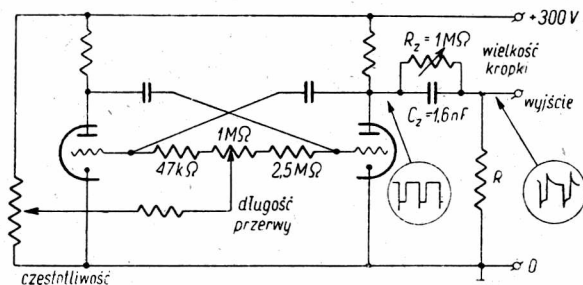
Impuls wyświetlający jest doprowadzony do siatki, która steruje jasność świetlików obu oscyloskopów do grafii i skopii, oraz do płytki odchylenia oscyloskopu pomocniczego.

## 5. 2. Znacznik czasu i zwrotu<sup>21</sup>

Dla celów diagnostycznych niezbędna jest znajomość prędkości obiegu końca wektora po pętli. W zbudowanym urządzeniu podziałkę czasową naniesiono na pętlę przez wygaszenie świetlika w równych odstępach czasu. Do tego celu wykonano generator impulsów prostokątnych (rys. 27), którego napięcie doprowadzone jest do siatki sterującej jasność oscyloskopu. Aby umożliwić czytelne znaczenie czasu poszczególnych załamków kardiogramu, biegnących z prędkościami znacznie różniącymi się między sobą, zarówno częstotliwość wygaszania, jak i długość wygaszonego odcinka można regulować niezależnie od siebie.

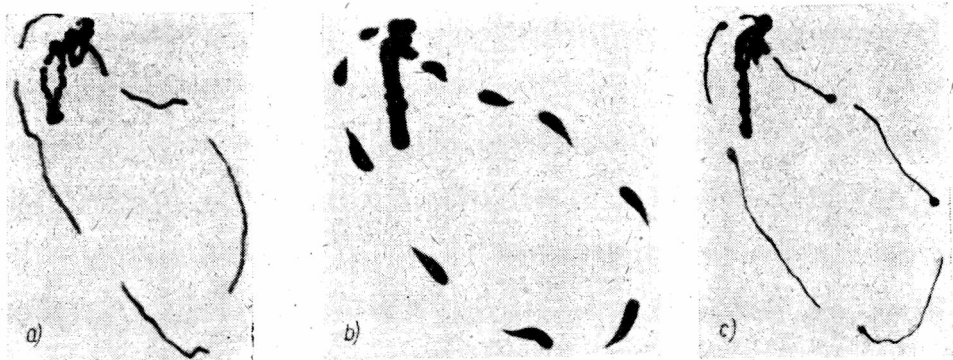
<sup>21</sup> Patent Nr 37217.

Dla cechowania częstotliwości przerywania obrysu przewidziano dwa napięcia sieciowe wzajemnie przesunięte w fazie, które można załączać na płytki odchyłające oscyloskopu w miejsce napięć pacjenta. Ilość przerw obrysu elipsy, utworzonej na ekranie przez napięcia sieciowe, pozwala określić i doregulować częstotliwość przerywania pętli.



Rys. 27. Schemat znacznika czasu i zwrotu.

Dla określenia zwrotu obiegu pętli zaakcentowano części początkowe (wcześniejsze) kresek. Odpowiedni do tego celu kształt impulsu otrzymuje się za pomocą układu złożonego z  $R_2$ ,  $C_2$ ,  $R$  (rys. 27). Początek impulsu dodatkowo rozjaśnia i równocześnie rozogniskowuje świetlik, w rezulta-



Rys. 28. a) Rzut płaszczyznowy pętli QRS (okres znaczenia 20 ms), b) znakowanie przy pomocy kropli, c) znaczenie czasu i zwrotu.

cie rysowana na ekranie krzywa składa się jakby z *zapatek*. Wygląd kardiogramu przy załączonym znaczniku czasu i zwrotu przedstawiono na rys. 28 a i c.

Przy często stosowanym znakowaniu zwrotu przebiegu przez zwykłe różniczkowanie prostokątnych impulsów czasowych, rozjaśniających ekran, powstała *kropla* ma albo kształt niewyraźny, albo przy dostatecznie małym kondensatorze układu różniczkującego kropla staje się wyraźna,

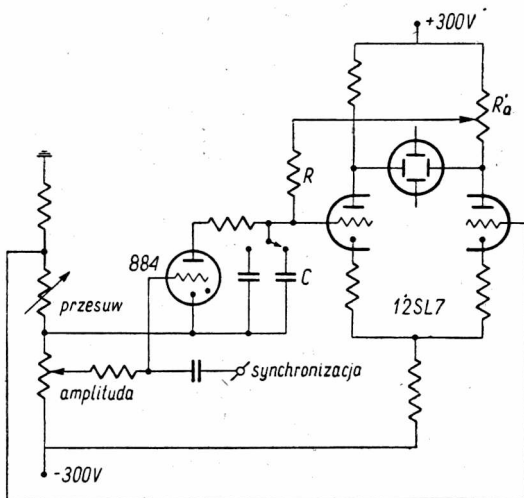
lecz wtedy zostają zatracone szczegóły kształtu rysowanej krzywej. Wynika to z tego, że do wyraźnego kształtu kropki grubość jej, a więc grubość rysowanej linii, nie może być znacznie mniejsza od jej długości. Dla porównania na rys. 28b pokazano wektokardiogram ze znakowaniem typu kropki.

### 5. 3. Elektrokardiograf liniowy

Oprócz dwóch głównych lamp oscyloskopowych, przeznaczonych do wektokardiografów, urządzenie zawiera trzecią pomocniczą lampę jednostrumieniową o długiej poświacie<sup>22</sup> przeznaczoną do elektrokardiografii liniowej. Lampa ta spełnia trzy zadania:

1. ułatwia powiązanie wyników otrzymywanych nową metodą wektorową i dawną — liniową,
2. umożliwia kontrolę napięć przychodzących z poszczególnych odprądzeń,
3. uwidoczni odcinek kardiogramu wybrany za pomocą selektora do wyświetlenia na głównych lampach oscyloskopowych.

Dla uzyskania wychylenia świetlika elektrokardiografu liniowego w pionie doprowadzono do jednej jego płytki odchylenia pionowego jedno



Rys. 29. Schemat podstawy czasu kardiografu liniowego.

napięcie sterujące płytki odchylenia pionowego elektrokardiografu liniowego odbywa się oczywiście napięciem podstawy czasu. Podstawa ta jest wolnobieżna i synchronizowana. Schemat jej podano na rys 29. Kondensator C, ładowany przez opór R i rozładowywany przez tyratron 884, stanowi układ generacyjny podstawy czasu. Narastające

na kondensatorze C napięcie zostaje przyłożone na jedną siatkę sterującą wzmacniacza podstawy czasu; wzmacniacz ten jest typu opisanego uprzednio. Dzięki symetryzującemu działaniu dużego oporu katodowego

<sup>22</sup> Lampa została wykonana w Zakładzie Radiotechniki P.W.

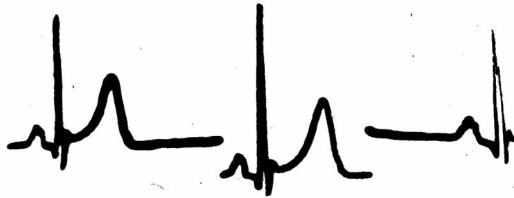


napięcia wyjściowe na obu anodach mają jednakową amplitudę i odwrotną fazę. Przez zastosowanie sprzężenia zwrotnego ze wzmacniacza na generator podstawy czasu, przebieg podstawy czasu jest dokładnie liniowy. Napięcie  $U$ , które przez opór  $R$  ładuje kondensator  $C$ , nie jest stałe, ale wzrasta w takim samym stopniu, jak i potencjał samego kondensatora. W tych warunkach spadek napięcia na oporze ładującym  $R$  jest stały i zapewnia ładowanie kondensatora  $C$  prądem stałym a w rezultacie liniowość podstawy czasu. Podstawa czasu może być synchronizowana impulsami pobieranymi z selektora. W przypadku miarowej pracy serca otrzymywane na ekranie kolejne elektrokardiogramy liniowe nakładają się na siebie. Ewentualna niemiarowość pracy serca wyraźnie uwidoczni się na ekranie.

Dla kontroli pracy selektora na drugą płytkę pary odchylającej w pionie załączona jest część napięcia impulsu wyświetlającego, w wyniku czego wyświetlony odcinek elektrokardiogramu zostaje na elektrokardiografie liniowym nieco obniżony (rys. 30).

#### 5. 4. Demodulator jasności<sup>23</sup>

Ilość światła wytwarzanego na ekranie oscyloskopu na poszczególnych odcinkach obrysu zależy, oczywiście, od czasu, jaki na tym odcinku przebywa świetlik. W rezultacie jasność świecenia obrysu modulowana jest prędkością świetlika na ekranie. Ilość światła otrzymanego z punktu należącego do obrysu, np. QRS, jest kilkanaście razy mniejsza niż otrzymana np. z załamka  $T$ , świecenie zaś „punktu wyjściowego“ obrysu jest nieproporcjonalnie silne. Zatem, gdy jasność oscyloskopu zostanie tak dobrana, aby otrzymać dobrze naświetlone zdjęcie zespołu QRS, otrzymuje się równocześnie prześwietlony (załany) załamek  $T$  i „słońce“ w miejscu punktu spoczynkowego. Wada ta zaznacza się jaskrawo w większości urządzeń opisanych w publikacjach zagranicznych.



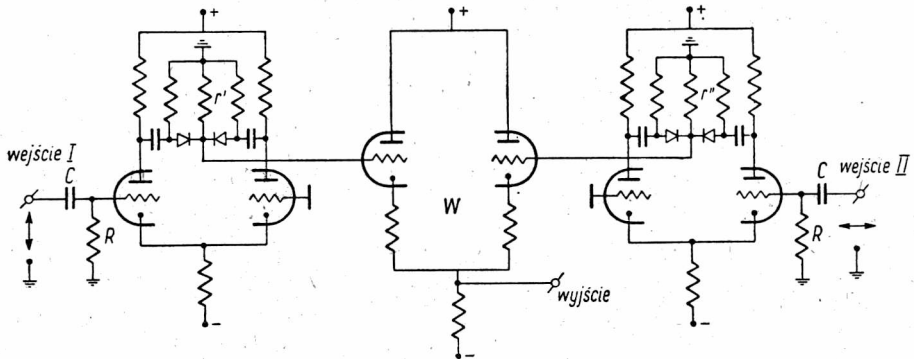
Rys. 30. Elektrokardiogram liniowy.

Dla otrzymania równo naświetlonej fotografii obrysu zastosowano układ elektronowy, który wyrównuje jasność poszczególnych odcinków obrysu, tj. demoduluje szkodliwą modulację *szybkościową*. Zadaniem demodulatora jasności jest wytworzenie napięcia proporcjonalnego do pochodnej

<sup>23</sup> Patent Nr 37216.

wypadkowego przesunięcia świetlika po ekranie niezależnie od znaku tej pochodnej.

Schemat demodulatora podano na rys. 31. Na zaciski wejściowe układu jest włączone napięcie sterujące pionowe płytki lampy oscyloskopowej, przeznaczonej do fotografii. Napięcie to, po zróżniczkowaniu przez układ RC, jest wzmacniane przez opisany uprzednio wzmacniacz symetryzujący. Napięcia anodowe tego wzmacniacza nie mogą być bezpośrednio wykorzystane do demodulacji jasności, gdyż świetlik byłby rozjaśniany w czasie wzrostu napięcia, przygaszany zaś w czasie malenia napięcia, choć szybkość świetlika na ekranie w obu wypadkach byłaby równa. Za pomocą dwóch prostowników, załączonych na wyjścia wzmacniacza, pobiera się z obu jego napięć anodowych jedynie dodatnie przyrosty napięcia, przy wzroście napięcia sterującego — z jednej anody, przy zmniejszaniu się — z drugiej anody. W rezultacie na oporze  $r'$  powstaje napięcie odpowiadają-



Rys. 31. Schemat uproszczony płaszczyznowego demodulatora jasności.

jące modułowi prędkości zmian przyłożonego napięcia. Na oporze  $r''$  powstaje w analogiczny sposób napięcie proporcjonalne do składowej poziomej prędkości świetlika na ekranie.

W zasadzie oba składowe napięcia powinny być dodane wektorowo tak, jak dodaje się składowe prędkości. Dla uproszczenia układu elektrycznego uzyskane napięcia dodawane są algebraicznie za pomocą podwójnego wtórnika katodowego  $W$ . Jakkolwiek błąd popełniony w ten sposób może dochodzić do kilkudziesięciu procent, to jednak można go z powodzeniem pominąć, a to dzięki logarytmicznemu przebiegowi charakterystyki zaczerpnienia błony fotograficznej w funkcji jasności.

Uzyskane na wyjściu układu napięcie zostaje doprowadzone do lampy oscyloskopowej sterującej jasność świetlika.

Dla współpracy selektora z demodulatorem lub znacznikiem czasu potrzebny jest układ dodający poszczególne napięcia przeznaczone do łącznej regulacji jasności oscyloskopów.

## 6. ZASTOSOWANIE MEDYCZNE STEREOKARDIOGRAFII

Pierwszym oczywistym wnioskiem, nasuwającym się w wyniku przestrzennego charakteru przebiegu zjawisk elektrycznych serca, jest to, że odtworzenie tych zjawisk powinno być również trójwymiarowe. Wniosek ten jest słuszny, zwłaszcza w zastosowaniu do klinicznej praktyki diagnostycznej. Obrazy przestrzenne, związane funkcjonalnie z geometrycznymi wymiarami serca, są przejrzyste i zrozumiałe dla lekarza-praktyka, a to jest niezbędnym warunkiem użyteczności metody i aparatury.

Obserwując zawile pętle wektorkardiogramu wyrażonego w postaci rzutów na dwie płaszczyzny wzajemnie prostopadłe i porównując je z pętlą obserwowaną przez stereoskop, kiedy to bez długich i kłopotliwych konstrukcji geometrycznych i bez modeli z drutu można jednym spojrzeniem odtworzyć kolejność i przebieg wektora elektrycznego serca, dochodzi się do wniosku, że przy zastosowaniu nowej metody można oczekiwać znacznego ułatwienia i pogłębienia diagnostyki chorób serca.

Spośród możliwości, jakie stwarza zbudowana aparatura, na czoło wysuwa się zmniejszenie ilości znanych obrazów kardiograficznych. Mianowicie przebieg ekgramów kończynowych jak i kształt rzutów wkgramów na poszczególne płaszczyzny zależy od położenia serca w pacjencie [21]. W wyniku tego kardiolog musi przyswoić sobie dużą ilość różnych obrazów kardiograficznych, odpowiadających tym samym schorzeniom serca. Z drugiej strony, w niektórych szczególnych przypadkach położenia serca (np. *koniuszkiem do przodu*), kardiogram otrzymywany z typowych odprowadzeń liniowych nabiera cech patologicznych, odpowiadających schorzeniom serca zajmującego typową pozycję w klatce piersiowej (pozory zawału tylnej ściany). Odwzorowanie przestrzenne pętli związane z położeniem serca jak i możliwość obrotu pętli do znormalizowanego położenia wykluczy w znacznym stopniu wpływ różnorodności osobniczej. Ujednoczenie typów otrzymywanych obrazów klinicznych ułatwi zarówno diagnozę w klinice, jak i naukę kardiografii na uczelni.

Szczególnie wiele należy oczekiwać w przypadkach schorzeń *milczących* okolic serca (np. przy zawałe tylnej ściany serca), które nie ujawniają się na ekgramach liniowych, zdejmowanych z odprowadzeń kończynowych czy przedsercowych. Zmiana kształtu i odchylenie pętli zespołu *QRS* od właściwego kierunku pozwoli w prosty sposób ustalić położenie martwicy lub przerostu mięśnia sercowego. Podobnie przestrzenna rozbieżność kątowna między pętlami *QRS* i *T*, narastająca w sposób charakterystyczny z wiekiem, wystąpi w pełni przy obserwacji stereoskopowej, mimo że na rzutach płaskich jest mało widoczna.

W przypadkach rozbieżności między osią elektryczną serca a jego osią anatomiczną, przy badaniach fizjologicznych i farmakologicznych właści-

wości serca, jak i w wielu innych przypadkach opracowana metoda otwiera nowe szerokie perspektywy. Rozpoczęte badania kliniczne dały pierwsze rezultaty potwierdzające oczekiwania.

#### 7. ZESTAWIENIE WYNIKÓW

Opracowano metodę i zbudowano urządzenie do bezpośredniej obserwacji i rejestracji obrazu przestrzennego obwiedni wektora elektrycznego serca.

Do otrzymania pary obrazów stereoskopowych zastosowano lampę oscyloskopową oraz układ elektronowy, który wytwarza różnicę stereoskopową między składowymi obrazami pary z głębokościowego napięcia pacjenta. Zaletą tej metody w porównaniu z innymi stosowanymi dotychczas jest znacznie większa dokładność obrazu przestrzennego, a ponadto szybkość i bezpośredniość otrzymania obrazów stereoskopowych. Zastosowanie elektronowej transformacji współrzędnych wektora serca pozwoliło na obracanie obrazu pętli na drodze elektrycznej przez co stało się możliwe obejrzenie pętli z różnych kierunków.

Za pomocą prostego przełączania odwzorowanie stereoskopowe pętli można zastąpić typowym odwzorowaniem przez rzutowanie na dwie płaszczyzny prostopadłe, przy czym układ transformacji współrzędnych pozwala na wybór położenia tych płaszczyzn w przestrzeni.

Dzięki umieszczeniu pacjenta w klatce ekranującej i przez zastosowanie przedwzmacniaczy typu encefalograficznego uzyskano obraz przestrzenny przebiegów wolny od zakłóceń i o wymiarach znacznie większych od obrazów liniowych, uzyskiwanych za pomocą komercyjnych kardiografów.

Szereg urządzeń pomocniczych służy do usprawnienia pracy aparatury. Są to:

1. wbudowany ekgraf liniowy o podstawie czasu synchronizowanej zespołem QRS,
2. selektor obrazu do samoczynnego jednorazowego wyświetlenia na ekranie lampy oscyloskopowej o dużej poświacie z góry ustalonego fragmentu obserwowanego procesu,
3. demodulator szybkościowy, który wyrównuje jasność poszczególnych odcinków wykresu,
4. znacznik czasu i zwrotu ruchu końca wektora itd.

W omawianych układach znalazła zastosowanie technika impulsowa w postaci spotykanej w urządzeniach radionawigacyjnych, radiowych stacjach przekaźnikowych itd. Zbudowane urządzenie jest bogato wyposażone, łączna ilość użytych lamp wynosi około 100. Praktyka kliniczna okaże w przyszłości, jakie należałoby wprowadzić modyfikacje w zbudowanych urządzeniach składowych lub jakie dodatkowe urządzenia byłyby jeszcze potrzebne.

## 8. UWAGI KOŃCOWE

Prace badawcze i konstrukcyjne prowadzono w Zakładzie Budowy Aparatów Elektromedycznych Politechniki Warszawskiej. Z inicjatywą pracy nad elektrokardiografią przestrzenną zwróciła się do Zakładu w roku 1951 Sekcja Kardiologiczna Towarzystwa Internistów Polskich. Prace można było rozpocząć dzięki dotacji Komisji Popierania Twórczości Naukowej i Artystycznej przy Urzędzie Rady Ministrów, a w następnym roku kontynuować dzięki dotacji Polskiej Akademii Nauk. Szpital Miejski nr 6 — Oddział Kardiologiczny dra Żery — umożliwił prowadzenie badań z budowaną aparaturą w warunkach szpitalnych.

Do zespołu pracowników zajętych przy opracowywaniu metody i wykonywaniu opisanego urządzenia, oprócz autorów artykułu, należał również dr med. Jan Kwoczyński, inicjator pracy i stały doradca od strony medycznej zagadnienia. Autorzy składają podziękowanie drowi J. Kwoczyńskiemu, prof. A. Kilińskiemu, prof. S. Manczarskiemu i mgrowi inż. J. Kosackiemu za wnikliwe uwagi otrzymane przy opracowywaniu tego artykułu.

## WYKAZ LITERATURY

1. Abderhalden E.: Lehrbuch der Physiologie — Benno Schwabe, Basel 1946.
2. Akuliniczew I.: Znaczenie dynamicznych i wektroelektrokardiograficznych issledowanij — Kliniczeskaja Medicina t. 29, 1951, s. 44.
3. Antoniewicz J.: Wzmacniacze różnicowe — Przegl. Telek. nr 10—11—12, 1950, s. 300.
4. Antoniewicz J.: Urządzenia do badań elektrobiologicznych — PZWL, 1951.
5. Auerbach J.: Zasady budowy i działania elektrokardiografu — Przegl. Telek. nr 7—8, 1951, s. 231.
6. Boncz-Brujewicz A. M.: Primienienje elektronnych łamp w ekspierimientalnoj fizikie — Gos. Izd. Tech. Teor. Liter., Moskwa—Leningrad, 1950.
7. Burch G., Winsor T.: A Primer of Electrocardiography — H. Kimpton, London 1945.
8. Chance, Hughes, Nichol, Sayre, Williams: Waveforms — Mc Graw-Hill, New York, 1949.
9. Conway J., Cronvich J., Burch J.: Observation on the Spatial Vectorcardiogram in Man — Am. H. J. t. 38, 1949, s. 537.
10. Cronvich J. A., Abildskov J. A., Jackson C. E., Burch G. E.: An Approximate Derivation for Stereoscopic Vectorcardiograms with the Equilateral Tetrahedron — Circulation, Vol. II, czerw. 1950, s. 126.
11. Duchosal P., Sulzer R.: La Vectocardiographie — S. Karger Bale (Suisse), 1949.

12. EKG i EEG najczęściej spotykane w Polsce, (Sprawozdanie ZBAE dla Min. Zdrowia), Warszawa, 1952.
13. Grishman A., Borun R.: Spatial Vectocardiography: Technique for the Simultaneous Recording of the Frontal, Sagittal and Horizontal Projections — *Am. H. J.* t. 41, 1951, s. 483.
14. Johnston D.: Electroencephalograph amplifier — *W. W.*, t. 28, nr 287, 288, 289, 1947.
15. Keller J., Ekiel J., Kwoczyński J.: Sprawozdania z prac nad elektrokardiografią przestrzenną za rok 1951 i 1952 (nie publikowane), w posiadaniu ZBAE, KPTNA i PAN.
16. Keller J.: Rejestracja przebiegów biologicznych — *Zesz. Nauk. Pol. Warsz. Elektryka* nr 4, 1954.
17. Kowarzyk H.: Przyczynek do rozwoju kardiografii wektorowej w Polsce — *P. T. Lek.* nr 11—12, 1951.
18. Kowarzyk H., Kubisz T.: Wektokardiograf — *Acta Physica Polonica* nr 3, 1952, s. 213.
19. Kubisz T., Ziembicki J.: Próby wykonania przestrzennego wektokardiogramu serca. Materiały na sesję nauk. Pcl. Wrocławsk. 1952, s. 431.
20. Kwoczyński J.: Konstrukcja przestrzennego elektrokardiogramu — *P. T. Lek.* nr 42, 1951.
21. Kwoczyński J.: Zależność kardiogramu od przestrzennego położenia serca — *P. T. Lek.* nr 14, 1952.
22. Kwoczyński J.: Nowe rozwiązanie techniczne elektrokardiografii przestrzennej — *P. T. Lek.* nr 33, 1953.
23. Lüscher H.: Stereo Photographie — Union Deutsche Verlagsgesellschaft, Berlin SW 19.
24. Manczarski S.: Zagadnienie przenoszenia myśli w świetle badań radiotechnicznych — *Przeł. Telek.* nr 10, 1946, s. 282; nr 11—12, 1946, s. 313; nr 1—2, 1947, s. 25; nr 3—4, 1947, s. 82.
25. Parnum D.: Transmission Factor of Differential Amplifiers — *W. E.* t. 27, nr 319, 1950, s. 125.
26. Parr S., Walter W.: Amplifying and Recording Technique in Electrobiolgy with Special Reference to the Electrical Activity of the Human Brain — *J. I. E. E.*, cz. III, t. 90, nr 11, 1943, s. 129.
27. Rogers W., Parrock H.: Electronic Apparatus for Recording and Measuring Electric Potentials in Nerve and Muscle — *P. I. R. E.* t. 32, 1944, s. 738.
28. Schellong F.: Grundzüge einer klinischen Vektokardiographie des Herzens — J. Springer, Berlin 1939.
29. Schmitt O.: Cathode-ray Presentation of Treedimensional Data — *Journ. Appl. Phys.* t. 18, nr 9, 1947, s. 819.
30. Whipple G. H.: A Simple Technique for Registering the Direction of Rotation of Vectorcardiographic Loops — *Am. H. J.* Vol. 44, nr 3, 1952, s. 384.
31. Wodołaskij L.: Technika kliničeskoj elektrografii — *Medgiz.*, 1952.

И. КЕЛЛЕР, И. ЭКИЕЛЬ

## СТЕРЕОКАРДИОГРАФ

## Резюме

1. ПРОСТРАНСТВЕННОЕ ИЗОБРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО СЕРДЕЧНОГО ВЕКТОРА<sup>1</sup>

В первенствующих врачебных лабораториях давно уже было обращено внимание на трёхмерные свойства происходящих в сердце электрических явлений и на большое значение пространственного их воспроизведения для научных исследований, а также для диагностических и дидактических целей.

Самое простое решение этой проблемы состоит в применении аппаратуры, дающей возможность синхронического регистрирования двух проекций контура конца сердечного вектора на две взаимно перпендикулярные плоскости. На основании этих проекций были построены пространственные модели регистрируемых вектокардиографических петель, а затем модели эти были сняты при помощи стереоскопического фотоаппарата. Неудобства такого приёма очевидны.

Для полного использования возможностей доставляемых пространственным изображением сердечного вектора надлежит:

- а. сделать возможным непосредственное пространственное наблюдение векторного контура из произвольно избранного направления;
- б. сделать возможным синхроническое регистрирование двух проекций векторного контура на две взаимно перпендикулярные плоскости с особым учётом пары стереоскопических проекций;
- в. увеличить масштаб наблюдаемых и регистрируемых явлений, при одновременной возможности непосредственного наблюдения и регистрирования частичных процессов, напр. зубца  $T$ , в особенно крупном увеличении.

Для пространственного изображения хода кривой сердечного вектора применён стереоскопический метод, т. к. он с одной стороны не требует специальных квалификаций наблюдателя, и при том техника стереоскопического изображения вектокардиографической петли сравнительно нетрудна. Благодаря незначительному пространственному протяжению петли можно успешно пренебречь так. наз. перспективной поправкой, а также влиянием угла возвышения на размеры изображения. Для наблюдения стереоскопической вектокардиографической петли достаточен обыкновенный окуляр, состоящий из двух линз, имеющих по + 7 диоптрий каждая. При соответствующей зрению установке линз и при установке обоих составляющих изображений в несколько меньшем расстоянии, мнимые изображения петли передвигаются таким образом, что они взаимно покрываются при естественном, непринужденном положении глаз. Применяя этот наблюдательный метод, можно получить пространственное изображение петли размерами в  $6 \times 4$  см (при размерах составляющих петли в 3 и 2 см), что вполне достаточно для диагностических целей. Хотя установка составляющих изображений на расстояние меньше чем промежуток между глазами несколько уменьшает впечатление оптической глубины, однако в случае вектокардиографической петли это является выгодным, так как одновременно уменьшается ошибка пространственного отображения.

<sup>1</sup> Электрический сердечный вектор отображает действие дипольного слоя проходящего через миокардий во время каждой эволюции сердца. При ряде упрощающих предположений принимаем, что производимое этим слоем между двумя одинаково удаленными от сердца точками напряжение — пропорционально проекции сердечного вектора на ось соединяющую эти точки и расстоянию между ними.

## 2. ИЗГОТОВЛЕНИЕ АППАРАТУРЫ

Функциональные напряжения сердца взяты из трёхперпендикулярной системы электродов (рис. 12), которая непосредственно даёт напряжения необходимые для воспроизведения изображений петли на осциллокопе, и одновременно позволяет избежать возмущающих напряжений, вызываемых дрожанием мышц конечностей. Для получения больших изображений (1 мв — 5 см) без видимых возмущений производимых колебаниями в электрической сети, применены предусилители энцефалографического типа и экранирующая пациента клетка. Полученные после усиления три напряжения от трёх проводов определяют сердечный вектор

$$V = iV_x + jV_y + kV_z.$$

Основной частью аппаратуры является стереокардиоскоп для непосредственного наблюдения и стереокардиограф для регистрирования вектокардиограмм.

Как для получения пары стереоскопических изображений, так и для возможности поворота петли в пространстве применена электронная трансформация координат. Эта трансформация позволяет (без перемещения электродов) создавать, из трёх получаемых от пациента напряжений, новые напряжения, соответствующие проекциям сердечного вектора на оси с произвольно избранными в пространстве направлениями. Это осуществлено при помощи ламповой системы, действие которой даёт математическую трансформацию выражающуюся формулой:

$$u = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma$$

в которой  $\alpha$ ,  $\beta$  и  $\gamma$  — углы направлений новой оси  $U$  по отношению к первоначальным осям  $XYZ$ . Система представленная на рис. 22 создаёт пару стереоскопических изображений. Изображение петли на левой стороне экрана осциллокопа соответствует векторному контуру сердца, видимому глазом, смотрящим из направления  $z$  (рис. 13). Правая система осциллокопа отклоняет пучок света в вертикальном направлении тем же напряжением, что и левая система, отклоняющее же в горизонтальном направлении напряжение отличается вследствие трансформации оси  $X$  (рис. 13) на новую ось  $X'$ , отклоненную от оси  $X$  под углом  $\alpha$  вследствие промежутка между глазами и расстояния петли от наблюдателя. Так как угол этот довольно мал ( $\alpha = 10^\circ$  или 0,17 рад), то формулу трансформации можно упростить  $V'_x = V_x + \alpha V_z$ .

Для возможности поворота петли в пространстве применена ламповая система, состоящая из трёх аналогичных частей, (рис. 19). Каждая из этих частей позволяет повернуть петлю вокруг одной из трёх осей т. е. трансформировать в плоскости два напряжения пациента.

Для непосредственного наблюдения петли применена осциллокопная лампа с продолжительным длинным свечением экрана, что было необходимо ввиду незначительной частоты повторения сердечных эволюций и ввиду импульсного характера электрических процессов. Для создания пары изображений применён электронный переключатель, переключающий отклоняющее в горизонтальном направлении напряжение. Так как изображения отдельных эволюций не тождественны (между прочим вследствие дыхательных движений пациента) — то для избежания запутанного и многократного изображения петли применён электронный селектор изображений, дающих возможность однократного изображения заранее избранного отрезка процесса. Начальная и конечная фазы избранного отрезка петли обозначаются на вспомогательном осциллокопе, регистрирующем линейную кардиограмму. Примененная во вспомогательном осциллокопе развертка синхронизирована им-



пульсом регистрируемой кардиограммы. Это облегчает наблюдение временных процессов (напр. неравномерности эволюций), а также установку селектора. Построенная аппаратура содержит среди других и демодулятор, задачей которого является регулировка напряжения луча лампы осциллографа пропорционально величине абсолютной скорости передвижения пятна по экрану. Действие демодулятора позволяет избежать возникновения солнца в исходной точке, а петли извилин *T* и *P* не замазаны, причём сохранена ясная петля комплекса *QRS*. Кроме наблюдения и регистрирования стереоскопических проекций петель аппаратура позволяет наблюдать и регистрировать также проекции петель на взаимно перпендикулярные плоскости. Примеры зарегистрированных кардиограмм показаны на рис. 21, 23, 25, 28<sup>2</sup>.

### 3. МЕДИЦИНСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ АППАРАТУРЫ

Наблюдение сложных петель вектокардиограммы, представленной в форме проекций на две перпендикулярные плоскости и сравнение их с петлей наблюдаемой при помощи стереоскопа приводит к неотразимому заключению, что новый метод позволит значительно облегчить и углубить диагностику сердечных болезней. Среди новых возможностей разработанного метода одной из первых является уменьшение числа известных кардиологических картин. Форма кардиограмм зависит от расположения сердца в теле пациента, а вследствие этого кардиолог должен присвоить значительное количество разных кардиографических картин, соответствующих одним и тем же сердечным болезням. С другой стороны в некоторых особых случаях расположения сердца, кардиограмма, полученная из типичных линейных переводов, принимает патологический характер. Пространственное изображение и возможность поворотов петли в некоторое нормированное положение в значительной степени устраняет влияние индивидуальных различий. Однородность типов получаемых клинических картин облегчит не только диагноз на практике, но и преподавание кардиографии в училище. Для публицистики и для дидактических целей можно применять очень простую двухцветную стереоскопию.

Особно важных результатов можно ожидать в случаях болезней безмоловных полостей сердца, которые не обнаруживаются на линейных кардиограммах конечностей или предсердия. Изменение формы и отклонение петли комплекса *QRS* от свойственного направления позволит простым образом определить положение омертвления миокардия и подобным образом пространственную дивергенцию (пространственное расхождение) между петлями *QRS* и *T*, увеличивающуюся вместе с возрастом явственно выступит при стереоскопических наблюдениях.

В случаях отклонения электрической сердечной оси от анатомической, а также при физиологических и фармакологических исследованиях — разработанный метод открывает широкие перспективы. Предпринятые клинические исследования дали уже результаты, подтверждающие такие ожидания.

<sup>2</sup> Рис. 23: а) пара стереоскопических вектокардиограмм, б) та же пара после поворота, Рис 25: вертикальные проекции с обозначением времени. Рис 28: увеличенный зубец *T*.

J. KELLER and J. EKIEL

## THE SPATIAL VECTORCARDIOGRAPH

## Summary

1. THE SPATIAL DISPLAY OF AN ELECTRIC HEART VECTOR<sup>1</sup>

For many years, in the leading medical laboratories, the three-dimensional character of the electric phenomena taking place in the heart has been observed; significance of the spatial display of these phenomena for research, diagnostic practice and teaching has also been realized.

The simplest way of solving this problem was to provide an apparatus for synchronous recording of two projections of the heart vector loop on perpendicular planes. From those display the spatial wire models of the recorded cardiographic loops were constructed and then photographed by a stereoscopic camera. The inconvenience of such a method is obvious.

To have a full advantage of the three-dimensional presentation of the heart vector it is necessary:

- a. to secure a direct spatial observation of the vector envelope from any direction,
- b. to secure a synchronous recording of the two projections of the vector loop on any two selected planes with a special consideration for the stereoscopic projections,
- c. to enlarge the standard deflection of the observed and recorded electrical processes and to provide the direct observation and recording of the greatly magnified selected fragments of the electrical vectorcardiogram.

The stereoscopic method for spatial display of the loop was chosen as it does not call for highly qualified observers and the stereoscopic display technique is comparatively easy. Owing to the small size of the cardiographic loop it is possible to neglect *the perspective correction* and the influence of the elevation angle on the dimensions of the loop image. A simple arrangement of two magnifying lenses, e. g. +7 dioptres each is sufficient for the stereoscopic observation of the cardiographic loop. By spacing the stereoscopic pair of images slightly closer, than the distance between the eyes, we get the shifting of the virtual images of the loop towards one another so that they blend into one at an easy natural eye balls viewing angle. Using this method of observation it is possible to get the 6×4 cm spatial image of the loop, which is large enough for diagnostic purposes. Although the spacing of the stereoscopic pair of images at a slightly smaller distance, than that between the eyes, diminishes the *optical depth sensation*, it is rather advantageous in the case of a vector cardiographic loop because „*the depth error*“ of the spatial display is decreased too.

## 2. THE STEREOCARDIOGRAPH

The heart action potentials were taken from a trirectangular geometrical arrangement of the electrodes position (Fig. 12). This arrangement directly supplies the voltages necessary for the stereocopic pair display on a cathode ray tube and ex-

<sup>1</sup> An electric heart vector represents the action of the dipole layer that runs through the heart muscle, during every heart evolution. The electric field produced by this dipole layer is approximately of such a character that the voltage obtained between two equidistant points from the heart is proportional to the heart vector projection on the axis joining those points and to the distance between them.

cludes the interfering voltages caused by the muscular tremor. Preamplifiers of the encephalographic type and a screening cage for the patient were used in order to obtain large images of the loop (1mv — 5 cm) without main interference. The three voltages received after amplification from the three leads determine the heart vector

$$V = iV_x + jV_y + kV_z.$$

The main parts of the apparatus are the stereocardioscope for direct observation and the stereocardiograph for recording.

An electronic transformation of the coordinates is used both to receive the pair of stereoscopic pictures and to enable *the rotation of the loop*. From the three leads voltages the new voltages are formed, that correspond to the projections of the heart vector on any chosen axis in space. This is done by means of the valve circuits with no need for moving the electrodes. This valve network performs a mathematical transformation expressed by the formula

$$U = x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma,$$

where  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  denote the direction angles between the new axis  $U$  and the original axes  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . The arrangement shown in Fig. 22 produces a pair of the stereoscopic images. The images produced on the left and the right side of the CRT screen correspond respectively to the loop of a heart vector seen by the left and the right eye, when the former is looking from the direction  $Z$  (fig. 13). The light spot is deflected vertically by the same voltage both in the right and the left hand system of the CRT, but the horizontal deflecting voltage is different due to transformation of the  $X$  axis (Fig. 13) on to the new axis  $x'$ . The angle between those axes is defined by the eyes spacing and the distance of the loop from the observer. As this angle is small ( $\alpha = 10^\circ = 0,17$  rad) the transformation formula is simplified to

$$V'_x = V_x + \alpha V_z.$$

In order to enable the rotation of the loop in space, a valve circuit is used, based on three identical units (Fig. 19). Each unit enables the transformation of two patient voltages in a plane, i. e. the rotation of the loop about one of the three axes.

For the direct observation of the loop a CRT with long persistence screen has been chosen. That is necessary because of the low repetition rate of the heart and the impulse character of the electrical processes. To produce a pair of tracings, an electronic switch has been applied to switch over the horizontal deflecting voltage. As the tracings of the successive heart evolutions are not identical<sup>2</sup> therefore in order to prevent the screen from blurring by repeatedly traced loops, an electronic time-selector is used. It secures exposition of only one heart evolution or its selected fragment. The phase of the beginning and the end of the loop fragment, chosen for exposure, is marked on the auxiliary CRT which records the linear cardiogram. The time base of the auxiliary CRT is synchronized by the QRS impulse of the recorded cardiogram. It helps in setting of the time selector as well as in observation of irregularities of rhythm of the heart. The apparatus is provided with a demodulator which controls the brightness of the light spot and keeps it proportional to the absolute value of its velocity on the screen. Thus, the action of the demodulator prevents the overexposure of the photographic film during the standstill of the light spot and the loops blurring of T and P waves, while the QRS loop is bright. The apparatus enables also the observation and recording of the

<sup>2</sup> Mainly due to respiratory movements of the patient.

synchronic projections of the loop on the perpendicular planes. The examples of the recorded cardiograms are given in Figs. 21, 23, 25 and 28.

### 3. MEDICAL USE OF THE APPARATUS

A comparison of the confusing contour of the perpendicular planes vector-cardiogram with the spatial loop observed through the stereoscopic binocular suggests the simplification and broadening of the cardiological diagnosis. Among the most striking possibilities of the new method is the reduction of the number of electrocardiographic patterns. With the present methods the cardiologist must be acquainted with many cardiographic patterns, that correspond to the same heart disease due to the effect of different heart positions in the chest. On the other hand, owing to some non-typical positions of the heart, the cardiogram in the standard linear leads becomes abnormal. The direct presentation and the possibility of the rotation of the loop to the normally encountered position appreciably reduces the effect of individual variations. The unification of the patterns of clinical entities will facilitate diagnosis and teaching of the electrocardiography<sup>3</sup>.

Much can be expected in exploring *silent heart areas* which do not manifest themselves in the linear cardiograms. The deviation of the QRS loop from the longitudinal axis of the heart enables the location of the area of the necrosis or the hypertrophy of the heart muscle. Similarly, the spatial divergence between the QRS and T loops, that grows characteristically with age, will be fully unmasked by the stereoscopic observation.

The presented method also opens up great possibilities in physiological and pharmacological research.

The clinical studies have already begun and are giving promising results.

<sup>3</sup> For publicity and didactic purposes a simple two-coloured stereoscopy may be used.

T. CHOLEWICKI

## Macierze składowych symetrycznych

*Rękopis dostarczono 10. 10. 1953.*

**Streszczenie.** Po zdefiniowaniu pojęć wektora oraz układu symetrycznego i asymetrycznego 3 wektorów autor poświęca pierwszą część artykułu rozważaniom matematycznym związanym z macierzową postacią rozkładu układu 3 wektorów na składowe symetryczne. Następnie omawia związki algebraiczne macierzy operatorowej składowych symetrycznych z macierzą jednostkową i macierzami stopnia trzeciego pochodzącymi od macierzy jednostkowej. Wyrażenie iloczynu 2 macierzy trójelementowych za pomocą składowych symetrycznych w różnych przypadkach.

W części drugiej, elektrycznej, przedstawia autor formę macierzową prawa Ohma i II prawa Kirchoffa na odborniku trójfazowym czteroprzewodowym w układzie odniesienia składowych symetrycznych przy fazach ekranowanych i przy fazach indukcyjnie sprzężonych. Dowód równoważności równań macierzowych wyrażonych w postaci opornościowej i przewodnościowej. Oporność pozorna dla składowej symetrycznej prądu, a składowa symetryczna oporności pozornej.

### C z ę ś ć I

#### Wiadomości algebraiczne o składowych symetrycznych

##### 1. WSTĘP

Wprowadzona do matematyki przez Cayleya w r. 1853 teoria macierzy została później rozwinięta jako dział algebry i do roku 1953 ukazało się ponad 500 prac matematycznych poświęconych macierzom.

Rachunek macierzy w zwykłej postaci bądź jego odmiana zwana rachunkiem krakowianów znalazły zastosowanie w ostatnim dwudziestopięcioleciu w astronomii, statyce i geodezji.

Z dziedziny zastosowań macierzy w elektrotechnice pierwszą książką była praca G. Krona [5], która ukazała się w r. 1939; z wydanych po wojnie można wymienić prace S. Stiganta [10], P. le Corbeillera [1] i innych, wyszczególnione w wykazie literatury.

Teoria składowych symetrycznych jest również stosunkowo nową gałęzią elektrotechniki; pierwszą książką z tej dziedziny jest praca C. Wagnera i R. Evansa [11] z 1933 roku.

Koncepcja badania układów trójfazowych metodą macierzy, a w szczególności macierzowego traktowania teorii składowych symetrycznych, nie jest w literaturze elektrotechnicznej należycie doceniana i rozwinięta; ogólne fragmenty omawianego zagadnienia można znaleźć u S. Stiganta [10] w rozdziale traktującym o składowych symetrycznych na strotach od 266 do 280. Koncepcja ta jest warta opracowania i może się przyczynić do pogłębienia pewnych zagadnień wiążących tematycznie algebrę, elektrotechnikę teoretyczną i badanie układów elektroenergetycznych.

W niniejszej pracy ze względów metodycznych okazało się celowe podzielenie macierzowej teorii składowych symetrycznych na dwie odrębne części:

1. matematyczną teorię składowych symetrycznych, która może znaleźć zastosowanie w różnych dyscyplinach stosowanych, i
2. elektryczną teorię składowych symetrycznych, będącą jednym z zastosowań teorii matematycznej.

Jednym z celów pracy jest wykazanie, że problematyka związana z elektryczną teorią składowych symetrycznych ulega uproszczeniom rachunkowym i da się przedstawić w sposób znacznie bardziej ogólny od na ogół spotykanego przez traktowanie tej teorii w sposób macierzowy.

Należy zaznaczyć, że na treść części I matematycznej wywiera swój wpływ charakter techniczny całości pracy, wobec czego proporcją objętości poszczególnych punktów tej części i ich rozwinięcie dadzą się w znacznej mierze uzasadnić potrzebami dalszej treści o charakterze elektrycznym.

## 2. WEKTOR W MATEMATYCE I ELEKTROTECHNICE

Używane w elektrotechnice pojęcie wektora jest zapożyczony z matematyki, a w szczególności z jej działu: algebry wyższej. Przed określeniem wektora algebraicy [7] wprowadzają wpierw pojęcie ciała liczbowego, przez które rozumiemy każdy zbiór liczb zespolonych, zawierających co najmniej jedną liczbę różną od zera i mający tę własność, że gdy dwie liczby należą do tego zbioru, to zbiór zawiera również ich różnicę i — przy dzielniku różnym od zera — ich iloraz. Można dowieść, że każde ciało liczbowe zawiera sumę i iloczyn dowolnych dwóch swych elementów, a ponadto że najmniejszym ciałem liczbowym jest zbiór liczb wymiernych.

Przechodzimy do określenia wektora. Wektorem przestrzeni  $K^n$  nazywamy ciąg skończony o  $n$  wyrazach  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , którego wy-

razy  $a_k$  są elementami dowolnego ciała liczbowego  $K$ . Przestrzenią wektorową  $K^n$ , zbudowaną na ciele  $K$ , nazywamy zbiór wektorów  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ , a liczby  $a_k$  — składowymi wektora  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ .

Gdy daną przestrzeń wektorową budujemy na ciele liczb rzeczywistych, nazywamy ją przestrzenią wektorową rzeczywistą i oznaczamy przez  $R^n$  w odróżnieniu od przestrzeni wektorowej zespolonej  $Z^n$ , zbudowanej na ciele liczb zespolonych. Wektor  $(a_1, a_2, \dots, a_n)$  przestrzeni wektorowej rzeczywistej  $R^n$  nazywamy rzeczywistym, a wektor przestrzeni wektorowej zespolonej  $Z^n$  — zespolonym.

Obierając odpowiednio układ współrzędnych na prostej, na płaszczyźnie lub w przestrzeni geometrycznej stwierdzamy, że

wektorowi rzeczywistemu przestrzeni  $R^1$  odpowiada jedna liczba rzeczywista  $a_1$ , której możemy przyporządkować punkt na ustalonej prostej,

wektorowi rzeczywistemu przestrzeni  $R^2$  odpowiada para uporządkowana liczb rzeczywistych  $(a_1, a_2)$ , której możemy przyporządkować punkt na ustalonej płaszczyźnie,

wektorowi rzeczywistemu przestrzeni  $R^3$  odpowiada trójka uporządkowana liczb rzeczywistych  $(a_1, a_2, a_3)$ , której możemy przyporządkować punkt w przestrzeni geometrycznej.

Rozpatrzmy z kolei wektor przestrzeni  $R^n$  dla  $n > 3$ . Wektorowi rzeczywistemu przestrzeni  $R^5$  odpowiada piątka uporządkowana liczb rzeczywistych  $(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5)$ , której interpretacją fizyczną mogą być na przykład udziały bezwzględne składników stopu 5 metali albo udziały mieszaniny gazów, złożonej z 5 składników. Udziały te są oczywiście liczbami rzeczywistymi.

Przedmiotem rozważań mechaniki teoretycznej są wektory rzeczywiste przestrzeni  $R^3$ , będące odwzorowaniem wielkości fizycznych kierunkowych, jak przesunięcia, prędkości, przyspieszenia, siły lub natężenia pola. Dla wektorów tych, które można by nazwać wektorami mechanicznymi, są zdefiniowane działania: dodawanie, odejmowanie, mnożenie przez skalar, mnożenie skalarne dwóch wektorów, mnożenie wektorowe wektorów, mnożenie mieszane trzech wektorów, nie jest zaś określone działanie odwrotne względem mnożenia: dzielenie. W szczególnym przypadku, gdy w trójce uporządkowanej liczb  $(a_1, a_2, a_3)$  dla każdego wektora przestrzeni  $R^3$  mamy  $a_3 = 0$ , rozpatrywane wektory leżą w jednej płaszczyźnie, co na przykład nieraz występuje w zagadnieniach statyki ciał sztywnych. Zbiór tego rodzaju wektorów płaszczyznowych tworzy jednak nadal przestrzeń  $R^3$ , a wektory te są według przyjętej nomenklatury wektorami mechanicznymi.

Przedmiotem rozważań rachunku liczb zespolonych i jego zastosowań, jak metody symbolicznej w elektrotechnice, są wektory przestrzeni  $R^2$ , scharakteryzowane przez parę uporządkowaną liczb rzeczywistych  $(a_1, a_2)$ . a w interpretacji geometrycznej przez punkt na płaszczyźnie liczb zespolonych, zwanej płaszczyzną Gaussa. Wektory te w odróżnieniu od wektorów mechanicznych można by nazwać g a u s s o w s k i m i. Dla wektorów gaussowskich są określone działania:

analogiczne do działań na wektorach mechanicznych — dodawanie, odejmowanie i mnożenie przez skalar oraz

odrębne od działań na wektorach mechanicznych — mnożenie dwóch, trzech lub więcej wektorów, dzielenie wektora przez wektor przy dzielniku niezerowym, potęgowanie i pierwiastkowanie według wzoru Moivre'a.

Spotykana dotychczas w literaturze nazwa „wektor płaski“ lub „wektor płaszczyznowy“ dla wektora gaussowskiego spotyka się ze słuszną krytyką licznych autorów; zasadniczym argumentem krytyki jest ta okoliczność, że nie tylko wektory przestrzeni  $R^2$ , ale i wektory mechaniczne przestrzeni  $R^3$  mogą być płaskie, czyli płaszczyznowe, wobec czego nazwa ta nie jest odpowiednia.

Funkcja sinusoidalnie zmienna jest w elektrotechnice odwzorowana przez nieruchomy wektor gaussowski lub obracający się z prędkością kątową jednostajną wektor gaussowski. Bywają przypadki w elektrotechnice, że dana wielkość fizyczna, jak na przykład natężenie pola magnetycznego w danym punkcie cewki cylindrycznej zasilanej napięciem sinusoidalnie zmiennym, jest zarówno wektorem mechanicznym, gdyż ma określoną w każdej chwili długość, punkt zaczepienia, kierunek w przestrzeni  $R^3$  i zwrot, jak i wektorem gaussowskim jako sinusoidalnie zmienna funkcja czasu.

W tych warunkach uważamy, że zapożyczona z matematyki nazwa „wektor“, powszechnie stosowana w elektrotechnice, powinna być w miarę potrzeby uzupełniania przez specjalną przydawkę i ze swej strony proponujemy rozróżnianie w elektrotechnice

wektorów mechanicznych i

wektorów gaussowskich, czyli odcinków skierowanych na płaszczyźnie Gaussa.

Uzupełnienie to powinno być stosowane w tekstach stale, gdy nazwa „wektor“ występuje na przemian w obu znaczeniach, a odpowiednie wyjaśnienie powinno być zamieszczone na początku pracy lub rozdziału, gdy nazwa „wektor“ będzie występowała w jednym tylko znaczeniu. Nie opo-



wiadamy się natomiast za tworzeniem w elektrotechnice dla wektora prądu, napięcia, czy siły elektromotorycznej nazw odrębnych, jak promień, wskaz, sinor czy kompleksor, gdyż w świetle powyższych rozważań:

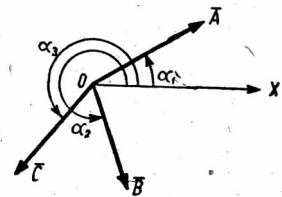
1. pod względem matematycznym owe promienie, wskaz i sinory są nadal wektorami przestrzeni  $R^2$ ,
2. autorzy znacznie chętniej używają nazwy „wektor“ niż wszelkich innych zastępczych,
3. nie istnieje bezwzględna konieczność wprowadzania tych nazw.

W niniejszej pracy będziemy rozpatrywali wyłącznie wektory gaussowskie i nazywali je krótko wektorami. Wektory mechaniczne nie są przedmiotem naszych rozważań.

### 3. UKŁAD SYMETRYCZNY I ASYMETRYCZNY TRZECH WEKTORÓW

Niech będą dane trzy dowolne liczby zespolone. Na płaszczyźnie Gaussa są im przyporządkowane trzy wektory  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  o wartościach bezwzględnych  $A$ ,  $B$ ,  $C$  i kątach  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$ ,  $\alpha_3$ , utworzonych z dodatnim zwrotem osi  $OX$  zawierających się w granicach od 0 do  $2\pi$ ; wektory te wychodzą ze wspólnego punktu początkowego (rys. 1).

Przez układ trzech wektorów rozumiemy zbiór dowolnych trzech wektorów o ustalonej kolejności. O wartościach bezwzględnych i kątach utworzonych z dodatnim zwrotem osi  $OX$  przez wektory będące elementami tego zbioru nie czynimy zasadniczo żadnych założeń; wykluczamy jednak z zakresu naszych rozważań układ trzech wektorów zerowych, dla których  $A=0$ ,  $B=0$  oraz  $C=0$ , i będziemy rozpatrywali jedynie takie układy, w których co najmniej jeden z trzech wektorów nie jest wektorem zerowym.

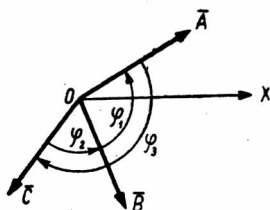


Rys. 1. Trzy wektory na płaszczyźnie Gaussa

Sprecyzujemy teraz, co należy rozumieć przez ustaloną kolejność trzech wektorów. Powiemy, że trzy wektory  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$  mają ustaloną kolejność  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , jeżeli liczbie 1 jest przyporządkowany wektor  $\bar{A}$ , liczbie 2 —  $\bar{B}$ , liczbie 3 —  $\bar{C}$ . W zbiorze trójelementowym, na przykład trzech kulek ułożonych wzdłuż dowolnej krzywej zamkniętej, możemy przyjąć, że po elemencie pierwszym następuje element drugi, po drugim — trzeci, a po trzecim — znowu pierwszy; podobnie i w naszym przypadku przyjmujemy, że w układzie  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  po wektorze  $\bar{A}$  następuje wektor  $\bar{B}$ , po  $\bar{B}$  następuje wektor  $\bar{C}$ , a po  $\bar{C}$  następuje znowu wektor  $\bar{A}$ .

Oznaczmy kąt między wektorami w sposób następujący:

- $\varphi_1$  jest to kąt zawierający się w granicach kąta pełnego od  $-\pi$  do  $+\pi$ <sup>1</sup>, który tworzy wektor  $\bar{A}$  z wektorem  $\bar{B}$ , to znaczy kąt zawierający się we wskazanych granicach, o jaki należy obrócić wektor  $\bar{B}$ , by zszedł się z wektorem  $\bar{A}$  zgodnie z jego kierunkiem i zwrotem,
- $\varphi_2$  jest to kąt zawierający się w granicach od  $-\pi$  do  $+\pi$ , który tworzy wektor  $\bar{B}$  z wektorem  $\bar{C}$ ,
- $\varphi_3$  jest to kąt zawierający się w granicach od  $-\pi$  do  $+\pi$ , który tworzy wektor  $\bar{C}$  z wektorem  $\bar{A}$ .



Rys. 2. Układ trzech wektorów.

Dla wskazanego na rys. 2 układu trzech wektorów mamy

$$\varphi_1 = a_1 - a_2 + 2\pi,$$

$$\varphi_2 = a_2 - a_3,$$

$$\varphi_3 = a_3 - a_1 - 2\pi,$$

ogólnie zaś, oznaczając przez  $k_1, k_2, k_3$  liczby całkowite mogące przybierać wartości  $-1, 0, 1$ , a przez  $k$  ich sumą algebraiczną  $k = k_1 + k_2 + k_3$ , mamy

$$\varphi_1 = a_1 - a_2 + 2k_1\pi,$$

$$\varphi_2 = a_2 - a_3 + 2k_2\pi,$$

$$\varphi_3 = a_3 - a_1 + 2k_3\pi,$$

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 = 2k\pi. \quad (3, 1)$$

Innymi słowy, suma algebraiczna trzech rozpatrywanych kątów, które są utworzone przez pary kolejnych wektorów, jest całkowitą wielokrotnością kąta pełnego.

Przez symetryczny układ trzech wektorów rozumiemy taki układ trzech wektorów, który spełnia dwa warunki:

<sup>1</sup> Kątom między rozpatrywanymi wektorami można przyporządkować różnicę argumentów odpowiednich liczb zespolonych.

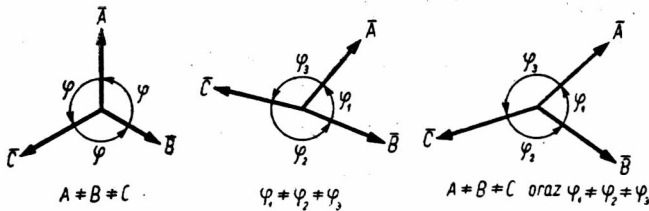
Można tu zaznaczyć, że o ile argument główny liczby zespolonej przyjmuje się w matematyce w granicach od 0 do  $2\pi$  ([7], s. 62), to w elektrotechnice argument główny bywa przyjmowany również i w granicach od  $-\pi$  do  $+\pi$  ([9], s. 362).

W związku z technicznym charakterem niniejszej pracy przyjęto dla kątów  $\varphi_k$  granice nie od 0 do  $2\pi$ , lecz od  $-\pi$ , do  $+\pi$ , gdyż takie granice będą dalej potrzebne przy określaniu układu symetrycznego dodatniego i ujemnego.

1. wartości bezwzględne wektorów są równe:  $A=B=C$  i
2. kąty między kolejnymi wektorami są równe, to znaczy kąt, który tworzy wektor  $\bar{A}$  z wektorem  $\bar{B}$ , wektor  $\bar{B}$  z  $\bar{C}$  oraz wektor  $\bar{C}$  z  $\bar{A}$ , są sobie równe  $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3$ .

Jak to rozpatrzemy bliżej, istnieją trzy rodzaje układów symetrycznych: układ symetryczny zerowy, układ symetryczny dodatni i układ symetryczny ujemny.

Przez **a s y m e t r y c z n y** układ trzech wektorów rozumiemy taki układ trzech wektorów, który nie jest symetryczny, a więc bądź nie spełnia warunku pierwszego powyżej podanego (równość wartości bezwzględnych), bądź nie spełnia warunku drugiego (równość kątów między kolejnymi wektorami), bądź też nie spełnia obu tych warunków (rys. 3).



Rys. 3. Układy asymetryczne.

Układy symetryczne i asymetryczne wyczerpują możliwości układu trzech wektorów i każdy układ trzech wektorów jest bądź układem symetrycznym, bądź też asymetrycznym.

Oznaczmy przez  $\varphi$  kąt między kolejnymi wektorami w układzie symetrycznym

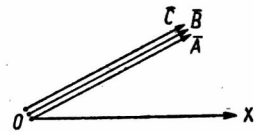
$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_3 = \varphi,$$

wówczas równanie (3,1) przybiera postać

$$3\varphi = 2k\pi \quad (3, 2)$$

przy parametrze  $k$  będącym liczbą całkowitą.

Dla  $k=0$  otrzymujemy  $\varphi=0$ , czyli symetryczny układ trzech pokrywających się wektorów współosiowych, zwany układem zerowym (rys. 4).

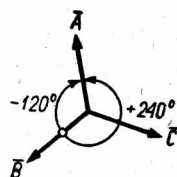
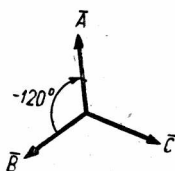
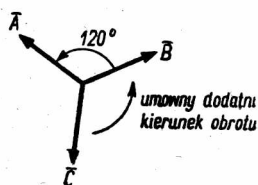


Rys. 4. Układ zerowy.

Dla  $k=1$  otrzymujemy  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$ , czyli symetryczny układ trzech wektorów, taki że wektor  $\bar{A}$  tworzy z wektorem  $\bar{B}$ , wektor  $\bar{B}$  z  $\bar{C}$ , oraz wektor  $\bar{C}$  z  $\bar{A}$  kąty po  $120^\circ$ . Układ ten ze względu na dodatnią wartość kąta  $\varphi$  oraz okoliczność, że obrót wektora  $\bar{B}$  w kierunku  $\bar{A}$ , wektora  $\bar{C}$  w kierunku  $\bar{B}$  oraz wektora  $\bar{A}$  w kierunku  $\bar{C}$  następuje zgodnie z umownym dodatnim

kierunkiem obrotu, nazywamy układem dodatnim lub zgodnym (rys. 5).

Dla  $k = -1$  otrzymujemy  $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ , czyli symetryczny układ trzech wektorów, taki że wektor  $\bar{A}$  tworzy z wektorem  $\bar{B}$ , wektor  $\bar{B}$  z  $\bar{C}$  oraz wektor  $\bar{C}$  z  $\bar{A}$  kąty po  $-120^\circ$ . Układ ten ze względu na ujemną wartość kąta  $\varphi$  oraz okoliczność, że obrót wektora  $\bar{B}$  w kierunku  $\bar{A}$ , wektora  $\bar{C}$  w kierunku  $\bar{B}$  oraz wektora  $\bar{A}$  w kierunku  $\bar{C}$  następuje przeciwnie do umownego dodatniego kierunku obrotu, nazywamy układem ujemnym lub przeciwnym (rys. 6).



Rys. 5, Układ dodatni. Rys. 6, Układ ujemny. Rys. 7, Układ ujemny.

Powyższe trzy wartości parametru  $k$  są jedynymi możliwymi spełniającymi równanie (3,2) przy założeniu, że kąt  $\varphi$  zawiera się w granicach od  $-\pi$  do  $+\pi$ . Gdybyśmy zresztą to założenie odrzucili i nie zakreślali granic dla kąta  $\varphi$ , to dla dalszych całkowitych wartości parametru  $k$  otrzymalibyśmy nadal

układ ujemny dla  $k = 2, -4, 5, -7, \dots$ , bądź

układ zerowy dla  $k = 3, -3, 6, -6, \dots$ , bądź też

układ dodatni dla  $k = 4, -2, 7, -5, \dots$ .

Na przykład dla wartości  $k = 2$  otrzymujemy  $\varphi = \frac{4\pi}{3}$ , czyli wektor  $\bar{A}$  tworzy z wektorem  $\bar{B}$  kąt  $240^\circ$ , co jest równoznaczne ze stwierdzeniem, że wektor  $\bar{A}$  tworzy z wektorem  $\bar{B}$  kąt  $-120^\circ$ , wobec czego układ wektorów jest ujemny, jak dla  $k = -1$  (rys. 7).

#### 4. ROZKŁAD UKŁADU TRZECH WEKTORÓW NA SKŁADOWE SYMETRYCZNE

Niech będą dane trzy układy symetryczne wektorów:

układ zerowy złożony z wektorów o kolejności  $\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0$ ,

układ dodatni złożony z wektorów o kolejności  $\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1$ ,

układ ujemny złożony z wektorów o kolejności  $\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2$ .

Nazwiemy wektor  $\bar{A}_0$  wektorem podstawowym układu zerowego  $(\bar{A}_0, \bar{B}_0, \bar{C}_0)$ ,

wektor  $\bar{A}_1$  wektorem podstawowym układu dodatniego  $(\bar{A}_1, \bar{B}_1, \bar{C}_1)$ ,

wektor  $\bar{A}_2$  wektorem podstawowym układu ujemnego  $(\bar{A}_2, \bar{B}_2, \bar{C}_2)$ .

Korzystając z definicji układów symetrycznych możemy wyrazić za pomocą wektorów podstawowych i operatora obrotu o kąt  $120^\circ$   $h = e^{j\frac{2\pi}{3}}$  pozostałe wektory tych układów, a mianowicie

$$\left. \begin{aligned} \bar{B}_0 &= \bar{A}_0, & \bar{C}_0 &= \bar{A}_0, \\ \bar{B}_1 &= h^2 \bar{A}_1, & \bar{C}_1 &= h \bar{A}_1, \\ \bar{B}_2 &= h \bar{A}_2, & \bar{C}_2 &= h^2 \bar{A}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4, 1)$$

W ten sposób układem zerowym jest układ wektorów  $(\bar{A}_0, \bar{A}_0, \bar{A}_0)$ ,

układem dodatnim jest układ wektorów  $(\bar{A}_1, h^2 \bar{A}_1, h \bar{A}_1)$ ,

układem ujemnym jest układ wektorów  $(\bar{A}_2, h \bar{A}_2, h^2 \bar{A}_2)$ ,

Powyższe trzy układy symetryczne mają łącznie 9 elementów; sumując je w trzech grupach po trzy, możemy utworzyć następującą kombinację liniową wektorów podstawowych w układach symetrycznych

$$\left. \begin{aligned} \bar{A} &= \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2, \\ \bar{B} &= \bar{A}_0 + h^2 \bar{A}_1 + h \bar{A}_2, \\ \bar{C} &= \bar{A}_0 + h \bar{A}_1 + h^2 \bar{A}_2. \end{aligned} \right\} \quad (4, 2)$$

Otrzymany układ wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  w ogólnym przypadku nie jest układem symetrycznym.

Jeżeli teraz dodamy do siebie stronami równania (4,2) i uwzględnimy, że  $1+h+h^2=0$ , to wyrazimy wektor  $\bar{A}_0$  przez wektory  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  i  $\bar{C}$ . Jeżeli pomnożymy stronami drugie równanie (4,2) przez  $h$ , a trzecie przez  $h^2$  i dodamy do siebie stronami te równania, to wyrazimy podobnie  $\bar{A}_1$ . Jeżeli na koniec pomnożymy stronami drugie równanie (4,2) przez  $h^2$ , a trzecie przez  $h$  i dodamy do siebie stronami te równania, to wyznaczymy wreszcie  $\bar{A}_2$ . Wynik tych obliczeń jest następujący:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_0 &= \frac{1}{3}(\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}), \\ \bar{A}_1 &= \frac{1}{3}(\bar{A} + h\bar{B} + h^2\bar{C}), \\ \bar{A}_2 &= \frac{1}{3}(\bar{A} + h^2\bar{B} + h\bar{C}). \end{aligned} \right\} \quad (4,3)$$

Układy równań (4,2) i (4,3) dopełniają się wzajemnie, a mianowicie układ (4,2) pozwala nam przy znanych wektorach podstawowych układów symetrycznych  $\bar{A}_0$ ,  $\bar{A}_1$  i  $\bar{A}_2$  wyznaczyć wektory  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  i  $\bar{C}$ , a układ równań (4,3) pozwala przy danych wektorach  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$  i  $\bar{C}$  wyznaczyć wektory podstawowe układów symetrycznych  $\bar{A}_0$ ,  $\bar{A}_1$  i  $\bar{A}_2$ .

Przepisując układ równań (4,2) w postaci

skła-    skła-    skła-  
dowa    dowa    dowa  
zerowa    dodat.    ujemna

przyporządkowana wektorowi  $\bar{A} = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2$ ,

$$\bar{B} = \bar{A}_0 + h^2\bar{A}_1 + h\bar{A}_2,$$

$$\bar{C} = \bar{A}_0 + h\bar{A}_1 + h^2\bar{A}_2,$$

nazwiemy

wektor  $\bar{A}_0$  składową symetryczną zerową układu wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ , przyporządkowaną wektorowi  $\bar{A}$ ,

wektor  $\bar{A}_1$  składową symetryczną dodatnią układu wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ , przyporządkowaną wektorowi  $\bar{A}$ ,

wektor  $\bar{A}_2$  składową symetryczną ujemną układu wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$ , przyporządkowaną wektorowi  $\bar{A}$ .

W elektrotechnice używamy często, nieco nieściśle, następujących nazw skróconych:

wektor  $\bar{A}_0$  jest to składowa symetryczna zerowa wektora  $\bar{A}$ ,

wektor  $\bar{A}_1$  jest to składowa symetryczna dodatnia wektora  $\bar{A}$ ,

wektor  $\bar{A}_2$  jest to składowa symetryczna ujemna wektora  $\bar{A}$ ,

a jeżeli to nie powoduje niejasności, mówimy nawet wprost, że

wektor  $\bar{A}_0$  jest to składowa zerowa (na przykład prądu lub napięcia),

wektor  $\bar{A}_1$  jest to składowa dodatnia,

wektor  $\bar{A}_2$  jest to składowa ujemna.

Analogicznie składowe symetryczne układu wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  przyporządkowane wektorowi  $\bar{B}$  wynoszą:

składowa zerowa  $\bar{A}_0$ ,

składowa dodatnia  $h^2\bar{A}_1$ ,

składowa ujemna  $h\bar{A}_2$

i przyporządkowane wektorowi  $\bar{C}$

składowa zerowa  $\bar{A}_0$ ,

składowa dodatnia  $h\bar{A}_1$ ,

składowa ujemna  $h^2\bar{A}_2$ .

W tej terminologii powiemy, że równania (4,2) przedstawiają rozkład układu trzech wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  na składowe symetryczne.

W symbolicznej macierzowej możemy oznaczać macierz dwiema pionowymi kreskami na początku i na końcu macierzy bądź ująć ją w nawias prostokątny, bądź też pisać ją w skróceniu wielką literą tłustym drukiem albo wielką literą alfabetu gotyckiego. Korzystając ze sposobu oznaczania macierzy za pomocą nawiasu prostokątnego lub wielką literą tłustym drukiem, możemy układ równań (4,2) przepisać w postaci równania macierzowego

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (4,4)$$

czyli

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{A}_s, \quad (4,5)$$

gdzie macierz regularna (czyli nieosobliwa)

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \quad (4,6)$$

nazywa się macierzą operatorową składowych symetrycznych,

macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \quad (4, 7)$$

jest to macierz danych wektorów,  
a macierz

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} \quad (4, 8)$$

jest to macierz wektorów podstawowych układów symetrycznych lub inaczej macierz składowych symetrycznych. Z równania (4,5) wynika, że

$$\mathbf{A}_s = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A} \quad (4, 9)$$

Drugi układ równań (4,3) możemy wyrazić w postaci równania macierzewego

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad (4, 10)$$

czyli

$$\mathbf{A}_s = \frac{1}{3} \mathbf{S}_1 \mathbf{A}, \quad (4, 11)$$

gdzie

$$\mathbf{S}_1 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \quad (4, 12)$$

Należy zauważyć, że macierz  $\mathbf{S}_1$  powstaje z macierzy operatorowej składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$  przez przestawienie drugiego wiersza z trzecim lub drugiej kolumny z trzecią. Z równań (4,9) i (4,11) wynika następujący związek między macierzami kwadratowymi symetrycznymi  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{S}_1$

$$3\mathbf{S}^{-1} = \mathbf{S}_1 \quad (4, 13)$$

W równaniach (4,3) korzystaliśmy już z pewnych elementarnych związków, znajdujących częste zastosowanie w elektrotechnice. Związki te zgrupujemy teraz w następującym zestawieniu:

$$\left. \begin{array}{l} h^3 = 1, \\ 1 + h + h^2 = 0. \end{array} \right\} \quad (4, 14)$$



$$\left. \begin{aligned} 1-h &= jh^2\sqrt{3}, \\ 1-h^2 &= -jh\sqrt{3}, \\ h-h^2 &= j\sqrt{3}. \end{aligned} \right\} \quad (4, 15)$$

5. ZWIĄZEK ALGEBRAICZNY MACIERZY OPERATOROWEJ  
Z MACIERZĄ JEDNOSTKOWĄ

Ze związku (4,13) wynika, że iloczyn macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{S}_1$  wynosi

$$\mathbf{SS}_1 = \mathbf{S} \cdot 3\mathbf{S}^{-1} = 3\mathbf{I} \quad (5, 1)$$

i jest przemienny

$$\mathbf{SS}_1 = \mathbf{S}_1\mathbf{S} = 3\mathbf{I} \quad (5, 2)$$

Obliczmy kwadraty, sześciiany i czwarte potęgi obu rozpatrywanych macierzy. Kwadraty macierzy

$$\mathbf{S}^2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \quad (5, 3)$$

$$\mathbf{S}_1^2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \quad (5, 4)$$

są sobie równe. Kładąc

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \quad (5, 5)$$

mamy

$$\mathbf{S}^2 = 3\mathbf{M} \quad (5, 6)$$

i

$$\mathbf{S}_1^2 = 3\mathbf{M}. \quad (5, 7)$$

Kwadrat macierzy  $\mathbf{M}$  wynosi

$$\mathbf{M}^2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{I}. \quad (5, 8)$$

Zwróćmy uwagę, że macierz  $\mathbf{M}$  powstaje z macierzy jednostkowej stopnia trzeciego przez przestawienie drugiego wiersza z trzecim lub drugiej

kolumny z trzecią; wobec tego wyznacznik macierzy  $\mathbf{M}$  równa się  $-1$  i macierz  $\mathbf{M}$  jest regularna.

Biorąc odwrotność obu stron równania (5,6) otrzymujemy

$$\mathbf{S}^{-2} = 3^{-1} \mathbf{M}^{-1}, \quad (5, 9)$$

czyli

$$\mathbf{S}_1^2 = 3 \mathbf{M}^{-1} \quad (5, 10)$$

i

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}^{-1}. \quad (5, 11)$$

Sześciany obu rozpatrywanych macierzy wynoszą

$$\mathbf{S}^3 = \mathbf{S}^4 \mathbf{S}^{-1} = (3 \mathbf{M})^2 \mathbf{S}^{-1} = 9 \mathbf{I} \mathbf{S}^{-1} = 3 \mathbf{S}_1, \quad (5, 12)$$

$$\mathbf{S}_1^3 = \mathbf{S}_1^4 \mathbf{S}_1^{-1} = (3 \mathbf{M})^2 \mathbf{S}_1^{-1} = 9 \mathbf{I} \mathbf{S}_1^{-1} = 3 \mathbf{S}. \quad (5, 13)$$

Wypisując sześciany macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{S}_1$  jako iloczyny kwadratu przez pierwszą potęgę macierzy, stwierdzamy na podstawie wzorów (5,3), (5,4), (5,12) i (5,13), że macierz  $\mathbf{M}$  ma następującą właściwość:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{M} \mathbf{S} &= \mathbf{S} \mathbf{M} = \mathbf{S}_1, \\ \mathbf{M} \mathbf{S}_1 &= \mathbf{S}_1 \mathbf{M} = \mathbf{S}. \end{aligned} \right\} \quad (5, 14)$$

Czwarte potęgi rozpatrywanych macierzy wynoszą

$$\mathbf{S}^4 = \mathbf{S}_1^4 = 3^2 \mathbf{M}^2 = 9 \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = 9 \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} = 9 \mathbf{I}. \quad (5, 15)$$

Można by zauważyć, że dla usunięcia „pasożytniczego“ współczynnika w równaniu (5,15) należałoby zamiast macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{S}_1$  wprowadzić macierze

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{S}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \quad (5, 16)$$

oraz

$$\mathbf{T}_1 = \frac{\mathbf{S}_1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix}. \quad (5, 17)$$

Mamy wtedy związek analogiczny do (4,13), ale wolny od współczynnika 3

$$\mathbf{T}^{-1} = \sqrt{3} \mathbf{S}^{-1} = \frac{\sqrt{3}}{3} \mathbf{S}_1 = \mathbf{T}_1. \quad (5, 18)$$

Kwadraty macierzy  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{T}_1$

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}^2 &= \frac{\mathbf{S}^2}{3} = \mathbf{M} \\ \mathbf{T}_1^2 &= \frac{\mathbf{S}_1^2}{3} = \mathbf{M} \end{aligned} \right\} \quad (5, 19)$$

są wolne od współczynnika 3, podobnie jak i sześciiany:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{T}^3 &= \frac{\mathbf{S}^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{3\mathbf{S}_1}{3\sqrt{3}} = \mathbf{T}_1, \\ \mathbf{T}_1^3 &= \frac{\mathbf{S}_1^3}{(\sqrt{3})^3} = \frac{3\mathbf{S}}{3\sqrt{3}} = \mathbf{T}. \end{aligned} \right\} \quad (5, 20)$$

Na koniec czwarte potęgi wynoszą

$$\mathbf{T}^4 = \mathbf{T}_1^4 = \mathbf{M}^2 = \mathbf{I}. \quad (5, 21)$$

Z punktu widzenia zastosowań w elektrotechnice macierz operatorowa składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$  nadaje się bezpośrednio do badania układów trójfazowych, a wprowadzenie macierzy  $\mathbf{T}$  byłoby mniej korzystne. Wobec tego, mimo że wprowadzenie macierzy  $\mathbf{T}$  zamiast  $\mathbf{S}$  daje pewne uproszczenie rachunkowe, będziemy w dalszym ciągu korzystać z macierzy operatorowej składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$  i mnożonej przez skalar 3 macierzy odwrotnej  $\mathbf{S}_1$ , nie zaś z macierzy  $\mathbf{T}$  i  $\mathbf{T}_1$ .

Macierz  $\mathbf{M}$  ma pewne ogólne własności, z których łatwo wynikają (5,15) i (5,14), można ją mianowicie uważać za operator, który jako mnożna przedstawia w dowolnej macierzy kwadratowej stopnia trzeciego wiersz drugi z trzecim, a jako mnożnik — kolumnę drugą z trzecią. Istotnie przy oznaczeniu danej macierzy kwadratowej przez

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (5, 22)$$

iloczynny wynoszą

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{MA} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{AM} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (5, 23)$$

Dwukrotna operacja przestawienia wiersza drugiego z trzecim lub kolumny drugiej z trzecią daje nam znowu macierz w pierwotnej postaci, wobec czego zachodzi związek

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}. \quad (5, 24)$$

W macierzy operatorowej składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$  wszystkie elementy pierwszego wiersza i pierwszej kolumny są jednościami, ponadto jest to macierz symetryczna. Przestawiając w macierzy  $\mathbf{S}$  bądź drugi wiersz z trzecim, bądź też drugą kolumnę z trzecią, otrzymujemy macierz  $\mathbf{S}_1$ . A stąd na mocy związków (5,23) mamy

$$\mathbf{MS} = \mathbf{SM} = \mathbf{S}_1, \quad (5, 25)$$

do czego doszliśmy w (5,14) wymnażając szczegółowo macierze.

Niech będzie dana macierz przekątna stopnia trzeciego

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h^2, & 0 \\ 0, & 0, & h \end{bmatrix}. \quad (5, 26)$$

Obliczmy iloczyn macierzy  $\mathbf{SHS}$  mnożony przez skalar  $\frac{1}{3}$ ; oznaczmy go przez  $\mathbf{N}$ .

$$\mathbf{SH} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h^2, & 0 \\ 0, & 0, & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}, \quad (5, 27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N} = \frac{1}{3} \mathbf{SHS} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 3 \\ 0, & 3, & 0 \\ 3, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \quad (5, 28) \end{aligned}$$

Analogicznie do macierzy  $\mathbf{M}$  macierz  $\mathbf{N}$  jest operatorem, który jako mnożna przestawia w dowolnej macierzy stopnia trzeciego wiersz pierwszy z trzecim, a jako mnożnik — kolumnę pierwszą z trzecią. Możemy to sprawdzić przez wymnożenie

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{NA} &= \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \end{bmatrix}, \\ \mathbf{AN} &= \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{13}, & a_{12}, & a_{11} \\ a_{23}, & a_{22}, & a_{21} \\ a_{33}, & a_{32}, & a_{31} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (5, 29)$$

Podobnie do (5,24) wynika stąd związek

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{I}. \quad (5, 30)$$

Rozpatrzmy następnie kwadrat macierzy  $\mathbf{H}$

$$\mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h, & 0 \\ 0, & 0, & h^2 \end{bmatrix}. \quad (5, 31)$$

Odpowiedni iloczyn  $\mathbf{SH}^2\mathbf{S}$  mnożony przez skalar  $\frac{1}{3}$  wynosi

$$\mathbf{L} = \frac{1}{3}\mathbf{SH}^2\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \quad (5, 32)$$

Macierz  $\mathbf{L}$  jest również operatorem, który jako mnożna przestawia w dowolnej macierzy kwadratowej stopnia trzeciego wiersz pierwszy z drugim, a jako mnożnik — kolumnę pierwszą z drugą, skąd wynika związek

$$\mathbf{L}^2 = \mathbf{I}. \quad (5, 33)$$

W konkluzji stwierdzamy, że macierze  $\mathbf{N}$ ,  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{L}$  jako czynniki mnożenia macierzy są analogicznymi operatorami, przestawiającymi dwa wiersze (bądź dwie kolumny) drugiego czynnika i w konsekwencji są związane zależnością

$$\mathbf{N}^2 = \mathbf{M}^2 = \mathbf{L}^2 = \mathbf{I}. \quad (5, 34)$$

Zauważymy przy tym, że w macierzy  $\mathbf{N}$  elementy równe jedności znajdują się na drugiej przekątnej

$$\tilde{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Przez cykliczne przesunięcie wierszy (lub kolumn) macierzy  $\mathbf{N}$  o jedno miejsce w przód otrzymujemy macierz (5,5)

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix},$$

a o dwa miejsca w przód — macierz (5,32)

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}.$$

Przejdźmy teraz do macierzy jednostkowej stopnia trzeciego. Elementy równe jedności znajdują się w niej na głównej przekątnej

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \quad (5, 35)$$

Przez cykliczne przesunięcie wierszy tej macierzy o jedno miejsce w przód lub kolumn o dwa miejsca w przód otrzymujemy macierz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \quad (5, 36)$$

a przez przesunięcie wierszy o dwa miejsca w przód lub kolumn o jedno miejsce w przód — macierz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \quad (5, 37)$$

Macierze te są związane równaniami

$$\left. \begin{array}{l} \mathbf{P}^2 = \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}^2 = \mathbf{P} \end{array} \right\} \quad (5, 38)$$

Rozpatrywane macierze są również operatorami, a mianowicie macierz  $\mathbf{P}$  jako mnożna przesuwająca cyklicznie w dowolnej macierzy kwadratowej

stopnia trzeciego wiersze o jedno miejsce w przód, a jako mnożnik — kolumny o dwa miejsca w przód. Możemy to sprawdzić przez wymnożenie

$$\mathbf{PA} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \\ a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \end{bmatrix}, \quad (5, 39)$$

$$\mathbf{AP} = \begin{bmatrix} a_{11}, & a_{12}, & a_{13} \\ a_{21}, & a_{22}, & a_{23} \\ a_{31}, & a_{32}, & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12}, & a_{13}, & a_{11} \\ a_{22}, & a_{23}, & a_{21} \\ a_{32}, & a_{33}, & a_{31} \end{bmatrix}. \quad (5, 40)$$

Skoro według (5,38) pomnożenie przez  $\mathbf{Q}$  oznacza tyle, co dwukrotne pomnożenie przez  $\mathbf{P}$ , to macierz  $\mathbf{Q}$  jest operatorem, który jako mnożna przesuwa cyklicznie w dowolnej macierzy kwadratowej stopnia trzeciego wiersze o dwa miejsca w przód, a jako mnożnik — kolumny o jedno miejsce w przód.

Następnie przy przesunięciu cyklicznym wierszy lub kolumn macierzy stopnia trzeciego o trzy miejsca w przód powracamy do macierzy w pierwotnej postaci, wobec czego zachodzi związek

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{QP} = \mathbf{P}^3 = \mathbf{Q}^3 = \mathbf{I}. \quad (5, 41)$$

Obliczymy następnie mnożone przez skalar  $\frac{1}{3}$  iloczyny macierzy

$\mathbf{SPS}$  i  $\mathbf{SQS}$

które oznaczymy odpowiednio przez  $\mathbf{H}_1$  i  $\mathbf{H}_2$ .

Na podstawie (5,40) mamy

$$\mathbf{SP} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h^2, & h, & 1 \\ h, & h^2, & 1 \end{bmatrix} \quad (5, 42)$$

i

$$\mathbf{H}_1 = \frac{1}{3} \mathbf{SPS} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h^2, & h, & 1 \\ h, & h^2, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & h^2 \\ 0, & h, & 0 \end{bmatrix}. \quad (5, 43)$$

Podobnie otrzymujemy

$$\mathbf{SQ} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \end{bmatrix} \quad (5, 44)$$

i

$$\mathbf{H}_2 = \frac{1}{3} \mathbf{S} \mathbf{Q} \mathbf{S} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & h \\ 0, & h^2, & 0 \end{bmatrix}. \quad (5, 45)$$

Obliczymy na koniec mnożone przez skalar  $\frac{1}{3}$  iloczyny macierzy  $\mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{S}$  i  $\mathbf{S} \mathbf{H}^2 \mathbf{Q} \mathbf{H}^2 \mathbf{S}$ , które oznaczymy odpowiednio przez  $\mathbf{H}_3$  i  $\mathbf{H}$ . W tym celu mnożymy:

$$\mathbf{S} \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \quad \text{według (5, 27),}$$

$$\mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix}, \quad (5, 46)$$

$$\mathbf{H} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h^2, & 0 \\ 0, & 0, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h^2, & h, & 1 \\ h, & h^2, & 1 \end{bmatrix}, \quad (5, 47)$$

$$\mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \\ 1, & 1, & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h^2, & h, & 1 \\ h, & h^2, & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 3h, & 0 \\ 3h^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 3 \end{bmatrix} \quad (5, 48)$$

i ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{H}_3 = \frac{1}{3} \mathbf{S} \mathbf{H} \mathbf{Q} \mathbf{H} \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0, & h, & 0 \\ h^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}. \quad (5, 49)$$

Dla obliczenia drugiego iloczynu mnożymy kolejno

$$\mathbf{S} \mathbf{H}^2 = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h, & 0 \\ 0, & 0, & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix}, \quad (5, 50)$$



$$\mathbf{SH}^2\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 1, & h, & h^2 \\ 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2, & 1, & h \\ 1, & 1, & 1 \\ h, & 1, & h^2 \end{bmatrix}, \quad (5, 51)$$

$$\mathbf{H}^2\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h, & 0 \\ 0, & 0, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \end{bmatrix}, \quad (5, 52)$$

$$\mathbf{SH}^2\mathbf{QH}^2\mathbf{S} = \begin{bmatrix} h^2, & 1, & h \\ 1, & 1, & 1 \\ h^2, & 1, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ h, & 1, & h^2 \\ h^2, & 1, & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 3h^2 \\ 0, & 3, & 0 \\ 3h, & 0, & 0 \end{bmatrix} \quad (5, 53)$$

i ostatecznie otrzymujemy

$$\mathbf{H}_4 = \frac{1}{3} \mathbf{SH}^2\mathbf{QH}^2\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & h^2 \\ 0, & 1, & 0 \\ h, & 0, & 0 \end{bmatrix}. \quad (5, 54)$$

#### 6. WYRAŻENIE ILOCZYNU MACIERZY WIERSZOWEJ PRZEZ KOLUMNOWĄ ZA POMOCĄ SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

Niech będą dane dwie macierze kolumnowe trójelementowe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix}, \quad (6, 1)$$

którym odpowiednio są przyporządkowane dwie macierze kolumnowe trójelementowe składowych symetrycznych wektora  $\bar{A}$  i wektora  $\bar{D}$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_s = \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (6, 2)$$

Transponując macierz kolumnową  $\mathbf{A}$  otrzymujemy

$$\mathbf{A}_t = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix}_t = [\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \quad (6, 3)$$

macierz wierszową  $\mathbf{A}_t$ , która pomnożona przez macierz kolumnową  $\mathbf{D}$  daje jako iloczyn

$$\mathbf{A}_t \mathbf{D} = [\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = \bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{E} + \bar{C}\bar{F} \quad (6,4)$$

macierz zerowskaźnikową.

Korzystając ze wzorów (4,5), (5,6) i (5,23) wyrazimy iloczyn  $\mathbf{A}_t \mathbf{D}$  przez składowe symetryczne wektorów  $\bar{A}$  i  $\bar{D}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t \mathbf{D} &= (\mathbf{S}\mathbf{A}_s)_t \mathbf{S}\mathbf{D}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{S}\mathbf{S}\mathbf{D}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{3}\mathbf{M}\mathbf{D}_s = \\ &= [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \mathbf{3} \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_1 \end{bmatrix} = 3(\bar{A}_0\bar{D}_0 + \bar{A}_1\bar{D}_2 + \bar{A}_2\bar{D}_1). \end{aligned} \quad (6,5)$$

A zatem

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_2 \\ \bar{D}_1 \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_0, \bar{A}_2, \bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (6,6)$$

Wyrazimy jeszcze iloczyn macierzy  $\mathbf{A}_t \mathbf{M}\mathbf{D}$  przez składowe symetryczne wektorów  $\bar{A}$  i  $\bar{D}$ :

$$\mathbf{A}_t \mathbf{M}\mathbf{D} = (\mathbf{S}\mathbf{A}_s)_t \mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{D}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{S}\mathbf{M}\mathbf{S}\mathbf{D}_s. \quad (6,7)$$

Stosujemy teraz wzory (5,14) i (5,1):

$$\mathbf{A}_t \mathbf{M}\mathbf{D} = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{S}\mathbf{S}_1\mathbf{D}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{3}\mathbf{I}\mathbf{D}_s = 3(\mathbf{A}_s)_t \mathbf{D}_s. \quad (6,8)$$

Ostatecznie otrzymujemy na podstawie (5,23)

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{F} \\ \bar{E} \end{bmatrix} = [\bar{A}, \bar{C}, \bar{B}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (6,9)$$

Otrzymane wyniki sformułujemy w następującym twierdzeniu:  
W ogólnym przypadku zachodzi nierówność

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} \neq 3[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix} \quad (6,10)$$

i aby otrzymać równość, należy zachowując niezmienną pozycję pozostałych elementów przestawić w dowolnej z czterech macierzy drugi element z trzecim, na przykład  $\bar{B}$  z  $\bar{C}$  albo  $\bar{E}$  z  $\bar{F}$ , albo  $\bar{A}_1$  z  $\bar{A}_2$ , albo wreszcie  $\bar{D}_1$  z  $\bar{D}_2$ .

Korzystając z określenia macierzy kolumnowych  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{D}$  oraz macierzy przekątnej  $\mathbf{H}$  za pomocą wzorów (6,1) oraz (5,26), rozpatrzmy z kolei iloczyny macierzy  $(\mathbf{HA})_t \mathbf{D}$  oraz  $(\mathbf{H}^2 \mathbf{A})_t \mathbf{D}$  i wyrażmy je przez składowe symetryczne wektory  $\bar{A}$  i  $\bar{D}$ .

Na podstawie związku (5,28) pierwszy iloczyn prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} (\mathbf{HA})_t \mathbf{D} &= (\mathbf{HSA}_s)_t \mathbf{SD}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{SHSD}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{3ND}_s = \\ &= 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_2 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6, 11)$$

czyli

$$[\bar{A}, h^2 \bar{B}, h \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_2 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_0 \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_2, \bar{A}_1, \bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (6, 12)$$

Drugi iloczyn na podstawie związku (5,32)

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^2 \mathbf{A})_t \mathbf{D} &= (\mathbf{H}^2 \mathbf{SA}_s)_t \mathbf{SD}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{SH}^2 \mathbf{SD}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{3LD}_s = \\ &= 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_0 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6, 13)$$

czyli

$$[\bar{A}, h \bar{B}, h^2 \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_1 \\ \bar{D}_0 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_1, \bar{A}_0, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix}. \quad (6, 14)$$

Korzystając z macierzy kwadratowych  $\mathbf{Q}$ ,  $\mathbf{H}_2$ ,  $\mathbf{H}_3$  i  $\mathbf{H}_4$ , określonych za pomocą wzorów (5,37), (5,45), (5,49) i (5,54), obliczymy najpierw iloczyny macierzy

$$\mathbf{QA} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix}, \quad (6, 15)$$

$$\mathbf{QHA} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix}, \quad (6, 16)$$

$$\mathbf{QH^2A} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h\bar{B} \\ h^2\bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h\bar{B} \\ h^2\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} \quad (6, 17)$$

i wyrazimy iloczyny

$$\mathbf{A}_t\mathbf{QA}, (\mathbf{HA})_t\mathbf{QHA} \text{ i } (\mathbf{H^2A})_t\mathbf{QH^2A}$$

przez składowe symetryczne wektorów  $\bar{A}$  i  $\bar{D}$ .

Na podstawie związku (5,45) pierwszy iloczyn prowadzi do wyrażenia

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_t\mathbf{QA} &= (\mathbf{SA}_s)_t\mathbf{QSA}_s = (\mathbf{A}_s)_t\mathbf{SQSA}_s = (\mathbf{A}_s)_t\mathbf{3H_2A}_s = \\ &= 3[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ h\bar{A}_2 \\ h^2\bar{A}_1 \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_0, -\bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6, 18)$$

czyli

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_0, -\bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (6, 19)$$

Na podstawie związku (5,49) drugi iloczyn

$$\begin{aligned} (\mathbf{HA})_t\mathbf{QHA} &= (\mathbf{HSA}_s)_t\mathbf{QHA}_s = (\mathbf{A}_s)_t\mathbf{SHQHA}_s = \\ &= (\mathbf{A}_s)_t\mathbf{3H_3A}_s = 3[\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} h\bar{A}_1 \\ h^2\bar{A}_0 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_2, -\bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6, 20)$$

czyli

$$[\bar{A}, h^2\bar{B}, h\bar{C}] \begin{bmatrix} h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3[\bar{A}_2, -\bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix}. \quad (6, 21)$$

Tablica 1

Zestawienie wyników dotyczących wyrażenia iloczynu macierzy wierszowej przez kolumnową za pomocą składowych symetrycznych

Wzór (6, 6)

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_2, \bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix},$$

czyli  $\bar{A}\bar{D} + \bar{B}\bar{E} + \bar{C}\bar{F} = 3(\bar{A}_0\bar{D}_0 + \bar{A}_2\bar{D}_1 + \bar{A}_1\bar{D}_2)$ .

W macierzy wierszowej pozycja elementu  $\bar{A}_0$  jest niezmieniona, a elementy  $\bar{A}_1$  i  $\bar{A}_2$  są zamienione miejscami.

Wzór (6, 12)

$$[\bar{A}, h^2\bar{B}, h\bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_2, \bar{A}_1, \bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix},$$

czyli  $\bar{A}\bar{D} + h^2\bar{B}\bar{E} + h\bar{C}\bar{F} = 3(\bar{A}_2\bar{D}_0 + \bar{A}_1\bar{D}_1 + \bar{A}_0\bar{D}_2)$ .

W macierzy wierszowej pozycja elementu  $\bar{A}_1$  jest niezmieniona, a elementy  $\bar{A}_2$  i  $\bar{A}_0$  są zamienione miejscami.

Wzór (6, 14)

$$[\bar{A}, h\bar{B}, h^2\bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_1, \bar{A}_0, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix},$$

czyli  $\bar{A}\bar{D} + h\bar{B}\bar{E} + h^2\bar{C}\bar{F} = 3(\bar{A}_1\bar{D}_0 + \bar{A}_0\bar{D}_1 + \bar{A}_2\bar{D}_2)$ .

W macierzy wierszowej pozycja elementu  $\bar{A}_2$  jest niezmieniona, a elementy  $\bar{A}_0$  i  $\bar{A}_1$  są zamienione miejscami.

Wzór (6, 18)

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{B} \\ \bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [A_0, -A_1] \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix},$$

czyli  $\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + \bar{C}\bar{A} = 3(\bar{A}_0^2 - \bar{A}_1\bar{A}_2)$ .

Wzór (6, 21)

$$[\bar{A}, h^2\bar{B}, h\bar{C}] \begin{bmatrix} h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_2, -\bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix},$$

czyli  $h^2\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + h\bar{C}\bar{A} = 3(\bar{A}_2^2 - \bar{A}_0\bar{A}_1)$ .

Wzór (6, 23)

$$[\bar{A}, h\bar{B}, h^2\bar{C}] \begin{bmatrix} h\bar{B} \\ h^2\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_1, -\bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix},$$

czyli  $h\bar{A}\bar{B} + \bar{B}\bar{C} + h^2\bar{C}\bar{A} = 3(\bar{A}_1^2 - \bar{A}_2\bar{A}_0)$ .

Wreszcie na podstawie związku (5,54) trzeci iloczyn

$$\begin{aligned} (\mathbf{H}^2 \mathbf{A})_t \mathbf{Q} \mathbf{H}^2 \mathbf{A} &= (\mathbf{H}^2 \mathbf{S} \mathbf{A}_s)_t \mathbf{Q} \mathbf{H}^2 \mathbf{S} \mathbf{A}_s = (\mathbf{A}_s)_t \mathbf{S} \mathbf{H}^2 \mathbf{Q} \mathbf{H}^2 \mathbf{S} \mathbf{A}_s = \\ &= (\mathbf{A}_s)_t 3 \mathbf{H}_4 \mathbf{A}_s = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2] \begin{bmatrix} h^2 \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \\ h \bar{A}_0 \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_1, -\bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (6, 22)$$

czyli

$$[\bar{A}, h \bar{B}, h^2 \bar{C}] \begin{bmatrix} h \bar{B} \\ h^2 \bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_1, -\bar{A}_2] \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix}. \quad (6, 23)$$

Ponadto obliczymy iloczyn trzech wektorów będących obrazami trzech liczb zespolonych:

$$\begin{aligned} \overline{ABC} &= (\bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2) (\bar{A}_0 + h^2 \bar{A}_1 + h \bar{A}_2) (\bar{A}_0 + h \bar{A}_1 + h^2 \bar{A}_2) = \\ &= \bar{A}_0^3 + \bar{A}_1^3 + \bar{A}_2^3 - 3 \bar{A}_0 \bar{A}_1 \bar{A}_2. \end{aligned} \quad (6, 24)$$

#### 7. OBLICZENIE SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH ILOCZYNU MACIERZY STOPNIA TRZECIEGO PRZEZ MACIERZ KOLUMNOWĄ

Rozpatrujemy dwie macierze: macierz kolumnową trójelementową

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} \quad (7, 1)$$

oraz macierz symetryczną stopnia trzeciego o elementach zerowych na głównej przekątnej; elementy niezerowe macierzy symetrycznej oznaczmy małymi literami alfabetu dla odróżnienia od elementów macierzy kolumnowej

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} 0, & \bar{c}, & \bar{b} \\ \bar{c}, & 0, & \bar{a} \\ \bar{b}, & \bar{a}, & 0 \end{bmatrix}. \quad (7, 2)$$

Iloczyn macierzy wynosi

$$\mathbf{\Gamma} = \mathbf{GA} = \begin{bmatrix} 0, & \bar{c}, & \bar{b} \\ \bar{c}, & 0, & \bar{a} \\ \bar{b}, & \bar{a}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} \end{bmatrix}. \quad (7, 3)$$

W interesującym nas zakresie zagadnień elementy macierzy  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{A}, \bar{B}, \bar{C}, \bar{\alpha}, \bar{\beta}$  i  $\gamma$  są liczbami zespolonymi, których obrazami geometrycznymi jest 9 odpowiednich wektorów. Składowe symetryczne wektora  $\bar{a}$  wynoszą  $\bar{a}_0, \bar{a}_1$  i  $\bar{a}_2$ ; wektora  $\bar{A} - \bar{A}_0, \bar{A}_1$  i  $\bar{A}_2$ ; wektora  $\bar{\alpha} - \bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1$  i  $\bar{\alpha}_2$ .

Obliczamy macierz kolumnową składowych symetrycznych wektora  $\bar{\alpha}$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \bar{a}_0 \\ \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \mathbf{S}_1 \Gamma = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0, & \bar{c}, & \bar{b} \\ \bar{c}, & 0, & \bar{a} \\ \bar{b}, & \bar{a}, & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{c} + \bar{b}, & \bar{c} + \bar{a}, & \bar{b} + \bar{a} \\ \bar{c} + h^2 \bar{b}, & \bar{c} + h^2 \bar{a}, & \bar{b} + h \bar{a} \\ h^2 \bar{c} + h \bar{b}, & \bar{c} + h \bar{a}, & \bar{b} + h^2 \bar{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}), & (h + h^2)\bar{a} + (1 + h)\bar{b} + (1 + h^2)\bar{c}, & (h + h^2)\bar{a} + (1 + h^2)\bar{b} + (1 + h)\bar{c} \\ (h + h^2)\bar{a} + (1 + h^2)\bar{b} + (1 + h)\bar{c}, & (h + h^2)\bar{a} + (h + h^2)\bar{b} + (h + h^2)\bar{c}, & 2\bar{a} + 2h^2\bar{b} + 2h\bar{c} \\ (h + h^2)\bar{a} + (1 + h)\bar{b} + (1 + h^2)\bar{c}, & 2\bar{a} + 2h\bar{b} + 2h^2\bar{c}, & (h + h^2)\bar{a} + (h + h^2)\bar{b} + (h + h^2)\bar{c} \end{bmatrix} \\ &\cdot \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}), & -\bar{a} - h^2\bar{b} - h\bar{c}, & -\bar{a} - h\bar{b} - h^2\bar{c} \\ -\bar{a} - h\bar{b} - h^2\bar{c}, & -\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}, & 2(\bar{a} + h^2\bar{b} + h\bar{c}) \\ -\bar{a} - h^2\bar{b} - h\bar{c}, & 2(\bar{a} + h\bar{b} + h^2\bar{c}), & -\bar{a} - \bar{b} - \bar{c} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 2\bar{a}_0, & -\bar{a}_2, & -\bar{a}_1 \\ -\bar{a}_1, & -\bar{a}_0, & 2\bar{a}_2 \\ -\bar{a}_2, & 2\bar{a}_1, & -\bar{a}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7, 4)$$

#### 8. WYRAŻENIE UKŁADU TRZECH WEKTORÓW SPRZĘŻONYCH Z DANYMI TRZEMA WEKTORAMI ZA POMOCĄ SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

Dla danej liczby zespolonej

$$c = a + jb = \rho e^{j\varphi} \quad (8, 1)$$

liczbą zespoloną sprzężoną jest

$$c^* = a - jb = \rho e^{-j\varphi}. \quad (8, 2)$$

Jak wiadomo, liczbą sprzężoną z sumą, różnicą, iloczynem lub ilorazem dwóch liczb zespolonych jest suma, różnica, iloczyn lub iloraz liczb sprzężonych z tymi liczbami zespolonymi.

Jeżeli wektor  $\bar{A}$  jest obrazem geometrycznym liczby zespolonej  $c$ , to nazwiemy wektorem sprzężonym z danym wektorem taki wektor  $\bar{A}^*$ , który jest obrazem geometrycznym liczby zespolonej  $c^*$ .

Na podstawie równań podstawowych (4,2) i własności sprzężenia mamy:

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^* &= (\bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2)^* = \bar{A}_0^* + \bar{A}_1^* + \bar{A}_2^*, \\ \bar{B}^* &= (\bar{A}_0 + h^2 \bar{A}_1 + h \bar{A}_2)^* = \bar{A}_0^* + h \bar{A}_1^* + h^2 \bar{A}_2^*, \\ \bar{C}^* &= (\bar{A}_0 + h \bar{A}_1 + h^2 \bar{A}_2)^* = \bar{A}_0^* + h^2 \bar{A}_1^* + h \bar{A}_2^*. \end{aligned} \right\} \quad (8, 3)$$

Układ ten w postaci macierzy wyraża się równaniem

$$\begin{bmatrix} \bar{A}^* \\ \bar{B}^* \\ \bar{C}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0^* \\ \bar{A}_1^* \\ \bar{A}_2^* \end{bmatrix}, \quad (8, 4)$$

czyli

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{S}_1 \mathbf{A}_s^*, \quad (8, 5)$$

gdzie

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} \bar{A}^* \\ \bar{B}^* \\ \bar{C}^* \end{bmatrix} \quad (8, 6)$$

jest to macierz kolumnowa wektorów sprzężonych z danym układem wektorów,

$$\mathbf{A}_s^* = \begin{bmatrix} \bar{A}_0^* \\ \bar{A}_1^* \\ \bar{A}_2^* \end{bmatrix} \quad (8, 7)$$

jest to macierz kolumnowa wektorów sprzężonych z układem składowych symetrycznych,  $\mathbf{S}_1$  zaś jest znaną nam mnożoną przez skalar 3 macierzą odwrotną względem macierzy operatorowej składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$ . Równanie (8,5) nadaje nowe znaczenie macierzy  $\mathbf{S}_1$ , gdyż przez wzięcie „sprzężenia“ obu stron równania (4,5)  $\mathbf{A} = \mathbf{S} \mathbf{A}_s$ ,

otrzymujemy równanie (8,5)  $\mathbf{A}^* = \mathbf{S}_1 \mathbf{A}_s^*$ ,

w którym macierz  $\mathbf{S}_1$  jest macierzą operatorową sprzężoną z macierzą operatorową składowych symetrycznych  $\mathbf{S}$ .

Mnożąc obustronnie równanie (8,5) przez  $\mathbf{S}$

$$\mathbf{S} \mathbf{A}^* = \mathbf{S} \mathbf{S}_1 \mathbf{A}_s^* \quad (8, 8)$$

otrzymujemy na podstawie zależności (5,1) równanie dopełniające do (8,5)

$$\mathbf{A}_s^* = \frac{1}{3} \mathbf{S} \mathbf{A}^*, \quad (8, 9)$$



które w postaci rozwiniętej napiszemy następująco:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_0^* \\ \bar{A}_1^* \\ \bar{A}_2^* \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}^* \\ \bar{B}^* \\ \bar{C}^* \end{bmatrix}, \quad (8, 10)$$

### 9. BADANIE PRZYPADKÓW SZCZEGÓLNYCH RÓWNANIA PODSTAWOWEGO $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{A}_s$

Rozpatrzmy teraz spotykane często w zagadnieniach elektrotechnicznych przypadki szczególne równania podstawowego  $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{A}_s$ , w których bądź to układ wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  jest układem symetrycznym, bądź też niektóre z danych wektorów  $\bar{A}, \bar{B}$  i  $\bar{C}$  lub składowych symetrycznych  $\bar{A}_0, \bar{A}_1$  i  $\bar{A}_2$  znikają. Przypominamy przy tym zastrzeżenie wymienione w rozdziale 3, iż poza zakresem rozważań pozostawiamy układ trzech wektorów zerowych, wobec czego z trzech wektorów układu mogą znikać co najwyżej dwa.

Zagadnienie przypadków szczególnych będzie ujęte w cztery twierdzenia od 9.1 do 9.4.

#### Twierdzenie 9.1

*Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby trzy dane wektory  $\bar{A}, \bar{B}$  i  $\bar{C}$  tworzyły układ symetryczny, jest znikanie dwóch spośród trzech składowych symetrycznych wektora  $\bar{A}$ , przy czym*

- 1) przy  $\bar{A}_1=0$  i  $\bar{A}_2=0$  układ wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  jest układem zerowym,
- 2) przy  $\bar{A}_0=0$  i  $\bar{A}_2=0$  układ wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  jest układem dodatnim, a
- 3) przy  $\bar{A}_0=0$  i  $\bar{A}_1=0$  układ wektorów  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  jest układem ujemnym.

1. Warunek konieczny i dostateczny dla układu zerowego.

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \bar{A}=\bar{B}=\bar{C}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{A} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9, 1)$$

czyli składowa dodatnia i ujemna są zerami, a składowa zerowa jest równa danemu wektorowi  $\bar{A}$ .

Dostateczność warunku

Gdy  $\bar{A}_1=0$ ,  $\bar{A}_2=0$ ,

to

$$\begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix}, \quad (9, 2)$$

a więc  $\bar{A}=\bar{B}=\bar{C}$ , czyli dane trzy wektory tworzą układ zerowy.

2. Warunek konieczny i dostateczny dla układu dodatniego.

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h^2\bar{A} \\ h\bar{A} \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h^2\bar{A} \\ h\bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9, 3)$$

czyli składowa zerowa i ujemna są zerami, a składowa dodatnia jest równa danemu wektorowi  $\bar{A}$ .

Dostateczność warunku

Gdy  $\bar{A}_0=0$ ,  $\bar{A}_2=0$ ,

$$\text{to } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{A}_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_1 \\ h^2\bar{A}_1 \\ h\bar{A}_1 \end{bmatrix}, \quad (9, 4)$$

czyli dane trzy wektory tworzą układ dodatni.

3. Warunek konieczny i dostateczny dla układu ujemnego.

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h\bar{A} \\ h^2\bar{A} \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ h\bar{A} \\ h^2\bar{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{A} \end{bmatrix}, \quad (9, 5)$$

czyli składowa zerowa i dodatnia są zerami, a składowa ujemna jest równa danemu wektorowi  $\bar{A}$ .

Dostateczność warunku

Gdy  $\bar{A}_0=0$ ,  $\bar{A}_1=0$ ,

$$\text{to } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ h\bar{A}_2 \\ h^2\bar{A}_2 \end{bmatrix}, \quad (9, 6)$$

czyli dane trzy wektory tworzą układ ujemny.

Ponieważ rozpatrzone trzy przypadki wyczerpują układy symetryczne trzech wektorów, więc twierdzenie nasze jest dowiedzione.

**Twierdzenie 9.2**

*Warunkiem koniecznym i dostatecznym, aby suma trzech danych wektorów zniknęła  $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C} = 0$ , jest znikanie składowej zerowej  $\bar{A}_0$ .*

Twierdzenie to wynika z pierwszego równania (4,2), zgodnie z którym

$$\bar{A}_0 = \frac{1}{3} (\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}).$$

**Twierdzenie 9.3**

*Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w układzie  $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$  tylko jeden z wektorów był różny od zera, jest, aby składowe symetryczne wektora  $\bar{A}$  tworzyły układ symetryczny, przy czym*

- 1) przy  $\bar{A} \neq 0$  układ wektorów  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2)$  jest układem zerowym,
- 2) przy  $\bar{C} \neq 0$  układ wektorów  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2)$  jest układem dodatnim,
- 3) przy  $\bar{B} \neq 0$  układ wektorów  $(\bar{A}_0, \bar{A}_1, \bar{A}_2)$  jest układem ujemnym.

1. Warunek konieczny i dostateczny dla układu zerowego.

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{A} \\ \bar{A} \end{bmatrix}, \quad (9, 7)$$

czyli składowe symetryczne niezerowego wektora  $\bar{A}$  — zerowa, dodatnia i ujemna — są sobie równe.

Dostateczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & -1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \\ \bar{A}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\bar{A}_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (9, 8)$$

czyli z danych trzech wektorów tylko pierwszy jest niezerowy.

2. Warunek konieczny i dostateczny dla układu dodatniego

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{C} \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{C} \\ h^2\bar{C} \\ h\bar{C} \end{bmatrix}, \quad (9, 9)$$

czyli składowe symetryczne wektora  $\bar{A}$  tworzą układ symetryczny dodatni.

Dostateczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ h\bar{A}_0 \\ h\bar{A}_0 \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ h^2\bar{A}_0 \\ h\bar{A}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3\bar{A}_0 \end{bmatrix}, \quad (9, 10)$$

czyli z danych trzech wektorów tylko trzeci jest niezerowy.

3. Warunek konieczny i dostateczny dla układu ujemnego

Konieczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \bar{B} \\ h\bar{B} \\ h^2\bar{B} \end{bmatrix}, \quad (9, 11)$$

czyli składowe symetryczne wektora  $\bar{A}$  tworzą układ symetryczny ujemny.

Dostateczność warunku

$$\text{Gdy } \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ \bar{A}_1 \\ \bar{A}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ h\bar{A}_0 \\ h^2\bar{A}_0 \end{bmatrix}, \text{ to } \begin{bmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \\ \bar{C} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{A}_0 \\ h\bar{A}_0 \\ h^2\bar{A}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\bar{A}_0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9, 12)$$

czyli z danych trzech wektorów tylko drugi jest niezerowy.

## Twierdzenie 9.4

*Warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby w układzie trzech danych wektorów pierwszy wektor był równy zeru, jest znikanie sumy składowych symetrycznych tego wektora.*

Twierdzenie to wynika z pierwszego równania (4,2), zgodnie z którym

$$\bar{A} = \bar{A}_0 + \bar{A}_1 + \bar{A}_2.$$

Z rozważań niniejszej części widzimy, że matematyczna teoria składowych symetrycznych wiąże się ściśle z rachunkiem macierzy i da się prosto przedstawić za pomocą tego rachunku.

Zagadnienia związane z zastosowaniem teorii składowych symetrycznych do elektrotechniki będą przedmiotem naszych rozważań w następnej części artykułu.

## C z ę ś ć II

## Macierzowa teoria składowych symetrycznych jako dział elektrotechniki

## 10. ZNAKOWNICTWO WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH PRZY STOSOWANIU ALGEBRY NIEMACIERZOWEJ I MACIERZOWEJ

Metoda symboliczna pozwala na odwzorowanie za pomocą rachunku liczb zespolonych wielkości elektrycznych sinusoidalnie zmiennych, jak siły elektromotorycznej, napięcia lub prądu i wielkości elektrycznych będących operatorami obrotu i wydłużenia, jak oporności pozornej lub przewodności pozornej.

Rozpatrując element pasywny, to znaczy nie zawierający źródła energii, możemy przy tym zaznaczyć, że w układzie odniesienia prądu przewodowego i napięcia na końcówkach oporność pozorna  $\hat{Z}$  oraz przewodność pozorna  $\hat{Y}$  są ogniwami wiążącymi ze sobą prąd  $\hat{J}$  płynący przez element z napięciem  $\hat{U}$  na końcówkach tego elementu. W odpowiednim związku, zwanym prawem Ohma dla prądu zmiennego, wyrażanym

$$\begin{aligned} &\text{w postaci opornościowej } \hat{U} = \hat{Z} \hat{J} \\ &\text{lub przewodnościowej } \hat{J} = \hat{Y} \hat{U} \end{aligned}$$

oporność pozorna  $\hat{Z} = Ze^{j\varphi}$  jest operatorem obrotu o kąt  $\varphi$  i wydłużenia w stosunku modułów  $\frac{U}{J}$  (ściślej mówiąc, iloczynem operatorów obrotu i wydłużenia), a przewodność pozorna  $\hat{Y} = Ye^{-j\varphi}$  jest operatorem obrotu o kąt  $-\varphi$  i wydłużenia w stosunku modułów  $\frac{J}{U}$ .

Operatory obrotu i wydłużenia  $\hat{Z}$  oraz  $\hat{Y}$ , traktowane jako liczby zespolone, nazywamy również operatorami wektorowymi i w tym sensie mówimy o operatorze wektorowym  $\hat{Z}$  lub operatorze wektorowym  $\hat{Y}$ . Wielkości elektryczne sinusoidalnie zmiennie, traktowane jako liczby zespolone, nazywamy wektorami i w tym sensie mówimy o wektorze prądu  $\hat{J}$  lub wektorze napięcia  $\hat{U}$ .

Operator obrotu o kąt  $120^\circ$  bywa w literaturze oznaczany przez  $a$ ,  $h$  lub  $\lambda$ . Ponieważ zamiast dawnego oznaczania faz przez  $R$ ,  $S$ ,  $T$  coraz częściej spotykamy się z oznaczeniami  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , znak  $a$  dla operatora obrotu o kąt  $120^\circ$  wydaje się być mniej odpowiedni niż  $h$ . Na korzyść znaku  $h$  przemawia jeszcze ta okoliczność, że litera  $h$  w alfabecie znajduje się obok liter  $i$ ,  $j$ , więc na oznaczenie operatora obrotu pokrewnego w stosunku do  $j = e^{j\frac{\pi}{2}}$  odpowiednie jest użycie znaku  $h = e^{j\frac{2\pi}{3}}$ .

Przy stosowaniu algebry niemacierzowej oznaczamy w metodzie symbolicznej wielkości elektryczne traktowane jako liczby zespolone daszkami, na przykład,  $\hat{U}$ ,  $\hat{J}$ ,  $\hat{Z}$ , dla odróżnienia ich od modułów tychże wielkości pisanych bez daszka  $U$ ,  $J$ ,  $Z$ . Niektórzy autorzy oznaczają wielkości elektryczne nie za pomocą daszków, lecz przez kreski lub kropki nad znakiem danej wielkości elektrycznej. Zaletą daszkowania jest łatwość oznaczania za pomocą daszka odwróconego wielkości elektrycznej sprzężonej z daną wielkością.

W związku ze znakownictwem operatorów obrotu zauważymy, że stawianie daszka na operatorem obrotu  $h$  jest zbędne, choć niektórzy autorzy zagraniczni i polscy znaczek nad tym operatorem stawiają. Niedaszkowanie operatora  $h$  uzasadniamy dwiema okolicznościami:

1.  $h$  oraz  $j$  są przypadkami szczególnymi  $e^{j\varphi}$  operatora obrotu o kąt  $\varphi$  dla wartości kąta  $120^\circ$  oraz  $90^\circ$ , wobec czego konsekwentne jest stawianie daszków nad wszystkimi rozpatrywanymi operatorami obrotu będącymi liczbami zespolonymi  $e^{j\varphi}$ ,  $\hat{h}$ ,  $\hat{j}$  lub nad żadnymi z nich,
2. modułami liczb  $e^{j\varphi}$ ,  $h$ ,  $j$  jest liczba 1, wobec czego znak  $h$  lub  $j$  oznacza oczywiście liczbę zespoloną, a nie jej moduł, nie ma więc obawy niejasności takiej, jaka by istniała w algebrze niemacierzowej przy pisaniu  $\hat{U}$  oraz  $U$  lub  $\hat{Z}$  oraz  $Z$  za pomocą tych samych znaków.

W pewnym stopniu analogiczna sprawa dotyczy niedaszkowania wielkości elektrycznych w równaniach macierzowych; ponieważ elementami macierzy wierszowych, kolumnowych i kwadratowych w tych równaniach są z reguły wielkości elektryczne w postaci symbolicznej, nie zaś moduły tych wielkości, pomijamy dla uproszczenia znaczki nad wielkościami  $E$ ,  $U$ ,  $J$ ,  $Z$ ,  $Y$  w algebrze macierzowej. Znakownictwo to nie powoduje żadnej niejasności, a pominięcie znaczków nad wielkościami czyni obliczenia bardziej przejrzystymi. Gdyby w drodze wyjątku w którejkolwiek macierzy miał występować jako element moduł wielkości elektrycznej, należałoby wobec tego element taki umieścić w pionowych kreskach jako znaku bezwzględnej wartości. Pozostając zatem przy znakownictwie daszkowym dla wielkości elektrycznych w postaci symbolicznej ograniczymy zakres daszkowania wyłącznie do obliczeń niemacierzowych.

## 11. ROZKŁAD WIELKOŚCI ELEKTRYCZNYCH NA SKŁADOWE SYMETRYCZNE

W układzie trójfazowym odwzorowaniem geometrycznym prądu przewodowego lub fazowego, siły elektromotorycznej bądź napięcia międzyprzewodowego lub fazowego jest wykres trzech wektorów, będących odciwkami skierowanymi na płaszczyźnie Gaussa, które według zasad ma-

Tablica 2

## Rozkład wielkości elektrycznych na składowe symetryczne

W postaci uproszczonej	W postaci rozwiniętej
$\mathbf{E} = \mathbf{S}\mathbf{E}_s$	$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{E}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{E}$	$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix}$
$\mathbf{U} = \mathbf{S}\mathbf{U}_s$	$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{U}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{U}$	$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}$
$\mathbf{J} = \mathbf{S}\mathbf{J}_s$	$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{J}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{J}$	$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix}$
$\mathbf{Z} = \mathbf{S}\mathbf{z}_s$	$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{z}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Z}$	$\begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix}$
$\mathbf{Y} = \mathbf{S}\mathbf{y}_s$	$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$
$\mathbf{y}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{Y}$	$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h, & h^2 \\ 1, & h^2, & h \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_c \end{bmatrix}$

tematycznej teorii składowych symetrycznych możemy rozłożyć na trzy układy symetryczne: układ zerowy, układ dodatni i układ ujemny. Podobnie odwzorowaniem geometrycznym układu oporności pozornych lub przewodności pozornych w trzech fazach jest wykres trzech operatorów wektorowych, będących również odcinkami skierowanymi na płaszczyźnie Gaussa, które też możemy rozłożyć na trzy układy symetryczne: układ zerowy, dodatni i ujemny. Różnica między wektorami a operatorami wektorowymi polega na różnym znaczeniu fizycznym reprezentowanych wielkości elektrycznych, natomiast w interpretacji geometrycznej rozkład na składowe symetryczne jest analogiczny.

W następnych punktach zajmiemy się znaczeniem fizycznym rozkładu wielkości elektrycznych na składowe symetryczne, a w szczególności w układzie składowych symetrycznych — jaki jest sens elektryczny i w jakiej postaci mogą być stosowane podstawowe równania elektrotechniki, jak prawo Ohma dla układu trójfazowego, prawa Kirchhoffa itd.

Na razie zaś — nie przesądzając, jakie jest znaczenie fizyczne rozkładu wielkości elektrycznych na składowe symetryczne — możemy w układzie trójfazowym formalnie matematycznie zastosować równania macierzowe (4,4) oraz (4,10) i rozłożyć na składowe symetryczne siłę elektromotoryczną, napięcie, prąd, oporność pozorną i przewodność pozorną, otrzymując równania podane w tabelicy 2.

Zaznaczyć przy tym należy, że elementy macierzy i macierze składowych symetrycznych oporności pozornej i przewodności pozornej oznaczamy małymi literami

$$\mathbf{z}_s = \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_s = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \quad (11, 6)$$

rezerwując wielkie litery dla macierzy innych wielkości elektrycznych: oporności pozornej dla składowej zerowej, dodatniej i ujemnej prądu oraz przewodności pozornej dla składowej zerowej, dodatniej i ujemnej napięcia

$$\mathbf{Z}_s = \begin{bmatrix} Z_0 \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Y}_s = \begin{bmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix}, \quad (11, 7)$$

które wprowadzimy w jednym z następnych rozdziałów w związku z rozpatrywaniem prawa Ohma w układzie odniesienia składowych symetrycznych.



## 12. ZASADNICZE TWIERDZENIA ELEKTRYCZNEJ TEORII SKŁADOWYCH SYMETRYCZNYCH

W rozdziale 3 podaliśmy definicję układu trzech wektorów oraz symetrycznego i asymetrycznego układu trzech wektorów. Skoro odwzorowaniem geometrycznym układu trzech sił elektromotorycznych, napięć lub prądów jest układ trzech wektorów, z podanych definicji wynika określenie, co należy rozumieć przez układ (dowolny), układ symetryczny zerowy, dodatni i ujemny oraz układ asymetryczny sił elektromotorycznych, napięć lub prądów. A więc na przykład dla napięć zachodzą równania:

$$\text{dla układu zerowego} \quad \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \end{bmatrix}$$

$$\text{dla układu dodatniego} \quad \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ h^2 U \\ hU \end{bmatrix}$$

$$\text{i dla układu ujemnego} \quad \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ hU \\ h'U \end{bmatrix}$$

Przejdziemy teraz do określenia symetrycznego i asymetrycznego odbiornika.

Przez symetryczny odbiornik trójfazowy rozumiemy taki odbiornik, którego oporności pozorne są identyczne w każdej fazie co do modułu i argumentu, albo innymi słowy, który składa się z trzech odbiorników o jednakowych opornościach czynnych i jednakowych opornościach biernych w każdej fazie. Zamiast o identyczności trzech oporności pozornych można by w definicji symetrycznego odbiornika trójfazowego mówić o identyczności trzech przewodności pozornych. Symetrycznemu odbiornikowi trójfazowemu odpowiada zatem układ zerowy jego oporności pozornych:

$$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ Z \\ Z \end{bmatrix}$$

i układ zerowy jego przewodności pozornych

$$\begin{bmatrix} Y_a \\ Y_b \\ Y_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y \\ Y \\ Y \end{bmatrix}.$$

Przez asymetryczny odbiornik trójfazowy rozumiemy taki odbiornik, który nie jest symetryczny, a więc w którym co najmniej moduł oporności pozornej jednej fazy jest różny od modułów oporności pozornych pozostałych dwóch faz lub co najmniej argument oporności pozornej w jednej fazie jest różny od argumentów oporności pozornych w pozostałych dwóch fazach; tym bardziej asymetryczny będzie odbiornik o różnych trzech modułach oporności pozornych lub różnych argumentach oporności pozornej w trzech fazach albo o różnych i modułach, i argumentach.

Zastosujemy obecnie do elektrotechniki rozpatrywane w rozdziale 9 twierdzenia matematyczne obejmujące przypadki szczególne równania  $\mathbf{A}=\mathbf{S}\mathbf{A}_s$ , w których składowe symetryczne spełniają pewne warunki, na przykład nie wszystkie są różne od zera. Zacniemy od rozkładu na składowe symetryczne symetrycznego układu napięć, sił elektromotorycznych, prądów oraz symetrycznego układu zerowego oporności pozornych i przewodności pozornych.

#### Twierdzenie 12.1

*W symetrycznym układzie dodatnim napięć (sił elektromotorycznych lub prądów) składowa zerowa i ujemna znikają, a składowa dodatnia jest równa napięciu fazy podstawowej.*

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 9.1, a mianowicie

$$\text{przy } \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ h^2U \\ hU \end{bmatrix} \quad \text{mamy} \quad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12, 1)$$

*W symetrycznym układzie ujemnym napięć (sił elektromotorycznych lub prądów) składowa zerowa i dodatnia znikają, a składowa ujemna jest równa napięciu fazy podstawowej.*

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 9.1, a mianowicie

$$\text{przy } \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ hU \\ h^2U \end{bmatrix} \quad \text{mamy} \quad \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ U \end{bmatrix}. \quad (12, 2)$$

*W symetrycznym układzie zerowym napięć (sił elektromotorycznych, prądów, oporności pozornych lub przewodności pozornych) składowa dodatnia i ujemna znikają, a składowa zerowa jest równa napięciu fazy podstawowej.*

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 9.1, a mianowicie

$$\text{przy } \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ U \\ U \end{bmatrix} \text{ mamy } \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (12, 3)$$

### Twierdzenie 12.2

*W układzie źródła lub odbiornika trójfazowego połączonego w gwiazdę bez przewodu neutralnego składowa zerowa prądu jest zerem.*

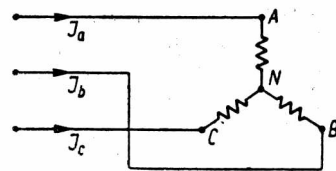
Opieramy się na I prawie Kirchhoffa, zastosowanym do punktu neutralnego źródła lub odbiornika (rys. 8).

Skoro suma geometryczna prądów w punkcie neutralnym jest zerem

$$\hat{J}_a + \hat{J}_b + \hat{J}_c = 0, \quad (12, 4)$$

to z twierdzenia 9.2 wynika, że składowa zerowa prądu jest zerem

$$\hat{J}_0 = 0. \quad (12, 5)$$



Rys. 8. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę.

Zaznaczyć należy, że w układzie czteroprzewodowym prąd w przewodzie neutralnym, o kierunku obranym od odbiornika ku źródłu, jest sumą geometryczną trzech prądów fazowych i na ogół nie jest zerem, stąd w twierdzeniu naszym warunkiem istotnym jest, aby układ trójfazowy był połączony w gwiazdę bez przewodu neutralnego.

### Twierdzenie 12.3

*W układzie trzech prądów (sił elektromotorycznych lub napięć), w którym tylko jeden prąd jest różny od zera, składowe symetryczne tego prądu są sobie równe.*

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 9.3, a mianowicie

$$\text{przy } \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ mamy } \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} J \\ J \\ J \end{bmatrix}. \quad (12, 6)$$

Jeżeli na przykład w sieci trójfazowej o punkcie neutralnym źródła uziemionym oraz o fazach ekranowanych od siebie i od ziemi, będącej w stanie jałowym, nastąpi zwarcie fazy *a* z ziemią, to składowe symetryczne prądu  $\hat{J}_a$  są sobie równe.

### Twierdzenie 12.4

W układzie trzech napięć (sił elektromotorycznych lub prądów), w którym tylko jedno napięcie jest równe zeru, suma geometryczna składowych symetrycznych tego napięcia jest zerem.

Twierdzenie to jest wnioskiem z twierdzenia 9.4, a mianowicie

$$\text{przy } \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \text{ mamy } \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} U_b + U_c \\ hU_b + h^2U_c \\ h^2U_b + hU_c \end{bmatrix}, \quad (12, 7)$$

$$\hat{U}_0 + \hat{U}_1 + \hat{U}_2 = 0. \quad (12, 8)$$

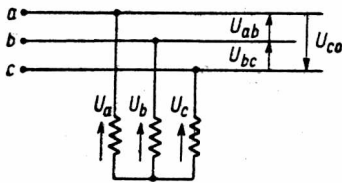
Jeżeli na przykład w odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę nastąpi zwarcie w fazie  $a$ , to napięcie na tej fazie jest zerem  $\hat{U}_a = 0$  i w konsekwencji suma jego składowych symetrycznych znika.

### Twierdzenie 12.5

W układzie trójfazowym składowa zerowa napięcia międzyprzewodowego i składowa zerowa siły elektromotorycznej międzyprzewodowej są zawsze zerami.

W sieci czteroprzewodowej korzystamy z napięć fazowych  $\hat{U}_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c$  a w sieci trójprzewodowej bez przewodu neutralnego możemy wytworzyć sztuczny punkt neutralny dla celów pomiarowych (rys. 9<sup>2)</sup> w celu uzyskania napięć fazowych  $\hat{U}_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c$ .

Z ogólnych zasad elektrotechniki wiemy że



Rys. 9. Sztuczny punkt neutralny w sieci trójfazowej trójprzewodowej

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_{ab} &= \hat{U}_a - \hat{U}_b, \\ \hat{U}_{bc} &= \hat{U}_b - \hat{U}_c, \\ \hat{U}_{ca} &= \hat{U}_c - \hat{U}_a, \end{aligned} \right\} \quad (12, 9)$$

stąd suma napięć międzyprzewodowych przy zachowaniu cyklicznej kolejności wskaźników jest zerem

$$\hat{U}_{ab} + \hat{U}_{bc} + \hat{U}_{ca} = 0 \quad (12, 10)$$

i z twierdzenia (9.2) otrzymujemy, że składowa zerowa napięcia międzyprzewodowego znika

$$\hat{U}_0 = 0. \quad (12, 11)$$

<sup>2</sup> Na tym rysunku i na następnych oznaczamy umownie strzałkę napięcia w źródle i na odbiorniku w kierunku wzrostu potencjału.

Analogicznie można by dowieść, że składowa zerowa siły elektromotorycznej międzyprzewodowej jest zerem  $\hat{E}_0 = 0$ .

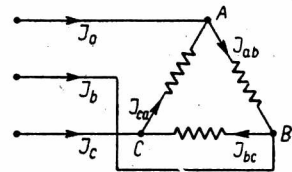
### Twierdzenie 12.6

*W uzwojeniach odbiornika lub prądnicy połączonej w trójkąt może krążyć składowa zerowa prądu, ale nie może wyjść na linię.*

Jeżeli linia jest obciążona odbiornikiem połączonym w gwiazdę, to stosownie do twierdzenia 12.2 składowa zerowa prądu przewodowego w linii nie płynie.

Jeżeli zaś linia jest obciążona odbiornikiem połączonym w trójkąt, to możemy zastosować przekształcenie trójkąt-gwiazda i zastąpić go przez odbiornik połączony w gwiazdę lub też przy oznaczeniu prądów przewodowych i fazowych jak na rys. 10 napisać

$$\left. \begin{aligned} \hat{J}_a &= \hat{J}_{ab} - \hat{J}_{ca}, \\ \hat{J}_b &= \hat{J}_{bc} - \hat{J}_{ab}, \\ \hat{J}_c &= \hat{J}_{ca} - \hat{J}_{bc}, \end{aligned} \right\} \quad (12, 12)$$



Rys. 10. Odbiornik trójfazowy połączony w trójkąt.

a stąd suma prądów przewodowych jest zerem

$$\hat{J}_a + \hat{J}_b + \hat{J}_c = 0 \quad (12, 13)$$

w konsekwencji składowa zerowa prądu przewodowego znika

$$\hat{J}_0 = 0. \quad (12, 14)$$

Analogicznie do powyższych rozumowań dla odbiornika połączonego w trójkąt przebiegają rozważania dla prądnicy połączonej w trójkąt.

W ten sposób składowa zerowa prądu nigdy nie może wyjść na linię. Składowa ta krąży w uzwojeniach prądnicy połączonej w trójkąt lub odbiornika połączonego w trójkąt, gdy z trzech prądów fazowych  $\hat{J}_{ab}$ ,  $\hat{J}_{bc}$ ,  $\hat{J}_{ca}$  można utworzyć otwarty trójkąt. W przeciwnym razie, gdy trzy prądy fazowe tworzą zamknięty trójkąt, składowa zerowa prądu nie może krążyć ani w uzwojeniach prądnicy, ani też w uzwojeniach odbiornika połączonego w trójkąt, co wynika z twierdzenia 9.2, czyli składowa zerowa prądów w ogóle nie występuje w całym układzie: prądnica — linia — odbiornik.

### Twierdzenie 12.7

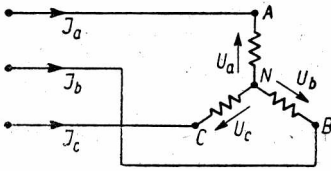
*W uzwojeniach prądnicy lub odbiornika połączonego w gwiazdę może istnieć składowa zerowa napięcia fazowego, ale nie może wystąpić w układzie napięć międzyprzewodowych.*

Składowa zerowa napięcia fazowego źródła lub odbiornika połączonego w gwiazdę jest różna od zera, jeżeli układ tych napięć tworzy otwarty trójkąt, a równa się zero, gdy układ napięć fazowych tworzy zamknięty trójkąt.

Na podstawie twierdzenia 12.5 w żadnym przypadku składowa zerowa nie może wystąpić w układzie napięć międzyprzewodowych.

### Twierdzenie 12.8

*Gdy układ napięć międzyprzewodowych jest symetryczny dodatni, to w odbiorniku połączonym w gwiazdę składowa symetryczna ujemna napięcia fazowego jest zerem.*



Rys. 11. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę.

Skoro układ napięć międzyprzewodowych jest symetryczny dodatni, to przy oznaczeniu napięć jak na rys. 11 mamy

$$\begin{bmatrix} U_{ab} \\ U_{bc} \\ U_{ca} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_a - U_b \\ U_b - U_c \\ U_c - U_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \\ h^2 U \\ hU \end{bmatrix}. \quad (12, 15)$$

Obliczamy składową ujemną napięcia fazowego:

$$\begin{aligned} \hat{U}_2 &= \frac{1}{3} (\hat{U}_a + h^2 \hat{U}_b + h \hat{U}_c) = \frac{1}{3} \{ (\hat{U}_a - \hat{U}_b) + (1 + h^2) \hat{U}_b + h \hat{U}_c \} = \\ &= \frac{1}{3} \{ (\hat{U}_a - \hat{U}_b) + h(-\hat{U}_b + \hat{U}_c) \} = \frac{1}{3} (\hat{U} - h^3 \hat{U}) = 0. \end{aligned} \quad (12, 16)$$

A zatem składowa ujemna napięcia fazowego znika. Składowa dodatnia jest natomiast różna od zera, co wynika z równania (4,15) i z następującego obliczenia:

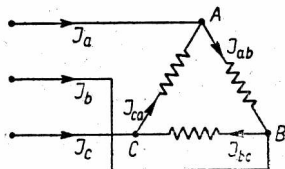
$$\begin{aligned} \hat{U}_1 &= \frac{1}{3} (\hat{U}_a + h \hat{U}_b + h^2 \hat{U}_c) = \frac{1}{3} \{ (\hat{U}_a - \hat{U}_b) + (1 + h) \hat{U}_b + h^2 \hat{U}_c \} = \\ &= \frac{1}{3} \{ (\hat{U}_a - \hat{U}_b) + h^2(-\hat{U}_b + \hat{U}_c) \} = \frac{1}{3} (\hat{U} - h^4 \hat{U}) = \frac{1}{3} (1 - h) \hat{U} = \\ &= \frac{j h^2}{\sqrt{3}} \hat{U}. \end{aligned} \quad (12, 17)$$

## T w i e r d z e n i e 12.9

Gdy układ prądów przewodowych jest symetryczny dodatni to w odbiorniku połączonym w trójkąt składowa symetryczna ujemna prądu fazowego jest zerem.

Skoro układ prądów przewodowych jest symetryczny dodatni, to przy oznaczeniu prądów jak na rys. 12 mamy

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{ab} - J_{ca} \\ J_{bc} - J_{ab} \\ J_{ca} - J_{bc} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J \\ h^2 J \\ hJ \end{bmatrix}. \quad (12, 18)$$



Rys. 12. Odbiornik trójfazowy połączony w trójkąt.

Obliczamy składową ujemną prądu fazowego

$$\begin{aligned} \hat{J}_2 &= \frac{1}{3} (\hat{J}_{ab} + h^2 \hat{J}_{bc} + h \hat{J}_{ca}) = \frac{1}{3} \{(\hat{J}_{ab} - \hat{J}_{ca}) + h^2 \hat{J}_{bc} + (1+h) \hat{J}_{ca}\} = \\ &= \frac{1}{3} \{(\hat{J}_{ab} - \hat{J}_{ca}) + h^2 (\hat{J}_{bc} - \hat{J}_{ca})\} = \frac{1}{3} (\hat{J} - h^3 \hat{J}) = 0. \end{aligned} \quad (12, 19)$$

A zatem składowa ujemna prądu fazowego znika. Składowa dodatnia jest natomiast różna od zera, co wynika z równania (4,15) i z następującego obliczenia:

$$\begin{aligned} \hat{J}_1 &= \frac{1}{3} (\hat{J}_{ab} + h \hat{J}_{bc} + h^2 \hat{J}_{ca}) = \frac{1}{3} \{(\hat{J}_{ab} - \hat{J}_{ca}) + h \hat{J}_{bc} + (1+h^2) \hat{J}_{ca}\} = \\ &= \frac{1}{3} \{(\hat{J}_{ab} - \hat{J}_{ca}) + h (\hat{J}_{bc} - \hat{J}_{ca})\} = \frac{1}{3} (\hat{J} - h^2 \hat{J}) = \frac{1}{3} (1-h^2) \hat{J} = \\ &= -\frac{jh}{\sqrt{3}} \hat{J}. \end{aligned} \quad (12, 20)$$

Wymienione w niniejszym punkcie twierdzenia znajdują zastosowanie na przykład przy rozpatrywaniu układów trójfazowych symetrycznie obciążonych, zasilanych napięciem odkształconym.

Układ 3 napięć fazowych  $k$ -tej harmonicznej jest, jak wiadomo, układem symetrycznym

zerowym dla  $k = 0, 3, 6, 9, \dots$ ,

dodatnim dla  $k = 1, 4, 7, 10, \dots$ ,

ujemnym dla  $k = 2, 5, 8, 11, \dots$ ,

przy czym przez zerową harmoniczną rozumiemy składową stałą.

Rozpatrzmy prądnicę trójfazową połączoną w gwiazdę z przewodem neutralnym, wytwarzającą napięcie fazowe odkształcone, zawierające 10 kolejnych harmonicznych bez składowej stałej. W prądniczy tej, stosownie do twierdzenia 12.7, nie może wystąpić w napięciu międzyprzewodowym składowa zerowa, wobec czego nie zawiera ono harmonicznych podzielnych przez 3, czyli w naszym przypadku napięcie międzyprzewodowe nie zawiera 3., 6. i 9. harmonicznej. W konsekwencji napięcie międzyprzewodowe  $U_p$  jest mniej odkształcone od napięcia fazowego  $U_f$  i zachodzi związek  $U_p < \sqrt{3} U_f$ . W przewodzie neutralnym układu płynie tylko prąd składowej zerowej (twierdzenie 12.2), na który w naszym przypadku składają się harmoniczne prądu podzielne przez 3, czyli 3., 6. i 9. harmoniczna.

Przy tejże prądniczy połączonej w trójkąt — stosownie do twierdzenia 12.6 — w uzwojeniach jej krąży składowa zerowa prądu, ale nie może wyjść na linię, wobec czego prąd przewodowy nie zawiera harmonicznych podzielnych przez 3, czyli w naszym przypadku nie zawiera 3., 6. i 9. harmonicznej. W konsekwencji prąd przewodowy  $J_p$  jest mniej odkształcony od prądu fazowego  $J_f$  i zachodzi związek  $J_p < \sqrt{3} J_f$ .

W rozważaniach niniejszego punktu używaliśmy nazw punkt neutralny i przewód neutralny, wzorowanych na nomenklaturze angielskiej, rosyjskiej i francuskiej (przewód neutralny = *neutral conductor*, *nejtralnyj prowod*, *le fil neutre*), a odrębnej od nomenklatury niemieckiej (*Nullpunkt*, *Nulleiter*) i dotychczasowej polskiej zapożyczony z języka niemieckiego (punkt zerowy, przewód zerowy).

Sprawa właściwej nomenklatury dla omawianego pojęcia ma trzy aspekty: formalny, językowy i merytoryczny.

Z punktu widzenia formalnego używanie tego samego wskaźnika „zero“, jak to czynią niektórzy autorzy, dla składowej zerowej prądu lub napięcia i dla przewodu „zerowego“ zaciemnia treść obliczeń i czyni je wręcz trudnymi do zrozumienia, o co w ogóle autorowi chodzi. Uważamy natomiast za właściwe używanie wskaźnika „zero“ dla składowej zerowej danej wielkości elektrycznej, a wskaźnika „n“ — dla przewodu neutralnego. A więc przez

- $\hat{Y}_n$  należy rozumieć przewodność pozorną przewodu neutralnego,
- $\hat{Y}_0$  — przewodność pozorną dla składowej zerowej napięcia, a
- $\hat{y}_0$  — składową zerową przewodności pozornej.

Podobnie od czasu pracy Stokvisa z 1915 r., przytoczonej na przykład na stronie 48 książki R. Neumanna *Symmetrical components* z 1939 r., wiemy, że możemy dany generator  $G$  o asymetrycznym układzie sił elektromotorycznych, pracujący na sieć czteroprzewodową, zastąpić przez trzy generatory połączone szeregowo  $G_0$ ,  $G_1$  i  $G_2$  o symetrycznym układzie sił elektromotorycznych, mianowicie zerowym, dodatnim i ujemnym. Znaki  $\hat{J}_{n_0}$ ,  $\hat{J}_{n_1}$ ,  $\hat{J}_{n_2}$  oznaczają wtedy prąd w przewodzie neutralnym przy wzbudzeniu tylko generatora  $G_0$  lub  $G_1$  czy też  $G_2$ , analogicznie znaki  $\hat{J}_{a_0}$ ,  $\hat{J}_{a_1}$ ,  $\hat{J}_{a_2}$  — odpowiedni prąd w przewodzie fazowym fazy  $a$ . Równanie  $\hat{J}_n = \hat{J}_{n_0} + \hat{J}_{n_1} + \hat{J}_{n_2}$  określa prąd w przewodzie neutralnym przy wzbudzeniu wszystkich trzech generatorów lub przy przełączeniu zasilania na generator asymetryczny. Znakovnictwo to stałoby się nieprzejrzyste przy zastąpieniu wskaźnika „n“ przez „o“.



Z punktu widzenia językowego obydwaj źródłowy wyrazów: zerowy i neutralny są niesłowiańskie, nie ma więc przeszkód do używania obu w różnych znaczeniach (przewód neutralny, a składowa zerowa) zamiast jednego.

Z punktu widzenia merytorycznego przewód nazywa się neutralnym, gdyż nie należy do żadnej z faz, co odpowiada znaczeniu wyrazu neutralność z zakresu stosunków między narodami.

Okoliczność, że w układzie czteroprzewodowym przy symetrycznym obciążeniu faz prąd w przewodzie neutralnym nie płynie  $\hat{J}_n = 3\hat{J}_0 = 0$ , a przy asymetrii obciążenia płynie, nie powinna mieć wpływu na nazwę tego przewodu, gdyż na przykład według twierdzenia 12,6 w uzwojeniach prądnicy połączonej w trójkąt może krążyć składowa zerowa prądu i nie może wyjść na linię, a mimo to żadnego zwoju czy też punktu prądnicy połączonej w trójkąt nie nazywamy zerowym.

Podobnie z punktu widzenia potencjału przewodu trudno byłoby nazywać przewód neutralny zerowym, gdyż przy asymetrii układu sił elektromotorycznych źródła lub asymetrii odbiornika przez przewód ten płynie prąd i żaden punkt przewodu neutralnego nie ma potencjału ziemi, czyli potencjału zerowego — ani przy bezopornościowym uziemieniu punktu neutralnego prądnicy, ani też przy uziemieniu go przez dostrojony element.

Alternatywnie można by nazywać przewód neutralny nefazowym i prąd w tym przewodzie — prądem nefazowym.

### 13. PRAWO OHMA, DRUGIE PRAWO KIRCHHOFFA I MOC ODBIORNIKA TRÓJFAZOWEGO

wyrażone w układzie odniesienia: prąd przewodowy i napięcie.

Rozpatrzona w poprzedniej części matematyczna teoria składowych symetrycznych oraz objęte ostatnimi punktami wstępne rozważania elektrycznej teorii składowych symetrycznych pozwalają nam teraz zbadać wybrane problemy elektryczne i wykazać w nich ogólność rozumowania i prostotę obliczeń przy stosowaniu algebry macierzowej.

Rozpatrzmy kilka elementarnych zagadnień starając się pogłębić ich sens fizyczny przez porównanie treści odpowiednich równań w układzie odniesienia „prąd przewodowy i napięcie na końcówkach elementu“ oraz w układzie odniesienia „składowe symetryczne prądu i napięcia“. Są to następujące zagadnienia:

1. prawo Ohma na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę przy fazach ekranowanych,
2. prawo Ohma na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę przy fazach indukcyjnie sprzężonych,
3. II prawo Kirchhoffa w układzie trójfazowym czteroprzewodowym przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę, ekranowanych,
4. II prawo Kirchhoffa w układzie trójfazowym czteroprzewodowym przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę indukcyjnie sprzężonych,
5. moc pozorna, czynna i bierna odbiornika trójfazowego.

Odpowiednie zależności w układzie odniesienia: prąd przewodowy i napięcie na końcówkach elementu są ogólnie znane i przy użyciu rachunku macierzy mają niżej podaną postać.

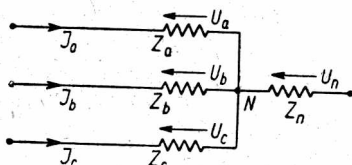
### 13. 1. Prawo Ohma na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę przy fazach ekranowanych (rys. 13)

Postać opornościowa

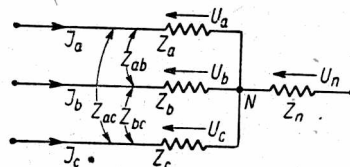
$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix}. \quad (13, 1)$$

Postać przewodnościowa

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a^{-1} U_a \\ Z_b^{-1} U_b \\ Z_c^{-1} U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a U_a \\ Y_b U_b \\ Y_c U_c \end{bmatrix}. \quad (13, 2)$$



Rys. 13. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę przy fazach ekranowanych



Rys. 14. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę przy fazach indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego.

### 13. 2. Prawo Ohma na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę przy fazach indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego (rys. 14)

Postać opornościowa

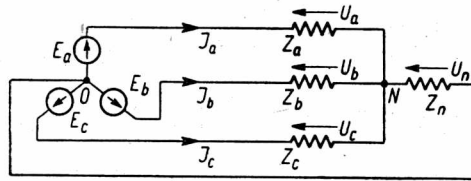
$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix}. \quad (13, 3)$$

Postać przewodnościowa

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix}. \quad (13, 4)$$

13. 3. Drugie prawo Kirchhoffa w układzie trójfazowym czteroprzewodowym przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę ekranowanych (rys. 15)

Zakładamy w tym schemacie połączeń i we wszystkich następnych, że *oporność pozorna wewnętrzna źródła i oporność pozorna przewodów łączących źródło z odbiornikiem są włączone do oporności pozornej danej fazy odbiornika*, wobec czego źródło uważamy już za pozbawione oporności pozornej wewnętrznej.



Rys. 15. Układ trójfazowy czteroprzewodowy przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę ekranowanych

Postać opornościowa

$$\begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_a - U_n \\ E_b - U_n \\ E_c - U_n \end{bmatrix}, \quad (13, 5)$$

czyli

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix}. \quad (13, 6)$$

Napięcie punktu neutralnego  $N$  w odbiorniku względem punktu neutralnego  $0$  w źródle da się wyeliminować za pomocą równania

$$\hat{U}_n = \frac{\hat{Y}_a \hat{E}_a + \hat{Y}_b \hat{E}_b + \hat{Y}_c \hat{E}_c}{\hat{Y}_n + \hat{Y}_a + \hat{Y}_b + \hat{Y}_c} \quad (13, 7)$$

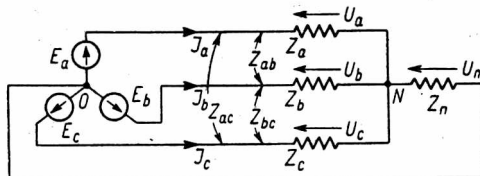
zarówno ze wzoru (13, 6), jak i z następnych wzorów (13, 8), (13, 9) i (13, 10).

Postać przewodnościowa

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a U_a \\ Y_b U_b \\ Y_c U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a E_a \\ Y_b E_b \\ Y_c E_c \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Y_a U_n \\ Y_b U_n \\ Y_c U_n \end{bmatrix}. \quad (13, 8)$$

### 13. 4. Drugie prawo Kirchhoffa w układzie trójfazowym czteroprzewodowym

przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę indukcyjnie-sprężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego (rys. 16)



Rys. 16. Układ trójfazowy czteroprzewodowy przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę indukcyjnie sprężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego.

Postać opornościowa

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix}. \quad (13, 9)$$

Postać przewodnościowa

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} E_a - U_n \\ E_b - U_n \\ E_c - U_n \end{bmatrix}. \quad (13, 10)$$

### 13. 5. Moc pozorna, czynna i bierna odbiornika trójfazowego

Przy przyjęciu, że moc bierna pobrana przez odbiornik indukcyjny jest dodatnia, moc pozorna odbiornika jednofazowego wyraża się w postaci symbolicznej wzorem

$$\hat{S} = \hat{U}\check{J} = UJ \cos \varphi + jUJ \sin \varphi = P + jQ^3 \quad (13, 11)$$

i w konsekwencji moc pozorna odbiornika trójfazowego w postaci symbolicznej

$$\hat{S} = \hat{U}_a\check{J}_a + \hat{U}_b\check{J}_b + \hat{U}_c\check{J}_c = P + jQ, \quad (13, 12)$$

<sup>3</sup> W literaturze przyjmuje się często konwencję przeciwną, a mianowicie moc bierną pobraną przez odbiornik indukcyjny uważa się za ujemną. Wzór (13, 11) przyjmuje wówczas postać

$$\hat{S} = \check{U}\hat{J} = UJ \cos \varphi - jUJ \sin \varphi = P - jQ.$$

gdzie moc czynna

$$P = U_a J_a \cos \varphi_a + U_b J_b \cos \varphi_b + U_c J_c \cos \varphi_c \quad (13, 13)$$

i moc bierna

$$Q = U_a J_a \sin \varphi_a + U_b J_b \sin \varphi_b + U_c J_c \sin \varphi_c . \quad (13, 14)$$

Powyżej rozpatrzone pięć zagadnień dotyczyło układu odniesienia: prąd przewodowy i napięcie na końcówkach elementu. Analogiczne zależności dla układu odniesienia: składowe symetryczne prądu i składowe symetryczne napięcia rozpatrzmy w następujących rozdziałach.

#### 14. PRAWO OHMA NA ODBIORNIKU TRÓJFAZOWYM POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

przy fazach ekranowanych w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrujemy odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, wskazany na rys. 17, o fazach ekranowanych, w którym dany jest układ prądów przewodowych ( $\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$ ) i układ oporności pozornych poszczególnych faz ( $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ ). Przyjmujemy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani też zwarcia, to znaczy oporność pozorna  $\hat{Z}_k$  dla  $k=a, b, c$ , ani nie dąży do nieskończoności, ani nie jest zerem i w konsekwencji istnieje zawsze niezerowa, skończona przewodność pozorna  $\hat{Y}_k = \frac{1}{\hat{Z}_k}$

Za pomocą równania (13, 1) określamy napięcia fazowe zmierzone na odbiorniku w funkcji prądów przewodowych i oporności pozornych. Ponieważ do tego równania nie wchodzi prąd  $\hat{J}_n$  w przewodzie neutralnym ani też napięcie  $\hat{U}_n$  między punktami neutralnymi, zasadniczo nie jest istotne w obliczeniach, czy układ jest trój- czy też czteroprzewodowy. Zauważymy jednak, że w układzie trójprzewodowym stosownie do twierdzenia 12, 2 składowa zerowa prądu jest zawsze zerem, a w układzie czteroprzewodowym — na ogół nie jest zerem. Dla ogólności rozważań nie chcemy zakładać, aby którakolwiek składowa symetryczna prądu zniknęła, wobec czego przyjmujemy, że układ połączeń jest czteroprzewodowy.

Wzór (11, 2), dotyczący rozkładu napięcia na składowe symetryczne po uwzględnieniu prawa Ohma (13, 1), daje

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} U_a + U_b + U_c \\ U_a + hU_b + h^2U_c \\ U_a + h^2U_b + hU_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Z_a J_a + Z_b J_b + Z_c J_c \\ Z_a J_a + hZ_b J_b + h^2 Z_c J_c \\ Z_a J_a + h^2 Z_b J_b + hZ_c J_c \end{bmatrix} = \\
 &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} [Z_a, Z_b, Z_c] \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \\ [Z_a, hZ_b, h^2 Z_c] \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \\ [Z_a, h^2 Z_b, hZ_c] \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (14, 1)
 \end{aligned}$$

Na podstawie wzorów (6, 6), (6, 12) i (6, 14) równanie to przekształcamy do postaci

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} [z_0, z_2, z_1] \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \\ [z_1, z_0, z_2] \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \\ [z_2, z_1, z_0] \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 J_0 + z_2 J_1 + z_1 J_2 \\ z_1 J_0 + z_1 J_1 + z_2 J_2 \\ z_2 J_0 + z_1 J_1 + z_0 J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0, z_2, z_1 \\ z_1, z_0, z_2 \\ z_2, z_1, z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \quad (14, 2)
 \end{aligned}$$

Równanie (14, 2) przedstawia postać opornościową prawa Ohma na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę o fazach ekranowanych w układzie odniesienia składowych symetrycznych. Równanie to wykazuje, że o ile napięcie na fazie  $k$  ( $k = a, b, c$ ) we wzorze (13,1) zależy od prądu płynącego w tejże fazie i od jej oporności pozornej, a nie zależy *explicitie* od prądów płynących w pozostałych fazach i od ich

oporności pozornych, to każda składowa symetryczna napięcia zależy od wszystkich trzech składowych symetrycznych prądu i od wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornej.

Dla uzyskania postaci przewodnościowej prawa Ohma na tymże odbiorniku trójfazowym w układzie odniesienia składowych symetrycznych rozpatrujemy ten sam układ połączeń, wskazany na rys. 17, a zakładamy, że dany jest układ napięć fazowych zmierzonych na odbiorniku ( $\hat{U}_a$ ,  $\hat{U}_b$ ,  $\hat{U}_c$ ) i układ przewodności pozornych poszczególnych faz odbiornika ( $\hat{Y}_a$ ,  $\hat{Y}_b$ ,  $\hat{Y}_c$ ) oraz, jak poprzednio, że żadna faza nie jest w stanie jałowym ani zwarcia.

Za pomocą równania (13,2) określamy prądy przewodowe w funkcji napięć fazowych i przewodności pozornych.

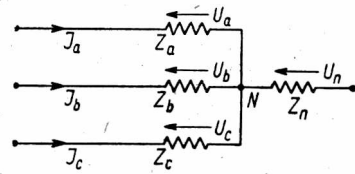
Wzór (11,3), dotyczący rozkładu prądu na składowe symetryczne, po uwzględnieniu prawa Ohma (13,2) daje

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} J_a + J_b + J_c \\ J_a + hJ_b + h^2J_c \\ J_a + h^2J_b + hJ_c \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Y_a U_a + Y_b U_b + Y_c U_c \\ Y_a U_a + hY_b U_b + h^2 Y_c U_c \\ Y_a U_a + h^2 Y_b U_b + h Y_c U_c \end{bmatrix}. \quad (14, 3)$$

Na podstawie wzorów (6,6), (6,12) i (6,14) analogicznie jak w przypadku równania (14,1) dochodzimy do postaci przewodnościowej prawa Ohma

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}. \quad (14, 4)$$

I tu należy stwierdzić, jak przy rozpatrywaniu postaci opornościowej, że każda składowa symetryczna prądu zależy od wszystkich trzech składowych symetrycznych napięcia i od wszystkich trzech składowych symetrycznych przewodności pozornej. Również i z dalszych rozważań związanych z II prawem Kirchhoffa wyniknie, że każda składowa symetryczna siły elektromotorycznej (lub prądu) zależy od wszystkich trzech składowych symetrycznych prądu (lub siły elektromotorycznej) i od wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornej (lub przewodności pozornej).



Rys. 17. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę przy fazach ekranowanych

Pary równań (13,1) i (13,2) oraz (14,2) i (14,4) są przykładem zastosowania zasady dwoistości w elektrotechnice, a mianowicie w danej parze z jednego równania można otrzymać drugie przez podstawienie:

napięć fazowych  $U$  na miejsce prądów przewodowych  $J$  i przeciwnie, przewodności pozornych  $Y$  na miejsce oporności pozornych  $Z$ , składowych symetrycznych przewodności pozornej  $y$  na miejsce składowych symetrycznych oporności pozornej  $z$ .

#### 15. DOWÓD RÓWNOWAŻNOŚCI POSTACI OPORNOŚCIOWEJ I PRZEWODNOŚCIOWEJ PRAWA OHMA

na odbiorniku trójfazowym połączonym w gwiazdę przy fazach ekranowanych w układzie odniesienia składowych symetrycznych

O ile równoważność równań (13,1) i (13,2) jest oczywista, to równania (14,2) i (14,4) mają różną postać algebraiczną i należałoby dowieść, że równania te, przedstawiające wspólną treść fizyczną, są algebraicznie równoważne. Wobec tego, jak w przypadku równań (4,5) i (4,9), trzeba dowieść, że przy

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0 & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix} \quad (15,1)$$

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix} \quad (15,2)$$

zachodzi tożsamość

$$\mathbf{z}^{-1} \equiv \mathbf{y}. \quad (15,3)$$

Obliczamy najpierw wyznacznik charakterystyczny macierzy oporności pozornej  $\mathbf{z}$  i na podstawie równania (6,24) przekształcamy go do postaci

$$\Delta = \widehat{z}_0^3 + \widehat{z}_1^3 + \widehat{z}_2^3 - 3\widehat{z}_0\widehat{z}_1\widehat{z}_2 = \widehat{Z}_a\widehat{Z}_b\widehat{Z}_c. \quad (15,4)$$

Wyznacznik ten jest różny od zera, gdyż według naszych założeń żadna faza odbiornika nie jest w stanie zwarcia. Skoro  $\Delta \neq 0$ , to macierz  $\mathbf{z}$  jest regularna i istnieje jej odwrotność.

Dla wyznaczenia odwrotności macierzy  $\mathbf{z}$  transponujemy ją

$$\mathbf{z}_t = \begin{bmatrix} z_0 & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_0 \end{bmatrix} \quad (15,5)$$



i obliczamy macierz kofaktorów, czyli podwyznaczników względnych macierzy transponowanej

$$\mathbf{z}_{t\text{cof}} = \begin{bmatrix} z_0^2 - z_1 z_2, & z_1^2 - z_0 z_2, & z_2^2 - z_0 z_1 \\ z_2^2 - z_0 z_1, & z_0^2 - z_1 z_2, & z_1^2 - z_0 z_2 \\ z_1^2 - z_0 z_2, & z_2^2 - z_0 z_1, & z_0^2 - z_1 z_2 \end{bmatrix}. \quad (15, 6)$$

Na podstawie wzorów (6,18), (6,21) i (6,23) przekształcamy tę macierz do postaci

$$\begin{aligned} & \mathbf{z}_{t\text{cof}} = \\ & = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a, & h Z_a Z_b + Z_b Z_c + h^2 Z_c Z_a, & h^2 Z_a Z_b + Z_b Z_c + h Z_c Z_a \\ h^2 Z_a Z_b + Z_b Z_c + h Z_c Z_a, & Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a, & h Z_a Z_b + Z_b Z_c + h^2 Z_c Z_a \\ h Z_a Z_b + Z_b Z_c + h^2 Z_c Z_a, & h^2 Z_a Z_b + Z_b Z_c + h Z_c Z_a, & Z_a Z_b + Z_b Z_c + Z_c Z_a \end{bmatrix} = \\ & = \frac{1}{3} \widehat{Z}_a \widehat{Z}_b \widehat{Z}_c \begin{bmatrix} Y_a + Y_b + Y_c, & Y_a + h^2 Y_b + h Y_c, & Y_a + h Y_b + h^2 Y_c \\ Y_a + h Y_b + h^2 Y_c, & Y_a + Y_b + Y_c, & Y_a + h^2 Y_b + h Y_c \\ Y_a + h^2 Y_b + h Y_c, & Y_a + h Y_b + h^2 Y_c, & Y_a + Y_b + Y_c \end{bmatrix}. \quad (15, 7) \end{aligned}$$

Wobec tego macierz odwrotna wynosi

$$\mathbf{z}^{-1} = \frac{\mathbf{z}_{t\text{cof}}}{\Delta} = \begin{bmatrix} y_0, & y_2, & y_1 \\ y_1, & y_1, & y_2 \\ y_2, & y_1, & y_0 \end{bmatrix} \quad (15, 8)$$

i tym samym tożsamość nasza (15,3) została dowiedziona. Można przy tym zauważyć, że przy zastosowaniu rachunku macierzy odpowiednie obliczenia są krótkie i wyjątkowo proste.

Mnemotechnicznie można zapamiętać, że w macierzach niesymetrycznych kwadratowych (15,1) i (15,2)

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0, & y_2, & y_1 \\ y_1, & y_0, & y_2 \\ y_2, & y_1, & y_0 \end{bmatrix}$$

w pierwszej kolumnie wskaźniki wzrastają: 0, 1, 2,

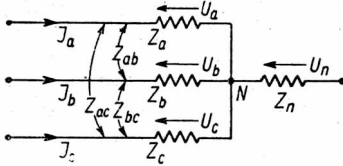
na głównej przekątnej są same wskaźniki zerowe,

w każdej kolumnie czy wierszu występują w elementach macierzy trzy różne wskaźniki.

16. PRAWO OHMA NA ODBIORNIKU TRÓJFAZOWYM  
POŁĄCZONYM W GWIAZDĘ

przy fazach indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrujemy odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę, wskazany na rys. 18, o fazach indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego. W odbiorniku tym dany



Rys. 18. Odbiornik trójfazowy połączony w gwiazdę przy fazach indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego.

jest układ prądów przewodowych ( $\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$ ), układ oporności pozornych poszczególnych gałęzi odbiornika  $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ , oraz oporności pozornych wzajemnych między gałęziami ( $\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$ ) na skutek istnienia sprzężeń indukcyjnych. Przyjmujemy, że żadna faza nie jest w stanie jałowym ani zwarcia, wobec czego oporności pozorne  $\hat{Z}_k$  i przewodności  $\hat{Y}_k$  dla  $k=a, b, c$  są wielkościami skończonymi niezerowymi. O układzie oporności pozornych wzajemnych ( $\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$ ) nie czynimy żadnych specjalnych założeń<sup>4</sup>.

Za pomocą równania (13,3) określamy napięcia fazowe zmierzone na odbiorniku w funkcji prądów przewodowych, oporności pozornych poszczególnych gałęzi i oporności pozornych wzajemnych między gałęziami.

Za pomocą równania (13,3) określamy napięcia fazowe zmierzone na odbiorniku w funkcji prądów przewodowych, oporności pozornych poszczególnych gałęzi i oporności pozornych wzajemnych między gałęziami.

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z_a & 0 & 0 \\ 0 & Z_b & 0 \\ 0 & 0 & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & 0 & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_{ab} J_b + Z_{ac} J_c \\ Z_{ab} J_a + Z_{bc} J_c \\ Z_{ac} J_a + Z_{bc} J_b \end{bmatrix} = \mathbf{U}' + \mathbf{U}'', \end{aligned} \quad (16,1)$$

<sup>4</sup> Okolicznością istotną w naszych założeniach jest, że stosownie do treści rozdziału 3 układ operatorów wektorowych ( $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ ) jest układem niezerowym. Układ ( $\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$ ) natomiast może być w przypadku szczególnym układem zerowym; taki przypadek szczególnie rozpatrzmy w dyskusji wzoru (16,9) oraz (19,1).

gdzie  $\mathbf{U}'$  jest to macierz napięć fazowych odpowiadających oporności pozornej gałęzi odbiornika

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix}, \quad (16, 2)$$

a  $\mathbf{U}''$  jest to macierz strat napięcia odpowiadających oporności pozornej wzajemnej między gałęziami

$$\mathbf{U}'' = \begin{bmatrix} Z_{ab} J_b + Z_{ac} J_c \\ Z_{ab} J_a + Z_{bc} J_c \\ Z_{ac} J_a + Z_{bc} J_b \end{bmatrix}. \quad (16, 3)$$

Dla uproszczenia oznaczamy:

oporność pozorną  $\hat{Z}_{bc}$  (brak pierwszego wskaźnika  $a$ ) przez  $\hat{Z}'$ ,

oporność pozorną  $\hat{Z}_{ac}$  (brak drugiego wskaźnika  $b$ ) przez  $\hat{Z}''$ ,

oporność pozorną  $\hat{Z}_{ab}$  (brak trzeciego wskaźnika  $c$ ) przez  $\hat{Z}'''$ .

Pierwszym wektorem w układzie prądów ( $\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$ ) jest  $\hat{J}_a$ ,

pierwszym operatorem wektorowym w układzie ( $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ ), jest  $\hat{Z}_a$ ,

pierwszym operatorem wektorowym w układzie ( $\hat{Z}', \hat{Z}'', \hat{Z}'''$ ), jest  $\hat{Z}'$ .

Na mocy związku (11,4) rozkładamy układy oporności pozornych ( $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ ) i ( $\hat{Z}', \hat{Z}'', \hat{Z}'''$ ) na składowe symetryczne

$$\left. \begin{aligned} \begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} Z' \\ Z'' \\ Z''' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{m_0} \\ z_{m_1} \\ z_{m_2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right\} \quad (16, 4)$$

W tym ostatnim wzorze wskaźnik  $m$  odpowiada indukcyjności wzajemnej występującej w opornościach pozornych między gałęziami.

Przy zastosowaniu powyższych oznaczeń macierz strat napięcia  $\mathbf{U}''$  wyraża się w postaci

$$\mathbf{U}'' = \begin{bmatrix} Z''' J_b + Z' J_c \\ Z''' J_a + Z' J_c \\ Z'' J_a + Z' J_b \end{bmatrix}, \quad (16, 5)$$

Na mocy wzoru (14,2) macierz składowych symetrycznych napięcia

fazowego  $\mathbf{U}'_s = \begin{bmatrix} U'_0 \\ U'_1 \\ U'_2 \end{bmatrix}$  wyraża się w funkcji składowych symetrycznych

prądu i składowych symetrycznych oporności pozornej w następujący sposób:

$$\mathbf{U}'_s = \begin{bmatrix} U'_0 \\ U'_1 \\ U'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (16, 6)$$

Następnie na mocy wzoru (7,4) macierz składowych symetrycznych

straty napięcia  $\mathbf{U}''_s = \begin{bmatrix} U''_0 \\ U''_1 \\ U''_2 \end{bmatrix}$  odpowiadającej oporności pozornej wzajemnej

między gałęziami wyraża się w funkcji składowych symetrycznych prądu i składowych symetrycznych oporności pozornej wzajemnej za pomocą równania

$$\mathbf{U}''_s = \begin{bmatrix} U''_0 \\ U''_1 \\ U''_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2z_{m1} & -z_{m2} & -z_{m1} \\ -z_{m1} & -z_{m0} & 2z_{m2} \\ -z_{m2} & 2z_{m1} & -z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \quad (16, 7)$$

Skoro macierz składowych symetrycznych wypadkowego napięcia  $(\hat{U}_a, \hat{U}_b, \hat{U}_c)$  wynosi

$$\mathbf{U}_s = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \mathbf{U}'_s + \mathbf{U}''_s = \begin{bmatrix} U'_0 + U''_0 \\ U'_1 + U''_1 \\ U'_2 + U''_2 \end{bmatrix}, \quad (16, 8)$$

po podstawieniu otrzymujemy dla rozpatrywanego przypadku prawo Ohma w postaci opornościowej w układzie odniesienia składowych symetrycznych

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} & z_2 - z_{m2} & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1} & z_0 - z_{m0} & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2} & z_1 + 2z_{m1} & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}, \quad (16, 9)$$

które jest uogólnieniem równania 14,2; przy ekranowaniu faz układ operatorów wektorowych ( $\hat{Z}'$ ,  $\hat{Z}''$ ,  $\hat{Z}'''$ ) jest bowiem układem zerowym, w konsekwencji układ składowych symetrycznych ( $z_{m0}$ ,  $z_{m1}$ ,  $z_{m2}$ ) jest też układem zerowym i macierz oporności pozornej

$$\begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix}$$

upraszcza się do postaci

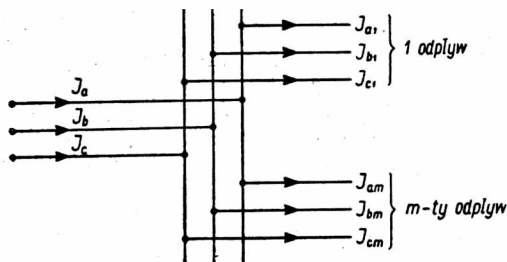
$$\begin{bmatrix} z_0, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix}$$

z równania (15,1).

#### 17. DRUGIE PRAWO KIRCHHOFFA W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM CZTEROPRZEWODOWYM

przy fazach odbiornika ekranowanych, w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Pierwsze prawo Kirchhoffa ma tę samą postać w układzie odniesienia prądu przewodowego i w układzie odniesienia składowych symetrycznych tego prądu, gdyż zależność (11,3) między prądem przewodowym i jego składowymi symetrycznymi jest liniowa. Dla układu połączeń wskazanego na rys. 19 oznaczmy macierze prądów w sposób następujący:



Rys. 19. Rozpływ prądu trójfazowego na odbiory.

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \quad \text{jest to macierz prądów przewodowych w gałęzi głównej,}$$

$$\mathbf{J}_s = \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} \quad \text{— macierz składowych symetrycznych prądu w gałęzi głównej,}$$

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} J_{ak} \\ J_{bk} \\ J_{ck} \end{bmatrix} \text{ — dla } k = 1, 2, \dots, m \text{ macierz prądów przewodowych w } k\text{-tym odplywie,}$$

$$\mathbf{J}_{sk} = \begin{bmatrix} J_{0k} \\ J_{1k} \\ J_{2k} \end{bmatrix} \text{ — dla } k = 1, 2, \dots, m \text{ macierz składowych symetrycznych prądu w } k\text{-tym odplywie.}$$

Przy tych oznaczeniach z równania

$$\mathbf{J} = \sum_{k=1}^m \mathbf{J}_k, \quad (17, 1)$$

$$\text{czyli} \quad \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{a1} \\ J_{b1} \\ J_{c1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{a2} \\ J_{b2} \\ J_{c2} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} J_{am} \\ J_{bm} \\ J_{cm} \end{bmatrix}, \quad (17, 2)$$

$$\text{wynika} \quad \mathbf{J}_s = \sum_{k=1}^m \mathbf{J}_{sk}, \quad (17, 3)$$

$$\text{czyli} \quad \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{01} \\ J_{11} \\ J_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{02} \\ J_{12} \\ J_{22} \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} J_{0m} \\ J_{1m} \\ J_{2m} \end{bmatrix}. \quad (17, 4)$$

Przechodzimy do drugiego prawa Kirchhoffa. Rozpatrujemy układ połączeń wskazany na rys. 20, trójfazowy czteroprzewodowy, dla którego wzór

$$(13,5) \text{ wiąże ze sobą macierz} \quad \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} \text{ sił elektromotorycznych źródeł, ma-}$$

$$\text{cierz} \quad \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \text{ napięć na odbiorniku i macierz} \quad \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix} \text{ napięcia na przewodzie neutralnym.}$$

Korzystamy z równań (11,1), (11,2) i (12,3) przy rozkładzie tych macierzy na składowe symetryczne i otrzymujemy w wyniku

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17, 5)$$

czyli

$$\begin{bmatrix} 1, & 1, & 1 \\ 1, & h^2, & h \\ 1, & h, & h^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 - U_0 - U_n \\ E_1 - U_1 \\ E_2 - U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (17, 6)$$

Mnożąc obie strony równania (17,6) przez  $S^{-1}$  dochodzimy do zależności

$$\begin{bmatrix} E_0 - U_0 - U_n \\ E_1 - U_1 \\ E_2 - U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (17, 7)$$

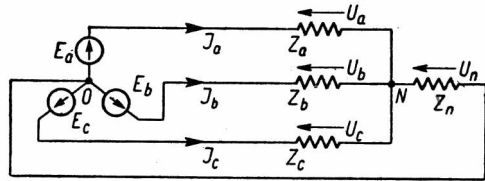
skąd ostatecznie

$$\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 + U_n \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}, \quad (17, 8)$$

czyli w oznaczeniach algebry niemacierzowej

$$\left. \begin{aligned} \widehat{E}_0 &= \widehat{U}_0 + \widehat{U}_n \\ \widehat{E}_1 &= \widehat{U}_1 \\ \widehat{E}_2 &= \widehat{U}_2. \end{aligned} \right\} \quad (17, 9)$$

Widzimy więc, że sposób sformułowania drugiego prawa Kirchhoffa dla składowej zerowej siły elektromotorycznej i napięcia jest taki, jak dla zwykłego układu odniesienia: siła elektromotoryczna fazowa i napięcia fazowe, dla składowej symetrycznej dodatniej i ujemnej natomiast odbiega od zwykłego układu odniesienia, gdyż składowa symetryczna dodatnia i ujemna siły elektromotorycznej są odpowiednio równe składowym napięciom na odbiorniku.



Rys. 20. Układ trójfazowy czteroprzewodowy przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę ekranowanych

Po tych wstępnych rozważaniach ogólnych związanych z prawami Kirchhoffa w układzie odniesienia składowych symetrycznych przechodzimy do szczegółowego rozpatrzenia drugiego prawa Kirchhoffa dla schematu podanego na rys. 20 o fazach ekranowanych. Niech będzie dany, jak w rozdziale 14, układ prądów przewodowych ( $\widehat{J}_a, \widehat{J}_b, \widehat{J}_c$ ) i układ oporności pozornych poszczególnych faz ( $\widehat{Z}_a, \widehat{Z}_b, \widehat{Z}_c$ ). Przyjmujemy, że żadna faza nie jest ani w stanie jałowym, ani zwarcia, to znaczy oporność pozorna  $\widehat{Z}_k$  dla  $k=a, b, c$  ani nie dąży do nieskończoności, ani nie jest zerem

i w konsekwencji istnieje zawsze skończona niezerowa przewodność pozorna każdej fazy  $\hat{Y}_k = \frac{1}{\hat{Z}_k}$ . Ponadto dana jest oporność pozorna przewodu neutralnego  $\hat{Z}_n$ , o której nie czynimy żadnych założeń. Gdy w przypadku szczególnym oporność pozorna  $\hat{Z}_n$  dąży do nieskończoności, to  $\hat{Y}_n$  dąży do zera, w mianowniku wzoru (13,7) znika wyraz  $\hat{Y}_n$  i układ z czteroprzewodowego staje się trójprzewodowy. Gdy w drugim przypadku szczególnym oporność pozorna w przewodzie neutralnym jest równa zero i  $\hat{Z}_n=0$ , to punkt neutralny odbiornika  $N$  jest identyczny z punktem neutralnym źródła  $0$  i układ nasz upraszcza się do układu trzech oczek o wspólnym punkcie  $0$ .

W dalszym ciągu rozważań będziemy rozpatrywali przypadek ogólny, w którym  $\hat{Z}_n$  oraz  $\hat{Y}_n$  mają wartości niezerowe i skończone.

Za pomocą równania (13,6) określamy siły elektromotoryczne źródła w poszczególnych fazach w funkcji prądów przewodowych, oporności pozornych fazowych i oporności pozornej przewodu neutralnego:

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \\ Z_n(J_a + J_b + J_c) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a J_a \\ Z_b J_b \\ Z_c J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Z_n \cdot 3 J_0 \\ Z_n \cdot 3 J_0 \\ Z_n \cdot 3 J_0 \end{bmatrix}. \quad (17, 10)$$

Składowe symetryczne siły elektromotorycznej na mocy wzoru (14,2) wynoszą

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} E_a + E_b + E_c \\ E_a + hE_b + h^2 E_c \\ E_a + h^2 E_b + hE_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3Z_n J_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \quad (17, 11) \end{aligned}$$

Wynik ten można było otrzymać również z równania ogólnego (17,8)

po podstawieniu na miejsce macierzy napięć  $\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$  jej wartości ze związku

$$(14,2), \text{ a na miejsce macierzy } \begin{bmatrix} U_n \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ jej wartości } \begin{bmatrix} 3Z_n J_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$



Otrzymany wynik (17,11) dla rozpatrywanego przypadku układu trójfazowego czteroprzewodowego przedstawia drugie prawo Kirchhoffa w postaci opornościowej w układzie odniesienia składowych symetrycznych. Prawo to uzależnia macierz składowych symetrycznych siły elektromotorycznej od macierzy składowych symetrycznych oporności pozornej i macierzy składowych symetrycznych prądu.

Równanie (14,2) jest przypadkiem szczególnym zależności (17,11), a mianowicie gdy  $\hat{Z}_n = 0$ , czyli przewód neutralny daje zwarcie, to przy danej

macierzy składowych symetrycznych prądu  $\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}$  macierz składowych symetrycznych siły elektrycznej bezopornościowego źródła  $\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$  jest równa macierzy składowych symetrycznych napięcia  $\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$  zmierzonego na odbiorniku.

Dla uzyskania postaci przewodnościowej drugiego prawa Kirchhoffa w tymże układzie połączeń (rys. 18) zakładamy, że dany jest układ sił elektromotorycznych źródła ( $\hat{E}_a, \hat{E}_b, \hat{E}_c$ ), układ przewodności pozornych poszczególnych faz odbiornika ( $\hat{Y}_a, \hat{Y}_b, \hat{Y}_c$ ) i przewodność pozorna przewodu neutralnego  $\hat{Y}_n$ . Żadna faza nie jest w stanie jałowym ani zwarcia.

Równanie (13,8) określa nam macierz prądów płynących w poszczególnych przewodach

$$\begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_a E_a - Y_a U_n \\ Y_b E_b - Y_b U_n \\ Y_c E_c - Y_c U_n \end{bmatrix}.$$

Składowe symetryczne prądu wynoszą:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} J_a + J_b + J_c \\ J_a + hJ_b + h^2J_c \\ J_a + h^2J_b + hJ_c \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} Y_a E_a + Y_b E_b + Y_c E_c - (Y_a + Y_b + Y_c) U_n \\ Y_a E_a + hY_b E_b + h^2Y_c E_c - (Y_a + hY_b + h^2Y_c) U_n \\ Y_a E_a + h^2Y_b E_b + hY_c E_c - (Y_a + h^2Y_b + hY_c) U_n \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (17, 12)$$

Stosując wzory (6,6), (6,12), (6,14) i (13,7) przekształcamy tę macierz do postaci

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} &= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} [Y_a, Y_b, Y_c] \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} - 3y_0 U_n \\ [Y_a, hY_b, h^2Y_c] \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} - 3y_1 U_n \\ [Y_a, h^2Y_b, hY_c] \begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_b \end{bmatrix} - 3y_2 U_n \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [y_0, y_2, y_1] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - y_0 \frac{3}{Y_n + 3y_0} [y_0, y_2, y_1] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \\ [y_1, y_0, y_2] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - y_1 \frac{3}{Y_n + 3y_0} [y_1, y_2, y_1] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \\ [y_2, y_1, y_0] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} - y_2 \frac{3}{Y_n + 3y_0} [y_0, y_2, y_1] \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (17, 13) \end{aligned}$$

i otrzymujemy ostatecznie dla rozpatrywanego przypadku drugie prawo Kirchhoffa w postaci przewodnościowej w układzie odniesienia składowych symetrycznych

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} \quad (17, 14)$$

Zauważymy, że równanie (14,4) jest przypadkiem szczególnym związku (17,14), a mianowicie gdy oporność pozorną w przewodzie neutralnym jest równa zero  $\hat{Z}_n = 0$ ,  $Y_n \rightarrow \infty$ , to elementy typu  $\frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}$ ,  $\frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0}$ ,  $\frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}$  dążą do zera, a element  $\frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}$  według twierdzenia de l'Hospitala

dąży do  $y_0$ , podobnie  $\frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}$  dąży do  $y_1$ ,  $\frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}$  dąży do  $y_2$  i w konsekwencji macierz

$$\begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_1 \quad (17, 15)$$

staje się równa macierzy (15,2)

$$\begin{bmatrix} y_0, & y_2, & y_1 \\ y_1, & y_0, & y_2 \\ y_2, & y_1, & y_0 \end{bmatrix} = \mathbf{y}.$$

Podobnie jak przy omawianiu przedstawiających prawo Ohma zależności (14,2) i (14,4) należy stwierdzić, że w zależnościach (17,11) i (17,14), będących wyrażeniem drugiego prawa Kirchhoffa, każda składowa symetryczna siły elektromotorycznej zależy od wszystkich trzech składowych symetrycznych prądu i od wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornej oraz każda składowa symetryczna prądu zależy od wszystkich trzech składowych symetrycznych siły elektromotorycznej i od wszystkich trzech składowych symetrycznych przewodności pozornej.

Dla przeprowadzenia w następnym rozdziale dowodu równoważności obu postaci (opornościowej i przewodnościowej) prawa Kirchhoffa oznaczmy jeszcze przez  $\mathbf{z}_1$  macierz oporności pozornej z równania (17,11)

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix}. \quad (17, 16)$$

#### 18. DOWÓD RÓWNOWAŻNOŚCI POSTACI OPORNOŚCIOWEJ I PRZEWODNOŚCIOWEJ DRUGIEGO PRAWA KIRCHHOFFA

w układzie trójfazowym czteroprzewodowym przy fazach ekranowanych  
w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Podobnie jak w rozdziale 15 stwierdzimy, że o ile równoważność równań (13,6) i (13,8) jest oczywista, a równoważność dwóch postaci prawa Ohma (14,2) i (14,4) została w rozdziale 15 dowiedziona, to macierze kwadratowe  $\mathbf{z}_1$  i  $\mathbf{y}_1$  określone równaniami (17,16) i (17,15), mają postać alge-

braiczną znacznie więcej różniącą się od siebie niż macierze  $z$  i  $y$  określone równaniami (15,1) i (15,2), wobec czego nie jest wcale intuicyjne z punktu widzenia matematycznego, że równania (17,11) i (17,14) są sobie równoważne. Należy zatem przeprowadzić odpowiedni dowód, że zachodzi tożsamość

$$z_1^{-1} \equiv y_1, \quad (18,1)$$

Obliczamy najpierw wyznacznik charakterystyczny macierzy oporności pozornej (17,16)

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \widehat{z}_0 + 3\widehat{Z}_n & \widehat{z}_2 & \widehat{z}_1 \\ \widehat{z}_1 & \widehat{z}_0 & \widehat{z}_2 \\ \widehat{z}_2 & \widehat{z}_1 & \widehat{z}_0 \end{vmatrix} = \widehat{z}_0^3 + \widehat{z}_1^3 + \widehat{z}_2^3 - 3\widehat{z}_0\widehat{z}_1\widehat{z}_2 + 3\widehat{Z}_n(\widehat{z}_0^2 - \widehat{z}_1\widehat{z}_2) \quad (18,2)$$

i na podstawie wzorów (6,24) i (6,18) przekształcamy go do postaci

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \widehat{Z}_a\widehat{Z}_b\widehat{Z}_c + \widehat{Z}_n(\widehat{Z}_a\widehat{Z}_b + \widehat{Z}_b\widehat{Z}_c + \widehat{Z}_c\widehat{Z}_a) = \\ &= \widehat{Z}_a\widehat{Z}_b\widehat{Z}_c\widehat{Z}_n \{ \widehat{Y}_n + (\widehat{Y}_a + \widehat{Y}_b + \widehat{Y}_c) \}. \end{aligned} \quad (18,3)$$

W ogólnym rozpatrywaniu przez nas przypadku żadna faza odbiornika ani przewód neutralny nie jest w stanie jałowym ani zwarcia, wobec czego czynnik stojący przed nawiasem wężykowatym jest iloczynem czterech liczb zespolonych o skończonej wartości bezwzględnej i niezerowych, a zatem rozpatrywany iloczyn jest różny od zera. Czynnik stojący w nawiasie wężykowatym jest sumą czterech liczb zespolonych, których obrazy na płaszczyźnie Gaussa leżą w czwartej lub pierwszej ćwiartce i w konsekwencji suma jest różna od zera. Stąd wyznacznik  $\Delta_1$  jest różny od zera, macierz  $z_1$  jest regularna i istnieje jej odwrotność.

Dla wyznaczenia odwrotności macierzy  $z_1$  transponujemy ją

$$z_{1t} = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n & z_1 & z_2 \\ z_2 & z_0 & z_1 \\ z_1 & z_2 & z_0 \end{bmatrix} \quad (18,4)$$

i obliczamy macierz kofaktorów macierzy transponowanej

$$\begin{aligned} z_{1t \text{ cof}} &= \begin{bmatrix} z_0^2 - z_1z_2 & z_1^2 - z_0z_2 & z_2^2 - z_0z_1 \\ z_2^2 - z_0z_1 & (z_0 + 3Z_n)z_0 - z_1z_2 & -(z_0 + 3Z_n)z_2 + z_1^2 \\ z_1^2 - z_0z_2 & -(z_0 + 3Z_n)z_1 + z_2^2 & (z_0 + 3Z_n)z_0 - z_1z_2 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} z_0^2 - z_1z_2 & z_1^2 - z_0z_2 & z_2^2 - z_0z_1 \\ z_2^2 - z_0z_1 & z_0^2 - z_1z_2 & z_1^2 - z_0z_2 \\ z_1^2 - z_0z_2 & z_2^2 - z_0z_1 & z_0^2 - z_1z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3Z_nz_0 & -3Z_nz_2 \\ 0 & -3Z_nz_1 & 3Z_nz_0 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (18,5)$$

Wyznacznik charakterystyczny  $\Delta_1$  można uprościć do postaci

$$\Delta_1 = \widehat{Z}_a \widehat{Z}_b \widehat{Z}_c \frac{\widehat{Y}_n + 3\widehat{y}_0}{\widehat{Y}_n}, \quad (18, 6)$$

a stąd macierz odwrotna przy uwzględnieniu przekształceń (15,7) i (15,8) wynosi

$$\mathbf{z}_1^{-1} = \frac{\mathbf{z}_1 \text{t cof}}{\Delta_1} = \frac{\widehat{Y}_n}{\widehat{Y}_n + 3\widehat{y}_0} \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix} + \frac{1}{\widehat{Y}_n + 3\widehat{y}_0} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3z_0}{Z_a Z_b Z_c} & -\frac{3z_2}{Z_a Z_b Z_c} \\ 0 & -\frac{3z_1}{Z_a Z_b Z_c} & \frac{3z_0}{Z_a Z_b Z_c} \end{bmatrix}. \quad (18, 7)$$

Wyrażamy elementy tej drugiej macierzy przez składowe symetryczne

$$\begin{bmatrix} \frac{3z_0}{Z_a Z_b Z_c} \\ \frac{3z_1}{Z_a Z_b Z_c} \\ \frac{3z_2}{Z_a Z_b Z_c} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_b Y_c + Y_a Y_c + Y_a Y_b \\ Y_b Y_c + h Y_a Y_c + h^2 Y_a Y_b \\ Y_b Y_c + h^2 Y_a Y_c + h Y_a Y_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3(y_0^2 - y_1 y_2) \\ 3(y_2^2 - y_0 y_1) \\ 3(y_1^2 - y_0 y_2) \end{bmatrix}. \quad (18, 8)$$

Ostatecznie więc macierz odwrotna wynosi

$$\mathbf{z}_1^{-1} = \frac{1}{\widehat{Y}_n + 3\widehat{y}_0} \begin{bmatrix} Y_n y_0 & Y_n y_2 & Y_n y_1 \\ Y_n y_1 & (Y_n y_0 + 3y_0^2) - 3y_1 y_2 & (Y_n y_2 + 3y_0 y_2) - 3y_1^2 \\ Y_n y_2 & (Y_n y_1 + 3y_0 y_1) - 3y_2^2 & (Y_n y_0 + 3y_0^2) - 3y_1 y_2 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0} & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0} & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0} & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0} & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix} = \mathbf{y}_1 \quad (18, 9)$$

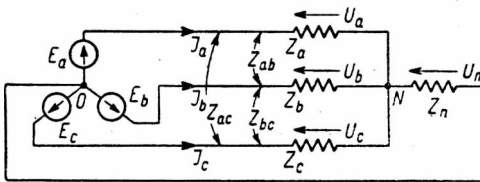
i tym samym tożsamość nasza (18,1) została dowiedziona. Analogicznie do rozdziału 15 i tym razem przeprowadzone obliczenia macierzowe cechuje prostota i przejrzystość; odpowiednie obliczenia przy użyciu algebry zwykłej niemacierzowej byłyby zasadniczo możliwe do przeprowadzenia, ale tak mozolne, zawiłe i nieprzejrzyste, że zapewne nikt z autorów-elektryków ich nie wykonywał.

### 19. DRUGIE PRAWO KIRCHHOFFA W UKŁADZIE TRÓJFAZOWYM CZTEROPRZEWODOWYM

przy fazach odbiornika indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Rozpatrujemy układ trójfazowy czteroprzewodowy wskazany na rys. 21 o fazach odbiornika indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego.

Niech będzie dany układ prądów przewodowych ( $\hat{J}_a, \hat{J}_b, \hat{J}_c$ ), układ oporności pozornych poszczególnych gałęzi odbiornika ( $\hat{Z}_a, \hat{Z}_b, \hat{Z}_c$ ) oraz układ oporności pozornych wzajemnych między gałęziami ( $\hat{Z}_{bc}, \hat{Z}_{ac}, \hat{Z}_{ab}$ ) na skutek istnienia sprzężeń indukcyjnych. Przyjmujemy, że żadna faza nie jest



Rys. 21. Układ trójfazowy czteroprzewodowy przy fazach odbiornika połączonych w gwiazdę indukcyjnie sprzężonych, a ekranowanych od przewodu neutralnego.

w stanie jałowym ani zwarcia, to znaczy oporność pozorną  $\hat{Z}_k$  dla  $k=a, b, c$  ani nie dąży do nieskończoności, ani też nie jest zerem i w konsekwencji istnieje zawsze skończona niezerowa przewodność pozorną każdej fazy  $\hat{Y}_k$ .

Ponadto dana jest oporność pozorną przewodu neutralnego  $\hat{Z}_n$ , co do której nie czynimy żadnych założeń.

Za pomocą równania (13,9) określamy siły elektromotoryczne źródła w poszczególnych fazach w funkcji prądów przewodowych, oporności pozornych poszczególnych gałęzi, oporności pozornych wzajemnych między gałęziami i napięcia punktu neutralnego odbiornika:

$$\begin{bmatrix} E_a \\ E_b \\ E_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_a & Z_{ab} & Z_{ac} \\ Z_{ab} & Z_b & Z_{bc} \\ Z_{ac} & Z_{bc} & Z_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} U_n \\ U_n \\ U_n \end{bmatrix}.$$

Na mocy zależności (16,9) i (17,11) otrzymujemy

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0}, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m0}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3Z_n J_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} z_0 + 2z_{m0} + 3Z_n, & z_2 - z_{m2}, & z_1 - z_{m1} \\ z_1 - z_{m1}, & z_0 - z_{m2}, & z_2 + 2z_{m2} \\ z_2 - z_{m2}, & z_1 + 2z_{m1}, & z_0 - z_{m0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19,1)$$

Otrzymany wynik przedstawia drugie prawo Kirchhoffa w postaci opornościowej w układzie odniesienia składowych symetrycznych dla rozpatrywanego przypadku. Równanie (19,1) jest ogólniejsze od poprzednio rozpatrywanych (16,9) i (17,11), które są jego przypadkami szczególnymi, a mianowicie:

1. gdy oporność pozorna w przewodzie neutralnym jest równa zeru  $\hat{Z}_n = 0$ , to macierz składowych symetrycznych siły elektromoto-

rycznej źródła  $\begin{bmatrix} E_0 \\ E_1 \\ E_2 \end{bmatrix}$  jest równa macierzy składowych symetrycznych napięcia na odbiorniku  $\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}$  i równanie (19,1) upraszcza się do (16,9);

2. gdy nie ma sprzężeń indukcyjnych, fazy są ekranowane, to macierz składowych symetrycznych oporności pozornej wzajemnej

$\begin{bmatrix} z_{m0} \\ z_{m1} \\ z_{m2} \end{bmatrix}$  jest macierzą zerową i równanie (19,1) upraszcza się do (17,11).

## 20. MOC POZORNA, CZYNNA I BIERNA ODBIORNIKA TRÓJFAZOWEGO w układzie odniesienia składowych symetrycznych

Wspominaliśmy w rozdziale 13, że przy przyjęciu mocy biernej pobranej przez odbiornik indukcyjny za dodatnią, moc pozorna odbiornika trójfazowego wyraża się w postaci symbolicznej wzorem

$$\hat{S} = \hat{U}_a \check{J}_a + \hat{U}_b \check{J}_b + \hat{U}_c \check{J}_c. \quad (20,1)$$

Oznaczając przez

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_a \\ U_b \\ U_c \end{bmatrix} \text{ macierz kolumnową napięć fazowych,}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} J_a \\ J_b \\ J_c \end{bmatrix} \text{ macierz kolumnową prądów płynących w poszczególnych fazach,}$$

$$\mathbf{J}^* = \begin{bmatrix} J_a^* \\ J_b^* \\ J_c^* \end{bmatrix} \text{ macierz kolumnową prądów sprzężonych z prądami płynącymi w poszczególnych fazach,}$$

możemy moc pozorną w postaci symbolicznej wyrazić następująco:

$$\hat{S} = [U_a, U_b, U_c] \begin{bmatrix} J_a^* \\ J_b^* \\ J_c^* \end{bmatrix} = \mathbf{U}_t \mathbf{J}^*. \quad (20, 2)$$

Wyrazamy teraz macierze  $\mathbf{U}$  i  $\mathbf{J}^*$  przez składowe symetryczne przy użyciu wzorów (11,2) i (8,4) oraz dokonujemy transpozycji macierzy napięć

$$\hat{S} = (\mathbf{S}\mathbf{U}_s)_t \mathbf{S}_1 \mathbf{J}_s^* = (\mathbf{U}_s)_t \mathbf{S} \mathbf{S}_1 \mathbf{J}_s^*. \quad (20, 3)$$

czyli

$$\hat{S} = 3(\mathbf{U}_s)_t \mathbf{J}_s^* = 3[U_0, U_1, U_2] \begin{bmatrix} J_0^* \\ J_1^* \\ J_2^* \end{bmatrix} = 3(\hat{U}_0 \check{J}_0 + \hat{U}_1 \check{J}_1 + \hat{U}_2 \check{J}_2). \quad (20, 4)$$

Oznaczmy następująco kąty między poszczególnymi składowymi składowymi symetrycznymi:

$\varphi_0$  jest to kąt, który tworzy wektor  $\hat{U}_0$  z wektorem  $\hat{J}_0$ , to znaczy kąt, o jaki należy obrócić wektor  $J_0$ , by się zszedł z kierunkiem i zwrotem wektora  $\hat{U}_0$ ,

$\varphi_1$  jest to kąt, który tworzy wektor  $\hat{U}_1$  z wektorem  $\hat{J}_1$ .

$\varphi_2$  jest to kąt, który tworzy wektor  $\hat{U}_2$  z wektorem  $\hat{J}_2$ ,



Z równania (20,4) otrzymujemy wówczas

$$\begin{aligned} \widehat{S} &= 3(U_0 J_0 e^{j\varphi_0} + U_1 J_1 e^{j\varphi_1} + U_2 J_2 e^{j\varphi_2}) = \\ &= 3(U_0 J_0 \cos \varphi_0 + U_1 J_1 \cos \varphi_1 + U_2 J_2 \cos \varphi_2) + 3j(U_0 J_0 \sin \varphi_0 + U_1 J_1 \sin \varphi_1 + \\ &+ U_2 J_2 \sin \varphi_2) = 3(P_0 + P_1 + P_2) + 3j(Q_0 + Q_1 + Q_2). \end{aligned} \quad (20, 5)$$

Całkowita moc czynna pobrana przez odbiornik wynosi zatem

$$P = 3(P_0 + P_1 + P_2) = 3(U_0 J_0 \cos \varphi_0 + U_1 J_1 \cos \varphi_1 + U_2 J_2 \cos \varphi_2), \quad (20, 6)$$

a całkowita moc bierna

$$Q = 3(Q_0 + Q_1 + Q_2) = 3(U_0 J_0 \sin \varphi_0 + U_1 J_1 \sin \varphi_1 + U_2 J_2 \sin \varphi_2). \quad (20, 7)$$

Wzory (20,6) i (20,7) mogą określać nie tylko moc pobraną przez odbiornik, ale i moc wysłaną przez źródło na sieć, w tym ostatnim przypadku  $\mathbf{U}$  oznacza macierz napięć fazowych na zaciskach źródła, a  $\mathbf{J}^*$  macierz prądów, której elementami są wektory prądów sprzężone z wektorami prądów płynących w poszczególnych fazach ze źródła na sieć. Jeżeli układ napięć fazowych na zaciskach źródła energii jest układem symetrycznym dodatnim lub ujemnym, to we wzorze (20,6), określającym moc czynną wysłaną przez źródło na sieć, tylko jeden z trzech składników mocy jest różny od zera, a mianowicie:

$$\begin{aligned} \text{dla układu dodatniego } \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} U_a \\ h^2 U_a \\ h U_a \end{bmatrix} \text{ moc czynna wysłana na sieć wynosi} \\ P &= 3P_1 = 3U_1 J_1 \cos \varphi_1, \end{aligned} \quad (20, 8)$$

$$\begin{aligned} \text{dla układu ujemnego } \mathbf{U} &= \begin{bmatrix} U_a \\ h U_a \\ h^2 U_a \end{bmatrix} \text{ moc czynna wysłana na sieć wynosi} \\ P &= 3P_2 = 3U_2 J_2 \cos \varphi_2. \end{aligned} \quad (20, 9)$$

Załóżmy, że na przykład układ napięć  $\mathbf{U}$  jest symetryczny dodatni. Niech źródło pracuje na sieć, do której są dołączone odbiorniki trójfazowe asymetryczne i odbiorniki jednofazowe, w ogólnej liczbie  $n$  odbiorników, wówczas w mocy czynnej pobieranej przez poszczególne odbiorniki występują wszystkie trzy składniki mocy określonej wzorem (20,6), a moc czynna wysłana na sieć wyraża się tylko jednym składnikiem (20,8). Otrzymujemy zatem

$$P = 3U_1 J_1 \cos \varphi_1 = \sum_{k=1}^n 3(U_{0k} J_{0k} \cos \varphi_{0k} + U_{1k} J_{1k} \cos \varphi_{1k} + U_{2k} J_{2k} \cos \varphi_{2k}). \quad (20, 10)$$

Równanie to możemy objaśnić w ten sposób, że moc czynna składowej dodatniej prądu i napięcia zostaje wysłana przez źródło na sieć i ulega

częściowo transformacji w asymetrycznych odbiornikach na moc czynną składowej zerowej i składowej ujemnej w taki sposób, że suma algebraiczna poszczególnych mocy czynnych wszystkich odbiorników jest równa mocy czynnej wysłanej przez źródło: Co do znaku tych składników możemy zauważyć, że w wyrażeniu (13,13)  $P = U_a J_a \cos \varphi_a + U_b J_b \cos \varphi_b + U_c J_c \cos \varphi_c$  wszystkie składniki są nieujemne i obliczając moc czynną wystarczy brać pod uwagę sumę arytmetyczną składników. W wyrażeniu (20,10) natomiast kąty  $\varphi_{1k}$ ,  $\varphi_{jk}$ , i  $\varphi_{k}$ , mogą leżeć również poza I i IV ćwiartką, składniki mocy czynnej mogą być różnych znaków i należy brać pod uwagę sumę algebraiczną. Wobec tego moc czynna przetransformowana w asymetrycznych odbiornikach na moc czynną składowej zerowej i ujemnej może krążyć między poszczególnymi odbiornikami.

## 21. OPORNOŚĆ POZORNA DLA SKŁADOWEJ ZEROWEJ, DODATNIEJ I UJEMNEJ PRĄDU

Prawo Ohma w postaci opornościowej na odbiorniku trójfazowym o fazach ekranowanych przy użyciu algebry niemacierzowej ma postać układu trzech równań

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_0 &= \hat{z}_0 \hat{J}_0 + \hat{z}_1 \hat{J}_1 + \hat{z}_2 \hat{J}_2, \\ \hat{U}_1 &= \hat{z}_1 \hat{J}_0 + \hat{z}_0 \hat{J}_1 + \hat{z}_2 \hat{J}_2, \\ \hat{U}_2 &= \hat{z}_2 \hat{J}_0 + \hat{z}_1 \hat{J}_1 + \hat{z}_0 \hat{J}_2 \end{aligned} \right\} \quad (21, 1)$$

w układzie odniesienia składowych symetrycznych. Równania te są bardziej skomplikowane niż odpowiadające im równania w układzie odniesienia prądu przewodowego i napięcia na końcówkach

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_a &= \hat{Z}_a \hat{J}_a, \\ \hat{U}_b &= \hat{Z}_b \hat{J}_b, \\ \hat{U}_c &= \hat{Z}_c \hat{J}_c. \end{aligned} \right\} \quad (21, 2)$$

W związku z tym powstaje koncepcja zamiany operatorów wektorowych  $\hat{z}_0$ ,  $\hat{z}_1$  i  $\hat{z}_2$  na takie operatory wektorowe  $\hat{Z}_0$ ,  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  przy których użyciu postać równań (21,1) uprościłaby się do postaci (21,2).

Dla szczegółowego rozpatrzenia tego zagadnienia odwzorujemy trzy składowe symetryczne prądu  $\hat{J}_0$ ,  $\hat{J}_1$  i  $\hat{J}_2$  przez odpowiadające im wektory na płaszczyźnie Gaussa i wyrażmy  $\hat{J}_1$ , oraz  $\hat{J}_2$ , w funkcji prądu  $\hat{J}_0$ , wprowadzając odpowiednie operatory obrotu  $e^{j\alpha_1}$ ,  $e^{j\alpha_2}$  i operatory wydłużenia

$$\lambda_1 = \frac{J_1}{J_0}, \quad \lambda_2 = \frac{J_2}{J_0}.$$

Niech zależność między prądami będzie następująca:

$$\left. \begin{aligned} \widehat{J}_1 &= \lambda_1 e^{j a_1} J_0 \\ \widehat{J}_2 &= \lambda_2 e^{j a_2} \widehat{J}_0, \end{aligned} \right\} \quad (21, 3)$$

wówczas eliminując z pierwszego równania (21,1) prądy  $\widehat{J}_1$  i  $\widehat{J}_2$  otrzymujemy

$$\widehat{U}_0 = (\widehat{z}_0 + \lambda_2 e^{j a_2} \widehat{z}_1 + \lambda_1 e^{j a_1} \widehat{z}_2) \widehat{J}_0. \quad (21, 4)$$

Operator wektorowy stojący w nawiasie oznaczamy przez  $\widehat{Z}_0$

$$\widehat{Z}_0 = \widehat{z}_0 + \lambda_2 e^{j a_2} \widehat{z}_1 + \lambda_1 e^{j a_1} \widehat{z}_2 \quad (21, 5)$$

i nazywamy opornością pozorną dla składowej zerowej prądu.

Przechodzimy do drugiego z równań (21,1). Na podstawie zależności (21,3) mamy

$$\left. \begin{aligned} \widehat{J}_0 &= \frac{1}{\lambda_1} e^{-j a_1} \widehat{J}_1, \\ \widehat{J}_2 &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{j(a_2 - a_1)} \widehat{J}_1 \end{aligned} \right\} \quad (21, 6)$$

i równanie dla składowej dodatniej napięcia przepisujemy w postaci

$$\widehat{U}_1 = \left( \widehat{z}_0 + \frac{1}{\lambda_1} e^{-j a_1} \widehat{z}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{j(a_2 - a_1)} \widehat{z}_2 \right) \widehat{J}_1. \quad (21, 7)$$

Operator wektorowy stojący w nawiasie oznaczamy przez  $\widehat{Z}_1$

$$\widehat{Z}_1 = \widehat{z}_0 + \frac{1}{\lambda_1} e^{-j a_1} \widehat{z}_1 + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} e^{j(a_2 - a_1)} \widehat{z}_2 \quad (21, 8)$$

i nazywamy opornością pozorną dla składowej dodatniej prądu.

Przechodzimy na koniec do ostatniego z równań (21,1). Na podstawie zależności (21,3) mamy

$$\left. \begin{aligned} \widehat{J}_0 &= \frac{1}{\lambda_2} e^{-j a_2} \widehat{J}_2, \\ \widehat{J}_1 &= \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{j(a_1 - a_2)} \widehat{J}_2 \end{aligned} \right\} \quad (21, 9)$$

i równanie dla składowej ujemnej napięcia przepisujemy w postaci

$$\hat{U}_2 = \left( \hat{z}_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{(a_1 - a_2)} \hat{z}_1 + \frac{1}{\lambda_2} e^{-j a_2} \hat{z}_2 \right) \hat{J}_2. \quad (21, 10)$$

Operator wektorowy stojący w nawiasie oznaczamy przez  $\hat{Z}_2$

$$\hat{Z}_2 = \hat{z}_0 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{(a_1 - a_2)} \hat{z}_1 + \frac{1}{\lambda_2} e^{-j a_2} \hat{z}_2 \quad (21, 11)$$

i nazywamy opornością pozorną dla składowej ujemnej prądu.

Przy wprowadzeniu do równań (21,1) oporności pozornej dla trzech składowych symetrycznych prądu na miejsce składowych symetrycznych oporności pozornej równania te przepisujemy w postaci

$$\left. \begin{aligned} \hat{U}_0 &= \hat{Z}_0 \hat{J}_0, \\ \hat{U}_1 &= \hat{Z}_1 \hat{J}_1, \\ \hat{U}_2 &= \hat{Z}_2 \hat{J}_2 \end{aligned} \right\} \quad (21, 12)$$

lub w postaci macierzowej

$$\begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_0 J_0 \\ Z_1 J_1 \\ Z_2 J_2 \end{bmatrix}, \quad (21, 13)$$

odpowiadającej prawu Ohma w układzie odniesienia prądu przewodowego i napięcia na końcówkach.

W ogólnym przypadku odbiornika trójfazowego czteroprzewodowego układ prądów przewodowych i układ napięć na końcówkach są układami asymetrycznymi, a odpowiadające im wektory nie tworzą zamkniętego trójkąta; w konsekwencji wszystkie składowe symetryczne prądu i napięcia występujące we wzorze (21,13) są różne od zera i rozpatrywane oporności pozorne  $\hat{Z}_0$ ,  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są o skończonym module i niezerowe.

We wszystkich przypadkach, w których  $\hat{Z}_0$ ,  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są niezerowe, określona jest ich odwrotność, którą nazywamy przewodnością pozorną dla składowej zerowej, dodatniej i ujemnej napięcia i określamy za pomocą wzorów

$$\left. \begin{aligned} \text{przewodność pozorna dla składowej zerowej napięcia} \quad \hat{Y}_0 &= \frac{1}{\hat{Z}_0}, \\ \text{przewodność pozorna dla składowej dodatniej napięcia} \quad \hat{Y}_1 &= \frac{1}{\hat{Z}_1}, \\ \text{przewodność pozorna dla składowej ujemnej napięcia} \quad \hat{Y}_2 &= \frac{1}{\hat{Z}_2}, \end{aligned} \right\} \quad (21, 14)$$

Równanie macierzowe (21,13) przy wprowadzeniu przewodności pozornych na miejsce oporności pozornych wyraża prawo Ohma w postaci przewodnościowej

$$\begin{bmatrix} J_0 \\ J_1 \\ J_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_0 U_0 \\ Y_1 U_1 \\ Y_2 U_2 \end{bmatrix}. \quad (21, 15)$$

Ze wzorów (21,5), (21,8) i (21,11) określających oporność pozorną dla składowej zerowej, dodatniej i ujemnej prądu widzimy, że oporności pozorne  $\hat{Z}_0$ ,  $\hat{Z}_1$  i  $\hat{Z}_2$  są funkcjami wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornej i w ogólnym przypadku spełnione są nierówności

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Z}_0 \neq \hat{z}_0, \\ \hat{Z}_1 \neq \hat{z}_1, \\ \hat{Z}_2 \neq \hat{z}_2 \end{array} \right\} \quad (21, 16)$$

oraz

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Y}_0 \neq \hat{y}_0, \\ \hat{Y}_1 \neq \hat{y}_1, \\ \hat{Y}_2 \neq \hat{y}_2. \end{array} \right\} \quad (21, 17)$$

W przypadku szczególnym odbiornika symetrycznego mamy stosownie do twierdzenia (12,1)

$$\begin{bmatrix} Z_a \\ Z_b \\ Z_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z \\ Z \\ Z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} z_0 \\ z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (21, 18)$$

czyli składowa symetryczna dodatnia i ujemna oporności pozornej znika. Zachodzą wtedy w tych wzorach (21,1) uproszczenia

$$\left. \begin{array}{l} \hat{U}_0 = \hat{z}_0 \hat{J}_0, \\ \hat{U}_1 = \hat{z}_0 \hat{J}_1, \\ \hat{U}_2 = \hat{z}_0 \hat{J}_2 \end{array} \right\} \quad (21, 19)$$

i przy uwzględnieniu równań (21,12) mamy

$$\left. \begin{array}{l} \hat{Z}_0 = \hat{Z}_1 = \hat{Z}_2 = \hat{z}_0 \\ \hat{Y}_0 = \hat{Y}_1 = \hat{Y}_2 = \hat{y}_0. \end{array} \right\} \quad (21, 20)$$

Wyniki te wyrazimy słowami następująco:

W przypadku ogólnym oporność pozorną dla składowej zerowej prądu nie równa się składowej zerowej oporności pozornej, oporność pozorną dla składowej dodatniej prądu nie równa się składowej

dotądniej oporności pozornej, a oporność pozorną dla składowej ujemnej prądu nie równa się składowej ujemnej oporności pozornej. W przypadku szczególnym odbiornika symetrycznego oporności pozornie dla wszystkich trzech składowych symetrycznych prądu są sobie równe i równają się składowej zerowej oporności pozornej, a pozostałe składowe symetryczne oporności pozornie: dodatnia i ujemna znikają.

Z rozpatrywanym punktem wiąże się zagadnienie wzajemnego stosunku składowej symetrycznej (zerowej, dodatniej i ujemnej) oporności pozornie i przewodności pozornie.

Z obliczeń przeprowadzonych w rozdziale 15, a w szczególności ze wzorów (15,4), (15,6) i (15,8) wynika, że w ogólnym przypadku

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{z_0^2 - z_1 z_2}{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 - 3z_0 z_1 z_2} \\ \frac{z_2^2 - z_0 z_1}{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 - 3z_0 z_1 z_2} \\ \frac{z_1^2 - z_0 z_2}{z_0^3 + z_1^3 + z_2^3 - 3z_0 z_1 z_2} \end{bmatrix} \quad (21, 21)$$

czyli każda składowa symetryczna przewodności pozornie jest funkcją wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornie.

W przypadku szczególnym odbiornika symetrycznego równanie (21,21) upraszcza się do postaci

$$\begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/z_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (21, 22)$$

Wyniki te wyrazimy słowami:

W przypadku ogólnym składowa zerowa (bądź dodatnia lub ujemna) przewodności pozornie nie jest odwrotnością składowej zerowej (bądź dodatniej lub ujemnej) oporności pozornie, lecz każda składowa symetryczna przewodności pozornie jest funkcją wszystkich trzech składowych symetrycznych oporności pozornie.

W przypadku szczególnym odbiornika symetrycznego składowa zerowa przewodności pozornie jest odwrotnością składowej zerowej oporności pozornie, a pozostałe składowe symetryczne: dodatnia i ujemna, zarówno oporności pozornie, jak i przewodności pozornie znikają.

\* \* \*

W zakończeniu chciałem podziękować prof. drowi J. Łosiowi i prof. drowi L. Jeśmanowiczowi za przejrzenie maszynopisu części I, a prof. drowi P. Nowackiemu — całości pracy. Życzliwym uwagom wymienionych opiniodawców zawdzięczać należy ulepszenie pierwotnego tekstu i nadanie pracy bardziej jednolitego charakteru.

## WYKAZ LITERATURY

1. Corbeiller P. — Matrix analysis of electric networks — Harvard University Press, New York 1950,
2. Czernin A. B. — Korotkije zamykanja pri niepołnofaznych režimach elektri-czeskich sistiem — Gosenergoizdat, 1952.
3. Hobson I. E. — Składowe symetryczne. Przesył i rozdział energii elektrycznej — t. III, PWT, Warszawa 1951.
4. Konorski B. — Teoria dwójników i czwórników elektrycznych — PWT, War-szawa 1951.
5. Kron G. — Tensor analysis of networks — New York 1939.
6. Kron G. — A short course in tensor analysis for electrical engineers — New York 1942.
7. Mostowski A., Stark M. — Algebra Wyższa — Polskie Tow. Matematyczne, Warszawa 1953.
8. Neumann R. — Symmetrical components analysis of unsymmetrical poly-phase system — London 1939.
9. Nowicki H. — Zasady teletransmisji przewodowej — t. I, PWN, Warszawa 1953.
10. Stigant S. A. — Modern electrical engineering mathematics — London 1946.
11. Wągner C., Evans E. Symmetrical components — London 1933.
12. Woronow R. A. — Obszczaja tieoria czetyrechpolusnikow i mnogopolusni-kow — Gosenergoizdat, 1952.
13. Cholewicki T. — Zastosowanie macierzy w elektrotechnice — (Skrypt), PWN, Warszawa 1952.

U w a g a: W poz. 3, 8, 10 i 13 znajdują się wzmianki bibliograficzne z wykazem arty-kulów w czasopismach naukowych.

Т. ХОЛЕВИЦКИ

## МАТРИЦЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ СОСТАВЛЯЮЩИХ

Резюме

Основные матричные уравнения симметрических составляющих в трёхфазной системе поданы С. Аустеном Стигантом в книге „Modern electrical engineering mathematics“, изданной в 1946 году,

Это понятие развито в настоящей статье в математическом и электрическом смысле.

Во вступлении к первой части, имеющей математический характер, автор даёт определение симметрической и асимметрической системы векторов, а также последовательность векторов данной системы.

В связи с известными уравнениями

$$\mathbf{A} = \mathbf{S}\mathbf{A}_s, \quad \mathbf{A}_s = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}$$

автор вводит следующие матрицы третьей степени

$$\mathbf{S}_1 = 3\mathbf{S}^{-1}, \quad \mathbf{S}^2 = \mathbf{S}_1^2 = 3\mathbf{M}, \quad \mathbf{M}^2 = \mathbf{I},$$

диагональную матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & h^2, & 0 \\ 0, & 0, & h \end{bmatrix},$$

где

$$h = e^{j \frac{2\pi}{3}},$$

и три специальных матрицы с тремя не равными нулю элементами

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \\ 1, & 0, & 0 \end{bmatrix}.$$

Применяя эти матрицы, мы можем составить следующие произведения:

$$\mathbf{SHQHS} = 3 \begin{bmatrix} 0, & h, & 0 \\ h^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \mathbf{SH^2QH^2S} = 3 \begin{bmatrix} 0, & 0, & h^2 \\ 0, & 1, & 0 \\ h, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

Эти произведения применяются при расчёте шести различных произведений векторных матриц выраженных при помощи симметрических составляющих, как напр.

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_2, \bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{A}, h^2\bar{B}, h\bar{C}] \begin{bmatrix} h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_2, -\bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix}.$$

Во второй части указано применение математического матричного исследования теории симметрических составляющих в электротехнике, а в особенности к исследованию стационарных режимов трёхфазных систем переменного тока с четырьмя проводниками. Можно составить в матричном виде два основных уравнения: закон Ома и второй закон Кирхгофа как в нормальной системе координат напряжения на зажимах и тока протекающего по элементу, так и в системе симметричных составляющих напряжения и тока. Для каждого из этих случаев мы различаем еще сопротивительную форму  $\mathbf{U} = \mathbf{ZJ}$  и форму проводимости  $\mathbf{J} = \mathbf{YU}$  соответственных матричных уравнений и кроме того мы можем рассматривать отдельные магнитно связанные фазы, или же полное отсутствие связи при экранированных ветвях.

Можно легко доказать с помощью выведенных в первой части формул, что матрицы третьей степени, примененные в законе Ома:

$$\text{матрица комплексного сопротивления} \quad \mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix}$$



и матрица комплексной проводимости

$$y = \begin{bmatrix} y_0 & y_2 & y_1 \\ y_1 & y_0 & y_2 \\ y_2 & y_1 & y_0 \end{bmatrix}$$

относятся друг к другу как обратные числа т. е.  $z^{-1} = y$ .

То же самое относится и к матрицам третьей степени во втором законе Кирхгофа

$$z_1 = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n & z_2 & z_1 \\ z_1 & z_0 & z_2 \\ z_2 & z_1 & z_0 \end{bmatrix} \quad y_1 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0} & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0} & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} & \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} & \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0} & \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0} & \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix}$$

именно эти матрицы также являются по отношению к себе обратными числами.

T. CHOLEWICKI

MATRICES OF SYMMETRICAL COMPONENTS

Summary

Three-phase symmetrical component basic equations were given in matrix form by S. Austen Stigant in his book „Modern electrical engineering mathematics“, published in 1946.

This concept is developed in the present paper from both the mathematical and electrical point of view.

As an introduction to the mathematical part I the author defines the symmetrical and asymmetrical vector systems and the sequence of vectors in a system.

In connection with the well known equations

$$A = SA_s, \quad A_s = S^{-1}A$$

the author introduces third-order matrices

$$S_1 = 3S^{-1}, \quad S^2 = S_1^2 = 3M, \quad M^2 = I$$

a diagonal matrix

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & h^2 & 0 \\ 0 & 0 & h \end{bmatrix},$$

where

$$h = e^{j \frac{2\pi}{3}}$$

and special rotational matrices

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P^2 = Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

By using these matrices we can form the following products

$$\mathbf{SHQHS} = 3 \begin{bmatrix} 0, & h, & 0 \\ h^2, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{bmatrix}$$

and

$$\mathbf{SH^2QH^2S} = 3 \begin{bmatrix} 0, & 0, & h^2 \\ 0, & 1, & 0 \\ h, & 0, & 0 \end{bmatrix}$$

These products can be applied for calculating six different products of vector-matrices expressed by means of symmetrical components, as for instance

$$[\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}] \begin{bmatrix} \bar{D} \\ \bar{E} \\ \bar{F} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_0, \bar{A}_2, \bar{A}_1] \begin{bmatrix} \bar{D}_0 \\ \bar{D}_1 \\ \bar{D}_2 \end{bmatrix},$$

$$[\bar{A}, h^2\bar{B}, h\bar{C}] \begin{bmatrix} h^2\bar{B} \\ h\bar{C} \\ \bar{A} \end{bmatrix} = 3 [\bar{A}_2, -\bar{A}_0] \begin{bmatrix} \bar{A}_2 \\ \bar{A}_1 \end{bmatrix}.$$

In part II we find an application of the mathematical symmetrical component matrix analysis to electrical engineering, in particular to three-phase four-wire AC static systems. Two fundamental formulae:

Ohm's law and Kirchhoff's second law can be presented in matrix form either in the normal reference frame, i. e. terminal voltage and current flowing through the element, or in the reference frame of symmetrical components of voltage and current. In each case we can still distinguish the impedance form  $\mathbf{U} = \mathbf{ZJ}$  from the admittance form  $\mathbf{J} = \mathbf{YU}$ , of the corresponding matrix equations, and we can consider the particular phases being magnetically coupled or screened from each other.

It can be easily proved by means of the formulae calculated in part I, that the third-order matrices used in the Ohm's law:

the impedance matrix  $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_0, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix}$

and the admittance matrix  $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_0, & y_2, & y_1 \\ y_1, & y_0, & y_2 \\ y_2, & y_1, & y_0 \end{bmatrix}$

are reciprocally inverse matrices, i. e.  $\mathbf{z}^{-1} = \mathbf{y}$ .

The same applies to the third-order matrices of Kirchhoff's second law

$$\mathbf{z}_1 = \begin{bmatrix} z_0 + 3Z_n, & z_2, & z_1 \\ z_1, & z_0, & z_2 \\ z_2, & z_1, & z_0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{y}_1 = \begin{bmatrix} \frac{Y_n y_0}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_1}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{y_1 y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_2 - \frac{3y_1^2}{Y_n + 3y_0} \\ \frac{Y_n y_2}{Y_n + 3y_0}, & y_1 - \frac{3y_2^2}{Y_n + 3y_0}, & y_0 - \frac{3y_1 y_2}{Y_n + 3y_0} \end{bmatrix}$$

that one matrix is the inverse of the other.

## WYTYCZNE DLA AUTORÓW

Komitet Redakcyjny prosi autorów o ułatwienie prac redakcyjnych związanych z przygotowaniem do druku nadesłanych artykułów przez przestrzeganie podanych wytycznych przy przygotowaniu maszynopisu:

1. Prace powinny być napisane pismem maszynowym, na pojedynczych arkuszach formatu A4, jednostronnie, z interlinią (co drugi wiersz), z marginesem 3 cm z lewej strony. Stronice numerowane. Artykuły należy nadsyłać w dwóch egzemplarzach.
2. Wzory i oznaczenia należy wpisywać ręcznie, czytelnie, używając jedynie liter łacińskich i greckich. Wskaźniki niżej liter i wykładniki potęg pisać należy szczególnie dokładnie i wyraźnie.
3. Każda praca powinna być zaopatrzona w krótkie streszczenie (analizę) w języku polskim do 25 wierszy maszynopisu oraz obszerniejsze streszczenia (do 20% objętości artykułu) w języku rosyjskim oraz angielskim francuskim lub niemieckim. W razie niemożności nadesłania streszczenia w języku obcym autor dostarcza odpowiednie streszczenie w języku polskim w trzech egz. z jednoczesnym wpisaniem, o ile możliwości, terminologii w języku rosyjskim oraz w języku obcym.
4. Rysunki, wykresy i fotografie należy wykonywać na oddzielnych arkuszach z podaniem kolejnych numerów rysunków. W tekście i na marginesie, obok właściwego tekstu, należy podać jedynie odnośny numer rysunku. Ostateczne wykonanie rysunków obowiązuje Redakcję.
5. Wszystkie rysunki, wykresy i fotografie należy nazywać w tekście rysunkami (skrót: rys.) i nie używać określeń jak figura, szkic, fotografia. U samego dołu rysunku (a przy fotografiach — na odwrocie) należy wpisać czytelnie numer rysunku, napis pod rysunkiem, tytuł pracy i nazwisko autora.
6. Wszystkie tablice (unikać zbyt dużych) podobnie jak rysunki należy wykonywać na oddzielnych arkuszach i numerować kolejno liczbami arabskimi. U góry każdej tablicy podać tytuł (napis) objaśniający.
7. Po zakończeniu artykułu należy podać wykaz literatury, wymieniając w następującej kolejności: nazwisko autora i pierwsze litery imion, pełny tytuł dzieła lub artykułu, tytuł czasopisma, tom, numer zeszytu, rok i miejsce wydania oraz ewentualnie numer strony. Pozycje powinny być ponumerowane w kolejności alfabetycznej autorów; w tekście — powołania na numer pozycji w nawiasie kwadratowym, np. [3].
8. Autorowi przysługuje bezpłatnie 25 egzemplarzy odbitek pracy. Dodatkowe egzemplarze autor może zamówić w redakcji na własny koszt przy przesyłaniu korekty swej pracy.

**U w a g a:** Autora obowiązuje korekta autorska, którą należy zwracać w ciągu 3 dni pod adresem: Redakcja „Archiwum Elektrotechniki“, Warszawa, Koszykowa 75, Politechnika, Gmach Elektrotechniki, Zakład Elektroniki PAN.

**Cena zł 15,—**