



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej



Henryk Kudela

**Modelowanie
zjawisk hydrodynamicznych
metodami dyskretnych wirów**

Henryk KUDELA

Numerical modelling of the hydrodynamic phenomena
by the vortex methods



Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów
Politechniki Wrocławskiej

48

Seria:
Monografie

25



Henryk Kudela

**Modelowanie zjawisk
hydrodynamicznych metodami
dyskretnych wirów**



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1995

Recenzenci

Włodzimierz KORDYLEWSKI

Zbigniew PERADZYŃSKI

Andrzej STYCZEK

Opracowanie redakcyjne i korekta

Barbara WACHOWSKA

Projekt okładki

Krzysztof DAWIDOWICZ

Biblioteka Główna i OINT
Politechniki Wrocławskiej



001798981

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1995



OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ

Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

30 872 0 L/1

ISSN 0324-9387

Nakład 150+55 egz. Ark. wyd. 9. Ark. druk. 7⁷/₈. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.

Oddano do druku w czerwcu 1995 r. Druk ukończono w czerwcu 1995 r.

Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. 448/95.

*Metoda numeryczna, kropla wirowa,
niestabilność Rayleigha-Taylora,
ruch pęcherzyka, przepływ w kanale*

Henryk KUDELA*

MODELOWANIE ZJAWISK HYDRODYNAMICZNYCH METODAMI DYSKRETYCH WIRÓW

Omówiono metody dyskretnych wirów służące do modelowania zjawisk hydrodynamicznych. Podano podstawy matematyczne metod. Przedstawiono wyniki modelowania metodą dyskretnych wirów dla zagadnienia niestabilności Rayleigha-Taylora, ruchu pęcherzyka w polu grawitacyjnym oraz przepływu cieczy lepkiej w kanałach o złożonej geometrii. Dla niestabilności Rayleigha-Taylora założono, że płyny są nielepkie i nieściśliwe a ich ruch potencjalny. Pozwoliło to opis ruchu powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki sprowadzić do zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej. Numerycznie wykazano, że zagadnienie początkowe dla warstwy wirowej jest źle uwarunkowane i wymaga regularyzacji. Regularyzacji dokonano przez wprowadzenie do równań ruchu parametry δ . Przedstawiono rozwiązania dla równań zregularizowanych. Na przykładzie ruchu pęcherzyka wykazano, że regularyzacja za pomocą parametru δ działa podobnie jak lepkość płynów. Badania ruchu pęcherzyka wykazały, że gdy początkowa forma pęcherzyka jest elipsą to podczas ewolucji pęcherzyka z jego objętości wysnuwa się nić („ogon”). Formy takie są obserwowane również w badaniach eksperymentalnych. Przedstawiono wrażliwość ewolucji pęcherzyka od warunków początkowych. Do badania przepływu cieczy lepkiej w kanałach o złożonej zastosowano stochastyczną metodę kropel wirowych. Obliczenia sprawdzające użyteczność programu przedstawiono dla przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem i opływu płytki ustawionej prostopadle do przepływu. Wyniki obliczeń porównano z danymi eksperymentalnymi.

*Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów, Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

A	- liczba Atwooda
B	- potencjał wektorowy
C	- stała, liczba rzeczywista
$G(\mathbf{x})$	- funkcja Greena (rozwiązanie fundamentalne) równania Laplacea
e	- zmienna Lagrange'a
g	- przyspieszenie ziemskie m/s^2
H	- funkcja Hamiltona, kinetyczna energia oddziaływań wirów
k	- krzywizna warstwy wirowej
K	- liczba falowa
N	- liczba wirów
p	- ciśnienie N/m^2
r	- promień, odległość między dwoma punktami
Re	- liczba Reynoldsa
\mathbf{q}	- prędkość zespolona
s	- długość łuku krzywej
t	- czas, s
\mathbf{u}, \mathbf{v}	- wektory prędkości, m/s
u, v	- składowe wektora prędkości
x_1, x_2, x_3	- współrzędne przestrzenne
x, y	- współrzędne położenia w przestrzeni dwuwymiarowej
W	- potencjał prędkości zespolonej
$W(t)$	- ruch Browna
z	- zmienna zespolona
α	- parametr rzeczywisty z przedziału $[-1, 1]$
Γ	- intensywność warstwy wirowej w zmiennych Eulera
γ	- intensywność warstwy wirowej wyrażona w zmiennych Lagrange'a
δ	- parametr rzeczywisty, promień wygładzania (obciążenia osobliwości)
ν	- kinematyczny współczynnik lepkości, m^2/s
λ	- długość fali zaburzającej, m
ρ_1	- gęstość płynu nad krzywą rozdzielającą dwa ośrodki kg/m^3
ρ_2	- gęstość płynu pod krzywą rozdzielającą dwa ośrodki kg/m^3
σ	- współczynnik napięcia powierzchniowego, N/m
ψ	- funkcja prądu
ϕ	- potencjał pola prędkości
μ	- skok wartości potencjału przy przejściu przez krzywą rozgraniczającą dwa ośrodki
ω	- wektor wirowości
ω	- składowa wektora wirowości

INDEKSY

Górny indeks n odnosi się do dyskretnych wartości czasu, dolny j natomiast - do numeru cząstki. Dolny indeks t lub e oznacza różniczkowanie względem zmiennej t lub e .

x_j^n - współrzędne (x, y) położenia j -tej cząstki w chwili $t = n \Delta t$

1. WPROWADZENIE

W niniejszej pracy opisano metody dyskretnych wirów, które w mechanice płynów zajmują miejsce szczególne. W metodach tych pierwszoplanową rolę odgrywa wirowość pola prędkości i stąd szczególna rola tych metod. Gdy zaczynamy studia nad mechaniką płynów, wirowość jawi się nam jako coś bardzo abstrakcyjnego i niezbyt przydatnego. Brakuje uniwersalnych przyrządów, pozwalających mierzyć wirowość w sposób bezpośredni. Definiuje się ją, korzystając z rachunku różniczkowego, jako kombinację liniową pochodnych pola prędkości. Jednak to wirowość przesądza o tym, czy dane pole prędkości może opisywać realny ruch cieczy. Jeżeli w całym obszarze przepływu wirowość pola prędkości, którym usiłujemy opisywać przepływ płynu, jest równa zeru, to płyn ten przestaje być płynem realnym. W ruchu cieczy nieściśliwej pole prędkości jest jednoznacznie określone przez położenie obszarów z niezerową wirowością. Wirowość pola prędkości odgrywa pierwszorzędne znaczenie w jakościowym opisie wielu zjawisk hydrodynamicznych, takich jak: warstwa przyścienna, szybkość dyssypacji energii w przepływie turbulentnym, powstawanie siły nośnej przy opływie ciał, „ścieżka wirowa” Karmana, koncepcje koherentnych struktur wirowych w przepływie turbulentnym itd. [156]. W przepływach rzeczywistych obszary, w których koncentruje się wirowość, zajmują jedynie niewielką część pola przepływu, np. warstwa przyścienna, strefy recyrkulacji itp. Dlatego celowe jest skoncentrowanie uwagi właśnie na tych niewielkich obszarach, które przesądzają o charakterze przepływu.

Literatura na temat badania zjawisk związanych z ruchem cieczy za pomocą metod wirowych jest przeogromna. Co kilka lat pojawiają się prace przeglądowe przedstawiające stan wiedzy w tej dziedzinie [11, 50, 51, 62, 121, 125, 126, 159, 161, 171]. Odbywają się konferencje poświęcone tylko zagadnieniom dynamiki wirowości i metodom wirowym [11, 132, 190, 191, 192]. Fakty te dobitnie podkreślają wagę jaką przywiązuje się do wirowości w badaniach nad ruchem cieczy.

1.1. KRÓTKA CHARAKTERYSTYKA METOD WIROWYCH

Ze względu na charakter rozwiązywanych zadań, można wyróżnić dwa obszary zastosowań metod dyskretnych wirów. Pierwszy obejmuje modelowanie ruchu i deformacji powierzchni rozgraniczającej dwa płynne ośrodki. Przyjmuje się, że na tej powierzchni składowa styczna pola prędkości jest nieciągła. Drugi obszar zastosowań metod wirowych odnosi się do modelowania przepływu cieczy lepkiej w obszarach o dowolnej geometrii.

Badanie ruchu granicy rozdziału dwóch ośrodków płynnych jest w praktyce modelowania numerycznego zagadnieniem skomplikowanym. Wynika to z faktu, że powierzchnia rozdziału stanowi często powierzchnię nieciągłości parametrów stanu, np. gęstości. Na granicy tej muszą być spełnione pewne dodatkowe warunki wynikające z fizyki zagadnienia. Ze względu na dużą deformację tej powierzchni i jej niewiadome położenie w praktyce trudno jest te warunki zrealizować [87]. Niekiedy można jednak uzyskać zadowalającą informację o ruchu powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki, przyjmując stosunkowo prosty model ruchu cieczy. Zakładając mianowicie, że ciecz jest nielepka a ruch cieczy potencjalny, powierzchnię rozdziału można rozpatrywać jako warstwę wirową. W ten sposób problem ewolucji granicy rozdziału można sprowadzić do zagadnienia początkowego (Cauchy'ego). Dokładność obliczeń numerycznych przewyższa o kilka rzędów dokładność obliczeń otrzymywanych za pomocą metod, w których wykorzystuje się siatkę numeryczną. Szczególnie dobrze nadają się one do modelowania numerycznego takich zagadnień, jak niestabilność Kelvina–Helmholtza [97–99, 157, 190] (granica rozdziału wynika z różnicy prędkości dwóch ośrodków o tej samej gęstości), niestabilność Rayleigha–Taylora [17, 18, 73, 90, 93, 104, 105, 108, 136, 186] (granica rozdziału przebiega między dwoma ośrodkami o różnej gęstości, przy czym ośrodek lżejszy przyspieszany jest w kierunku cięższego), niestabilność Taylora–Saffmana [187, 188] (powierzchnia rozdziału przebiega pomiędzy ośrodkami o różnej lepkości), a także ruchu fal powierzchniowych [20, 122].

Rozwój nowoczesnych metod dyskretnych wirów w odniesieniu do modelowania ruchu cieczy lepkiej zapoczątkowały prace Chorina [42–44]. Metoda kropeł wirowych zaproponowana przez Chorina [42], została pomyślana jako metoda do modelowania przepływów z dużą liczbą Reynoldsa. Mimo iż przed pracami Chorina wykorzystywano metody dyskretnych wirów do modelowania różnych zjawisk hydrodynamicznych [48, 50, 51, 62], to jednak dopiero od prac Chorina metodę kropeł wirowych traktuje się jako algorytm do rozwiązywania równań ruchu cieczy lepkiej. Prowadzi się intensywne prace teoretyczne nad zbieżnością metody wirów [24–26, 28, 52, 53, 77, 78, 80]. Pojawiają się coraz to nowe aplikacje metody świadczące o jej skuteczności [34, 35, 41, 69, 70, 171, 173]. Klasyczne metody numeryczne wykorzystujące w obliczeniach siatkę numeryczną pozwalają rozwiązywać równania ruchu cieczy dla liczb Reynoldsa rzędu kilkuset. W przepływach z dużą liczbą Reynoldsa występują składowe pola prędkości o różnych skalach wielkości, które niezwykle trudno jest uwzględnić w klasycznych metodach siatkowych (metody różnic skończonych, metody elementu skończonego). Pojawia się problem dominacji członów reprezentujących siły bezwładnościowe nad członami odpowiadającymi siłom lepkościowym. Jeżeli w przepływie istnieją obszary o dużych gradientach prędkości (takim jest np. warstwa przyścienna), to w obszary te powinno wpadać co najmniej kilka oczek siatki

numerycznej. Jak wiadomo grubość warstwy przyściennej jest odwrotnie proporcjonalna do pierwiastka kwadratowego z liczby Reynoldsa Re ($\delta \sim 1/\sqrt{Re}$). Stąd też wzrost wartości liczby Reynoldsa prowadzi szybko do gęstych siatek numerycznych, dużych układów równań algebraicznych, długich czasów obliczeniowych i znacznych wymagań odnośnie do pamięci komputera. Ponadto, i to jest szczególnie ważne, siatka numeryczna wprowadza do obliczeń lepkość numeryczną wynikającą z zastąpienia pochodnych ilorazami różnicowymi. Lepkość numeryczna może być kilka rzędów większa od rzeczywistej lepkości cieczy. W ten sposób możemy otrzymywać numerycznie poprawne rozwiązania (tzn. stabilne, bez oscylacji), lecz dla całkowicie zmienionego (fizycznie) zagadnienia. Modelowanie przepływów turbulentnych z wykorzystaniem uśrednionych równań Reynoldsa wymaga stosowania odpowiednich hipotez zamykających o charakterze półempirycznym, które mogą się zmieniać w zależności od typu rozwiązywanego zagadnienia.

Problem siatki numerycznej oraz dominacji członów bezwładnościowych nad lepkościowymi rozwiązuje radykalnie właśnie metoda kropel wirowych. Była ona pomyślana jako metoda całkowicie bezsiatkowa. Obliczenia wykonywane są we współrzędnych Lagrange'a. Metoda ta należy do metod dekompozycyjnych, tzn. rozwiązanie końcowe otrzymuje się w rezultacie złożenia rozwiązań dwóch zagadnień prostszych, tworzących zagadnienie całkowite. W pierwszym kroku rozwiązuje się równanie cieczy nielepkiej (Eulera). Pole wirowości jest zastępowane rozkładem dyskretnych wirów, zwanych kroplami wirowymi. Są to zmodyfikowane wiry punktowe, które mają skończony nośnik*. Krople wirowe indukują skończone pole prędkości oraz przemieszczają się tak, jak cząstka materialna. Prędkość kropli oblicza się sumując oddziaływania wszystkich pozostałych wirów w obszarze przepływu. W drugim kroku rozwiązuje się równanie dyfuzji. W komputerowej implementacji metody można wyróżnić kilka kroków: a) rozwiązanie metodą kropel wirowych równania Eulera w przestrzeni nieograniczonej, b) wyznaczenie potencjalnego pola prędkości potrzebnego do realizacji warunku brzegowego dla składowej normalnej pola prędkości do brzegu, c) rozwiązanie równania dyfuzji (uwzględnienie lepkości) i realizacja warunku brzegowego dla składowej stycznej pola prędkości.

* Średnica zbioru, na którym zadana jest intensywność elementu wirowego, jest większa od zera. Dla wiru punkowego średnica ta równa się zeru.

1.2. CEL I ZAKRES PRACY

Celem pracy jest zastosowanie metod dyskretnych wirów do modelowania niestabilności Rayleigha-Taylor (R-T) i modelowania przepływu w kanałach o złożonej geometrii. Dla niestabilności Rayleigha-Taylor przeprowadzono badania dla powierzchni nieograniczonej, okresowej jak również dla pęcherzyka dwuwymiarowego, poruszającego się w polu grawitacyjnym. Badanie niestabilności R-T, przy pewnych założeniach upraszczających, można sprowadzić do zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej. Dzięki temu mamy możliwość numerycznego rozwiązywania zagadnienia w sposób bardzo dokładny. Przyjęte jednak założenia upraszczające odnoszące się do ruchu i własności płynów powodują, że zagadnienie początkowe dla warstwy wirowej jest źle uwarunkowane. Rozumie się przez to fakt, że mimo analitycznego warunku początkowego rozwiązania w skończonym czasie tracą regularność.

Głównymi osiągnięciami autora pracy w modelowaniu nieograniczonej, dwuwymiarowej powierzchni podlegającej niestabilności R-T są:

1) wykazanie przez eksperyment numeryczny, że na rozwiązaniach dla zagadnienia R-T powstają osobliwości. Dokonano tego włączając do modelu efekt napięcia powierzchniowego w charakterze filtra tłumiącego wzrost zaburzeń, które mają swoje źródło w skończonej reprezentacji liczb w maszynie cyfrowej. Umożliwiło to prześledzenie formowania się osobliwości w rozwiązaniach. Fakt ten wymusza konieczności regularyzacji zagadnienia początkowego. Przedstawiono rozwiązania dla równań zregularizowanych. Regularyzacji równań dokonano wprowadzając do równań wyrażających prędkość indukowaną przez warstwę wirową parametru δ , który usuwał z wyrażeń podcałkowych osobliwości.

2) Pokazanie na przykładzie ewolucji pęcherzyka cylindrycznego „lepkościowego” charakteru regularyzacji za pomocą parametru δ .

3) Zbadanie ruchu i deformacji pęcherzyka eliptycznego poruszającego się w polu grawitacyjnym. Pokazano, że z objętości pęcherzyka wysnuwa się „nić”. Końcowa forma pęcherzyka, jak również ewolucja „nici”, jej zakończenie oraz kształt, zależą od warunków początkowych i wartości parametru δ . Obecność „nici” podczas jego ewolucji w polu grawitacyjnym potwierdzają obserwacje eksperymentalne.

Głównym celem modelowania przepływu w kanałach metodą kropeł wirowych było stworzenie uniwersalnego programu, który umożliwiałby w łatwy sposób zadawanie geometrii obszaru przepływu oraz zbadanie własności numerycznych samej metody. Dotychczas metoda kropeł wirowych była stosowana najczęściej w sytuacjach, w których stosunkowo łatwo było wyznaczyć pomocnicze, potencjalne pole przepływu. Jest ono potrzebne do realizacji warunku brzegowego dla składowej normalnej pola prędkości na ścianie stałej. W obecnej pracy do wyznaczenia tego pomocniczego, potencjalnego pola przepływu wykorzystano szybkie algory-

tmy rozwiązywania równania Poissona w połączeniu z tzw. techniką macierzy pojemnościowej. Umożliwiło to modelowanie przepływów dla przypadków mających znaczenie dla praktyki inżynierskiej. Program przetestowano na przykładzie przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem. Obliczenia wykonano w szerokim zakresie liczb Reynoldsa (od 50 do 10000). Rozwiązania porównano z danymi eksperymentalnymi dostępnymi w literaturze. Przedstawiono również przykładowe rozwiązania opływu płaskiej nieskończonej cienkiej płytki ustawionej prostopadle do przepływu.

Układ pracy jest następujący: w rozdziale 2 zostały podane podstawy matematyczne kinematyki ruchu wirowego. Wprowadzono pojęcia, które wykorzystywane są w metodach dyskretnych wirów oraz podano podstawowe wzory i schematy numeryczne. W rozdziale 3 podano równania ruchu cieczy lepkiej w zmiennych Eulera i ich odpowiedniki w zmiennych Lagrange'a. Opisano algorytm dekompozycji lepkościowej, na którym opiera się metoda kropel wirowych. Omówiono algorytm do szybkiego sumowania, wzajemnego oddziaływania wirów. W rozdziale 4 wprowadzono równania wykorzystywane do modelowania niestabilności Rayleigha–Taylora. Opisano algorytm rozwiązywania równań i zaprezentowano wyniki numeryczne, odnoszące się do niestabilności Rayleigha–Taylora. W rozdziale 5 przedstawiono badania numeryczne dotyczące ruchu pęcherzyka w polu grawitacyjnym. W rozdziale 6 opisano wyniki badań numerycznych przepływu cieczy lepkiej w kanale z gwałtownym rozszerzeniem. Krótko omówiono algorytm do szybkiego rozwiązywania równania Poissona w obszarach o złożonej geometrii i podano przykłady jego zastosowania. Dalej przedstawiono wyniki badań numerycznych dla metody kropel wirowych. Wyniki porównano z danymi eksperymentalnymi. W rozdziale 7 zamieszczono pewne uwagi końcowe odnoszące się do perspektywy rozwoju metod wirowych i dokonano podsumowania otrzymanych wyników.

2. PODSTAWOWE RÓWNANIA MATEMATYCZNE KINEMATYKI RUCHU WIROWEGO

Przytoczymy tu pewne twierdzenia i wzory leżące u podstaw metod dyskretnych wirów, odnoszące się do kinematyki ruchu. Najpierw jednak wprowadzimy pewne użyteczne pojęcia i definicje stosowane w metodach wirowych.

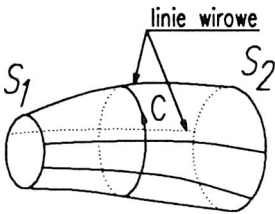
2.1. POJĘCIA WSTĘPNE

W obecnej pracy będziemy posługiwali się kartezjańskim układem współrzędnych, w którym punkt będziemy oznaczać jako (x_1, x_2, x_3) lub zamiennie (x, y, z) . Wirowość pola prędkości $\mathbf{u}(x_1, x_2, x_3)$ w kartezjańskim układzie współrzędnych określa się jako pole wektorowe $\boldsymbol{\omega}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \text{rot } \mathbf{u}$, którego składowe wylicza się następująco:

$$\omega_1 = \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3}, \quad \omega_2 = \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \quad \omega_3 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \quad (2.1)$$

Linia wirową nazywamy krzywą, która w każdym swym punkcie jest styczna do pola wirowości, a *ruką wirową* – powierzchnię utworzoną przez rodzinę linii wirowych przechodzących przez zamkniętą, redukowalną (dającą się ściągnąć do punktu w sposób ciągły) krzywą C . *Intensywnością rurki wirowej* będziemy nazywali strumień wirowości przechodzący przez poprzeczny przekrój rurki. Strumień ten, na mocy tw. Stokesa, równy jest *cyrkulacji prędkości* wzdłuż krzywej obejmującej rurkę (rys.2.1):

$$\Gamma = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} \quad (2.2)$$



Rys. 2.1. Rurka wirowa
Fig. 2.1. Vortex tube

Dalej będziemy posługiwali się również takimi pojęciami jak: *nić wirowa*, *wir punktowy*, *warstwa wirowa*, które to pojęcia zostaną określone poniżej. Najpierw jednak przytoczymy jedno z ważniejszych twierdzeń rachunku wektorowego, zwane niekiedy fundamentalnym twierdzeniem rachunku wektorowego [180]. Przy okazji zostaną wyprowadzone pewne użyteczne dla metody wirów wzory obliczeniowe.

2.2. TWIERDZENIE O ROZKŁADZIE POLA WEKTOROWEGO

Twierdzenie o rozkładzie podkreśla szczególną rolę wirowości w kinematycznym opisie ruchu, a tym samym rolę jaką odgrywa w mechanice płynów.

Twierdzenie 2.1 [180]. Dowolne, ciągłe pole wektorowe \mathbf{v} , zadane w całej przestrzeni i przyjmujące w nieskończoności wraz ze swoimi pierwszymi

pochoďnymi wartością zero, można przedstawić w postaci sumy dwóch pól wektorowych: pola bezźródłowego \mathbf{v}_1 ($\text{div } \mathbf{v}_1 = 0$) i bezwirowego \mathbf{v}_2 ($\text{rot } \mathbf{v}_2 = 0$):

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \quad (2.3)$$

przy czym $\text{div } \mathbf{v} = \text{div } \mathbf{v}_2$, $\text{rot } \mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{v}_1$.

Jeżeli ciecz jest nieściśliwa ($\text{div } \mathbf{v} = 0$), to wkład do pola prędkości pochodzi tylko od rozkładu wirowości. W monografiach poświęconych mechanice płynów [23, 95, 172, 180] twierdzenie 2.1 formułowane jest jako zadanie: wyznaczyć pole prędkości, gdy znana jest jego wirowość i dywergencja. Rozwiązując to zadanie prezentuje się jednocześnie dowód twierdzenia 2.1. Poniżej przedstawimy konstrukcję pola prędkości na podstawie zadanego rozkładu pola wirowości.

Warunek nieściśliwości cieczy $\text{div } \mathbf{v} = 0$ będzie spełniony automatycznie dla pewnego pola wektorowego \mathbf{B} takiego, że:

$$\mathbf{v} = \text{rot } \mathbf{B} \quad (2.4)$$

Pole wektorowe \mathbf{B} nazywane jest potencjałem wektorowym. Potencjał wektorowy \mathbf{B} określa pole prędkości z dokładnością do pewnego pola potencjalnego $\text{grad } \varphi'$, czyli $\mathbf{B}_1 = \mathbf{B} + \text{grad } \varphi'$ też spełnia równanie (2.4). Dlatego dla pola \mathbf{B} przyjmuje się dodatkowo warunek, że $\text{div } \mathbf{B} = 0$. Ponieważ $\text{rot } \mathbf{v} = \omega$, a więc

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \omega \quad (2.5)$$

Równanie (2.5) można przekształcić, korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\text{rot rot } \mathbf{B} = \text{grad div } \mathbf{B} - \Delta \mathbf{B} \quad (2.6)$$

gdzie $\Delta \mathbf{B}$ oznacza wektor o składowych ($\Delta B_1, \Delta B_2, \Delta B_3$), a Δ jest operatorem Laplace'a, do postaci :

$$\Delta B_i = -\omega_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.7)$$

Rozwiązanie równania (2.7) można wyznaczyć korzystając ze wzorów Greena i rozwiązania fundamentalnego (funkcji Greena) dla równania Laplace'a [67, 180]. Rozwiązania równań (2.7) mają postać:

$$B_i = \int G(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \omega_i(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (2.8)$$

Funkcja Greena (rozwiązanie fundamentalne) dla równania Laplace'a w przestrzeni trójwymiarowej ma postać:

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}) = \frac{1}{r}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \quad (2.9)$$

A więc na mocy związków (2.8) i (2.9) rozwiązanie równań (2.7) ma postać:

$$A_i(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\omega_i(x'_1, x'_2, x'_3)}{r} dx', \quad i=1,2,3, \quad dx' = dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (2.10)$$

Pole prędkości wyznaczamy ze wzoru:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int_{R^3} \frac{\boldsymbol{\omega}}{r} dx' \quad (2.11)$$

Korzystając z tożsamości wektorowej:

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{r} \boldsymbol{\omega} \right) = \frac{1}{r} \operatorname{rot} \boldsymbol{\omega} + \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \times \boldsymbol{\omega}$$

oraz z faktu, że

$$\operatorname{grad}_x \left(\frac{1}{r} \right) = -\operatorname{grad}_{x'} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

wzór (3.11), po przecałkowaniu przez części (wirowość w nieskończoności jest równa zero) można przekształcić do postaci [172]:

$$\mathbf{v} = \frac{1}{4\pi} \int_{R^3} \frac{\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}}{r^3} dx' \quad (2.12)$$

Wzór (3.12) posłuży nam w następnym podrozdziale do wyznaczenia pola prędkości nici wirowej, a następnie wiru punktowego, które są podstawowymi nośnikami wirowości używanymi w metodach dyskretnych wirów.

2.3. POLE PRĘDKOŚCI NICI WIROWEJ

Nić wirowa stanowi pewien wyidealizowany twór utworzony z rurki wirowej. Gdy przekrój poprzeczny rurki będziemy zmniejszać do zera w ten sposób, że jednocześnie jej intensywność (strumień) będzie dążyła do nieskończoności tak, aby iloczyn pola przekroju i intensywności dążył do skończonej granicy Γ , to w granicy otrzymamy *nić wirową* o intensywności Γ . Gdy zastąpimy element objętości dx' iloczynem pola przekroju poprzecznego rurki σ i elementu długości łuku ds' , a więc $dx' = \sigma ds'$, $ds = (dx_1, dx_2, dx_3)$ składowe wektora wirowości można wyrazić następująco:

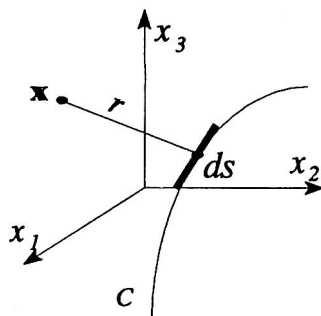
$$\omega_i = |\omega| \frac{\partial x_i}{\partial s}$$

A więc $\omega_i dx' = |\omega| \sigma (\partial x_i / \partial s) ds = \Gamma (\partial x_i / \partial s) ds$ i równanie (2.12) można przekształcić do postaci:

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_C \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.13)$$

Biblioteka
Pol. Wrocław.

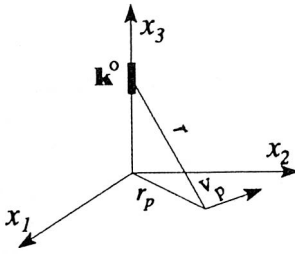
Wzór (2.13) opisuje pole prędkości indukowanej przez nić wirową o intensywności Γ (rys. 2.2). Istnieje pełna analogia pomiędzy wzorem (2.13) a znanym wzorem w elektrodynamice, opisującym indukcję magnetyczną wytworzoną przez przewodnik przewodzący prąd o natężeniu (intensywności) Γ w punkcie \mathbf{x} . Wzór ten nosi nazwę **prawa Biota-Savarta** i dalej w obecnej pracy wzór (2.13) będzie nazywany **wzorem Biota-Savarta**. Wzór (2.13) jest podstawowym wzorem używanym w metodach wirowych w przestrzeni trójwymiarowej [126].



Rys. 2.2. Nić wirowa
Fig.2.2. Vortex filament

2.4. WIR PUNKTOWY

Już dla stosunkowo nieskomplikowanej geometrii nici wirowej (np. nić wirowa w kształcie okręgu) wzór (2.13) prowadzi do skomplikowanych wzorów i obliczeń [95]. Te ostatnie upraszczają się zdecydowanie w przypadku nici wirowej prostoliniowej (można ją uważać za okrąg o nieskończenie wielkim promieniu).



Rys. 2.3. Prędkość indukowana przez prostoliniową nici wirową
Fig. 2.3. Velocity induced by a straight vortex line

Jeżeli przyjmiemy, że nici wirowa pokrywa się z osią x_3 prostokątnego układu współrzędnych, to ze wzoru Biota-Savarta (2.13) otrzymujemy (rys.2.3):

$$\mathbf{v} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{k}^0 \times \mathbf{r}}{r^3} dx_3 \quad (2.14)$$

gdzie \mathbf{k}^0 jest wektorem jednostkowym skierowanym wzdłuż osi x_3 . Wektor prędkości \mathbf{v} leży w płaszczyźnie poziomej (x_1, x_2) (rys. 2.3). Moduł wektora prędkości indukowanego przez całą prostoliniową nici wirową wyraża się całką:

$$|\mathbf{v}| = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{r_p^2 + x_3^2} dx_3, \quad r_p = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \quad (2.15)$$

gdzie α jest kątem zawartym pomiędzy wektorem \mathbf{k}^0 a promieniem \mathbf{r} , r_p jest odległością punktu M na płaszczyźnie (x_1, x_2) od osi x_3 (nici wirowej). Całkę we wzorze (2.15) można obliczyć dokonując np. podstawienia $x_3/r_p = -\text{ctg}\alpha$. Otrzymujemy wówczas:

$$|\mathbf{v}| = \frac{\Gamma}{2\pi r_p} \quad (2.16)$$

Rzuty wektora $\mathbf{v} = (u, v)$ na osie x_1, x_2 lub inaczej osie x, y mają postać:

$$u = -\frac{\Gamma}{2\pi} \frac{y}{r_p}, \quad v = \frac{\Gamma}{2\pi} \frac{x}{r_p} \quad (2.17)$$

Składowe prędkości (u, v) nie zależą od współrzędnej x_3 i dla wszystkich płaszczyzn równoległych do płaszczyzny $x_3 = \text{const}$ są takie same. Dlatego wystarczy rozpatrywać ruch tylko w jednej płaszczyźnie (x, y), a w miejsce całej nici wirowej rozpatrywać tylko punkt przecięcia się płaszczyzny Oxy z nicią wirową. Ten punkt właśnie nazywa się *wirem punktowym*.

Wzory (2.17) można uzyskać również inną, nieco krótszą drogą. Jeżeli przyjmujemy na początku, że ruch cieczy jest dwuwymiarowy, to łatwo sprawdzić (wzory

(2.1)), że wektor wirowości, jak również potencjał wektorowy \mathbf{A} , ma tylko jedną składową różną od zera $\omega=(0,0,\omega_3)$, $\mathbf{B}=(0,0,\psi)$. Składową ψ zwykle nazywa się funkcją prądu. Równania (2.7) sprowadzają się do jednego równania postaci:

$$\Delta \psi = -\omega \quad (2.18)$$

gdzie $\omega=\omega_3$. Dla płaszczyzny funkcja $G(x,y)$ jest równa:

$$G(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \ln r, \quad (2.19)$$

a więc rozwiązanie równania (2.18) ma postać:

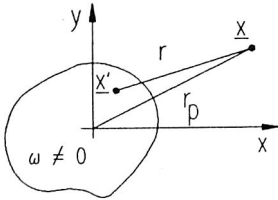
$$\psi(x,y) = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \omega(x',y') \ln r dx' dy' \quad (2.20)$$

Składowe pola prędkości $\mathbf{v}=\text{rot } \mathbf{B}$ (wzór (2.4)) wyrażają się jako:

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\omega(x',y')(y' - y)}{r^2} dx' dy' \\ v(x,y) &= -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \frac{\omega(x',y')(x' - x)}{r^2} dx' dy' \end{aligned} \quad (2.21)$$

Założmy, że wirowość ω jest różna od zera i ograniczona w pewnym obszarze D wokół początku układu współrzędnych (rys. 2.4). Wtedy wzór (2.20) dla punktów leżących daleko od początku układu współrzędnych ($r_p \rightarrow \infty$), mnożąc i dzieląc pod logarytmem przez r_p , można przekształcić następująco [23]:

$$\begin{aligned} \psi(x,y) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{R^2} \omega(x',y') \ln(r r_p r_p^{-1}) dx' dy' = \\ &= \frac{1}{2\pi} \ln r_p \int_{R^2} \omega(x',y') dx' dy' \Big|_{r_p \rightarrow \infty} + O(r_p^{-1}) \end{aligned} \quad (2.22)$$



Rys. 2.4. Ograniczony obszar o niezerowej wirowości

Fig. 2.4. Bounded domain of non-zero vorticity

Ze wzoru (2.22) wynika, że funkcja prądu z dokładnością do $O(r_p^{-1})$ zachowuje się tak jakby cała wirowość była skupiona w początku układu współrzędnych, a więc była generowana przez wir punktowy o intensywności

$$\Gamma = \int_D \omega(x', y') dx dy \quad (2.23)$$

Funkcja prądu dla pojedynczego wiru punktowego o intensywności Γ , leżącego w początku układu współrzędnych, ma postać (rozwiązanie

fundamentalne równania (2.18)[67]):

$$\psi = -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r \quad (2.24)$$

a jego prędkość $\mathbf{u}=(u, v)$ dana jest wzorami (2.17).

Przejdźcie do przypadku dwuwymiarowego przez całkowanie nici wirowej prostoliniowej uzmysławia dobitnie fakt, że wir punktowy jest w zasadzie nicią wirową w przestrzeni trójwymiarowej i tylko ze względu na swój kształt pozwala na uproszczenie obliczeń. Należy pamiętać, że ponieważ wirowość jest polem wektorowym bezźródłowym, nie wirowa musi być linią zamkniętą albo rozciągać się do nieskończoności (tw. Helmholtza [45, 95]).

Na podstawie wzorów (2.17) i (2.24) możemy stwierdzić, że pod wpływem wiru punktowego cząstki cieczy poruszają się po okręgach, w środku których znajduje się wir. Gdy $r \rightarrow 0$ prędkość wirowania cieczy dąży do nieskończoności. Mówi się, że wir punktowy ma osobliwość w punkcie swojego położenia. Ze względu na symetrię indukowanego pola prędkości, pojedynczy wir nie może samodzielnie się przemieszczać. Ruch punktów wirowych na płaszczyźnie wygodnie jest przedstawić za pomocą zmiennej zespolonej $z = x + iy$. Prędkością zespoloną będziemy nazywali wyrażenie:

$$\mathbf{q}^* = u - iv \quad (2.25)$$

Prędkość zespoloną indukowaną przez wir punktowy umieszczony w punkcie $z_0 = x_0 + iy_0$ przedstawiamy za pomocą wzoru:

$$q^* = \frac{\Gamma}{2\pi i} \frac{1}{z - z_0} \quad (2.26)$$

Pole prędkości indukowane przez wir punktowy jest polem potencjalnym. Potencjał zespolony $W = \Phi + i\Psi$ ($q^* = dW/dz$) ma postać:

$$W(z) = \frac{\Gamma}{2\pi i} \ln(z - z_0) \quad (2.27)$$

Część rzeczywista potencjału zespolonego wyraża potencjał rzeczywisty, a część urojona jest funkcją prądu. Potencjał zespolony układu n wirów na płaszczyźnie jest sumą potencjałów poszczególnych wirów, a równania opisujące ruch n wirów punktowych mają postać:

$$\frac{dz_i^*}{dt} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{\Gamma_j}{z_i - z_j} \quad (2.28)$$

Badanie dynamiki wirów punktowych jest przedmiotem intensywnych i rozległych badań. Układ równań różniczkowych (2.28) można sprowadzić do tzw. układu hamiltonowskiego. Funkcja Hamiltona nazywana „kinetyczną energią oddziaływań” ma postać [45, 95, 10]:

$$H = -\frac{1}{4\pi} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^n \Gamma_i \Gamma_j \ln |z_i - z_j| \quad (2.29)$$

Układ równań (2.28) można zapisać w postaci dynamicznego układu hamiltonowskiego [45, 10]:

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}, \quad \frac{dq_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \quad (2.30)$$

gdzie H wyraża się wzorem (2.29), a $q_i = |\Gamma_i|^{1/2} x_i \operatorname{sgn}(\Gamma_i)$, $p_i = |\Gamma_i|^{1/2} y_i$.

Zagadnienia, które są przedmiotem badań, to całkowalność układu równań (2.30) w zależności od liczby wirów N_* oraz od obszaru, w którym wiry poruszają

się. W swobodnej przestrzeni (bez ścianek sztywnych) układ równań jest całkowny dla $N \leq 3$ [10], natomiast już dla $N_* = 4$ jest układem niecałkownym [10]. W przestrzeni fazowej układu (2.30) stwierdzono obecność dziwnego atraktora [12], który wiąże się ze zjawiskiem nazywanym „deterministycznym chaosem”. Doskonałym wprowadzeniem do zagadnień dynamiki wirów punktowych są prace [9, 10, 12].

2.5. WARSTWA WIROWA - MODELOWANIE NUMERYCZNE

Rozpatrzmy przypadek, gdy wiry punktowe są rozłożone w sposób ciągły wzdłuż pewnej zamkniętej lub nieskończonej krzywej L . Wtedy odpowiednikiem równania (2.28) jest wzór:

$$q^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{d\Gamma(s)}{z - z_o(s)} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(s)}{z - z_o(s)} ds \quad (2.31)$$

gdzie $\gamma(s) = d\Gamma/ds$, s - długość łuku krzywej mierzonej od pewnego ustalonego punktu będziemy nazywali intensywnością warstwy wirowej, a samą krzywą L - warstwą wirową. Całka po prawej stronie wzoru (2.31) nazywana jest w analizie zmiennej zespolonej całką typu Cauchy'ego [66]. Wzór (2.31) określa, przy odpowiednich wymaganiach odnośnie do gładkości funkcji $\gamma(s)$, funkcję analityczną w całej płaszczyźnie zespolonej, z wyjątkiem jednak samej krzywej L , która jest linią osobliwości dla funkcji q^* . Jeżeli punkt z leży na krzywej L , wtedy całka we wzorze (2.31) jest osobliwa i należy ją liczyć w sensie wartości głównej Cauchy'ego [65, 193]. W analizie zespolonej dowodzi się, że wzór (2.31) określa dwie funkcje ciągłe po obu stronach krzywej L , które będziemy oznaczać q_1 i q_2 , a ich wartości graniczne na krzywej przez q_1^+ i q_2^- . Istnieje związek między wartością główną całki q^* a wartościami granicznymi w postaci wzorów Sochockiego-Plemelja [66]:

$$\frac{q_1^+ + q_2^-}{2} = q^* \quad (2.32)$$

$$q_1^+ - q_2^- = -\gamma(z) \left(\frac{dz}{ds} \right)^{-1}$$

W praktyce przedstawiony model warstwy wirowej wykorzystuje się do modelowania tzw. przepływów ze ścinaniem. Przepływ redukuje się do nieskończonej cienkiej powierzchni, na której następuje skok prędkości. Jednym z najstarszych

historycznie przykładów modelowania przepływu za pomocą warstwy wirowej jest zagadnienie niestabilności Kelvina-Helmholtza odnoszące się do niestabilności powierzchni rozgraniczającej dwa strumienie płynu o tej samej gęstości i przeciwnych prędkościach U (rys.2.5). Intensywność warstwy wirowej wynosi:

$$\gamma(s) = 2U \quad (2.33)$$

Tak długo jak warstwa jest pozioma, wypadkowa pola prędkości w dowolnym punkcie warstwy jest równa zero. Wprowadzenie jednak do położenia warstwy nieskończenie małego zaburzenia powoduje eksponencyjny wzrost tego zaburzenia. Pierwszym uczonym, który badał nieliniową ewolucję zaburzonej warstwy wirowej za pomocą metody dyskretnych wirów był Rosenhead [160]. Przyjął on, że zarówno warstwa wirowa, jak i zaburzenie są okresowe o okresie λ . Warstwę wirową o długości λ zastąpił N wirami punktowymi o intensywnościach $2U\lambda/N$. Dla okresowej warstwy wirowej wzór (2.31) przyjmuje postać:

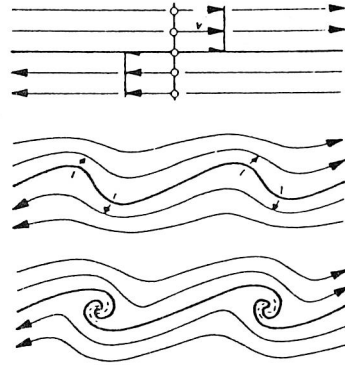
$$\mathbf{q}^*(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \gamma(s) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{z - z_o + n\lambda} ds \quad (2.34)$$

Sumę występującą pod znakiem całki można obliczyć (patrz przykład zastosowania twierdzenia Mittag-Lefflera [125]) i wynosi ona

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \frac{1}{z - z_o + n\lambda} = \frac{\pi}{\lambda} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} (z - z_o) \quad (2.35)$$

Prędkość indukowana przez okresową warstwę wirową o okresie λ wyraża się więc wzorem:

$$\mathbf{q}^*(z) = \frac{1}{2\lambda i} \int_L \gamma(s) \operatorname{ctg} \frac{\pi}{\lambda} (z - z_o) ds \quad (2.36)$$



Rys.2.5. Schemat niestabilności Kelvina-Helmholtza
Fig. 2.5. Schematic draw of Kelvin-Helmholtz instability

Równanie (2.36) można sprowadzić do bardzo wygodnej, z punktu widzenia całkowania numerycznego, postaci równania Rotta–Birkhoffa [32, 141, 193]. A mianowicie, ze względu na wyżej wymienione założenia, cyrkulacja zawarta między dwoma dowolnymi punktami jest niezmiennikiem ruchu i może być wykorzystana jako zmienna Lagrange’a. W całce (2.36) można dokonać zamiany zmiennej wprowadzając:

$$\zeta(s) = \int_0^s \gamma(s) ds \quad (2.37)$$

gdzie ζ wyraża sumaryczną cyrkulację pomiędzy punktem $s=0$ a dowolnym punktem $s \leq \lambda$. Niech ζ_0 oznacza całkowitą cyrkulację zawartą w jednym okresie. Krzywą L można zapisać parametrycznie jako $x=X(\zeta, t)$, $y=Y(\zeta, t)$, a równanie (2.36) przyjmuje postać:

$$q^* = \frac{\partial z^*}{\partial t} = \frac{1}{2\pi i} P \int_0^{\zeta_0} \operatorname{ctg} \frac{z(\zeta, t) - z_0(\zeta, t)}{\lambda} d\zeta \quad (2.38)$$

gdzie litera P przy całce oznacza wartość główną całki w sensie Cauchy’ego, ponieważ dla punktów z leżących na warstwie wirowej wyrażenie podcałkowe jest osobliwe. Równanie (2.38) nosi nazwę równania Rotta–Birkhoffa. Dalej w pracy przyjęto, że $\lambda=1$.

Najprostsze podejście w modelowaniu ruchu warstwy wirowej polega więc na zastąpieniu ciągłej warstwy wirowej układem wirów punktowych odpowiadającemu równomiernemu podziałowi zmiennej ζ , $\zeta_j = (j-1) \Delta \zeta$, $j=1, \dots, N$, gdzie $N=1/\Delta \zeta$ jest liczbą wirów przypadających na jedną długość fali. Całka w równaniu (2.38) aproksymowana jest wzorem trapezów i w ten sposób równanie ewolucji (2.38) zostaje zastąpione układem równań różniczkowych zwyczajnych, opisujących trajektorie wirów punktowych:

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{2iN} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \operatorname{ctg} \pi(z_j - z_k) \quad (2.39)$$

z warunkiem początkowym $z(\zeta, 0) = \Gamma + p(\zeta, 0)$, gdzie $p(\zeta, 0)$ jest początkowym zaburzeniem.

Rosenhead [160] w swoich obliczeniach używał niewielkiej liczby wirów ($N=4, 8, 12$), przyjmując początkowe zaburzenie w postaci $p=i0,1 \sin 2\pi x$. Za każdym razem otrzymywał wyniki świadczące o zwijaniu się warstwy (rys.2.5). Jego wyniki

były tak przekonujące, że nie budziły wątpliwości przez ponad trzydzieści lat.

W 1959 Birkhoff i Fiszer [33] powtórzyli obliczenia Rosenheada wprowadzając do obliczeń większą liczbę wirów ($N=32$) i stosując lepszy algorytm rozwiązywania równań różniczkowych (w miejsce metody Eulera zastosowali metodę Runge'go-Kutty rzędu czwartego). Wyniki świadczyły ewidentnie o braku zbieżności metody wirów. Bardzo szybko, w miejsce gładko zwijającej się warstwy otrzymali chaotyczne położenia wirów. Odwołując się w swojej argumentacji do zachowania się niezmienników ruchu układu hamiltonowskiego, zakwestionowali ważność modelowania warstwy wirowej układem wirów punktowych. Birkhoff wysunął również hipotezę [32], że prawdopodobnie zagadnienie początkowe dla warstwy wirowej jest zagadnieniem źle uwarunkowanym [42, 136]. Rozumie się przez to fakt, że mimo analitycznego warunku początkowego, rozwiązania w skończonym czasie tracą swoją regularność.

Za faktem złego uwarunkowania zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej przemawia postać związku między współczynnikiem wzmocnienia a długością fali zaburzającej, wyprowadzanego w ramach liniowej teorii stabilności [59] (im krótsza fala, tym współczynnik wzmocnienia większy). Jest to cecha rozpoznawcza źle postawionych (uwarunkowanych) zagadnień, ale nie rozstrzyga ona ostatecznie czy pełne nieliniowe równanie jest również w sensie opisanym powyżej źle uwarunkowane.

W roku 1965 (praca opublikowana jednak dopiero 1980 [193]) Van de Vooren poprawił dokładność wzoru (2.39) na obliczanie wartości głównej całki (2.38) w sensie Cauchy'ego. Dokonał tego, usuwając z wyrażenia podcałkowego osobliwość przez dodanie funkcji, dla której znana jest wartość główna (w tym przypadku jest ona równa zero). Wzór metody trapezów (2.39) uległ nieznacznej zmianie. Poza sumą pojawił się dodatkowy składnik [16, 141]:

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{2iN} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^N \operatorname{ctg} \pi(z_j - z_k) + \frac{1}{4\pi iN} \left(\frac{z_{\zeta\zeta}}{z_\zeta^2} \right)_{\zeta=z_j} \quad (2.40)$$

gdzie z_ζ i $z_{\zeta\zeta}$ oznaczają pierwszą i drugą pochodną po zmiennej ζ .

Pomimo dokładniejszej formuły na obliczanie wartości głównej całki, Van de Vooren również otrzymał chaotyczny ruch wirów. Fakt ten przypisał błędowi zaokrągleń, które wynikają ze skończonej reprezentacji liczb w komputerze.

Wzór (2.40) ma tę niedogodność, że wymaga obliczania numerycznego pierwszej i drugiej pochodnej (składnik poza sumą). Dokonując pewnych prostych przekształceń [86, 179], ze wzoru (2.40) można wyeliminować ten dodatkowy składnik. Suma we wzorze (2.40) zamienia się na sumę po naprzemiennym układzie punktów:

$$\frac{dz_j^*}{dt} = \frac{1}{iN} \sum_{\substack{k=0 \\ k+j=\text{liczby nieparzyste}}}^N \text{ctg } \pi(z_j - z_k) \quad (2.41)$$

Wzór (2.41) jest wzorem spektralnie dokładnym [179]. O wzorach numerycznego obliczania całek mówi się, że są spektralnie dokładne, jeżeli błąd całkowania numerycznego określa maksymalny rząd pochodnej funkcji podcałkowej. Jeżeli funkcja podcałkowa jest analityczna, to błąd numerycznego całkowania jest równy zero. Dokładność spektralna wzoru (2.41.) wynika z rozwinięcia Eulera--Maclaurina [183, 198] oraz z faktu, że w tym przypadku funkcja podcałkowa jest okresowa.

Oprócz podniesienia dokładności wzorów obliczeniowych jak to przedstawiono powyżej, w literaturze można spotkać wiele innych sposobów, które miały za zadanie eliminację lub ograniczenie chaotycznego ruchu wirów. Można tu wymienić: metodę kropel wirowych [46] (w miejsce wiru punktowego używany jest w obliczeniach element wirowy z usuniętą osobliwością, nazywany kroplą wirową), metodę liniowego wygładzania [131] (co kilka kroków czasowych położenie każdego wiru punktowego jest korygowane odpowiednią kombinacją liniową położzeń wirów sąsiednich) oraz metodę równomiernej redystrybucji położzeń wirów wzdłuż warstwy [62, 63, 141]. Położenie wirów na warstwie w trakcie ewolucji przestaje być równomierne i to uważano za przyczynę dodatkowych błędów numerycznych przyczyniających się do chaotycznego ruchu wirów [62]. Dlatego co kilka kroków czasowych należało korygować położenie wirów, tak aby odległość pomiędzy nimi pozostawała taka sama. Moore [141] wykazał, iż rzeczywiście metody redystrybucji i wygładzania liniowego tłumią najbardziej niestabilne fale zaburzające i powodują opóźnienie powstawania ruchu chaotycznego, jednak nie zapobiegają mu całkowicie (patrz również [16]).

Badania analityczno-numeryczne potwierdziły hipotezę o źle postawionym zagadnieniu początkowym dla warstwy wirowej [20, 136, 140]. W skończonym czasie t_c warstwa wirowa przyjmuje osobliwość w postaci ostrza, tzn. punktu, w którym krzywizna zmienia się od plus do minus nieskończoności. W pracy [100] Krasny, zastosował odpowiednią technikę filtracyjną, mającą za zadanie ograniczenie wzrostu zaburzeń numerycznych, pokazał formowanie się osobliwości na warstwie wirowej. Powstawanie osobliwości jest przyczyną powstawania, nieuporządkowanego, chaotycznego ruchu wirów.

2.5.1. REGULARYZACJA RÓWNAŃ WARSTWY WIROWEJ

Jak już wspomniano, fakt pojawiania się osobliwości w rozwiązaniu zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej wynika z przyjętych idealizacji (grubość

warstwy równa zero, brak lepkości cieczy). Konsekwencją tego jest postać związku dyspersyjnego pomiędzy współczynnikiem wzmocnienia amplitudy a długością fali zaburzającej: im krótsza fala zaburzająca, tym większa wartość współczynnika wzmocnienia. Przez regularyzację zagadnienia początkowego rozumie się zmianę tego niekorzystnego związku dyspersyjnego. Jednym ze sposobów regularyzacji zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej było włączenie do równań ruchu skończonej długości warstwy [143]. Sposób ten, ze względu na modyfikację równań, okazał się mało przydatny w obliczeniach [141].

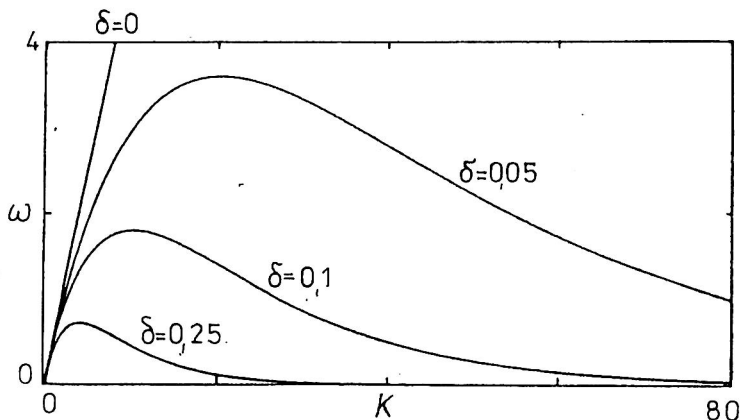
Wprowadzenie do równań ruchu efektu napięcia powierzchniowego, stabilizuje zagadnienie w tzw. małej skali [118, 190] i nie zapobiega powstawaniu osobliwości. W niniejszej pracy wykorzystano napięcie powierzchniowe do wytłumienia najkrótszych fal zaburzających, których źródłem jest skończona reprezentacja liczb rzeczywistych w komputerze. Umożliwiło to obserwację formowania się osobliwości w warstwie wirowej dla zagadnienia Rayleigha–Taylor (patrz rozdział 4).

Interesującym sposobem regularyzacji zagadnienia początkowego była proponowana przez Krasnego [98] regularyzacja typu kropki wirowej (przez analogię do metody kropel wirowych Chorina [42, 46]). Polega ona na modyfikacji równań opisujących prędkość indukowaną przez warstwę wirową (patrz (2.38)) przez wprowadzenie do mianownika funkcji podcałkowej parametru δ^2 . W ten sposób całka niewłaściwa, którą należało liczyć w sensie wartości głównej, zostaje zastąpiona całką właściwą. Równania ruchu dla warstwy wirowej, rozpisane dla składowych prędkości u i v mają teraz postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sinh 2\pi(y - \bar{y})}{\cosh 2\pi(y - \bar{y}) - \cos 2\pi(x - \bar{x}) + \delta^2} d\bar{\zeta} \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\sin 2\pi(x - \bar{x})}{\cosh 2\pi(y - \bar{y}) - \cos 2\pi(x - \bar{x}) + \delta^2} d\bar{\zeta} \end{aligned} \quad (2.42)$$

Ważną konsekwencją wprowadzenia do powyższych równań parametru δ^2 jest zmiana zależności między współczynnikiem wzmocnienia ω a liczbą falową K ($K=2\pi/\lambda$), gdzie λ jest długością fali zaburzającej). Dla $\delta^2=0$ zależność ta jest wprost proporcjonalna $\omega \sim K$. Po wprowadzeniu parametru δ^2 zależność ma taki przebieg jak pokazano na rys. (2.37). Zlinearyzowane δ -równania nie mają już tej patologicznej zależności współczynnika wzmocnienia od długości fali zaburzającej: im krótsza fala tym współczynnik wzmocnienia większy. Ponadto, gdy $\delta \rightarrow 0$ przy ustalonym K , związek dyspersyjny dąży do postaci odpowiadającej zależności dla $\delta=0$. W takim sensie można mówić o aproksymacji równań z parametrem δ -równań wyjściowych (tj. dla $\delta=0$).

W ramach liniowej teorii stabilności postać zależności między współczynnikiem wzmocnienia ω a liczbą falową K taką, jak pokazano na rys. 2.6, dla zagadnienia niestabilności Rayleigha–Taylora, otrzymuje się po wprowadzeniu do rozważań lepkości cieczy [29]. Stąd też, przez analogię, można mówić o „lepkościowym” charakterze regularyzacji za pomocą parametru δ . (patrz rozdział 5).



Rys. 2.6. Zależność współczynnika wzmocnienia ω od liczby falowej K dla zlinearyzowanych równań (2.42) dla kilku wartości parametru wygładzającego δ [98]

Fig. 2.6. The dependence of the growth rate ω from the wavenumber K for the linearized equation (2.42) for several values of the smoothing parameter δ [98]

3. METODA DYSKRETYCH WIRÓW W PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ

Obliczenia numeryczne, dotyczące przepływu cieczy lepkiej w kanałach, które zaprezentowano w niniejszej pracy (rozdział 6), odnoszą się do przepływów dwuwymiarowych. Dlatego poniżej przedstawiono opis metody dyskretnych wirów w przestrzeni dwuwymiarowej. Różnica między opisem ruchu cieczy w przestrzeni dwuwymiarowej a trójwymiarowej w kontekście metod dyskretnych wirów, zostanie przedstawiona w oddzielnym podrozdziale.

Ruch cieczy lepkiej, nieściśliwej w obszarze nieograniczonym opisywany jest równaniami Naviera–Stokesa:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$$

gdzie $\mathbf{u}=(u,v)$ oznacza wektor prędkości, $\mathbf{x}=(x_1, x_2)$ -współrzędne przestrzenne, t -czas, p -ciśnienie, ν -kinematyczny współczynnik lepkości, a \mathbf{u}_0 jest zadany warunkiem początkowym. W obszarze ograniczonym ściankami sztywnymi, dodatkowo stawia się warunek przylegania cieczy do ścianek. Celowo jednak warunek ten zostanie postawiony nieco później.

Równanie (3.2) należy przekształcić do równania Helmholtza [95, 23, 45, 172]. W przestrzeni dwuwymiarowej (patrz podrozdział 2.2) wektor wirowości ma tylko jedną składową różną od zera. Równanie Helmholtza jest więc równaniem skalar-nym, opisującym zmiany w czasie składowej wektora wirowości, prostopadłej do płaszczyzny przepływu:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega = \nu \Delta \omega \quad (3.3)$$

Wirowość ω wiąże się z polem prędkości poprzez funkcję prądu ψ następująco:

$$\Delta \psi = -\omega \quad (3.5)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{rot } \psi = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \omega(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.4)$$

gdzie $\psi=(0,0,\psi)$. Jądro \mathbf{K} pod znakiem całki wyraża się wzorem:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi |\mathbf{x}|^2} \quad (3.6)$$

W granicy, gdy $\nu \rightarrow 0$, równanie (3.2) przechodzi w równanie Eulera dla cieczy nielepkiej. Metoda kropeł wirowych opiera się na algorytmie dekompozycji lepkościowej [27]: rozwiązanie otrzymuje się w dwóch krokach: najpierw rozwiązy-

wane jest równanie Eulera, a następnie równanie dyfuzji uwzględniające lepkość płynu. Algorytm, który obowiązuje zarówno dla przestrzeni dwu, jak i trójwymiarowej, można przedstawić następująco [27]: oznaczymy przez $\mathbf{E}(t)$ operator rozwiązujący równania Eulera, to znaczy $\mathbf{v}(t)=\mathbf{E}(t)\mathbf{v}_0$ oznacza rozwiązanie zagadnienia początkowego dla równania Eulera z warunkiem początkowym \mathbf{v}_0 :

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p \quad (3.7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0$$

Niech $t=\Delta t n$, gdzie n jest liczbą naturalną oznaczającą numer kroku czasowego. A więc $\mathbf{v}_1=\mathbf{E}(\Delta t)\mathbf{v}_0$ oznacza rozwiązanie w chwili $t=\Delta t$, a rozwiązanie w chwili $n\Delta t$ otrzymuje się przez n -krotne złożenie operatora $\mathbf{E}(\cdot)$, czyli $\mathbf{v}_n=(\mathbf{E}(\Delta t))^n\mathbf{v}_0$. Podobnie niech $\mathbf{H}(t)$ oznacza operator rozwiązujący równania dyfuzji i niech $\mathbf{w}(t)=\mathbf{H}(t)\mathbf{w}_0$ oznacza rozwiązanie zagadnienia:

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \nu \Delta \mathbf{w}, \quad \mathbf{w}(0) = \mathbf{w}_0 \quad (3.8)$$

Jeżeli \mathbf{w}_0 jest polem wektorowym bezdywergencyjnym, to również $\mathbf{w}(t)=\mathbf{H}(t)\mathbf{w}_0$ jest takim polem. Algorytm dekompozycji lepkościowej, na którym opiera się opisana dalej metoda kropel wirowych, polega na przybliżaniu (aproksymacji) rozwiązania równania cieczy lepkiej przez złożenie operatorów: równania dyfuzji i równania Eulera. Można to przedstawić następująco:

$$\tilde{\mathbf{u}}_n = (\mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{E}(\Delta t))^n \mathbf{u}_0 \quad (3.9)$$

gdzie $\tilde{\mathbf{u}}_n$ oznacza przybliżone rozwiązania równań Naviera–Stokesa w chwili $n\Delta t$. Wykładnik n oznacza n -krotne złożenie operatorów $\mathbf{H}(\Delta t)\mathbf{E}(\Delta t)$.

W pracy [27] Beale & Majda pokazali, że algorytm dekompozycji lepkościowej jest zbieżny w całym obszarze przepływu (bez ścianek), a szybkość zbieżności poprawia się, gdy lepkość cieczy maleje, tzn. zachodzi:

$$\max_{0 \leq n\Delta t \leq T} |\mathbf{u}(n\Delta t) - \tilde{\mathbf{u}}_n| \leq C_1 \nu \Delta t \quad (3.10)$$

Stała C_1 nie zależy od współczynnika lepkości ν , a $|\cdot|$ oznacza normę w przestrzeni Sobolewa rzędu większego od dwóch.

W metodzie wirów dyskretnych obliczenia prowadzone są w zmiennych Lagrange'a (materialnych). Poniżej przedstawiono równania ruchu cieczy w tych zmiennych.

3.1. RÓWNIANIA RUCHU CIECZY NIELEPKIEJ W ZMIENNYCH LAGRANGE'A

W przestrzeni dwuwymiarowej równanie Helmholtza dla cieczy nielepkiej przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0 \\ \frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega &= 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

Z równań (3.11) wynikają dwa podstawowe dla metody dyskretnych wirów fakty: dowolna porcja wirowości zawarta wewnątrz zamkniętej, poruszającej się wraz z cieczą krzywej jest stała oraz linie wirowe są unoszone wraz z cieczą, czyli wirowość wzdłuż trajektorii cząstki jest również stała (tw. Kelvina i Helmholtza [45, 95]).

Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ oznacza początkowe położenie infinitesimalnej cząstki cieczy. Każda cząstka w czasie ruchu podąża pewną trajektorią i po czasie t cząstka α zajmuje położenie $\mathbf{x}(\alpha, t)$. Ruch cząstki zdefiniowany jest za pomocą odwzorowania $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, takim, że $\mathbf{x} = \Phi^t(\alpha, t)$, $\Phi^0(\alpha) = \alpha$. Trajektorię cząstki otrzymuje się jako rozwiązanie równania różniczkowego:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(\alpha, 0) = \alpha \tag{3.12}$$

gdzie $\mathbf{u}(t, \Phi^t(\alpha)) = d/dt \Phi^t(\alpha)$. Fakt, że linie wirowe są unoszone wraz z cieczą, a ich wartość nie ulega zmianie, zapisać można matematycznie jako:

$$\omega(\Phi^t(\alpha, t)) = \omega(\alpha, 0) = \omega_o(\alpha) \tag{3.13}$$

Prędkość $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ w równaniu (3.12) możemy wyrazić przez rozkład wirowości za pomocą równania (3.5). Dokonując w równaniu (3.12) zamiany zmiennej przez odwzorowanie $\Phi^{-1}(\mathbf{x}) \rightarrow \alpha$ otrzymujemy równanie*

* Jakobian odwzorowania Φ jest równy jeden, ze względu na to, że ruch cieczy jest nieściśliwy.

$$\frac{d\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t)}{dt} = \int \mathbf{K}(\mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t) - \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}', t)) \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\alpha}') d\boldsymbol{\alpha}' \quad (3.14)$$

gdzie \mathbf{K} wyraża się równaniem (3.6). Równanie (3.14) stanowi dwuwymiarowy opis ruchu cieczy w zmiennych Lagrange'a.

3.1.1. RÓWNANIA RUCHU CIECZY NIELEPKIEJ W PRZESTRZENI TRÓJWYMIAROWEJ

W równaniach Helmholtza opisujących transport wirowości w przestrzeni trójwymiarowej, pojawia się dodatkowy człon $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$, który nie ma swojego odpowiednika w równaniach Helmholtza w przestrzeni dwuwymiarowej. Człon ten interpretuje się jako „rozciągania linii wirowej”. Równanie Helmholtza, opisujące transport wirowości w cieczy nielepkiej, jest teraz równaniem wektorowym postaci [45, 95]:

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \boldsymbol{\omega} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (3.15)$$

gdzie $\boldsymbol{\omega} (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$ jest wektorem wirowości (patrz wzór 2.1), który wiąże się z polem prędkości równaniami:

$$\Delta \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}) = -\boldsymbol{\omega} \quad (3.16)$$

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \text{rot } \boldsymbol{\psi} = \int_{R^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \quad (3.17)$$

gdzie $\mathbf{u}(u, v, w)$, $\boldsymbol{\psi}(\psi_1, \psi_2, \psi_3)$ jest potencjałem wektorowym (patrz podrozdz.2.2), a jądro \mathbf{K} ma postać:

$$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi |\mathbf{x}|^3} \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

W przestrzeni trójwymiarowej wektor wirowości nie zachowuje się podczas ruchu wzdłuż trajektorii, ale podlega transformacji według wzoru [45]:

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\nabla_{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{x}(\boldsymbol{\alpha}, t)) \cdot \boldsymbol{\omega}_0(\boldsymbol{\alpha}) \quad (3.19)$$

Alternatywnie do równania (3.19), ze względu na to, że $d\omega/dt = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}$ zmianę wirowości wzdłuż trajektorii cząstki opisać można jako:

$$\frac{\partial \omega(\mathbf{x}(\alpha, t), t)}{\partial t} = (\omega(\mathbf{x}(\alpha, t), t) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u} \quad (3.20)$$

Różnica między wzorami (3.19) i (3.20) jest widoczna: pierwszy z nich opisuje zmianę wirowości bezpośrednio w zależności od pochodnych przestrzennych w przestrzeni α , drugi natomiast opisuje szybkość zmian wirowości w zależności od prędkości i wirowości na trajektorii. W zależności od tego, który ze wzorów zostanie przyjęty do opisu zmian wirowości, ruch cieczy nielepkiej w zmiennych Lagrange'a opisywany będzie równaniami:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(\alpha, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{K}(\mathbf{x}(\alpha, t) - \mathbf{x}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{x}(\alpha', t), t) d\alpha' \quad (3.21)$$

$$\omega(t) = (\nabla_{\alpha} \mathbf{x}(\alpha, t)) \omega_0(\alpha)$$

$$\mathbf{x}(\alpha, 0) = \alpha$$

albo też za pomocą układu:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}(\alpha, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{K}(\mathbf{x}(\alpha, t) - \mathbf{x}(\alpha', t)) \omega(\mathbf{x}(\alpha', t), t) d\alpha' \quad (3.22)$$

$$\frac{\partial \omega(t)}{\partial t} = (\omega(\mathbf{x}(\alpha, t)) \cdot \nabla_{\mathbf{x}})\mathbf{u}$$

$$\omega(0) = \omega_0(\alpha)$$

Zależnie od tego, który układ równań: (3.21) lub (3.22) zostanie przyjęty do obliczeń i poddany dyskretyzacji można mówić o różnych wariantach metody kropel wirowych w trzech wymiarach [5, 126]. Opis metody kropel wirowych dla przestrzeni trójwymiarowej znaleźć można w pracach [5, 24, 25, 44, 126].

3.2. APROKSYMACJA RÓWNAŃ RUCHU CIECZY NIELEPKIEJ W PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ

Aby zastąpić nieskończony układ równań różniczkowych (3.14) układem skończonym, wirowość zawartą w ograniczonym obszarze należy rozdzielić między

elementy wirowe, nazwane kroplami wirowymi. Najprościej można tego dokonać nakładając na płaszczyznę α siatkę kwadratową Λ^h o boku h , której węzły określamy jako $\alpha_j = h \cdot j = (h \cdot j_1, h \cdot j_2)$, a kropli wirowej mającej położenie \mathbf{x}_j przypisujemy intensywność $\Gamma_j = \omega_j h^2$. Nie jest to jedyny sposób przypisania intensywności kropli wirowej w zależności od wirowości pola. Można, na przykład, kropli wirowej przypisać średnią wartość wirowości zawartej w komórce j o boku h [158].

Niech Δt oznacza krok czasowy, a n numer kroku czasowego. Pole wirowości w czasie $n\Delta t$ reprezentowane jest przez sumę:

$$\omega^n(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \Omega_\delta(\mathbf{x}_j^n - \mathbf{x}) \Gamma_j \quad (3.23)$$

gdzie \mathbf{x}_j^n oznacza położenie kropli wirowej w czasie $n\Delta t$, Ω_δ nazywane bywa funkcją wygładzającą lub funkcją obcięcia (osobliwości), a wskaźnik j przebiega wszystkie węzły siatki Λ^h . Równanie (3.23) można interpretować jako wzór interpolacyjny na obliczanie wirowości w punkcie \mathbf{x} , gdy węzłami interpolacji są położenia kropli \mathbf{x}_j . Funkcję Ω_δ konstruuje się następująco: dla funkcji radialnie symetrycznej Ω takiej, że całka $\int \Omega(r) dr = 1$, funkcję Ω_δ definiuje się jako:

$$\Omega_\delta(r) = \frac{1}{\delta^2} \Omega\left(\frac{r}{\delta}\right) \quad (3.24)$$

Gdy $\delta \rightarrow 0$, to funkcja Ω_δ dąży do delty Diraca. Warunek skalowania (3.24) zapewnia, że cała masa (powierzchnia) skupiona wewnątrz kropli nie zależy od δ . Parametr δ nazywany bywa promieniem obcięcia lub promieniem wygładzania. Jeżeli określona została funkcja $\Omega_\delta(r)$, to jednocześnie zadany jest rozkład prędkości generowany przez kroplę: $\mathbf{K}_\delta = \text{rot } \Omega_\delta$:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\delta(\mathbf{x}) &= \mathbf{K} * \Omega_\delta(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Omega_\delta(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \\ &= \mathbf{K}(\mathbf{x}) * \int_{|\mathbf{y}| \leq r} \Omega_\delta(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \frac{(-x_2, x_1)}{2\pi r^2} f\left(\frac{r}{\delta}\right) \end{aligned} \quad (3.25)$$

gdzie $*$ oznacza operację splotu. Funkcję $f(r) = 2\pi \int_0^r \Omega ds$ nazywa się funkcją kształtu. Gdy $\delta \rightarrow 0$, to $\mathbf{K}_\delta \rightarrow \mathbf{K}$. Wprowadzenie funkcji wygładzającej spowodowało usunięcie z jądra $\mathbf{K}(\mathbf{x})$ osobliwości dla $\mathbf{x}=0$.

Nieskończony układ równań różniczkowych (3.14) jest zastępowany skończonym układem równań różniczkowych postaci:

$$\frac{d\bar{x}_i}{dt} = \sum_j K_\delta(\bar{x}_i - \bar{x}_j(t))\Gamma_j, \quad \bar{x}_i(0) = \alpha_i \quad (3.26)$$

gdzie $\bar{x}_i(t)$ oznacza przybliżoną trajektorię kropki wirowej. Dokładność metody kropel wirowych zależy od wielkości h użytej do dyskretyzacji pola wirowości, promienia obciążenia δ , postaci funkcji wygładzającej Ω a także kroku czasowego przyjętego do całkowania równania. Poniżej przytoczymy twierdzenie pokazujące związek między h a δ oraz Ω .

3.2.1. BADANIA NAD ZBIEŻNOŚCIĄ METODY KROPEL WIROWYCH DLA PRZEPŁYWU NIELEPKIEGO

Badania nad zbieżnością metody kropel wirowych zainicjowano w pracy Dushane [60] i chociaż dowód zbieżności podany przez niego był błędny, wyniki częściowe zostały wykorzystane przez Halda i Del Prete'a w pracy [81]. Wykazali oni zbieżność metody kropel wirowych dla ograniczonego, krótkiego przedziału czasu. Przeprowadzono również eksperymenty numeryczne mające na celu praktyczną weryfikację dowiedzionych twierdzeń odnośnie do rzędu zbieżności metody kropel wirowych. Do rozważań autorzy przyjmowali różne postacie funkcji wygładzającej Ω_δ . W następnej pracy [78] Hald wykazał, że metoda kropel wirowych jest zbieżna dla długiego przedziału czasu, a jeżeli związek między h i δ w postaci $h=\delta^2$ i funkcja wygładzająca spełnia odpowiednie warunki regularności to różnica pomiędzy trajektorią rozwiązania równania dokładnego a przybliżonego jest rzędu $O(h^2)$. Wykorzystując wyniki pracy Halda [78], Beale i Majda [25, 26] pokazali w następnych latach, że dobierając odpowiednio funkcję wygładzającą można otrzymać zbieżność dla metody kropel wirowych dowolnego rzędu.

Z badaniem zbieżności metody kropel wirowych związany jest dobór odpowiednich warunków dotyczących funkcji wygładzającej, typu przestrzeni funkcyjnej i rodzaju normy w których bada się zbieżność. Jeden z najbardziej przejrzystych i prostych zestawów warunków, ogólnie obecnie przyjmowanych podali Greengard i Anderson [5]. Zdefiniowali oni tak zwaną klasę funkcji $M^{k,m}$ określonej następująco: klasę funkcji $M^{k,m}$ stanowią funkcje $\Omega: R^N \rightarrow R$ ($N=2,3$), które spełniają następujące warunki:

$$1. \quad \int_{R^N} \Omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 1 \quad ;$$

$$2. \quad \int_{R^N} \mathbf{x}^\alpha \Omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad \text{dla wszystkich wielowskaźników } \alpha=(\alpha_1, \alpha_2) \text{ takich, że}$$

$$1 \leq (\alpha_1 + \alpha_2) \leq m-1, \text{ oraz } \int_{R^N} |\mathbf{x}|^m |\Omega(\mathbf{x})| d\mathbf{x} < \infty; \mathbf{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2};$$

3. $\Omega \in C^k(R^N)$;
4. $|\mathbf{x}|^{N+|\beta|} |\partial^\beta \Omega(\mathbf{x})| \leq C$ dla pewnej stałej C i wszystkich wielowskaźników β takich, że $|\beta| \leq k$;
5. $|\mathbf{x}|^{m+4} |\Omega(\mathbf{x})| \leq C$ dla pewnej stałej C .

Warunek drugi nazywany jest warunkiem momentów i jeżeli jest spełniony, to mówi się, że funkcja wygładzająca Ω jest rzędu m . Powoduje on, że wygładzone pole wirowości za pomocą funkcji Ω_δ spowoduje zmiany pola prędkości cieczy rzędu $O(\delta^m)$. Warunki (3)–(5) wykorzystywane są do wykazania stabilności metody oraz aproksymacji.

Twierdzenie o zbieżności metody kropel wirowych, będące podsumowaniem wyników pracy Greengarda i Andersona [5], a którego analogiczną postać można również znaleźć w wielu innych pracach [25, 52, 80], brzmi:

Twierdzenie 3.1: Załóżmy, że pole prędkości jest wystarczająco regularne (gładkie) i że wirowość w chwili początkowej ma zwarty nośnik. Niech $\Omega \in M^{k,m}$ z dostatecznie dużym k ($k \geq 3$) oraz $m \geq 2$. Przyjmijmy ponadto, że $\delta \leq ch^q$, $0 < q < 1$. Istnieje wówczas stała C taka, że dla dostatecznie małego h prawdziwe są :

1. Zbieżność trajektorii cząstek:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\bar{\mathbf{x}}(\alpha_j, t) - \mathbf{x}(\alpha_j, t)\|_p \leq C[\delta^m + (h/\delta)^k \delta]$$

2. Zbieżność prędkości cząstek:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\bar{\mathbf{u}}(\bar{\mathbf{x}}(\alpha_j, t), t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}(\alpha_j, t), t)\|_p \leq C[\delta^m + (h/\delta)^k \delta]$$

3. Zbieżność pola prędkości:

$$\max_{0 \leq t \leq T} \|\bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) - \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\|_{L^p(B)} \leq C[\delta^m + (h/\delta)^k \delta].$$

$\|\cdot\|_p$ oznacza dyskretną postać p -normy, $\|g\| = \left(\sum_j |g(\alpha_j)|^p h^2\right)^{\frac{1}{p}}$ oraz

$$\|g\|_{L^p(B)} = \left(\int_B |g(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x}\right)^{1/p}.$$

Z twierdzenia wynika, że o rzędzie zbieżności metody decyduje rząd m funkcji obciążenia oraz że $h/\delta \rightarrow 0$, czyli że h powinno dążyć do zera szybciej niż δ .

3.3. APROKSYMACJA RÓWNAŃ. STOCHASTYCZNA METODA KROPEL WIROWYCH

Do rozwiązywania równania dyfuzji obecnie najczęściej przyjmuje się metodę przypadkowego błędzenia. Metoda ta dobrze harmonizuje z obliczeniami w zmiennych Lagrange'a dla równania Eulera. Do położenia kropeł wirowych, wynikającego z równań ruchu dla cieczy nielepkiej, dodaje się zaburzenie losowe o rozkładzie Gaussa z odpowiednio dobraną wartością średnią i wariancją. W literaturze jest dobrze znany związek pomiędzy przypadkowym ruchem cząstki (ruchem Browna) a równaniem dyfuzji [61, 170].

Dodanie czynnika losowego powoduje, że pole prędkości jest zmienną losową, a trajektoria cząstki może być uważana za realizację procesu stochastycznego. Dla przestrzeni dwuwymiarowej istnieje eleganckie sformułowanie metody kropeł wirowych w terminach stochastycznych równań różniczkowych dla dyfuzyjnych procesów Markowa. Niech $W(t)$ oznacza proces ruch Browna (proces Wienera). Stochastyczne równanie różniczkowe dla procesu $X(t)$ ma postać [130, 185]:

$$\begin{aligned} d\mathbf{X}(\alpha, t) &= \mathbf{u}(t, \mathbf{X}(\alpha, t)) dt + \sqrt{2\nu} d\mathbf{W}(t) \\ \mathbf{X}(\alpha, 0) &= \alpha \end{aligned} \quad (3.27)$$

Każda realizacja $W(t)$ jest ciągłą, prawie wszędzie nieróżniczkowalną funkcją spełniającą warunek $W(0)=0$. Równanie (3.27) opisuje zarówno unoszenie cząstki, jak i proces dyfuzji a więc jest dokładnym opisem ruchu cieczy lepkiej. Ruch nieskończonej ilości cząstek wzdłuż trajektorii zawierającej zarówno składową deterministyczną, jak i składową losową stanowi dokładne rozwiązanie równania ruchu cieczy lepkiej.

Rozwiązanie $X(t, \alpha)$ interpretujemy jako położenie cząstki w chwili t , która w momencie $t_0=0$ zajmowała położenie α . Niech $G(\mathbf{x}, t; \alpha, s)$ oznacza gęstość prawdopodobieństwa przejścia. A więc prawdopodobieństwo tego, że cząstka osiągnie zbiór $A \subset \mathbb{R}^2$ w chwili t , jeżeli w chwili t_0 znajdowała się w położeniu α , wyraża się wzorem:

$$P(\mathbf{X}(t) \in A, t | \alpha, t_0) = \int_A G(\mathbf{x}, t; \alpha, t_0) d\mathbf{x} \quad (3.28)$$

W teorii stochastycznych równań różniczkowych [69, 93, 170] dowodzi się, że dla równań postaci (3.27) funkcja $G(\mathbf{x}, t; \alpha, s)$ spełnia tzw. perspektywne równanie Kołgomorowa, zwane też równaniem Fokkera-Plancka. Równanie Helmholtza dla wirowości (3.3), dzięki temu, że $\nabla \cdot \mathbf{u}=0$, można przekształcić do postaci:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \nabla \cdot (\omega \mathbf{u}) = v \Delta \omega \quad (3.29)$$

Równanie (3.29) jest identyczne z równaniem Fokkera-Plancka, opisującym funkcję gęstości prawdopodobieństwa przejścia dla dyfuzyjnego procesu Markowa z wektorem przemieszczenia \mathbf{u} i macierzą dyfuzji (diagonalną) ze stałym współczynnikiem na głównej przekątnej równym v [93, 185]. Wirowość $\omega(\mathbf{x}, t)$ można więc interpretować jako chwilowy rozkład gęstości prawdopodobieństwa przejścia procesu stochastycznego $X(\alpha, t)$.

Podstawowym faktem, który wiąże równanie paraboliczne (Helmholtza) (3.29) z równaniem stochastycznym (3.27) jest to, że funkcja Greena dla równania parabolicznego $G(\mathbf{x}, t; \alpha, t_0)$ (rozwiązanie równania (3.29) z warunkiem początkowym $\delta(\mathbf{x} - \alpha)$ gdzie δ oznacza deltę Diraca) ma identyczną postać, jak gęstość prawdopodobieństwa przejścia procesu dyfuzyjnego $X(t)$ [170, 130]. Ma ona postać:

$$G(x, t; \alpha, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} \exp\left\{-\frac{(x-\alpha)^2}{2(t-t_0)}\right\} \quad (3.30)$$

Zgodnie z równaniem (3.5) pole prędkości możemy wyrazić jako:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) &= \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \omega(\mathbf{y}) d\mathbf{y} = \int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \left[\int_{\mathbb{R}^2} G(\mathbf{y}, t; \alpha, 0) \omega(\alpha, 0) d\alpha \right] d\mathbf{y} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \left[\int_{\mathbb{R}^2} \mathbf{K}(\mathbf{x} - \mathbf{y}) G(\mathbf{y}, t; \alpha, 0) d\mathbf{y} \right] \omega(\alpha, 0) d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} E[\mathbf{K}(\mathbf{x} - X(t, \alpha))] \omega(\alpha, 0) d\alpha \end{aligned} \quad (3.31)$$

gdzie $E[\cdot]$ oznacza wartość oczekiwaną zmiennej losowej: $E[g(X(\alpha', t))] = \int g(x) G(\mathbf{x}, t; \alpha', 0) dx$. Stochastyczne równanie (3.27) może być zapisane jako [80]:

$$dX(t, \alpha) = \left\{ \int_{\mathbb{R}^2} E[\mathbf{K}(X(t, \alpha) - X(t, \alpha'))] \omega(\alpha', 0) d\alpha' \right\} dt + \sqrt{2v} dW(t, \alpha) \quad (3.32)$$

Równanie (3.32) przedstawia nieskończony układ stochastycznych równań różniczkowych – dla każdej wartości α jedno równanie. Aby zastąpić nieskończony układ równań stochastycznych (3.32) układem skończonym, w równaniu (3.32)

opuszcza się symbol wartości oczekiwanej. Zakłada się jak poprzednio, że nośnik wirowości jest zbiorem zwartym (ograniczonym) i pokrywa się go siatką kwadratową Λ_h . Dla każdego $\alpha_j, j=(i_1, h, i_2, h)$ losuje się niezależne ruchy Browna $W(\alpha_j, t)$. Ostatecznie otrzymujemy:

$$d\tilde{X}(t, \alpha_j) = \left[\sum_j \mathbf{K}_s(\tilde{X}(t, \alpha_j) - \tilde{X}(t, \alpha_j)) \omega(\alpha_j; 0) h^2 \right] dt + \sqrt{2v} dW(\alpha_j, t) \quad (3.33)$$

z warunkiem $\tilde{X}(\alpha_j, 0) = \alpha_j$. W pracy [130] pokazano, że rozwiązania równania (3.33), przy założeniach twierdzenia 3.1, z prawdopodobieństwem bliskim jedności, są zbieżne dla $h \rightarrow 0$ do równania stochastycznego (3.28) w taki sposób, jak to wyszczególniono w punktach 1–3 w twierdzeniu 3.1.

Dla numerycznego rozwiązania równania (3.33) dokonujemy dyskretyzacji czasu. Różniczkę zastępuje się przyrostami. Przyjmujemy najprostszy schemat Eulera pierwszego rzędu. Można oczywiście wykorzystać bardziej zaawansowaną metodę, np. metodę Rungego–Kutty, odpowiednio zaprojektowaną dla równania stochastycznego [39, 93]. Wiąże się to jednak ze znacznym wydłużeniem czasu obliczeniowego. Na podstawie własności ruchu Browna wiemy, że różnica $W(t+\Delta t) - W(t)$ jest zmienną losową, o rozkładzie Gaussa z wartością oczekiwaną równą zero i wariancją równą Δt . Równanie (3.33) można przybliżyć skończonym układem równań następująco:

$$\tilde{X}_i(t + \Delta t) = \tilde{X}_i(t) + \Delta t \sum_j \left[\mathbf{K}_s(\tilde{X}_i(t) - \tilde{X}_j(t)) \omega(\alpha_j, 0) h^2 + \sqrt{2v \Delta t} \mathbf{N}_j \right] \quad (3.34)$$

gdzie $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ oznacza wektor, którego składowymi są niezależne zmienne losowe o rozkładzie Gaussa z wartością oczekiwaną równą zero i wariancją równą jedności. Gdy $v \rightarrow 0$, to równania (3.34) przechodzą w równania ruchu cieczy nielepkiej co jest zgodne z algorytmem dekompozycji lepkościowej.

Wprowadzenie w problematykę stochastycznych równań różniczkowych w związku z metodą kropel wirowych można znaleźć w pracach [130, 39]. W Polsce podejście stochastyczne jest używane przez zespół Styczka [184, 34, 139, 185]. W [34] a szczególnie w dysertacji [185] można znaleźć omówienie wybranych własności stochastycznych procesów dyfuzyjnych Markowa. Teoria stochastycznych równań różniczkowych, procesów dyfuzyjnych, własności ruchów Browna, zawarta jest między innymi w pracach [69, 93, 170, 61].

Nasuwa się pytanie, czy rozwiązując równania dyfuzji zmuszeni jesteśmy do korzystania z metody stochastycznej? Oczywiście nie. Metoda przypadkowego błędzenia świetnie współgra z obliczeniami w zmiennych Lagrange'a i jest ekonomiczna w realizacji. Jednak ze względu na jej stochastyczne własności została utracona precyzja punktowego przewidywania rozwiązania. Być może jest to cena

jaką musimy płacić za próbę rozwiązywania przepływów z dużą liczbą Reynoldsa. Otrzymywane rozwiązania muszą podlegać procesowi uśredniania. Ponadto jak wiadomo [151] błąd metody przypadkowego błędzenia maleje jak $N^{-1/2}$ (N – liczba wirów). A więc dla zmniejszenia błędu 2-krotnie, liczba cząstek biorących udział w obliczeniach powinna powiększyć się 4-krotnie. Ze względu na czas trwania obliczeń jest to kosztowne.

W ostatnich latach pojawiło się wiele prac, w których proponuje się różne deterministyczne metody modelowania lepkości. Do nich należą: metoda ekspansji promienia kropli wirowej [127], (patrz jednak kontrargumenty [75]), metoda wymiany intensywności cyrkulacji kropeł wirowych [55, 135, 97], czy też metoda różniczkowania (działanie laplasianem) na funkcję wygładzającą Ω_δ , którą dopiero po tym używa się do wyznaczenia jądra \mathbf{K} (wzór (3.25)) [64]. Metoda wymiany intensywności kropli wirowej polega na szczególnym doborze postaci funkcji wygładzającej Ω_δ . Pozwala to na aproksymację laplasianu ($\Delta\omega$) przez operator całkowy, który można zastąpić sumą po położeniach cząstek. W metodzie tej nie ma generacji wirów na ściance, ale następuje modyfikacja ich intensywności w pobliżu ścianki. Pojawiły się też prace, w których modelowanie lepkości odbywa się z użyciem siatki numerycznej [161, 55]. Wszystkie te propozycje są interesujące, ale wymagają dalszych badań i weryfikacji obliczeń numerycznych z danymi doświadczalnymi. Dopracowania wymaga sposób realizacji warunków brzegowych dla wirowości na ściance. Należy oczekiwać dalszych prac na ten temat.

3.4. REALIZACJA WARUNKÓW BRZEGOWYCH

W praktyce rzadko kiedy rozwiązuje się zagadnienia początkowe w całej przestrzeni. Zwykle zmuszeni jesteśmy rozwiązywać zagadnienia początkowo-brzegowe. W obszarze przepływu znajdują się ścianki sztywne, na których muszą być spełnione odpowiednie warunki pola prędkości. Tymi warunkami na ściankach sztywnych są: znikanie zarówno składowej normalnej pola prędkości, jak i składowej stycznej.

3.4.1. SKŁADOWA NORMALNA

Warunek $\mathbf{u}\cdot\mathbf{n}=0$ na ściankach sztywnych realizowany jest przez dodanie do pola prędkości, generowanego przez rozkład wirów \mathbf{u}_ω , prędkości potencjalnej \mathbf{u}_p dobranej tak, że składowa normalna wypadkowego pola prędkości $(\mathbf{u}_\omega+\mathbf{u}_p)\cdot\mathbf{n}=0$. Dodanie składowej potencjalnej pola prędkości nie zmienia wirowości pola przepływu ($\text{rot } \mathbf{u}_p=0$). Dla prostych geometrii obszaru przepływu, znajdowanie potencjału prędkości Φ ($\mathbf{u}_p=\text{grad } \Phi$) nie przedstawia większych kłopotów (metoda odwzorowań konforemnych, odbić zwierciadlanych, itp.). Dla złożonej geometrii przepływu wyznaczenie składowej potencjalnej stanowi jednak pewien problem wymagający znacznego nakładu pracy.

3.4.2. SKŁADOWA STYCZNA

Dla cieczy lepkiej zarówno składowa normalna prędkości, jak i składowa styczna do brzegu powinny przyjmować wartość zero. Warunek $\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}=0$, gdzie $\boldsymbol{\tau}$ jest wektorem jednostkowym stycznym do ścianki, wnosi do obliczeń znaczne komplikacje. Przy ściance tworzy się cienka warstwa pośrednicząca między skończoną wartością prędkości wewnątrz obszaru przepływu a wartością zero na ścianie i, jak wiemy z teorii warstwy przyściennej [23, 95], jej grubość maleje ze wzrostem liczby Reynoldsa ($\sim 1/\sqrt{Re}$).

Założmy, że oś x jest skierowana wzdłuż ścianki, a oś y jest do ścianki prostopadła. Pochodna $\partial u/\partial y$ ma znaczną wartość (w przeciwieństwie do pochodnej $\partial v/\partial x$). Z definicji wirowości $\omega = \partial v/\partial x - \partial u/\partial y$ wynika, że w okolicy ścianki wirowość przyjmuje znaczne wartości. Dla obszaru ograniczonego ściankami sztywnymi, całkując równanie (3.29) stronami i korzystając z twierdzenia Greena, otrzymamy:

$$\frac{d}{dt} \int_D \omega \, d\mathbf{x} = \nu \int_{\partial D} \frac{\partial \omega}{\partial n} \, ds \quad (3.35)$$

gdzie D oznacza obszar przepływu, a ∂D jest brzegiem tego obszaru i całka po prawej stronie wzoru (3.35) oznacza całkę wzdłuż brzegu obszaru ∂D . A więc całkowita szybkość zmian wirowości wewnątrz obszaru przepływu zależy od składowej normalnej wirowości do brzegu.

Aby zrealizować warunek $\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}=0$, stosuje się generację wirów na ściance [42]. Pole prędkości wytworzone przez rozkład kropel wirowych i składową potencjalną na ściance sztywnej obszaru daje pewną wartość składowej stycznej prędkości różnej od zera. Ściankę można więc uważać za warstwę wirową o intensywności $(\mathbf{u}_\omega + \mathbf{u}_p)\boldsymbol{\tau}$. Tę niepożądaną warstwę należy skompensować. Brzeg obszaru jest dzielony na odcinki o długości h , a w środku tego odcinka wstawiana jest kropka wirowa o intensywności przeciwnej niż intensywności tego odcinka warstwy wirowej, czyli $\Gamma_{\text{brzeg}} = -(\mathbf{u}_\omega + \mathbf{u}_p)\boldsymbol{\tau}h$. Tak wygenerowanemu wirowi pozwala się dyfundować do wnętrza obszaru przepływu. Wiry wypadające poza brzeg są z obliczeń eliminowane. Proces generacji wirowości na brzegu powtarza się w każdym kroku czasowym. Warunek $\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}=0$ jest spełniony tylko w przybliżeniu.

W pracy [53] Cottet wykazał, że opisany proces generacji wirów, przy $\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}=0$, przybliża warunek typu Neumanna dla wirowości (zadana jest pochodna normalna wirowości do brzegu). Równanie Helmholtza (3.3) wymaga warunków dla wirowości na brzegu (ściankach sztywnych) obszaru przepływu. Próbę zamiany warunku $\mathbf{u}\boldsymbol{\tau}=0$ na odpowiedni warunek dla wirowości podejmuje się w ostatnich czasach w wielu pracach np. [4, 53, 97].

3.5. SZYBKIE ALGORYTMY METODY Dyskretnych Wirów

Jedną z poważnych wad metody wirów w klasycznym, bezpośrednim podejściu do obliczenia sumy występującej we wzorze (3.34) jest to, że liczba działań jest proporcjonalna do kwadratu z liczby wirów. Intensywne badania z wykorzystaniem modeli symulacyjnych, opartych na ruchu cząstek w różnych dziedzinach nauki: w fizyce plazmy, mechanice nieba, technologii półprzewodnikowej jak również w mechanice płynów, przyczyniły się do rozwoju algorytmów szybkiego obliczania wzajemnego oddziaływania. Obecnie znane są eksperymenty numeryczne, gdzie liczba cząstek, która bierze udział w obliczeniach jest rzędu miliona i więcej [90]. W zastosowaniach tych główny problem sprowadza się do obliczenia potencjału ϕ i pola sił F , indukowanego przez rozkład cząstek, $F = -\text{grad}\phi$, $\Delta\phi = \rho$, gdzie ρ opisuje rozkład cząstek. Po drobnych modyfikacjach algorytmy te przenoszą się na metodę wirów. Rolę potencjału zastępuje funkcja prądu, a polu sił odpowiada pole prędkości. Funkcja prądu, podobnie jak potencjał, spełnia równanie Poissona (patrz (2.18)).

W wielu zastosowaniach potencjał opisujący oddziaływanie N -cząstek ma postać:

$$\phi = \phi_{\text{dalekie}} + \phi_{\text{bliskie}} \quad (3.36)$$

gdzie ϕ_{dalekie} oznacza potencjał dla sił dalekiego zasięgu, natomiast ϕ_{bliskie} odnosi się do potencjału sił działających na krótkich odległościach, tak jak np. siły Van der Waalsa w gazie. W kontekście obliczeń metodą kropel wirowych konieczność modyfikowania sposobu oddziaływania cząstki na małych odległościach wynika ze względów natury numerycznej, tzn. z konieczności usunięcia osobliwego oddziaływania między wirami.

Jedną z pierwszych metod szybkiego obliczania oddziaływania cząstek była metoda siatkowa typu „wir w komórce” (VIC) [48]). Czas obliczeń w tej metodzie jest szacowany jako proporcjonalny $O(N \ln N)$. Dla silnie niejednorodnych rozkładów cząstek, na skutek obecności siatki numerycznej, metoda daje zbyt wygładzone, a przez to niedopuszczalnie zafałszowane, wyniki. Za modyfikację metody VIC można uznać metodę lokalnej korekcji [2, 15, 154], w której obliczenie oddziaływania cząstek podzielono na dwa etapy: oddziaływania bliskie, dla których stosuje się metody bezpośredniego sumowania oraz dalekie – obliczane z udziałem siatki (metoda nazywana bywa P^3M – Particle-particle/particle-mesh [82]). Bezsiatkowy, szybki algorytm w zastosowaniu do symulacji zagadnień grawitacyjnych podał Appel [7], jak również Barnes i Hut [21]. Metoda zaproponowana przez Appela daje duże przyspieszenie w stosunku do metody klasycznej, gdy rozkład cząstek jest niejednorodny, jednak zawodzi, jeżeli stawiane są odpowiednie wymagania odnośnie do dokładności w przypadku rozkładów równomiernych. Na szczególną uwagę, ze względu na precyzyjny, matematyczny sposób przedstawienia algorytmu oraz dobre przyspieszenia, zasługuje metoda rozwinięć

biegunowych, zaproponowana przez Greengarda i Rokhlina [76, 40]. Podobny algorytm przedstawili również Dommelen i Rudensteiner [58]. Ostatnimi czasy szybkie algorytmy obliczania potencjału bywają porównywane ze sobą i oceniane z punktu widzenia możliwości ich wektoryzacji, umożliwiającej efektywną realizację tych algorytmów na super szybkich, wieloprocessorowych komputerach (Katzenelson [90]). W niniejszej pracy korzystano z oryginalnego programu Greengarda i Rokhlina [76].

3.5.1. METODA ROZWIĘĆ BIEGUNOWYCH

U podstaw algorytmu rozwinięć biegunowych leży spostrzeżenie, że aby obliczyć prędkość indukowaną przez skupisko wirów w punktach poza skupiskiem, nie jest konieczne obliczanie prędkości od każdego indywidualnego wiru-cząstki. Zamiast tego prędkość indukowana przez skupisko cząstek może być zastąpiona przez rozwinięcie biegunowe rzędu p wokół centrum z_M . Ponadto to rozwinięcie p -tego rzędu może być przesunięte do centrum innego skupiska. Przytoczymy twierdzenia leżące u podstaw algorytmu [40, 76]:

Twierdzenie 3.2 (o rozwinięciu biegunowym). Załóżmy, że m naładowanych cząstek o intensywności $\{q_i, i=1, \dots, m\}$ znajduje się w punktach $\{z_i, i=1, \dots, m\}$ oraz że dla wszystkich $|z_i| < R$. Wtedy dla dowolnego $z \in \mathbb{C}$ $|z| > R$, potencjał $\phi(z)$ dany jest poprzez rozwinięcie:

$$\phi(z) = Q \ln(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{z^k} \quad (3.37)$$

gdzie **

$$Q = \sum_{k=1}^m q_i, \quad \text{oraz} \quad a_k = \sum_{k=1}^m \frac{-q_i z^k}{k} \quad (3.38)$$

Ponadto, dla dowolnego $p \geq 1$,

$$\left| \phi(z) - Q \ln(z) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{z^k} \right| \leq \alpha \left| \frac{R}{z} \right|^{p+1} \leq \left(\frac{B}{c-1} \right) \left(\frac{1}{c} \right)^p \quad (3.39)$$

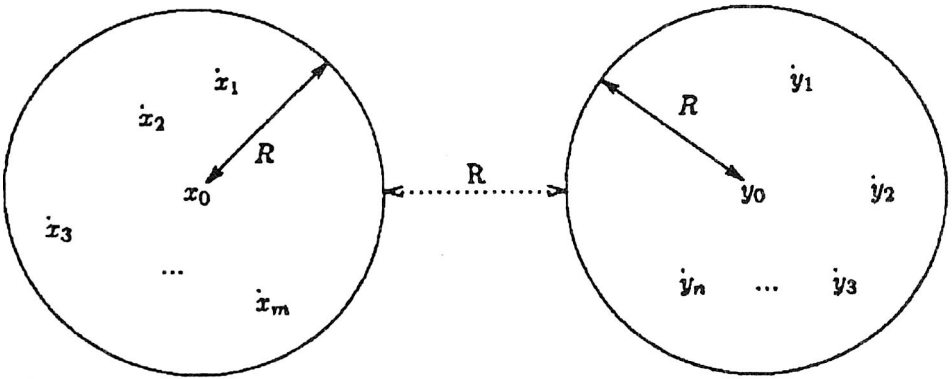
gdzie

$$c = \left| \frac{z}{r} \right|, \quad B = \sum_{i=1}^m |q_i|, \quad \alpha = \frac{B}{1 - \left| \frac{r}{z} \right|} \quad (3.40)$$

** Dla funkcji prądu używanej w obecnej pracy logarytm mnożony jest przez czynnik $1/2\pi$.

Aby lepiej zrozumieć na czym polega przyspieszenie obliczeń, rozważmy następujący przykład [76]: założmy, że m cząstek (wirów) o intensywności $\{q_i, i=1, \dots, m\}$ znajduje się wewnątrz koła o promieniu R i zamierzamy obliczyć potencjał w n punktach $y_j, j=1, \dots, n$, poza kołem. Skupiska cząstek naładowanych i punktów, w których chcemy policzyć potencjał są względem siebie oddzielone (dobrze separowane) (rys. 3.1):

$$\begin{aligned} |x_i - x_o| < R, & \quad \text{dla wszystkich } i = 1, \dots, m \\ |y_j - y_o| < R, & \quad \text{dla wszystkich } j = 1, \dots, n \\ |x_o - y_o| > 3R & \end{aligned} \quad (3.41)$$



Rys.3.1. Dobrze separowane zbiory na płaszczyźnie
Fig. 3.1. Well-separated sets in the plane

Aby otrzymać wartości potencjału w punktach $\{y_j\}$ wywołanej obecnością ładunków w punktach $\{x_i\}$, można dokonać sumowania:

$$\sum_{i=1}^m \phi_{x_i}(y_j) \quad \text{dla wszystkich } j = 1, \dots, n \quad (3.42)$$

Wymaga to nakładu pracy rzędu nm . Jeżeli jednak obliczymy najpierw p współczynników rozwinięcia biegunowego względem punktu x_o , a następnie obliczymy wartości potencjałów w punktach $\{y_j\}$, to nakład pracy będzie proporcjonalny do $O(mp+np)$, a na podstawie wzoru (3.38) mamy oszacowanie:

$$\left| \sum_{i=1}^m \phi_{x_i}(y_j) - Q \ln(y_j - x_o) - \sum_{k=1}^p \frac{a_k}{|y_j - x_o|^k} \right| \leq B \left(\frac{1}{2} \right)^p \quad (3.43)$$

Tak więc, aby otrzymać względny błąd mniejszy od zadanego ϵ , rząd rozwinięcia musi być $p \approx -\log_2(\epsilon)$. Gdy rząd rozwinięcia jest już ustalony, to nakład pracy jest rzędu $O(m+n)$, co jest znacznie mniejszą wielkością niż nm .

Powyższe twierdzenie 3.2 uzupełniają lematy, które dają możliwość odpowiedniej manipulacji rozwinięciami biegunowymi, np. jeżeli dysponujemy współczynnikami rozwinięcia biegunowego względem pewnego centrum z_0 , to można otrzymać rozwinięcie biegunowe względem innego centrum z_g , wykorzystując współczynniki już znanego rozwinięcia [40, 76]. Centralną strategią jest więc obliczanie oddziaływania między różnymi skupiskami wirów, leżącymi w różnych od siebie odległościach za pomocą rozwinięć biegunowych. Oddziaływania pomiędzy cząsteczkami (wirami) leżącymi blisko siebie obliczane są bezpośrednio.

Z szybkimi algorytmami wyznaczenia potencjału jest zawsze związany algorytm szybkiego określenia wzajemnego położenia cząstek, który polega na konstrukcji tzw. drzewa zależności. Wierzchołkiem drzewa jest komórka obejmująca wszystkie cząstki. Jest ona dzielona na cztery równe części, które nazywane są „dziećmi”, a komórka, z której powstały – „rodzicem”. „Dzieci” są dalej dzielone na cztery części, aż do określonego poziomu wyznaczonego przyjętą dokładnością. Istotnym elementem algorytmu jest prowadzenie listy pozwalającej szybko określić, do której komórki należy dana cząstka i cząstki jej najbliższego otoczenia (sąsiedzi). Jest to jedna z najbardziej złożonych części algorytmu. Szczegóły można znaleźć w pracach [40, 76, 58, 90], a także w książce [82].

Parametrami wejściowymi do programu są: założona dokładność, na podstawie której określany jest rząd rozwinięcia p i liczba podziałów pierwszej, zawierającej wszystkie cząstki komórki-rodzica, współrzędne cząstek oraz wartości ich intensywności (ładunek, wirowość). Do użytkownika należy zdefiniowanie prawa bliskich oddziaływań i podanie promienia bliskich oddziaływań δ . Im parametr δ jest większy, tym więcej cząstek oddziałuje między sobą według tego szczególnego prawa, a więc im większy promień δ , tym czas obliczeń się wydłuża. Stąd od razu też widać, że funkcje wygładzające o nieskończonym nośniku nie nadają się do obliczeń za pomocą algorytmu szybkich oddziaływań.

Należy dodać, że istotne przyspieszenia w obliczeniach otrzymuje się dopiero dla liczby cząstek rzędu 500. Czas obliczeń rośnie ze wzrostem N liczby cząstek liniowo, a nie z kwadratem liczby, jak w metodzie bezpośredniego sumowania. Na komputerze PC-486/DX2-66MHz, dla liczby cząstek 3000-4000, otrzymywano dziesięciokrotne skrócenie czasu obliczeń w stosunku do metody bezpośredniego sumowania (wyznaczenie składowych prędkości i funkcji prądu).

4. NUMERYCZNE MODELOWANIE RUCHU GRANICY ROZDZIAŁU DWÓCH PŁYNNYCH OŚRODKÓW O RÓŻNYCH GĘSTOŚCIACH

4.1. ZJAWISKO NIESTABILNOŚCI RAYLEIGHA-TAYLORA

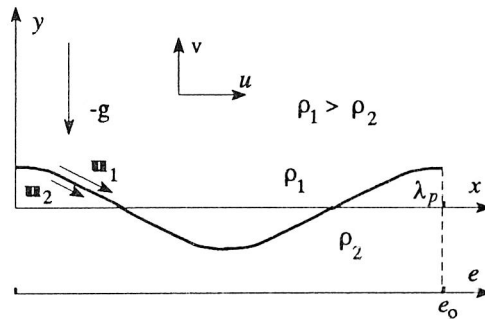
W mechanice płynów dobrze znany jest fakt, że różnica gęstości między dwoma ośrodkami płynnymi może wywoływać ruch płynów. Do bardziej znanych przykładów można zaliczyć: ruch powietrza wywołany różnicą gęstości spowodowaną zmianą temperatury, prądy oceaniczne, ruch wody zasolonej i słodkiej w ujściach rzek itp. W pewnych przypadkach zmiana gęstości dokonuje się gwałtownie i można mówić o powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki z różnymi gęstościami. W polu grawitacyjnym powierzchnia rozgraniczająca dwa płynne ośrodki o różnych gęstościach jest powierzchnią stabilną, tzn. małe zaburzenie tej powierzchni będzie pozostawało małe, gdy płyn lżejszy znajduje się nad cięższym. Jeżeli natomiast sytuacja jest odwrotna i płyn cięższy znajdzie się nad lżejszym, to taka powierzchnia rozdziału będzie powierzchnią niestabilną. Początkowo małe zaburzenie położenia powierzchni będzie wzrastać eksponencjalnie. Pierwsze prace teoretyczne nad tego typu niestabilnością opublikował już ponad 100 lat temu (1883) Lord Rayleigh. W roku 1950 w pracy [186] Taylor zauważył, że niestabilność analogiczna do sytuacji w polu grawitacyjnym będzie miała miejsce, gdy płyn lżejszy będzie przyspieszany w kierunku cięższego. Praca Taylora dała impuls do współczesnych, intensywnych badań nad różnymi aspektami tego typu niestabilności (wpływ napięcia powierzchniowego i lepkości, geometria sferyczna, wpływ pola magnetycznego itd. [118, 178]). Taylor zapoczątkował również prace doświadczalne nad tym zjawiskiem [129]. Eksperymenty, ze względu na niezwykle szybki rozwój zjawiska (dla przyspieszenia $g=9,81\text{m/s}^2$ i długości fali zaburzającej $\lambda=1\text{ cm}$ czas rozwinięcia szacowany jest na ok. $0,01\text{s}$ [118]), są niezwykle kłopotliwe i trudne w realizacji (problem z wytworzeniem właściwego przyspieszenia [6, 129, 156]). W literaturze ten rodzaj niestabilności nazywany jest niestabilnością Rayleigha-Taylora (R-T).

Już w czasach nam współczesnych uświadomiono sobie fakt, że niestabilność Rayleigha-Taylora ma podstawowe znaczenie w wielu zastosowaniach technologicznych, w technice laserowej, w fizyce plazmy, w astrofizyce, w fizyce atmosfery i innych [118, 178]. W najbardziej ogólnej postaci zjawisko opisywane jest pełnymi równaniami ruchu cieczy lepkiej i ściśliwej, włączając w to dodatkowo efekty powierzchniowe. Ze względu na nieliniowy charakter zjawiska, a także fakt, że jest to zagadnienie z ruchomym brzegiem, zjawisko to jest niezwykle trudne do modelowania numerycznego [56, 74, 88]. Pewne interesujące informacje odnośnie do zachowania się powierzchni rozgraniczającej można jednak uzyskać, przyjmując

jąc stosunkowo prosty model fizyczny. Zakłada się, że ruch cieczy jest potencjalny, nielepki i nieściśliwy, a zmiana gęstości dokonuje się skokowo przy przejściu przez powierzchnię rozdziału. W takim przypadku powierzchnię rozdziału można traktować jak warstwę wirową i w ten sposób badanie ruchu i deformacji powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki sprowadzić do zagadnienia początkowego.

4.2. RÓWNANIA RUCHU WARSTWY WIROWEJ DLA ZAGADNIENIA RAYLEIGHA-TAYLORA I OPIS ALGORYTMU OBLICZENIOWEGO

Załóżmy, że płyny są nielepki i nieściśliwe a pole ich prędkości jest potencjalne. Wprowadźmy do rozważań prostokątny układ współrzędnych (x,y) . Niech górną półpłaszczyznę ($y > 0$) do momentu wprowadzenia zaburzenia ($t < 0$) zajmuje ciecz o stałej gęstości ρ_1 , a dolną półpłaszczyznę ciecz o gęstości ρ_2 . Stałe pole grawitacyjne działa przeciwnie do kierunku osi y . Gęstości płynów zmieniają się w sposób skokowy przy przejściu przez krzywą rozdziału ośrodków płynnych. Krzywą rozdziału będziemy opisywali parametrycznie używając zmiennej zespolonej $z(e,t) = x(e,t) + iy(e,t)$, gdzie e jest parametrem rzeczywistym $e \in [0, e_0]$, którego wartość będzie wyróżniała w sposób jednoznaczny położenie cząstki-wiru na warstwie wirowej. Parametr e spełnia więc rolę zmiennej Lagrange'a. Składowa normalna pola prędkości na granicy rozdziału jest ciągła, a składowa styczna prędkości może doznawać nieciągłości (skokowej). Z tego, co powiedziano w rozdziale 2.5 wynika więc, że krzywą rozdziału można uważać za warstwę wirową o intensywności:



Rys. 4.1. Schemat niestabilności Rayleigha-Taylor
Fig. 4.1. Scheme of Rayleigh-Taylor instability

$$\Gamma(s,t) = (\mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1) s^\circ \quad (4.1)$$

gdzie $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2$ oznaczają prędkości graniczne ośrodka dolnego i górnego, s° jest wektorem jednostkowym stycznym do krzywej rozdziału, s jest długością łuku krzywej (parametrem kanonicznym krzywej [125]) (rys.4.1). W dalszych obliczeniach będziemy posługiwali się parametrycznym opisem krzywej, a zamiast intensywności Γ będziemy posługiwali się intensywnością warstwy γ , wyrażoną w zmiennych Lagrange'a

$$\gamma(e, t) = \Gamma(e, t) \sqrt{x_e^2 + y_e^2} \quad (4.2)$$

gdzie e w indeksie dolnym oznacza różniczkowanie po tej zmiennej. Załóżmy również, że warstwa wirowa wraz z zaburzeniem jest okresowa względem zmiennej x o okresie $\lambda_p=1$, przy czym parametr e zmienia się w przedziale od 0 do 1. Przyrost wartości parametru e od 0 do 1 daje następującą zależność:

$$z(e+1, t) = z(e, t) + 1 \quad (4.3)$$

$$\gamma(e+1, t) = \gamma(e, t)$$

Pole prędkości $\mathbf{q}^* = u - iv$ indukowane przez okresową warstwę wirową opisuje wzór Biota-Savarta:

$$\mathbf{q}^*(e, t) = \frac{1}{2i} P \int_0^1 \gamma(\tilde{e}, t) \operatorname{ctg} \pi(z(e, t) - z(\tilde{e}, t)) d\tilde{e} \quad (4.4)$$

Litera P przy całce oznacza całkę w sensie wartości głównej. Pole prędkości \mathbf{q}^* ma potencjał zespolony $W = \phi + i\psi$ ($\mathbf{q}^*(e) = (dW/dz)$) w postaci:

$$W(z, t) = \frac{1}{2i} P \int_0^1 \gamma(\tilde{e}, t) \ln [\sin \pi(z(e, t) - z(\tilde{e}, t))] d\tilde{e} \quad (4.5)$$

Z teorii potencjału [67, 149] wiadomo, że jego wartość wewnątrz obszaru daje się wyrazić przez całkę wzdłuż brzegu, na którym zadany jest pewien rodzaj osobliwości (ładunek, dipol itp.). W przypadku warstwy wirowej osobliwością tą jest nieciągłość składowej stycznej prędkości $\Gamma = \partial[W]/\partial s$, gdzie $[W]$ oznacza skok wartości potencjału przy przejściu przez krzywą. Rodzaj rozłożonej wzdłuż brzegu osobliwości można zmieniać. W rezultacie możemy otrzymywać różne postacie wzorów dla tego samego zagadnienia. Inną osobliwością, z której dalej będziemy korzystać, jest warstwa dipolowa. Intensywność warstwy dipolowej charakteryzuje skok wartości potencjału na krzywej granicznej:

$$\mu = W_2 - W_1 = \phi_2 - \phi_1 \quad (4.6)$$

Łatwo zauważyć, że intensywności warstwy wirowej i dipolowej związane są równaniem:

$$\gamma(e) = \mu_e \quad (4.7)$$

Potencjał prędkości można wyrazić za pomocą intensywności warstwy dipolowej następująco [20]:

$$W(z) = \frac{1}{2i} \int_0^1 \mu(\tilde{e}) z_e(\tilde{e}) \operatorname{ctg} \pi(z(e) - z(\tilde{e})) d\tilde{e} \quad (4.8)$$

Zauważmy, że wartość skoku potencjału zespolonego przy przejściu przez krzywą jest rzeczywista. Można stąd wynioskować, że funkcja prądu ψ jest przy przejściu przez krzywą rozdziału ciągła, a to, mając na uwadze związki Cauchy'ego-Riemmana ($\partial\phi/\partial n = \partial\psi/\partial s$), zapewnia, że składowa normalna pola prędkości przy przejściu przez krzywą jest też ciągła [18]. W ten sposób spełnione są wymagane warunki kinematyczne na krzywej rozdziału.

Dla celów obliczeniowych na krzywej rozdziału zostaną rozmieszczone w chwili początkowej cząstki-wiry (znaczniki) w sposób jednoznaczny wyróżnione wartością parametru e . Pozwoli to na śledzenie ewolucji powierzchni rozgraniczającej. Należy teraz zdefiniować prędkość cząstek umieszczonych na warstwie. Dla zagadnienia R-T istnieje pewna dowolność w zdefiniowaniu tej prędkości. W cieczy jednorodnej, a więc w przypadku niestabilności Kelvina-Helmholtza ($\rho_1 = \rho_2$) prędkość tę zmuszeni jesteśmy określić jako średnią arytmetyczną prędkości ośrodka górnego i dolnego. Konieczność takiego określenia prędkości jest wymuszona twierdzeniem Kelvina o zachowaniu wirowości [193]. W przypadku jednak niestabilności R-T, na skutek działania przyspieszenia ziemskiego i różnicy gęstości płynów, intensywność warstwy wirowej zmienia się (tw. Bjerknesa [95]). Do pełnego opisu ewolucji warstwy w zagadnieniu R-T, oprócz równania (3.4) należy dołączyć odpowiednie równanie opisujące zmiany intensywności warstwy wirowej w czasie. Z powodu tego dodatkowego równania mamy możliwość określenia prędkości znaczników (wirów) umieszczonych na krzywej rozdziału jako średniej ważonej

$$\frac{\partial z}{\partial t} = \tilde{q} = \frac{q_1 + q_2}{2} + \alpha \frac{q_2 - q_1}{2} \quad (4.9)$$

gdzie α jest parametrem rzeczywistym $\alpha \in [-1, 1]$. Zauważmy, że wartością parametru α możemy wpływać na położenie cząstek na krzywej rozdziału. Dla $\alpha = 0$ cząstka nie należy do żadnego z płynów. Dla $\alpha = -1$ cząstka należy do płynu gór-

nego (przyjmuje prędkość cząstek płynu nad krzywą rozdziału), a dla $\alpha=1$ należy do płynu dolnego. Wprowadzenie parametru α powoduje odpowiednią modyfikację równań ewolucji intensywności warstwy. Daje jednak tę korzyść, że zyskujemy dodatkowy parametr, którym możemy wpływać na jakość obliczeń numerycznych. Korzystając ze wzorów Sochockiego-Plemelja (2.32), wzór (4.9) można przekształcić do postaci

$$\frac{\partial z^*}{\partial t} = \tilde{q}^* = q^* + \alpha \frac{\gamma}{2z_e} \quad (4.10)$$

gdzie q^* jest wartością główną całki określoną wzorem (4.4).

Wyprowadzenie wzoru opisującego zmiany intensywności warstwy wirowej w czasie przebiega następująco: piszemy całkę Lagrange'a (rozszerzona postać równania Bernoulliego) na krzywej rozdziału dla obu płynów

$$\left. \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right|_E + \frac{|v_i|^2}{2} + gy + \frac{p_i}{\rho_i} = 0, \quad i = 1, 2 \quad (4.11)$$

gdzie indeks dolny E przy pochodnej względem czasu potencjału ϕ_i oznacza pochodną w zmiennych Eulera, natomiast indeks i oznacza, że zmienna odnosi się odpowiednio do ośrodka górnego ($i=1$) lub dolnego ($i=2$), p jest ciśnieniem.

Prędkość zmiany potencjału wzdłuż trajektorii cząstki, a więc w zmiennych Lagrange'a, zdefiniowana jest wzorem:

$$\frac{\partial \phi_i(e, t)}{\partial t} = \tilde{u} \frac{\partial \phi_i}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial \phi_i}{\partial y} + \left. \frac{\partial \phi_i}{\partial t} \right|_E \quad (4.12)$$

gdzie (\tilde{u}, \tilde{v}) oznacza prędkość cząstek (znaczników) zdefiniowaną wzorem (4.10). Po uwzględnieniu (4.12), układ równań (4.11) można zapisać w postaci:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_1}{\partial t} - (\tilde{u} u_1 + \tilde{v} v_1) + \frac{1}{2} (u_1^2 + v_1^2) + \frac{p_1}{\rho_1} + gy &= 0 \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial t} - (\tilde{u} u_2 + \tilde{v} v_2) + \frac{1}{2} (u_2^2 + v_2^2) + \frac{p_2}{\rho_2} + gy &= 0 \end{aligned} \quad (4.13)$$

Odejmując od siebie równania (4.13) i korzystając ze wzorów (4.6) i (4.7), a następnie eliminując z równań prędkości cząstek (znaczników) (\tilde{u}, \tilde{v}) jak również

prędkości graniczne $(u, v)_i, i=1,2$, za pomocą wzorów Sochockiego–Plemelja (2.32) oraz (4.10), otrzymujemy:

$$\frac{\partial \mu}{\partial t} - \frac{\alpha}{2} \frac{\gamma^2}{z_e z_e^*} + \frac{p_2}{\rho_2} - \frac{p_1}{\rho_1} = 0 \quad (4.14)$$

Założmy, że na powierzchni rozdziału działa napięcie powierzchniowe, a różnica ciśnień przez krzywą rozdziału opisywana jest wzorem Laplace'a [122]:

$$p_1 - p_2 = \sigma k \quad (4.15)$$

gdzie σ oznacza współczynnik napięcia powierzchniowego, a k krzywiznę warstwy $k=(x_e y_{ee} - y_e x_{ee})/(x_e^2 + y_e^2)^{3/2}$. Za pomocą wzoru (4.15) eliminujemy z równania (4.14) ciśnienie p_2 , otrzymując:

$$\mu_t - \frac{\alpha}{2} \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 \rho_2} p_1 - \frac{\sigma k}{\rho_2} = 0 \quad (4.16)$$

Z równania (4.16) należy jeszcze wyeliminować ciśnienie p_1 . Dodając do siebie układ równań (4.13) i eliminując z tak otrzymanego równania prędkości znaczników (\tilde{u}, \tilde{v}) (wzór 4.10) i prędkości graniczne ośrodków $(u, v)_i$ ($i=1,2$) jak poprzednio, otrzymujemy:

$$2 \frac{\partial \phi}{\partial t} - (u^2 + v^2) - \alpha \gamma \frac{u x_e + v y_e}{z_e z_e^*} + \frac{\gamma^2}{4 z_e z_e^*} + \frac{\rho_1 + \rho_2}{\rho_1 \rho_2} p_1 - \frac{\sigma k}{\rho_2} + 2gy = 0 \quad (4.17)$$

gdzie ϕ jest średnią arytmetyczną z ϕ_1 i ϕ_2 jako wartość główna potencjału (4.5), a u, v oznaczają prędkości wynikające z wartości głównej całki (4.4). Obliczając z równania (4.17) ciśnienie p_1 i wstawiając do równania (4.16), otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \mu_t = 2A \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{1}{2} q q^* - \frac{1}{2} \alpha \gamma \frac{u x_e + v y_e}{z_e z_e^*} + \frac{\gamma^2}{4 z_e z_e^*} \right] + \\ + \frac{2 \sigma k}{\rho_1 + \rho_2} + \alpha \frac{\gamma^2}{2 z_e z_e^*} \end{aligned} \quad (4.18)$$

gdzie A jest liczbą Atwooda:

$$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.19)$$

Różniczkując obustronnie równanie (4.18) po parametrze e , wykorzystując związek (4.7) oraz dokonując algebraicznych przekształceń, otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \gamma_t = 2A \left[u_t x_e + v_t y_e - \frac{1}{2} \alpha \gamma \frac{u_e x_e + v_e y_e}{z_e z_e^*} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial e} \frac{\gamma^2}{z_e z_e^*} + 2g y_e \right] + \\ + \frac{2\sigma k_e}{\rho_1 + \rho_2} + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial e} \frac{\gamma^2}{z_e z_e^*} \end{aligned} \quad (4.20)$$

Przy wyprowadzaniu zależności (4.20) skorzystano z możliwości zamiany kolejności różniczkowania i zależności:

$$\frac{\partial^2 \phi(x(e, t), y(e, t))}{\partial t \partial e} = (u x_e + v y_e)_t = u_t x_e + v_t y_e + u \tilde{u}_e + v \tilde{v}_e \quad (4.21)$$

gdzie następnie $(\tilde{u}_e, \tilde{v}_e)$ wyeliminowano z powyższego równania za pomocą (u_e, v_e) , korzystając ze wzoru (4.10).

Równania (4.10) i (4.20) stanowią kompletny opis ewolucji warstwy wirowej dla zagadnienia R-T. Aby przedstawić je w formie bezwymiarowej, przyjęto za jednostkę długości λ_p , za jednostkę czasu $(\lambda_p / Ag)^{1/2}$, a współczynnik napięcia powierzchniowego σ unormowano względem $g(\rho_1 - \rho_2)\lambda_p^2$. Wzór (4.20) w bezwymiarowej formie ma postać:

$$\begin{aligned} \gamma_t = 2A \left[u_t x_e + v_t y_e - \frac{1}{2} \alpha \gamma \frac{u_e x_e + v_e y_e}{z_e z_e^*} + \frac{1}{8} \frac{\partial}{\partial e} \frac{\gamma^2}{z_e z_e^*} \right] + \\ + 2y_e - 2\sigma k_e + \frac{1}{2} \alpha \frac{\partial}{\partial e} \frac{\gamma^2}{z_e z_e^*} \end{aligned} \quad (4.22)$$

Równanie (4.22) przedstawia sobą równanie całkowe Fredholma drugiego rodzaju. Aby się o tym przekonać, należy w równaniu (4.22) pochodne prędkości u, v_t wyrazić przez γ i γ_t . Można tego dokonać różniczkując po czasie wzór (4.4). Przed różniczkowaniem wzoru (4.4) całkę występującą w tym wzorze regularyzowano, odejmując od niej całkę o znanej wartości głównej. Skorzystano z tożsamości [20, 30]:

$$P \int_0^1 \operatorname{ctg} \pi [z(e) - z(\tilde{e})] \frac{dz}{d\tilde{e}}(\tilde{e}) d\tilde{e} = 0 \quad (4.23)$$

Po odjęciu wzoru (4.23) od (4.4) wyrażenie na prędkość zespoloną przyjmuje postać:

$$\mathbf{q}^* = \frac{1}{2i} \int_0^1 \frac{\gamma(\tilde{e})z_e(e) - \gamma(e)z_e(\tilde{e})}{z_e(e)} \operatorname{ctg} \pi [z(e) - z(\tilde{e})] d\tilde{e} \quad (4.24)$$

Po zróżniczkowaniu względem czasu wyrażenia (4.24) otrzymujemy wyrażenia na u_t, v_t , które podstawione do wzoru (4.22) przekształcają go do następującego równania całkowego dla γ_t :

$$\gamma_t = A P \int_0^1 \gamma_t(\tilde{e}) B d\tilde{e} + r(x, y, u, v, \gamma) \quad (4.25)$$

gdzie P , jak przedtem oznacza wartość całki w sensie Cauchy'ego, B wyraża się za pomocą wzoru

$$B = -x_e \frac{\sinh 2\pi(y(e) - y(\tilde{e}))}{\cosh 2\pi(y(e) - y(\tilde{e})) - \cos 2\pi(x(e) - x(\tilde{e}))} + \\ + y_e \frac{\sin 2\pi(x(e) - x(\tilde{e}))}{\cosh 2\pi(y(e) - y(\tilde{e})) - \cos 2\pi(x(e) - x(\tilde{e}))}$$

a $r(\cdot)$ oznacza wyrażenie, które nie zależy od pochodnej γ_t .

Algorytm obliczeń numerycznych przebiega następująco: założmy, że znane są np. z warunku początkowego dla $t=0$ wartości $x(e), y(e), \gamma(e)$. Korzystając z równań (4.10) i (4.24), dokonujemy przesunięcia w czasie o krok czasowy Δt powierzchni rozdziału $x(e), y(e)$. Następnie obliczamy niejednorodny człon równania

(4.25) $r(x, y, u, v, \gamma)$ i rozwiązujemy iteracyjnie równanie całkowe (4.25) względem γ_t . Na końcu, znając już γ_t , dokonujemy aktualizacji wartości γ dla czasu $t + \Delta t$, co kończy jeden krok czasowy algorytmu.

Równania różniczkowe (4.10) rozwiązywane były metodą typu predyktor-korektor Adamsa–Multona czwartego rzędu. Zapewniało to odpowiednią szybkość obliczeń (3–4 razy szybciej niż z użyciem metody Rungego–Kutty tego samego rzędu). Ponieważ metody Adamsa–Multona nie są metodami samostartującymi, to do obliczenia pierwszych czterech kroków czasowych zastosowano metodę Rungego–Kutty piątego rzędu, wykorzystując procedurę RKF45 (pozwala rozwiązywać równania różniczkowe z zadaną dokładnością [65]). Całki we wzorach (4.23) i (4.24) zastąpiono sumą, korzystając ze wzoru trapezów (2.41). Wszelkie pochodne względem parametru e obliczano korzystając z funkcji sklepanych rzędu trzeciego. Korzystną cechą równania całkowego (4.25) jest to, że (por. praca [20]) ma ono zbieżny szereg Neumana. Do rozwiązania równania całkowego można więc wykorzystać schemat iteracyjny postaci $\gamma_t^{(k+1)} = L\gamma_t^{(k)} + r$, gdzie k oznacza kolejny numer iteracji, a $L(\cdot)$ jest operatorem całkowym. Jest to niezwykle korzystna własność prezentowanej metody, charakteryzująca się oszczędnością czasu obliczeń i pamięci komputera przy rozwiązywaniu równania. Jako kryterium zbieżności przyjęto normę średniokwadratową, $|\gamma_t^{(k+1)} - \gamma_t^{(k)}|_2 \leq 10^{-8}$. Dla przyspieszenia zbieżności procesu iteracyjnego stosowano w pierwszym kroku, dla otrzymania $\gamma_t^{(0)}$, wzór ekstrapolacyjny postaci:

$$\gamma_t^{(0)}(t + \Delta t) = 4\gamma_t(t) - 6\gamma_t(t - \Delta t) + 4\gamma_t(t - 2\Delta t) - \gamma_t(t - 3\Delta t) \quad (4.26)$$

Na ogół wystarczyły dwie iteracje, aby spełnione było narzucone kryterium zbieżności. W pracy [155] równanie całkowe opisujące intensywność warstwy wirowej zastąpiono układem równań algebraicznych, który rozwiązywano przez odwracanie macierzy. Wydłużyło to znacznie czas obliczeń i stawia odpowiednie wymagania pamięci komputera.

Jak widać, przedstawione powyżej wyprowadzenie równania opisującego zmiany intensywności warstwy wirowej w czasie jest stosunkowo żmudne, ale dokładna znajomość poszczególnych jego kroków ułatwia zaprogramowanie obliczeń. Uwydatnia różnice między prędkościami cząstki umieszczonej na warstwie (\tilde{u}, \tilde{v}) , prędkościami wartości głównej (u, v) oraz prędkościami granicznymi ośrodków (u_i, v_i) . Wyprowadzenie równania opisującego ewolucję intensywności warstwy wirowej między dwoma ośrodkami o różnych gęstościach jest zdecydowanie prostsze, jeżeli przyjąć, że α we wzorze (4.9) jest równa zero [123, 189]. Wprowadzenie parametru α pozwala jednak wyeliminować z równania (4.20) nieliniowy człon $\partial/\partial e (\gamma^2/z z_e^*)$ co jest niezwykle korzystne z punktu widzenia obliczeń numerycznych. Przez odpowiedni dobór wartości parametru α proces iteracyjny jest

szybciej zbieżny i same równania można rozwiązywać w dłuższym przedziale czasu. W pracy [91] Kerr sugerował, że najlepszą wartością parametru α jest $\alpha = -A^2$. W pracach [107, 108] autor niniejszej dysertacji, przez eksperyment numeryczny wykazał, że istnieją lepsze wartości tych współczynników i odpowiadają one $\alpha = -A/2$. Jest to ta wartość parametru α , przy której z równania (4.20) eliminuje się człon $\partial/\partial e (\gamma^2/z_e z_e^*)$. Trudności numeryczne wiążące się z nieliniowym członem $\partial/\partial e (\gamma^2/z_e z_e^*)$ oraz konieczność jego linearyzacji opisywane są również przez Tryggvasona [189], który do rozwiązania zagadnienia R-T używał metody siatkowej i przyjmował, że $\alpha = 0$.

Zwróćmy uwagę, że dla opisu ewolucji warstwy wirowej możemy się posłużyć warstwą dipolową, korzystając z równań (4.10) i (4.18) i eliminując wcześniej z równania (4.18) pochodną potencjału po czasie. W pewnych sytuacjach posługiwanie się w modelowaniu numerycznym warstwą dipolową, w miejsce warstwy wirowej, może dawać lepsze rezultaty numeryczne [18, 20, 101, 105].

4.3. WYBRANE FAKTY Z LINIOWEJ TEORII STABILNOŚCI

Założmy, że w chwili początkowej $t=0$ ciecze są w spoczynku. Dla $t>0$ krzywa rozdziału $y=0$ została zaburzona i zaburzenie ma postać: $y(x,t) = \epsilon(t) \cos Kx$. Z liniowej teorii stabilności wynika [29, 59], że amplituda zaburzenia $\epsilon(t)$, z pominięciem efektu napięcia powierzchniowego, będzie zachowywała się jak $\epsilon(t) = \epsilon(0) \cosh \omega t$, gdzie ω jest współczynnikiem wzmocnienia i wiąże się z liczbą falową K , w sposób następujący (związek dyspersyjny):

$$\omega^2 = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} K \quad (4.27)$$

Ze wzoru (4.27) widać, że dla $\rho_1 > \rho_2$ współczynnik wzmocnienia ω jest dodatni i tym większy, im dłuższa jest długość fali zaburzającej λ ($K = 2\pi/\lambda$) jest mniejsza. Powierzchnia rozdziału jest zawsze niestabilna. Jest to zasadniczy powód złego uwarunkowania zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej (w skończonym czasie otrzymujemy osobliwe rozwiązanie). W procesie obliczeniowym źródłem zaburzeń o dowolnie małej fali jest skończona reprezentacja liczby rzeczywistej w maszynie i proces zaokrągleń. Błędy te są wzmacniane i bardzo szybko przesłaniają wartości użyteczne obliczeń. Wprowadzenie do równań efektu napięcia powierzchniowego powoduje, że związek dyspersyjny przyjmuje postać:

$$\omega^2 = g \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} K - \frac{\sigma}{\rho_1 + \rho_2} K^3 \quad (4.28)$$

W tym przypadku niestabilność ma miejsce, gdy $\omega^2 > 0$, więc gdy długość fali zaburzającej jest większa od pewnej charakterystycznej długości λ_c :

$$\lambda_c > 2\pi \left[\frac{\sigma}{g(\rho_1 - \rho_2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.29)$$

Napięcie powierzchniowe stabilizuje więc zagadnienie R-T dla długości fal krótszych od λ_c . Można obliczyć najbardziej niestabilną długość fali, to jest taką, przy której ω^2 ma wartość największą ($d\omega^2/dK=0$). Jej długość równa się $\lambda_m = \sqrt{3}\lambda_c$. Dla tej wartości długość fali zaburzającej współczynnik wzmocnienia amplitudy wynosi

$$\omega^2 = \frac{2}{3\sqrt{3}\sigma} \frac{\sqrt{g(\rho_1 - \rho_2)}}{\rho_1 + \rho_2} \quad (4.30)$$

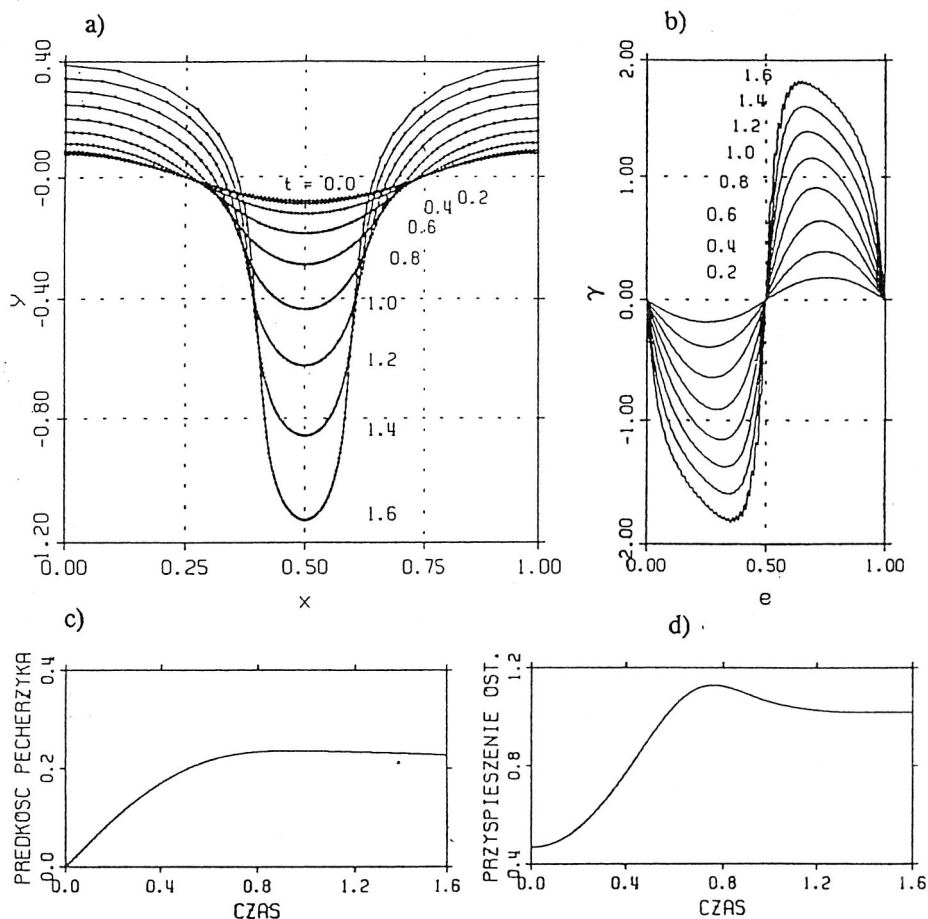
Na uwagę zasługuje fakt, że wartość współczynnika powierzchniowego σ ma niewielki wpływ na współczynnik wzmocnienia ω ($\omega \sim 1/(\sigma^{1/4})$). Być może jest to przyczyna, dla której napięcie powierzchniowe nie regularyzuje całkowicie zagadnienia R-T, a stabilizuje go w zakresie tzw. małej skali. Doświadczalnie obserwuje się, że napięcie powierzchniowe powoduje zmniejszenie się współczynnika wzmocnienia. Jednak na skutek działania napięcia powierzchniowego brak całkowitej stabilizacji zagadnienia [118].

Autor niniejszej rozprawy wykorzystał fakt stabilizującego działania napięcia powierzchniowego w zakresie fal krótkich do wytlumienia zaburzeń numerycznych i pokazał, że w warstwie wirowej, dla zagadnienia R-T, formuje się osobliwość w postaci ostrza, czyli punktu, w którym krzywizna doznaje skoku od plus do minus nieskończoności.

4.4. WYNIKI BADAŃ NUMERYCZNYCH DLA NIESTABILNOŚCI R-T METODĄ DYSKRETYCH WIRÓW

4.4.1. PRZYPADEK $A=1$ ($\rho_1/\rho_2 = \infty$)

Przypadek dla liczby Atwooda równej 1, $A=1$, odpowiada sytuacji, gdy ośrodek materialny o gęstości ρ_1 graniczy z próżnią. Ze względu na liczne prace analityczne jak również numeryczne [17, 18, 74, 138, 199, 201] jest to jeden z najdokładniej zbadanych przypadków niestabilności Rayleigha-Taylor. Może więc służyć jako test sprawdzający przydatność metody jak i poprawność programu oblicze-



Rys. 4.2. Wyniki numeryczne dla niestabilności Rayleigha-Taylor, $A=1$, $\alpha=-1$, $y(x,0)=\varepsilon \cos(2\pi x)$, $\varepsilon=0,5/2\pi$; a-sekwencja profili powierzchni $y(x)$; b-wykresy intensywności warstwy $\gamma(e)$; c-pędność pęcherzyka (dla punktu $x=0$) w zależności od czasu; d- przyspieszenie ostrza a/g (dla punktu $x=0,5$) w zależności od czasu

Fig. 4.2. Numerical results for Rayleigh-Taylor instability, $A=1$, $\alpha=-1$, $y(x,0)=\varepsilon \cos(2\pi x)$, $\varepsilon=0.5/2\pi$; a- sequences of interface profiles $y(x)$; b-plots of vortex-sheet strength $\gamma(e)$; c-a plot of the velocity vs time (for $x=0$ point) vs time; d-a plot of acceleration vs time for the spike (for $x=0.5$ point)

niowego. W obecnej pracy wyniki porównywano z pracami [17, 18, 138]. Na rys.4.2a przedstawiono sekwencję kształtów powierzchni rozgraniczającej. Do obliczeń przyjęto krok czasowy $\Delta t=0,002$ (w jednostkach bezwymiarowych), $N=120$ oraz wartość parametru $\alpha=-1$ (wzór (4.9)) (identycznie jak w pracach [17, 18]).

Liczbę wirów N jak i krok czasowy dobrano drogą eksperymentu numerycznego tak, że zwiększenie liczby wirów jak również zmniejszanie kroku czasowego nie wpływało na wyniki numeryczne. Przyjęcie dla $\alpha=-1$ oznacza, że cząstki umieszczone na krzywej rozdziału poruszają się jak cząstki ośrodka górnego. Tylko przy tej wartości parametru α możliwe było otrzymanie rozwiązań w tak długim przedziale czasu. Ośrodek materialny spadający w kierunku próżni (w otoczeniu punktu $x=0,5$) przyjmuje wydłużony, wąski kształt palca (ostrza), natomiast w otoczeniu punktu $x=0$, przyjmuje kształt kolisty (czasami mówi się, że przyjmuje kształt pęcherzyka [17, 18]). Na rys.4.2b przedstawiono zmiany intensywności $\gamma(e,t)$. Widać, że zmiany $\gamma(e,t)$ w okolicy $x=0,5$, przebiegają z upływem czasu coraz bardziej stromo [19] (zmiana z wartości ujemnych na dodatnie), krzywizna warstwy rośnie, a wiry w okolicy punktu $x=0,5$ zbliżają się na krzywej rozdziału do siebie coraz bardziej. W efekcie tego proces iteracyjny dla wyznaczenia γ_t (równanie (4.25)) przestaje być zbieżny. Na rys.4.2c. przedstawiono zależność prędkości pęcherzyka (punkt $x=0,0$) od czasu, a na rys.4.2d zależność przyspieszenia od czasu dla punktu $x=0,5$ (ostrza). Z badań analitycznych [68] wynika, że prędkość asymptotyczna pęcherzyka przyjmuje wartość $u_p=0,23$ [17]. Z obliczeń numerycznie uzyskano wartość 0,225. Wartość przyspieszenia ostrza dla czasu $t \in [0,8 \ 1,2]$ jest większa od przyspieszenia ziemskiego. Wynik ten potwierdzają również badania numeryczne innych autorów [17, 18, 138].

W celu jakościowej kontroli poprawności obliczeń monitorowano podczas obliczeń kilka niezmienników ruchu [20, 155, 158]. Były to: \bar{y} -średni poziom położenia powierzchni rozdziału, który powinien być zawsze równy zero, S - strumień masy przez powierzchnię, który też powinien być równy zero oraz E_c - energia całkowita zaburzonego przepływu, która powinna zachowywać stałą wartość przyjętą w chwili $t=0$:

$$\bar{y} = \int_0^1 y x_e de$$

$$S = - \int_0^1 \nabla \phi \cdot \mathbf{n} de \quad (4.31)$$

$$\frac{4 E_c}{\rho_1 + \rho_2} = \left(\int_0^1 \psi \gamma de + 2 A \int_0^1 \psi \phi_e de \right) + 2 A \int_0^1 y^2 x_e de$$

We wzorze na energię całkowitą E_c wyrażenie w nawiasie okrągłym reprezentuje energię kinetyczną, a człon po znaku dodawania energię potencjalną. Energia kinetyczna zaburzenia wyraża się jako:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_1 \int_{R_1} (u^2 + v^2) dA + \frac{1}{2} \int_{R_2} (u^2 + v^2) dA \quad (4.32)$$

gdzie całkowanie odbywa się po półmieskończonych obszarach R_1 i R_2 o szerokości 1 (długość fali zaburzającej) i obszarze powyżej (R_1) i poniżej (R_2) powierzchni rozdziału.

Korzystając z faktu, że $(u^2+v^2)=|\nabla \psi|^2$ oraz że funkcja prądu jest okresowa, całki we wzorze (4.32) można, na mocy wzorów Greena, zamienić na całki po krzywej L rozgraniczającej obszary o różnych gęstościach:

$$E_k = \frac{1}{2} \rho_1 \int_L \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} ds - \frac{1}{2} \rho_2 \int_L \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n} ds \quad (4.33)$$

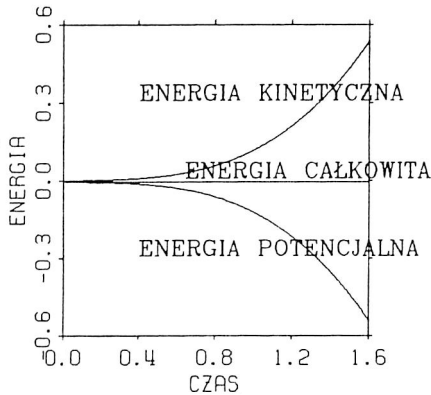
Funkcja prądu jest ciągłą przy przejściu przez krzywą L , a wartość potencjału ϕ , wyrażona jako średnia arytmetyczna potencjałów ϕ_1 i ϕ_2 , doznaje skoku (patrz wzór (4.6)). Korzystając z warunku Cauchy-Riemanna ($\partial \psi_i / \partial n = -\partial \phi_i / \partial s$, $i=1,2$)), wzoru (4.7) oraz podstawiając za ϕ_1 , $\phi_1 = [(\phi_1 + \phi_2)/2 - (\phi_2 - \phi_1)/2]$ i podobne wyrażenie dla ϕ_2 , po prostych przekształceniach i podzieleniu stronami przez $(\rho_1 + \rho_2)/4$ otrzymujemy wyrażenie w nawiasie okrągłym występujące we wzorze (4.31).

Energia potencjalna zaburzenia obliczona względem powierzchni poziomej $y=0$ wyraża się jako:

$$E_p = \rho_1 \int_0^1 \int_0^y y dy dx - \rho_2 \int_0^1 \int_0^y y dy dx = \frac{\rho_1 - \rho_2}{2} \int_0^1 y^2 x_e dx \quad (4.34)$$

Po podzieleniu stronami wzoru (4.34) przez $(\rho_1 + \rho_2)/4$ otrzymujemy wyraz poza nawiasem okrągłym we wzorze (4.31).

Kontrola niezmienników ruchu jest dobrym narzędziem diagnostycznym poprawności obliczeń. Zawsze pojawienie się nieregularności w rozwiązaniach, które wynikały z narastania błędów numerycznych dawały zmianę niezmienników ruchu.



Rys. 4.3. Zmiana energii kinetycznej, potencjalnej i całkowitej w zależności od czasu podczas ewolucji powierzchni rozdziału

Fig. 4.3. The variations of the kinetic, potential and total energies vs time during evolution of the interface

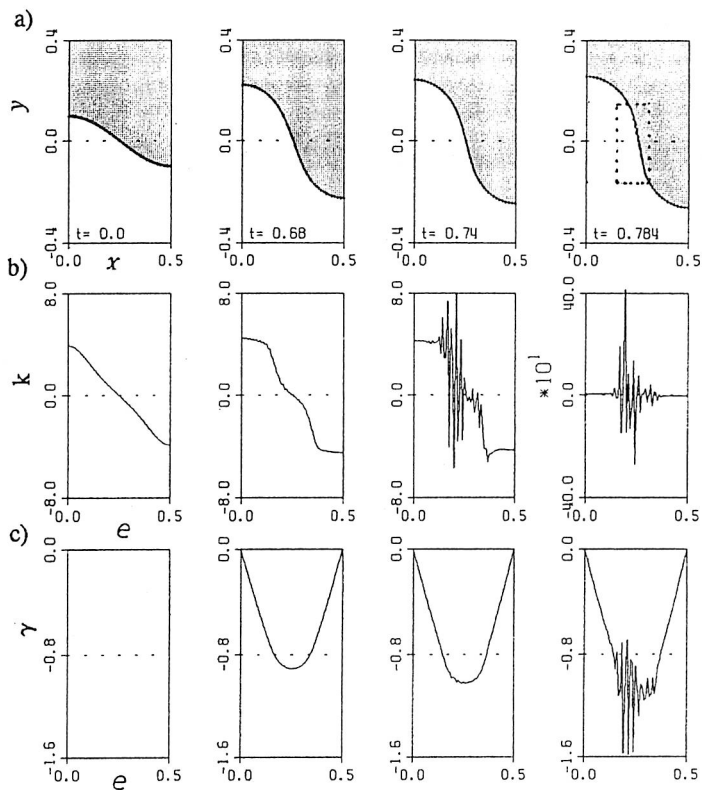
W trakcie obliczeń nie zmienniki ulegały zmianie w sposób następujący: \bar{y} zmieniało się od wartości 10^{-11} na początku obliczeń do wartości 10^{-5} w końcowym etapie obliczeń, a więc wtedy, gdy zaczęły pojawiać się widoczne zaburzenia rozwiązań błędami natury numerycznej, S pozostawało na poziomie 10^{-11} przez cały czas obliczeń, natomiast $\Delta E_c = E_c(t) - E_c(0)$ pod koniec obliczeń wynosiło 10^{-3} , $E_c(0) = -6.3 \cdot 10^{-3}$. Tak małe zmiany wartości zmienników świadczą o dobrych własnościach algorytmu obliczeniowego. Przebieg zmian

energii całkowitej, potencjalnej i kinetycznej pokazano na rys.4.3.

4.4.2. PRZYPADK $A < 1$, ($\rho_1/\rho_2 \neq \infty$)

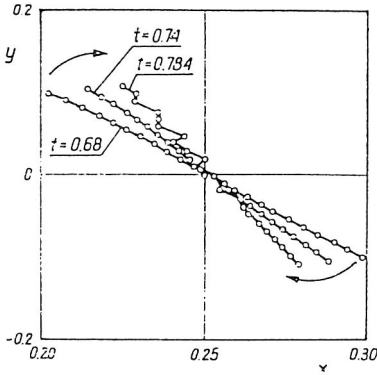
Mimo dobrej zgodności między wynikami numerycznymi, a badaniami analitycznymi i numerycznymi innych autorów dla przypadku $A=1$, algorytm opisany w podrozdz.4.2 całkowicie zawodzi dla liczby Atwooda $A < 1$, a więc gdy $\rho_1/\rho_2 \neq \infty$. Proces iteracyjny dla wyznaczenia γ_1 przestaje być zbieżny po kilkunastu krokach czasowych.

Na rys.4.4 przedstawiono wyniki obliczeń dla $A=0,0476$ ($\rho_1/\rho_2 = 1,1$). Na rys.4.4a przedstawiono profil powierzchni rozdziału między ośrodkami, a na rys.4.4b i rys.4.4c wykres krzywizny oraz zmianę intensywności γ w zależności od wartości parametru Lagrange'a e . Wykresy krzywizny warstwy wirowej wykorzystano do kontroli regularności rozwiązań. Chaotyczne, nieregularne, oscylacje pojawiły się na wykresie krzywizny już dla $t=0,74$. Powiększenie sekwencji fragmentu profilów, miejsca zaznaczonego na rys.4.4a ($t=0,784$) ramką, przedstawiono na rys.4.5. Wyraźnie widać, że wiry zaczynają się układać w sposób nieregularny. „Szum” na wykresie krzywizny pojawia się w pobliżu występowania maksimum intensywności warstwy wirowej γ , tzn. w miejscu, gdzie występuje maksymalna różnica wartości stycznych prędkości obu ośrodków. Jest to więc związane z niestabilnością Helmholtza [59]. Błędy numeryczne są wzmocniane najbardziej w miejscach, gdzie γ ma wartość maksymalną. W trakcie obliczeń źródłem przypa-



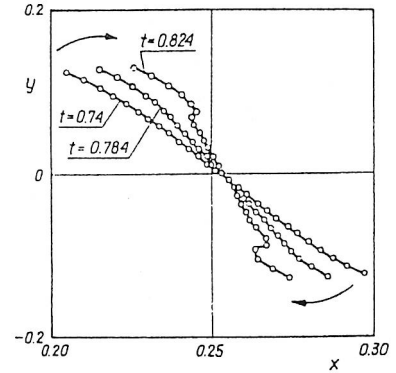
Rys. 4.4. Wyniki numeryczne dla liczby Atwooda $A=0,0467$ ($\rho_1/\rho_2=1,1$), $y(x,0)=0,1\cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$; a-profile powierzchni rozdziału w różnych chwilach; b- wykresy krzywizn w zależności od parametru Lagrange'a e ; c- wykresy intensywności warstwy γ (e);
 Fig. 4.4. Numerical results for Atwood number $A=0,0467$ ($\rho_1/\rho_2=1,1$), $y(x,0)=0,1\cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$; a-interface profiles at different moments; b-plots of the curvatures vs Lagrangian parameter e ; c-plots of vortex sheet γ (e)

dkowych zaburzeń o bardzo krótkiej fali jest proces zaokrąglenia liczb i ich skończona reprezentacja w maszynie [100, 193]. Zaburzenia te ze względu na związek dyspersyjny $\omega \sim 1/\lambda$ są wzmacniane i nakładają się na właściwe wyniki numeryczne. Jeżeli do równań opisujących zachowanie się warstwy wirowej wprowadzić napięcie powierzchniowe, to zgodnie z tym, co wynika z liniowej teorii stabilności (por. podrozdz. 4.4), współczynnik wzmocnienia dla fal o bardzo małych długościach powinien być ograniczony. Na rys.4.6 przedstawiono przebiegi krzywizny i zmiany intensywności warstwy wirowej dla warunków jak na rys.4.4, ale z włączonym efektem napięcia powierzchniowego – $\sigma=0,0005$. Po włączeniu do równań napięcia powierzchniowego „szum” na wykresie krzywizny nie pojawia się. Dzięki temu możemy prześledzić formowanie się osłabienia na profilu powierzchni rozgra-



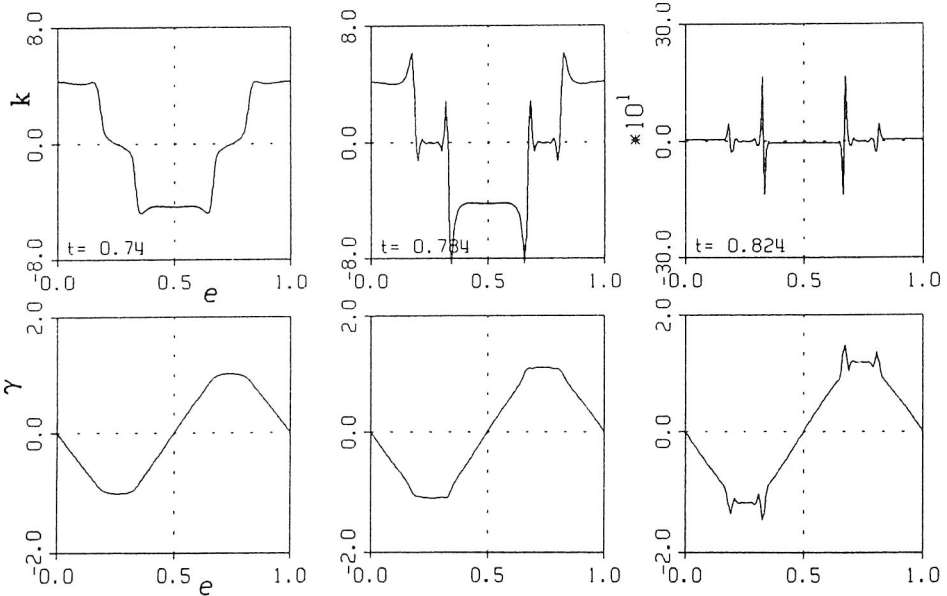
Rys. 4.5. Powiększone fragmenty powierzchni rozdziału, miejsce zaznaczone ramką na rys.4.4a, $t=0,784$

Fig. 4.5. Close-up of interface profiles marked by the frame at fig.4.4a, $t=0,784$



Rys. 4.7. Powiększone fragmenty powierzchni rozdziału z napięciem powierzchniowym, $\sigma=0,0005$

Fig. 4.7. Close-up interface profiles with surface tension effects $\sigma=0.0005$



Rys. 4.6. Wyniki numeryczne z włączonym efektem napięcia powierzchniowego, $\sigma=0,0005$; a- wykresy krzywizn $k(e)$ (czas pokazany w ramce); b- wykresy intensywności warstwy $\gamma(e)$

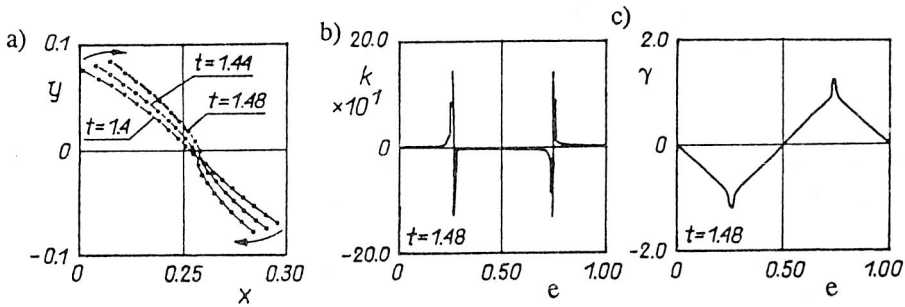
Fig. 4.6. Numerical results with surface tension effects $\sigma=0.0005$;

a-plots of the curvature (time is shown at the frame); b-plots vortex sheet intensity $\gamma(e)$

niczającej oba ośrodki. Przyjmuje ona postać ostrza co wyraźnie widać na powiększonych fragmentach powierzchni na rys.4.7. Jednocześnie na wykresach krzywizny (rys.4.6a) widać, że wartość krzywizny w tych punktach zmienia się gwałtownie od dużych wartości dodatnich do ujemnych. Jest to ten rodzaj osobliwości, który przewidują badania analityczno-numeryczne dla ewolucji warstwy wirowej [140, 136, 19].

Na wykresach intensywności warstwy $\gamma(e)$ (rys.4.6b, dla $t=0,824$) pojawiają się charakterystyczne ostre koniuszki. Osobliwość, w postaci załamania (ostrza) na warstwie wirowej, z charakterystycznymi koniuszkami na przebiegu intensywności warstwy otrzymał w badaniach numerycznych również Krasny [100], dla zagadnienia Kelvina–Helmholta. Aby wyeliminować błędy numeryczne nakładające się na właściwe wyniki numeryczne zastosował odpowiednią technikę filtracyjną z wykorzystaniem szybkiej transformaty Fouriera.

Interesującym faktem, który również zaobserwował Krasny [100] jest to, że dla dostatecznie małej amplitudy początkowego zaburzenia $\epsilon=0,01$, na profilu, w jednym półokresie powstaje tylko jeden punkt załamania (rys.4.8), a nie dwa, jak to przedstawiono na rys.4.6 i 4.7.



Rys. 4.8. Wyniki numeryczne dla $A=0,0467$ ($\rho_1/\rho_2=1,1$), $y(x,0)=0,01\cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$;
 a-sekwencja powiększonych fragmentów powierzchni rozdziału;

b-wykres krzywizny dla czasu $t=1,48$; c-wykres intensywności $\gamma(e)$, $t=1,48$

Fig. 4.8. Numerical results for $A=0.0467$ ($\rho_1/\rho_2=1.1$), $y(x,0)=0.01 \cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$;

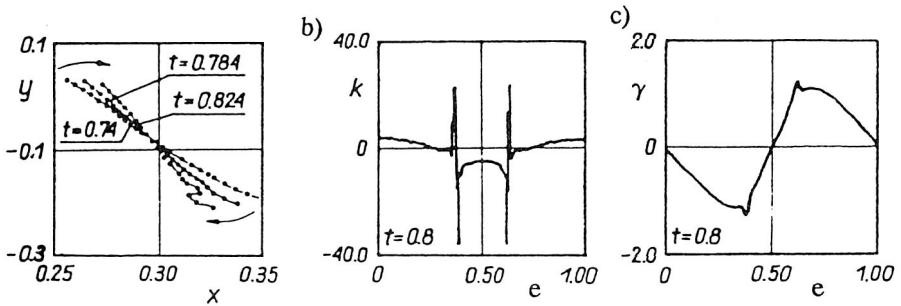
a-sequence of the close-up interface profiles

b-plot of the curvatures for time $t=1.48$; c-plot of the intensity $\gamma(e)$, $t=1.48$

Warto zauważyć, że gdy liczba Atwooda wzrasta, a więc gdy różnica gęstości pomiędzy ośrodkami jest większa, punkt osobliwości – załamania się warstwy wirowej – przesuwa się bliżej punktu symetrii $x=0,5$. W granicznym przypadku dla $A=1$ punkt osobliwy występuje dokładnie dla punktu $x=0,5$ [19].

Na rys.4.9 przedstawiono sekwencję powiększonych fragmentów powierzchni rozdziału oraz wykres krzywizny i intensywności warstwy dla $A=0,5$. Porównując

wyniki przedstawione na rys.4.8 z wynikami z rys.4.9 łatwo zauważyć, że ostrze na profilu powierzchni tworzy się bliżej punktu $x=0,5$.



Rys. 4.9. Wyniki numeryczne dla liczby Atwooda $A=0,5$ ($\rho_1/\rho_2=3$), $\alpha=-0,25$, $\varepsilon=0,1$;
 a- powiększone fragmenty powierzchni rozdziału; b- wykres krzywizny $k(e)$ dla czasu $t=0,8$;
 c- wykres intensywności warstwy $\gamma(e)$, $t=0,8$

Fig. 4.9. Numerical results for Atwood number $A=0.5$ ($\rho_1/\rho_2=3$), $\alpha=-0.25$, $\varepsilon=0.1$;
 a- close-up fragments of interface profiles; b- plot of the curvature $k(e)$ for time $t=0.8$;
 c- plot of the vortex sheet intensity $\gamma(e)$, $t=0.8$

Należy podkreślić, że wartość współczynnika napięcia powierzchniowego, którą użyto w obliczeniach była kilka rzędów mniejsza od realnej wartości fizycznej. Została użyta tylko jako rodzaj filtru, pozwalającego wytłumić najbardziej niestabilne zaburzenia numeryczne mające swoje źródło w skończonej reprezentacji liczb w komputerze.

Wartość współczynnika σ dobrano doświadczalnie. Zależy ona od liczby wirów użytych do obliczeń. Im większa liczba wirów tym wartość współczynnika powinna być mniejsza. Dla większej liczby wirów ($N=160$) również otrzymano podobne wyniki jak zaprezentowane powyżej, jednak w tym przypadku $\sigma=0,0001$. Dobrze znany jest fakt, że zbyt mała liczba wirów w obliczeniach daje pozorny efekt napięcia powierzchniowego [190]. Stąd też w obliczeniach z mniejszą liczbą wirów nieregularności i chaotyczne położenia wirów mogą zaznaczać się w wynikach znacznie później.

Prezentowane wyniki obliczeń prowadzono na liczbach o podwójnej precyzji (14 miejsc znaczących po przecinku). Gdy obliczenia są prowadzone na liczbach o pojedynczej precyzji liczb (7 znaczących cyfr po przecinku), to „szumy” na wykresie krzywizny pojawiają się znacznie wcześniej.

4.4.3. WYNIKI DLA RÓWNAŃ ZREGULARYZOWANYCH

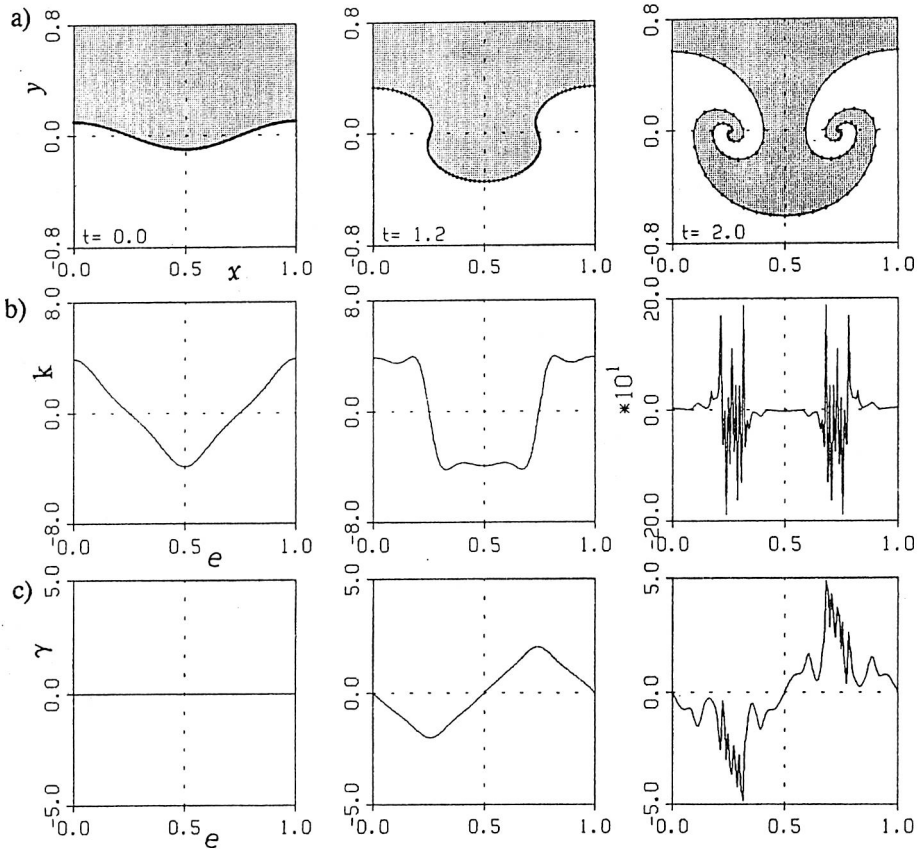
Fakt powstawania osobliwości w rozwiązaniach opisujących realne zjawisko fizyczne jest w praktyce nie do przyjęcia. Świadczy o tym, że przyjęty model matematyczny jest niekompletny i wymaga uzupełnienia. Może ono polegać na włączeniu dodatkowych efektów fizycznych, jak np. lepkości, skończonej grubości warstwy. Można też próbować dokonać niewielkiej zmiany równań wyjściowych, jak to opisano w podrozdz.2.5.1, przez wprowadzenie do równań opisujących pole prędkości parametru δ^2 . Modyfikacja równań za pomocą parametru δ^2 powoduje zmianę niepożądanego związku dyspersyjnego pomiędzy współczynnikiem wzmożenia amplitudy zaburzenia a jego długością fali (patrz podrozdział 2.5.1). W wypadku niestabilności R-T efekt taki daje wprowadzenie do równań lepkości cieczy [29]. Dlatego też regularyzacji za pomocą parametru δ można interpretować jako próbę symulacji lepkości płynów. Równania opisujące prędkość indukowaną przez warstwę wirową mają teraz postać (porównaj podrozdz.2.5.1):

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= -\frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\gamma(e', t) \sinh 2\pi(y(e) - y(e'))}{\cosh 2\pi(y(e) - y(e')) - \cos 2\pi(x(e) - x(e')) + \delta^2} de \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{\gamma(e', t) \sin 2\pi(x(e) - x(e'))}{\cosh 2\pi(y(e) - y(e')) - \cos 2\pi(x(e) - x(e')) + \delta^2} de \end{aligned} \quad (4.35)$$

Zmodyfikowane wyrażenia na prędkość (4.35) wykorzystano do obliczenia pochodnych u_x , v_x występujących w równaniu całkowym (4.22) Fredholma dla γ_x .

Poniżej przedstawiono wyniki tylko dla wartości parametru $\delta^2=0,1$ natomiast bardziej szczegółowe badania i wyniki numeryczne wpływu wartości parametru δ^2 zamieszczono w następnym rozdziale.

Na rys.4.10 przedstawiono wyniki obliczeniowe dla $A=0,0476$ ($\rho_1/\rho_2=1,1$) podobnie jak na rys.4.4, ale dla tego przykładu $\delta^2=0,1$, oraz $\sigma=0,0005$. Przy tak małej wartości współczynnika napięcia powierzchniowego nie zauważono jego wpływu na szybkość ewolucji. Włączenie jednak napięcia powierzchniowego tłumilo wyraźnie wzrost błędów numerycznych i pozwoliło na obserwację ewolucji powierzchni w znacznie dłuższym przedziale czasu. Widać charakterystyczne powstawanie struktur spiralnych po obu stronach osi symetrii $x=0,5$. „Szum” na wykresie krzywizny pojawia się na skutek zbytniego zbliżania się wirów do siebie w zwijającym się fragmencie warstwy wirowej. Zjawisku temu sprzyja nieliniowy charakter równania (4.25) opisującego ewolucję intensywności warstwy wirowej. Jak pokazemy w następnym podrozdziale linearyzacja tego równania spowoduje, że nieregularności w przebiegu krzywizny pojawiają się znacznie później.

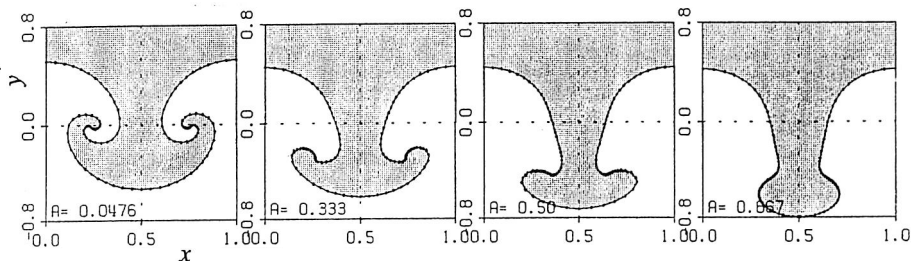


Rys. 4.10. Wyniki numeryczne dla równań zregularizowanych, $\delta^2=0,1$, $A=0,00476$, $\sigma=0,0005$, z warunkami początkowymi jak na rys.4.4; a- sekwencja profili powierzchni rozdziału $y(x,t)$; b-sekwencja wykresów krzywizny $k(e)$; c-sekwencja wykresów intensywności warstwy wirowej $\gamma(e)$

Fig. 4.10. Numerical results for regularized equations, $\delta^2=0.1$, $A=0.00476$, $\sigma=0.0005$, with boundary equations as in fig.4.4; a-time sequence of interface profiles $y(x,t)$; b-sequence of the interface curvature $k(e)$; c-sequence of the vortex sheet intensity $\gamma(e)$

Na rys.4.11 przedstawiono profile powierzchni dla różnych ilorazów gęstości w tym samym bezwymiarowym czasie. Z wykresów wynika, że im większa różnica gęstości, tym podatność warstwy wirowej na zwijanie jest mniejsza. Gdy różnica gęstości pomiędzy płynem górnym i dolnym jest mała (iloraz gęstości jest bliski jedności) tworzą się charakterystyczne struktury spiralne. Ośrodek lżejszy, który porusza się do góry w kierunku pionowym i ośrodek cięższy poruszający się do dołu tworzą struktury spiralne prawie identyczne. W granicznym przypadku dla $A=0$ są one identyczne. Przy dużym ilorazie gęstości płyn bardziej gęsty, który

opada w kierunku lżejszego zawęża się tworząc charakterystyczne „kuliste” zakończenie, które zanika i przechodzi w „palec”, gdy iloraz gęstości płynów dąży do nieskończoności. Ośrodek lżejszy porusza się w kierunku ośrodka cięższego tworząc powierzchnię kolistą (pęcherzyk).



Rys. 4.11. Wykresy profili powierzchni rozdziału dla różnych ilorazów gęstości w tym samym bezwymiarowym czasie $t=1,8$, $y(x, 0)=0,1 \cos 2\pi x$, $\gamma(x, 0)=0$, $N=120$, $\sigma=0,0005$; a - $A=0,0476$ ($\rho_1/\rho_2 = 1,1$); b - $A=0,333$ ($\rho_1/\rho_2 = 2$); c - $A=0,5$ ($\rho_1/\rho_2 = 3$); d - $A=0,6666$ ($\rho_1/\rho_2 = 5$)

Fig. 4.11. Plots of the interface profiles for different ratio density

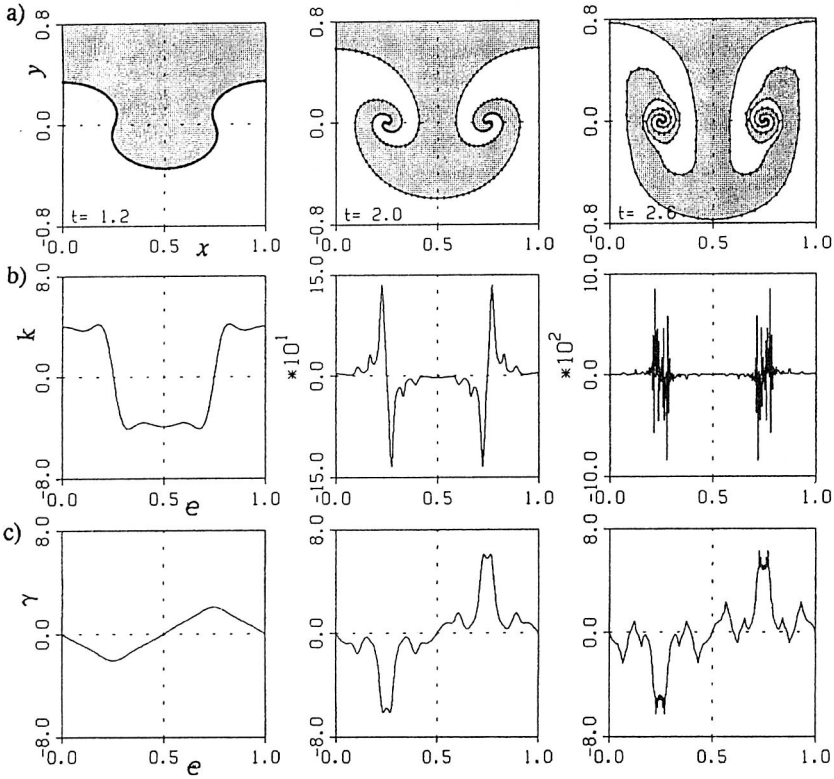
at the same non-dimensional time $t=1.8$, $y(x, 0)=0.1 \cos 2\pi x$, $\gamma(x, 0)=0$, $N=120$, $\sigma=0.0005$; a - $A=0.0476$ ($\rho_1/\rho_2 = 1.1$); b - $A=0.333$ ($\rho_1/\rho_2 = 2$); c - $A=0.5$ ($\rho_1/\rho_2 = 3$); d - $A=0.6666$ ($\rho_1/\rho_2 = 5$)

4.4.4. PRZYPADEK $A=0$ (APROKSYMACJA BOUSSINESQA)

Przy małej różnicy gęstości między ośrodkami, a więc gdy $\rho_1/\rho_2 \rightarrow 1$, równanie opisujące ewolucję intensywności warstwy można znacznie uprościć stosując tzw. aproksymację Boussinesqa [17, 189]. Zakłada się, że $A \rightarrow 0$ oraz że przyspieszenie ziemskie $g \rightarrow \infty$ tak, że iloczyn Ag dąży do skończonej granicy, równej w naszym wypadku 1. W miejsce równania całkowego Fredholma II-go rodzaju (4.22) otrzymuje się liniowe równanie różniczkowe postaci ($\alpha=0$):

$$\gamma_t = 2\gamma_e - 2\sigma k_e \quad (4.36)$$

Obliczenia z równaniem (4.36) przebiegają dużo szybciej (nie ma potrzeby iteracyjnego rozwiązywania równania całkowego dla γ_t). Ze względu na to, że równanie ewolucji warstwy wirowej jest liniowe, można było prześledzić rozwiązania dla znacznie dłuższego czasu. Wyniki przedstawiono na rys.4.12. Widać wyraźnie ukształtowaną strukturę wirową po obu stronach pionowej osi symetrii dla $t=2,6$. Gdy porównamy wykresy powierzchni z rys.4.12 z wykresami rozwiązań pełnych równań nieliniowych z rys. 4.10, dla których liczba Atwooda



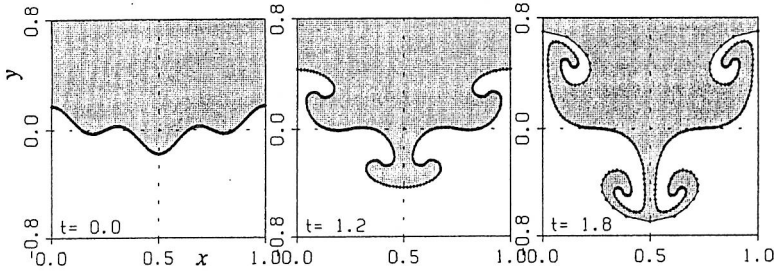
Rys. 4.12. Wyniki numeryczne dla $A=0$ (aproxymacja Boussinesq), $\delta^2 = 0,1$, $\sigma=0,0005$, $N=200$.
 Zaburzenie początkowe jak na rys.4.4, $y(x,0)=0,1 \cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$;
 a- sekwencja profili powierzchni rozdziału; b- wykresy krzywizny $k(e)$;
 c- wykresy intensywności warstwy $\gamma(e)$

Fig. 4.12. Numerical results for $A=0$ (Boussinesq approximation), $\delta^2 = 0,1$, $\sigma=0,0005$, $N=200$.
 Initial disturbance as at fig.4.4, $y(x,0)=0,1 \cos 2\pi x$, $\gamma(x,0)=0$;
 a- sequence of interface profiles; b- plots of curvature $k(e)$;
 c- plots of vortex sheet intensity $\gamma(e)$

była równa $A=0,0476$ ($\rho_1/\rho_2=1,1$), to zauważymy, że profil powierzchni jest dla czasów $t=1,2$, i $t=2$ prawie identyczny. Efekty nieliniowe przejawiają swój wpływ w końcowej fazie ewolucji, powodując dla czasów $t=2$ nieregularne oscylacje na wykresie krzywizny i intensywności warstwy $\gamma(e)$ (patrz rys.4.10. b,c). Liniowa postać tego równania (4.36) pozwala na znacznie dłuższe śledzenie rozwiązań.

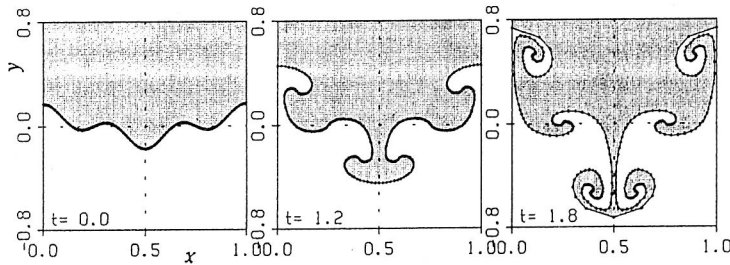
W rzeczywistym eksperymencie trudno sobie wyobrazić sytuację, że warunek początkowy będzie miał postać dokładnie określoną wzorem matematycznym. Najczęściej zaburzenia początkowe mają charakter losowy. Eksperymenty poka-

zują jednak, że nawet przy losowym zaburzeniu obserwuje się powstawanie bardzo podobnych, typowych dużych struktur. Przez badanie ewolucji powierzchni dla określonych warunków początkowych można lepiej zrozumieć formy powstające w warunkach rzeczywistych. Poniżej (rys.4.13) przedstawiono rozwiązania dla zaburzenia początkowego będącego sumą dwóch częstotliwości z odpowiednio



Rys. 4.13. Ewolucja powierzchni rozdziału dla zaburzenia początkowego o dwóch częstotliwościach: $y(x,0)=0,1 \cos 2\pi x+0,07 \cos 6\pi x$, $N=400$, $A=0$, $\sigma=0$

Fig. 4.13. Evolution of the interface profiles for initial disturbance with two frequencies: $y(x,0)=0.1 \cos 2\pi x+0.07 \cos 6\pi x$, $N=400$, $A=0$, $\sigma=0$



Rys. 4.14. Ewolucja powierzchni rozdziału dla zaburzenia początkowego o dwóch częstotliwościach: $y(x,0)=0,1 \cos 2\pi x+0,07 \cos 6\pi x$, $N=400$, $A=0$, z napięciem powierzchniowym $\sigma=0,001$

Fig. 4.14 Time evolution of interface profiles for initial disturbance with two frequencies: $y(x,0)=0.1 \cos 2\pi x+0.07 \cos 6\pi x$, $N=400$, $A=0$, $\sigma=0$, and with surface tension $\sigma=0.001$

dobranymi amplitudami. Jeżeli przyjmiemy, że współczynnik napięcia powierzchniowego jest równy zero ($\sigma=0$), to z równania (4.36) wynika, że ekstremum szybkości zmian cyrkulacji w czasie występuje w punktach, gdzie y_c ma ekstremum, czyli w punktach, w których $\partial^2 y / \partial x^2$ równa się zero. Są to punkty przegięcia powierzchni rozdziału. Na rys.4.13 przedstawiono wyniki ewolucji powierzchni, która w chwili początkowej zaburzona była falą: $y(x,0)=\varepsilon_1 \cos 2\pi x + \varepsilon_2 \cos 6\pi x$, gdzie wartości ε_1 i ε_2 były dobrane tak, aby funkcja $y(x,0)$ miała w jednym okresie trzy

punkty przegięcia [8, 13]. Z rysunku widać, że w punktach tych następuje kumulacja cyrkulacji, która daje charakterystyczną formę powierzchni rozdziału często obserwowaną w życiu codziennym, gdy nieco cięższa ciecz zostaje wrzucona do cieczy lżejszej.

Jeżeli włączymy efekt napięcia powierzchniowego z odpowiednio dużą wartością współczynnika $\sigma = 0,001$, to, jak można zauważyć na rys.4.13, napięcie powierzchniowe zapobiega powstaniu jednej ze struktur wirowych dla $y=0$. Wynik ten, obrazujący działanie napięcia powierzchniowego, jest w dobrej zgodności jakościowej z wynikami numerycznymi prezentowanymi przez Daley'a, które zostały otrzymane poprzez rozwiązywanie równań Naviera-Stokesa metodą „cząstki w komórce” [56].

4.5. UWAGI PODSUMOWUJĄCE OBLICZENIA DLA ZAGADNIENIA RAYLEIGHA-TAYLORA

Przedstawiona metoda dyskretnych wirów, odnosząca się do modelowania ruchu ostrej granicy rozdziału między dwoma ośrodkami znajduje zastosowanie wszędzie tam, gdzie lepkość cieczy można w początkowych etapach ewolucji pominąć, ruch cieczy uważać za potencjalny, a powierzchnię rozdziału ośrodków traktować jako nieskończenie cienką. Wykorzystywana jest w modelowaniu pewnych szczególnych zadań występujących w hydromechanice, np. zagadnienia niestabilności powierzchni, ruchu fal powierzchniowych itp. Przyjęte założenia upraszczające powodują, że zagadnienie początkowe dla warstwy wirowej jest źle uwarunkowane i prowadzi w skończonym czasie do rozwiązań osobliwych. Wymaga więc regularyzacji. Napięcie powierzchniowe stabilizuje zagadnienie w tzw. małej skali i w obecnej pracy wykorzystano je do wy tłumienia wzrostu błędów numerycznych, wynikających ze skończonej reprezentacji liczb rzeczywistych w komputerze. Dało to możliwość zaobserwowania formowania się osobliwości w rozwiązaniach. Powstawanie osobliwości jest główną przyczyną, z powodu której algorytm metody wirów zaproponowanej przez Bakera, Meirona i Orszaga [17, 18, 20] zawodzi dla liczby Atwooda $A < 1$. Regularyzacja polegająca na wprowadzeniu do wzoru prawa Biota-Savarta parametru δ jest zabiegiem czysto formalnym i łatwym w realizacji. Można próbować nadać jej interpretację fizyczną i traktować jako próbę symulacji lepkości cieczy (patrz podrozdz. 2.5.1 i rozdział następny). Pozwala na uzyskiwanie realistycznych wyników.

Metodami alternatywnymi do zaprezentowanej metody całkowitej, zwanej niekiedy metodą sumowania bezpośredniego są metody siatkowe, np. metoda „wiru w komórce” [189], które należą do metod bardziej uniwersalnych i pod względem wykorzystania czasu obliczeniowego komputera bardziej ekonomicznymi. Jednak metody bezpośrednio, właśnie ze względu na brak siatki numerycznej, oferują

bardziej wyrafinowane narzędzie do badania formowania się osobliwości w rozwiązaniach. Dają możliwość wglądu w charakter powstających osobliwości i podsuwają sposoby regularyzacji zagadnienia. Pozwalają na precyzyjne śledzenie ewolucji, drobnych, złożonych elementów powierzchni, jak to zostanie przedstawione w następnym rozdziale na przykładzie ruchu pęcherzyka płynu w polu grawitacyjnym.

5. RUCH I DEFORMACJA DWUWYMIAROWEGO PĘCHERZYKA

Jedno z ważniejszych zagadnień wiążących się z mechaniką kropli (pęcherzyka) odnosi się do deformacji i ruchu powierzchni ograniczającej pęcherzyk. W wielu dziedzinach, np. w mechanice cząstek krwi, w fizyce atmosfery, w technice odlewniczej, ruch pęcherzyka wywołany jest różnicą gęstości płynu wewnątrz i na zewnątrz pęcherzyka oraz działaniem przyspieszenia ziemskiego. Bardzo często jest tak, że płyn zawarty wewnątrz pęcherzyka jest lżejszy niż płyn otaczający pęcherzyk i jego powierzchnia podlega klasycznej niestabilności Rayleigha-Taylor. Ruch pęcherzyka odbywa się w warunkach „dalekich od równowagi” [124]. Można się więc spodziewać, że podczas ruchu powierzchnia będzie doznawać „dziwnych” deformacji zależnych od warunków początkowych, a forma końcowa pęcherzyka będzie całkowicie różna od swojej formy początkowej. W takich przypadkach mówi się o niestabilności morfologicznej [124, 173], który to termin pojawia się często w pracach dotyczących niestabilnego, dendrytycznego wzrostu kryształu.

Badania nad ruchem dwuwymiarowego pęcherzyka umożliwiły przeanalizowanie wpływu parametru δ^2 użytego do regularyzacji zagadnienia. Równania opisujące ruch pęcherzyka są prostsze i łatwo jest pewnym wielkościom nadać odpowiednią interpretację. Aby uniknąć kłopotów związanych z nieliniowością równania ewolucji warstwy wirowej, o których wspomniano w rozdz. 4.4.4 przyjęto, że różnica gęstości płynów wewnątrz i na zewnątrz pęcherzyka jest niewielka i można zastosować aproksymację Boussinesqa. Pomimo uproszczenia, przypadek taki ma znaczenie praktyczne. W wielu zagadnieniach różnica gęstości płynu wewnątrz pęcherzyka i płynu otaczającego jest rzeczywiście niewielka. Z bardziej znanych przykładów można wymienić pęcherzyk z ogrzanym powietrzem zwany termikiem [171, 3]. Jak wykazują obliczenia z poprzedniego rozdziału dla ilorazu gęstości rzędu $\sim 1,1$ aproksymacja Boussinesqa daje identyczne wyniki jak dla pełnych równań nieliniowych.

5.1. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA. RÓWNANIA RUCHU

Zakładamy jak poprzednio, że płyny są nielepkie i nieściśliwe, ruch płynu ma potencjał prędkości i jest dwuwymiarowy. W prostokątnym układzie współrzędnych (x, y) powierzchnia pęcherzyka opisywana będzie parametrycznie $(x(e, t), y(e, t))$, gdzie t jak poprzednio, oznacza czas, a e jest parametrem rzeczywistym $e \in [0, 1]$, który spełnia również rolę zmiennej Lagrange'a. Powierzchnię rozdziału można traktować jak warstwę wirową. Odpowiednikami wzorów (4.35) i (4.36) są równania:

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(e', t) (y(e, t) - y(e', t))}{r^2 + \delta^2} de' \quad (5.1)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \frac{\gamma(e', t) (x(e, t) - x(e', t))}{r^2 + \delta^2} de' \quad (5.2)$$

$$\frac{\partial \gamma}{\partial t} = 2 \frac{\partial \gamma}{\partial e} \quad (5.3)$$

gdzie $r^2 = (x(e, t) - x(e', t))^2 + (y(e, t) - y(e', t))^2$, a $\gamma(e, t)$ jak we wzorze (4.4) jest intensywnością w zmiennych Lagrange'a. Obliczenia przebiegały według algorytmu numerycznego opisanego w podrozdziale 4.2. Zastosowano identyczną aproksymację numeryczną jak w rozdz. 4: całki zastąpiono sumami na przemiennym układzie punktów (podrozdział 2.7). W wyniku tego otrzymano następujący układ równań opisujący trajektorie wirów umieszczonych na warstwie wirowej:

$$\frac{dx_i}{dt} = -\frac{h}{\pi} \sum_{\substack{k \\ k+i=\text{liczby nieparzyste}}}^N \frac{\gamma_k (y_i - y_k)}{r_{ik}^2 + \delta^2} \quad (5.4)$$

$$\frac{dy_i}{dt} = \frac{h}{\pi} \sum_{\substack{k \\ k+i=\text{nieparzyste}}}^N \frac{\gamma_k (x_i - x_k)}{r_{ik}^2 + \delta^2} \quad (5.5)$$

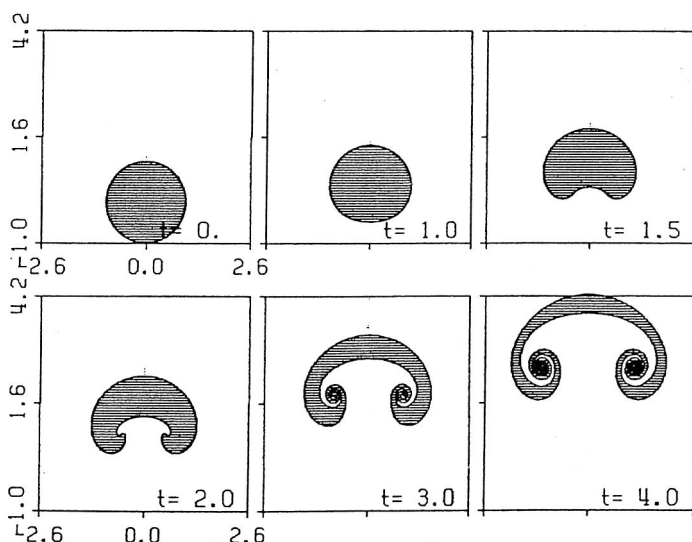
$$\frac{d\gamma_i}{dt} = 2 \frac{d\gamma_i}{de} \quad (5.6)$$

gdzie $(x_i, y_i) = (x(e_i, t), y(e_i, t))$, $e_i = ih$, $h=1/N$, N -liczba cząstek na warstwie. Pochodną względem parametru e obliczano korzystając z funkcji sklepanych rzędu trzeciego, co zapewnia dokładność rzędu $O(h^3)$ [183]. Układ równań różniczkowych rozwiązywano, jak poprzednio, metodą predyktor-korektor typu Adamsa – Multona rzędu czwartego. Liczba wirów jakie użyto w obliczeniach wahała się, w zależności od złożoności kształtu pęcherzyka, od 300 do 800. Do kontroli poprawności obliczeń używano dwóch niezmienników ruchu: pola pęcherzyka S oraz strumienia masy przez granicę pęcherzyka Q :

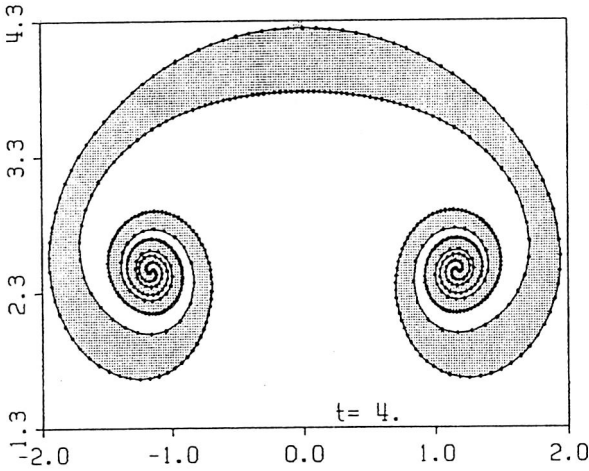
$$S = \int_0^1 y x_e de, \quad Q = \int_0^1 \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} de \quad (5.7)$$

Jeżeli podczas obliczeń iloraz $(S_p - S)/S_p$, S_p – początkowa wartość pola pęcherzyka, wzrastał ponad 0,025 lub Q osiągało wartość 0,05, obliczenia przerywano. Podanym wartościom zmian niezmienników odpowiadało pojawienie się ledwo widocznych zaburzeń regularności w położeniu wirów na krzywej opisującej kształt pęcherzyka.

5.2. WYNIKI NUMERYCZNE DLA PĘCHERZYKA KOŁOWEGO



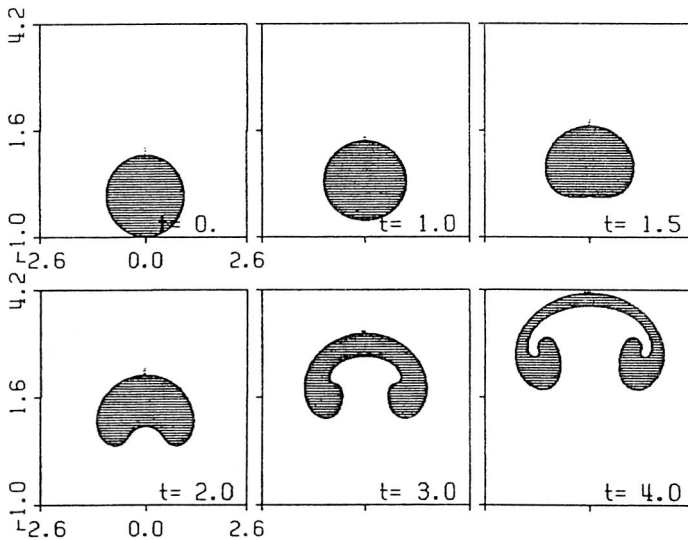
Rys. 5.1. Ewolucja cylindrycznego pęcherzyka $\delta^2=0,01$, $N=600$
 Fig. 5.1. Time evolution of cylindrical bubble, $\delta^2=0,01$, $N=600$



Rys. 5.2. Powiększona ramka z pęcherzykiem rys. 5.1 dla czasu $t=4$, $\delta^2=0,01$
 Fig. 5.2 Close-up of the frame with the bubble from the fig. 5.1 for time $t=4$, $\delta^2=0,01$

Im mniejsza wartość współczynnika δ^2 , tym podatność warstwy wirowej na zwi-

Badania nad ruchem pęcherzyka kołowego były prowadzone również przez innych autorów [3, 137]. Przypadek ten umożliwia sprawdzenie poprawności kodu programu. Ponadto pozwalał na zbadanie wpływu wartości współczynnika δ^2 użytego do regularyzacji zagadnienia. Na rys.5.1 przedstawiono rozwiązania obrazujące fazy ruchu pęcherzyka dla wartości parametru $\delta^2=0,01$. Widać wyraźnie formowanie się struktury spiralnej po obu stronach pionowej osi symetrii. Takie struktury otrzymywane były przez innych autorów jak i obserwowane w ekspe-



Rys. 5.3. Ewolucja pęcherzyka cylindrycznego dla wartości parametru $\delta^2=0,1$
 Fig. 5.3. Evolution of the cylindrical bubble for δ^2 value as $\delta^2=0,1$

nie się wzrasta, tzn. w tym samym czasie liczba zwojów struktury spiralnej osiąga większą liczbę (patrz Krasny [98, 99], Anderson [3], Kerr [91]). Duże wartości parametru δ^2 ($\sim 0,1$) zapobiegają zwiżaniu się warstwy wirowej. Jeżeli wprowadzenie do równań parametru δ^2 będziemy interpretować jako próbę symulacji lepkości cieczy, to takie zachowanie pęcherzyka jest zgodne z intuicyjnym pojmowaniem działania lepkości. Na rys. 5.3 przedstawiono sekwencję rozwiązań obrazującą ewolucję kształtów pęcherzyka dla $\delta^2=0,1$.

Aby lepiej zilustrować wpływ parametru δ^2 na rozwiązania, na rys.5.4 przedstawiono rozwiązania obrazujące ewolucję pęcherzyka dla trzech różnych wartości parametru δ^2 , $\delta^2=0,01$ (pierwsza kolumna), $\delta^2=0,04$ (druga kolumna) oraz $\delta^2=0,1$ (trzecia kolumna). Klatki w tych samych rzędach odnoszą się do tych samych bezwymiarowych czasów, ale z różnymi wartościami parametru δ^2 . Wraz ze zmianą wartości δ^2 zewnętrzne wymiary pęcherzyka zmieniają się bardzo niewiele. Można zauważyć, że prędkość unoszenia się pęcherzyka wraz ze wzrostem wartości parametru δ^2 nieznacznie maleje. Wartość parametru δ^2 istotnie natomiast wpływa na sposób formowania się struktury spiralnej. Widać wyraźnie, że im mniejsza wartość parametru δ^2 , tym liczba zwojów spirali osiągnięta w tym samym czasie rośnie.

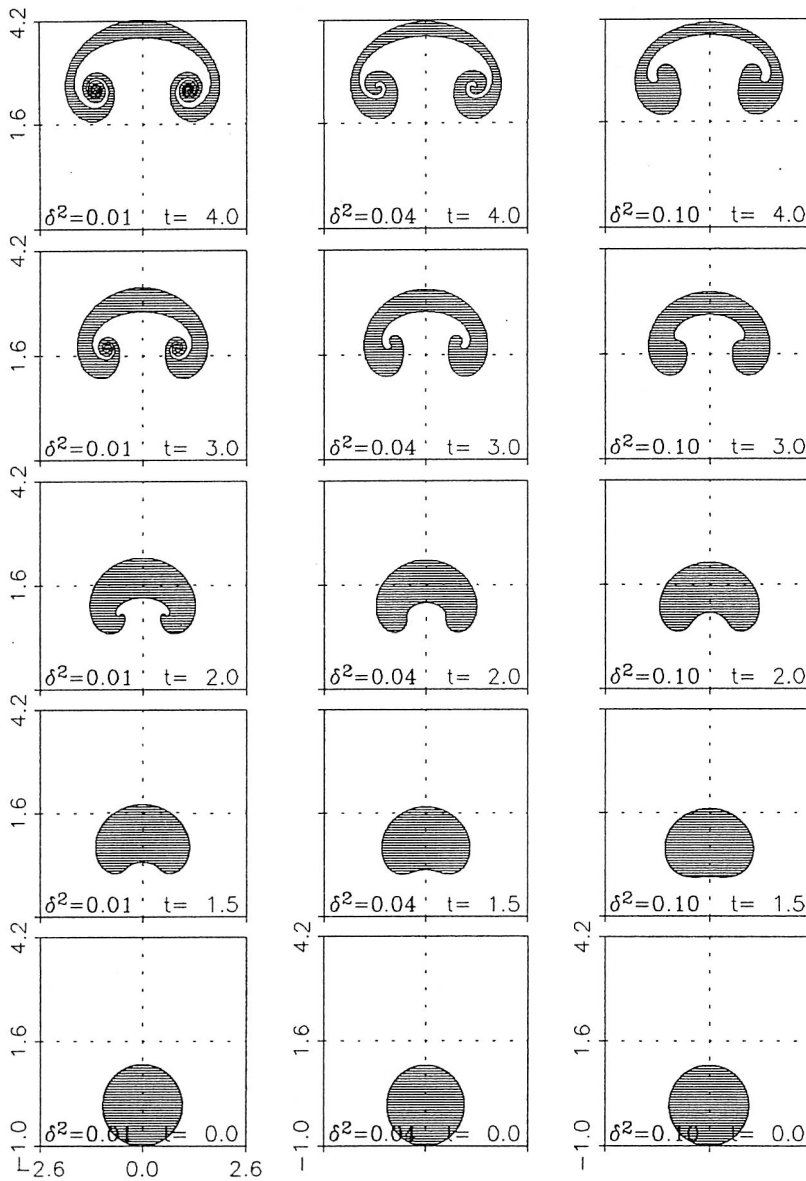
Na rys. 5.5 przedstawiono zmianę prędkości pęcherzyka, a dokładniej jego górnego punktu na osi symetrii, w zależności od czasu. Wpływ wartości parametru δ^2 na prędkość unoszenia pęcherzyka jest taki jakiego oczekuje się od lepkości płynu. Większe wartości parametru δ , co odpowiadałoby większym wartościom współczynnika lepkości płynu, powodują wolniejsze zmiany prędkości pęcherzyka. Wykres na rys. 5.5 sugeruje istnienie granicznej prędkości pęcherzyka nie zależnej od wartości parametru δ^2 .

Na rys. 5.6 przedstawiono zmiany grubości pęcherzyka (tzw. daszka) na pionowej osi symetrii. Grubości tej można nadać znaczenie szybkości zmiany wirowości w jednej połowie pęcherzyka. A mianowicie, jeżeli scałkujemy równanie (5.3) po parametrze e w granicach od 0 do 0,5 (odpowiada to obejściu połowy obwodu pęcherzyka), to otrzymamy:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{0.5} \gamma = -2 \Delta y \quad (5.8)$$

gdzie Δy jest szerokością pęcherzyka na osi symetrii.

Tak więc większej lepkości powinno towarzyszyć szybsze rozpraszanie wirowości i szybsze zmiany szerokości pęcherzyka. Zależność taką można odczytać z wykresu przedstawionego na rys. 5.6. Najpierw mamy powolniejsze zmiany szerokości pęcherzyka, a następnie szerokość pęcherzyka zmienia się szybciej dla większej wartości parametru δ^2 .

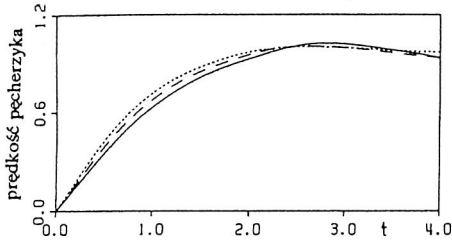


Rys. 5.4. Ewolucja pęcherzyka dla różnych wartości parametru δ^2 . Czas oraz wartość parametru podana została na dole każdej klatki. Ewolucja odbywa się z dołu ($t=0$) do góry $t=4$.

W rzędzie na danym poziomie zmienia się wartość parametru δ^2 ($\delta^2 = 0,01, 0,04, 0,1$)

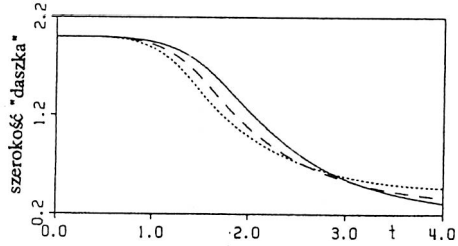
Fig. 5.4. Evolution of the bubble for various values of the δ^2 . The time and the δ^2 value are given at the bottom of each frame. Evolution goes from the bottom ($t=0$) to the up ($t=4$).

In the row the δ^2 value changes ($\delta^2 = 0,01, 0,04, 0,1$)



Rys.5.5. Prędkość pęcherzyka w zależności od czasu: — $\delta^2=0,1$, - - $\delta^2=0,04$, ··· $\delta^2=0,01$

Fig. 5.5. Bubble velocity vs time:
— $\delta^2=0.1$, - - $\delta^2=0.04$, ··· $\delta^2=0.01$

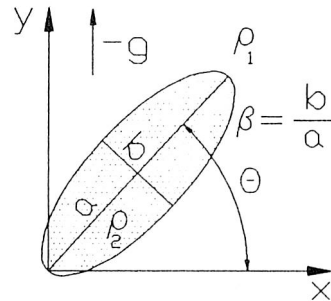


Rys. 5.6. Szerokość „daszka” w zależności od czasu:

— $\delta^2=0,1$, - - $\delta^2=0,04$, ··· $\delta^2=0,01$
Fig. 5. 6. Cap thickness vs time:
— $\delta^2=0.1$, - - $\delta^2=0.04$, ··· $\delta^2=0.01$

5.3. RUCH PĘCHERZYKA ELIPTYCZNEGO

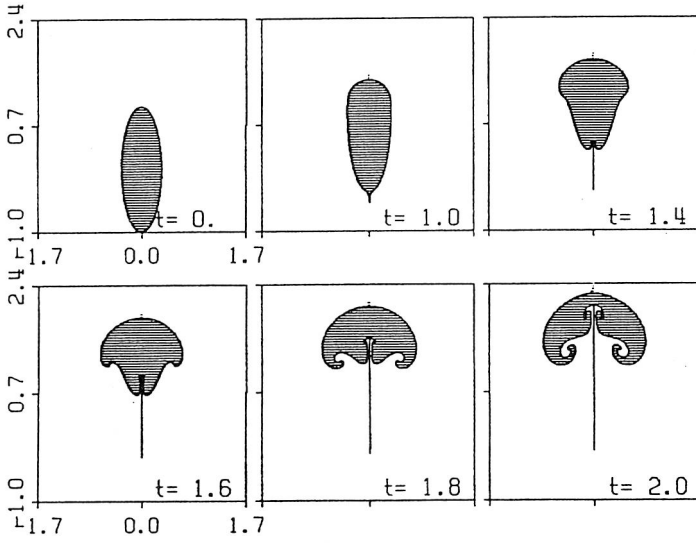
W rzeczywistych eksperymentach, na skutek różnych zakłóceń zewnętrznych, forma początkowa pęcherzyka może odbiegać od formy kulistej. Interesującym było więc przebadanie wpływu początkowego kształtu pęcherzyka na jego ewolucję i formę końcową. Założono, że początkową formą pęcherzyka będzie elipsa, której kształt będziemy charakteryzować ilorazem β długości krótszej osi elipsy b do dłuższej a , $\beta=b/a$ a położenie początkowe kątem Θ nachylenia dłuższej osi elipsy do osi x układu współrzędnych. (rys. 5.7). Dalej przyjęto, że $\beta=1/3$ i $a=1$.



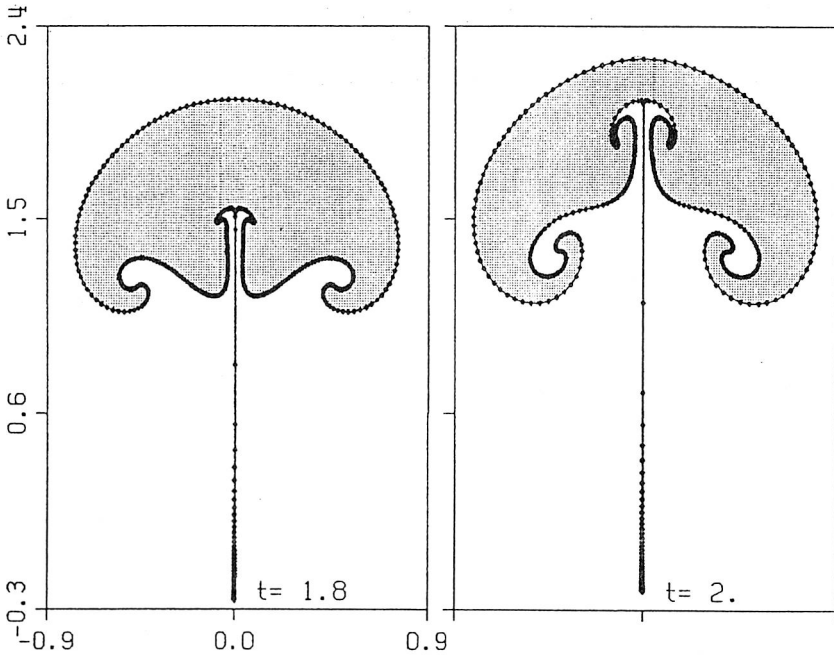
Rys.5.7. Schemat położenia pęcherzyka eliptycznego
Fig. 5.7. Schematic draw of the elliptic bubble

Na rys. 5.8 przedstawiono ewolucję pęcherzyka eliptycznego dla $\Theta = 90^\circ$ oraz $\delta^2=0,01$, a na rys. 5.9 przedstawiono powiększone klatki z rys. 5.8 dla $t=1,8$ i $t=2$. Natychmiast zauważalne jest wysnuwanie się z objętości pęcherzyka „ogona” (nici). Płyn otaczający pęcherzyk wnika w objętość pęcherzyka u podstawy „ogona”. Dolna część pęcherzyka doznaje fantazyjnych deformacji, górna natomiast przyjmuje kształt koła. Grubość wysnuwającego się ogona jest prawie zera.

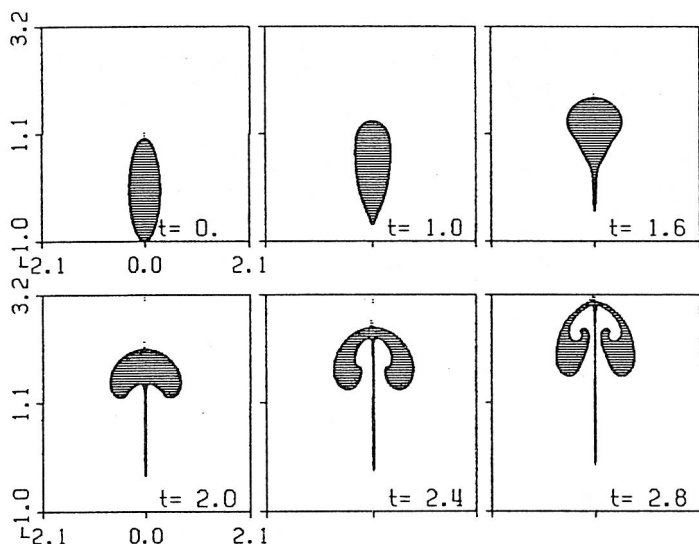
Większe wartości parametru δ^2 zapobiegają delikatnym deformacjom dolnej części pęcherzyka, ale struktura „ogonowa” występuje nadal, z tym że „ogon” staje się nieco grubszy (rys. 5.10). Struktura „ogonowa” jest obserwowana w wielu eksperymentach.



Rys. 5.8. Ewolucja eliptycznego pęcherzyka dla $\Theta=90^\circ$, $\beta=1/3$, $\delta^2=0,01$
 Fig. 5.8 Evolution of the bubble for $\Theta=90^\circ$, $\beta=1/3$, $\delta^2=0.01$



Rys. 5.9. Powiększone klatki z rys.5.8 dla czasów $t=1,8$ i $t=2$, ($\delta^2=0,01$, $\theta=90^\circ$)
 Fig. 5.9 Close-up frames from the fig.5.8 for the time $t=1,8$ i $t=2$, ($\delta^2=0,01$, $\theta=90^\circ$)



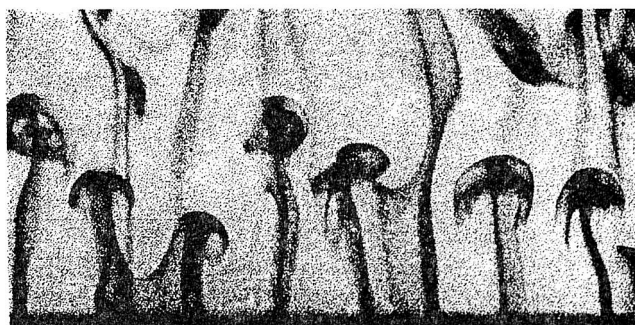
Rys. 5.10. Sekwencja kształtów pęcherzyka eliptycznego dla $\Theta=90^\circ$, $\delta^2=0,04$
 Fig. 5.10 Sequence of the shapes of the elliptical bubble for $\Theta=90^\circ$, $\delta^2=0.04$

Na rys. 5.11 przedstawiono zdjęcie z doświadczenia dotyczącego termików unoszących się w wodzie nad poziomą, podgrzewaną powierzchnią [181]. Zdjęcie było reprodukowane w wielu książkach poświęconych mechanice płynów np. [188, 192, 194].

Na rys. 5.12 przedstawiono zdjęcie uzyskane w eks-

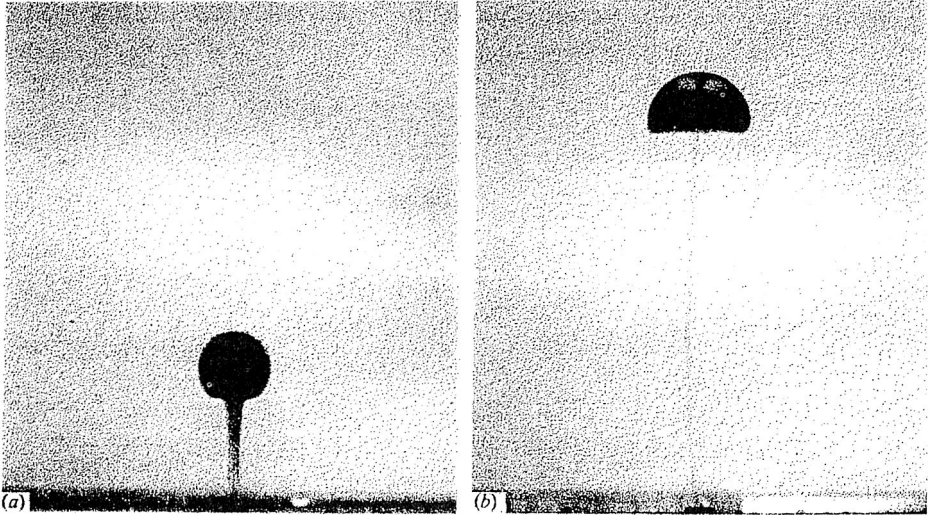
perymentach nad termikami w cieczach o dużej lepkości [77]. Podobną strukturę „ogonową” opisano w pracy [96].

Większe wartości parametru δ^2 zapobiegają skomplikowanym deformacjom i mają wyraźnie działanie wygładzające, zmieniają skalę czasu. Tego właśnie spodziewamy się po działaniu efektu lepkościowego płynu. Ale duże wartości δ^2 ($\delta^2 \approx 0,4$) mogą zasadniczo zmienić kształt pęcherzyka podczas ewolucji, co



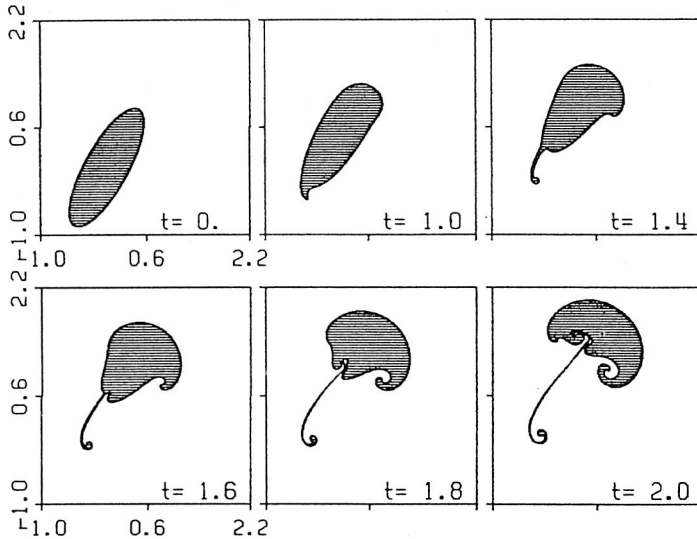
Rys. 5.11. Fotografia termików unoszących się w wodzie nad podgrzewaną powierzchnią [181]
 Fig. 5.11. Photograph of thermals rising in the water from a heated surface [181]

będzie pokazane poniżej, gdy zmianie będzie ulegał kąt Θ nachylenia początkowego pęcherzyka względem osi x .



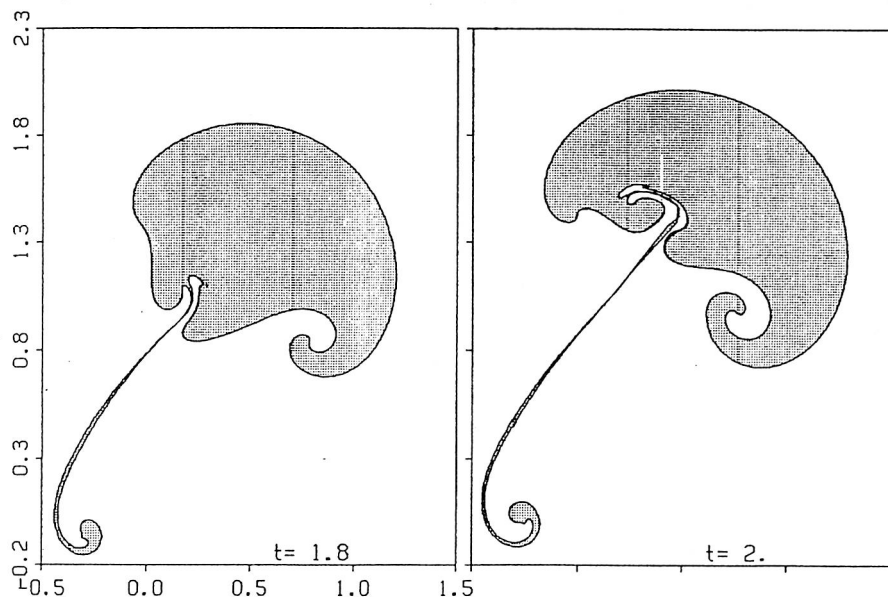
Rys. 5.12. Fotografie termika otrzymane w eksperymencie w pracy [77]
Fig. 5.12 Pictures of a thermal that was taken in experiment in the work [77]

Na rys. 5.13 przedstawiono ewolucję pęcherzyka, który w chwili początkowej był przechylony o kąt $\Theta = 60^\circ$ ($\delta^2=0,01$). Część górna pęcherzyka przyjmuje kształt



Rys. 5.13. Ruch pęcherzyka eliptycznego dla $\Theta=60^\circ$, $\delta^2=0,01$, $N=600$
Fig. 5.13. The motion of the elliptic bubble for $\Theta=60^\circ$, $\delta^2=0,01$, $N=600$

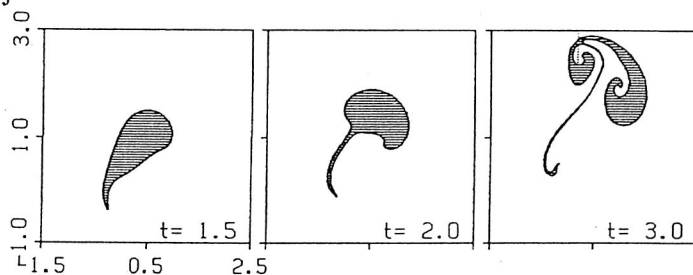
kolisty, a dół pęcherzyka jest mocno pofalowany. „Ogon”, który wysnuł się z pęcherzyka, jest zakończony „głową” z małym ostrzem i jest powyginany. Na rys. 5.14 przedstawiono powiększone klatki rys. 5.13 dla czasów $t=1,8$ i $t=2$.



Rys. 5.14. Powiększone klatki z rys.5.13 dla czasów $t=1,8$ i $t=2$, ($\delta^2=0,01$, $\Theta=60^\circ$)

Fig. 5.14. Close-up of the frame from the fig. 5.13 for the $t=1.8$, $t=2$, ($\delta^2=0.01$, $\Theta=60^\circ$)

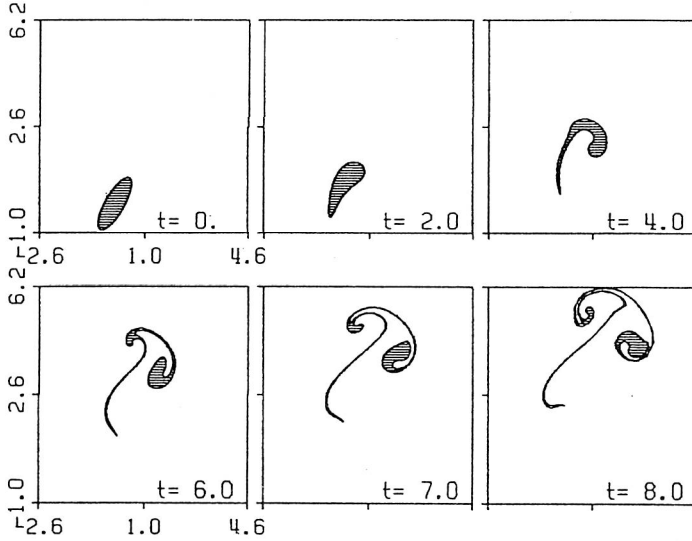
Na rys.5.15 przedstawiono rozwiązania obrazujące końcowe fazy ewolucji pęcherzyka dla warunków początkowych jak na rys. 5.13, z tym że wartość parametru δ^2 została zwiększona do 0,04. Możemy zaobserwować, że zwiększenie wartości parametru δ^2 spowodowało wygładzenie tylnej części pęcherzyka, a także zmodyfikowało kształt „ogona”. Ponadto łatwo zauważyć, że wartości parametru δ^2 powodują zmianę szybkości ewolucji. Jeżeli dla różnych wartości parametrów δ powstają podobne struktury, to dla większych wartości δ pojawiają się one znacznie później.



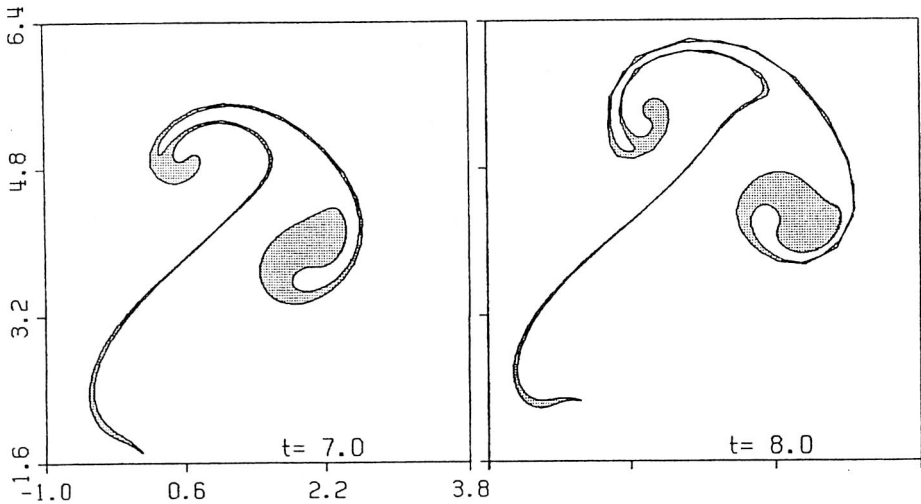
Rys. 5.15. Końcowe kształty pęcherzyka eliptycznego dla $\delta^2=0,04$, $\Theta=60^\circ$

Fig. 5.15. Final stages of the elliptical bubble evolution with $\delta^2=0.04$, $\Theta=60^\circ$

Zdarza się jednak, że większe, być może zbyt duże, wartości δ powodują zmiany jakościowe w ewolucji pęcherzyka. Na rys.5.16 przedstawiono ewolucję pęcherzyka dla $\delta^2=0,4$ oraz $\Theta=60^\circ$. Ewolucja pęcherzyka w porównaniu do przedstawionej na rys.5.13 przebiega dużo wolniej, a w końcowej fazie ruchu zmienia się

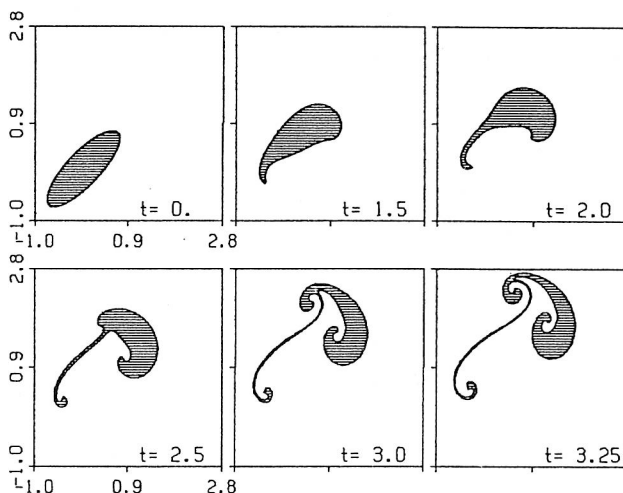


Rys. 5.16. Kolejne fazy ruchu pęcherzyka eliptycznego dla $\delta^2=0,4$, $\theta=60^\circ$
 Fig. 5.16. The successive stages of the bubble in evolution with $\delta^2=0.4$, $\theta=60^\circ$

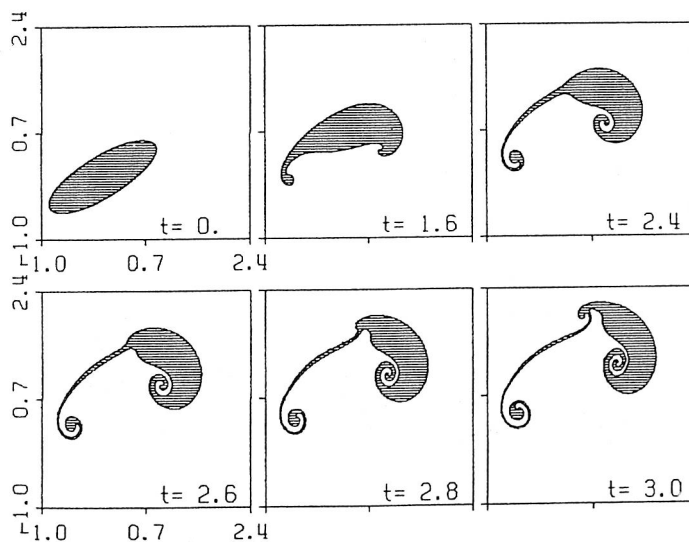


Rys. 5.17. Powiększone klatki z rys.5.16 dla czasów $t=7$ i $t=8$, ($\delta^2=0,4$, $\Theta=60^\circ$)
 Fig. 5.17. Close-up frames from the fig.5.16 for time $t=7$ and $t=8$, ($\delta^2=0.4$, $\Theta=60^\circ$)

również w sposób istotny kształt pęcherzyka. Górna, kolista część pęcherzyka, uformowana jest z cienkiej nici. Na rys. 5.17 przedstawiono powiększone klatki czasowe z rys.5.16 dla czasu $t=7$ i $t=8$.

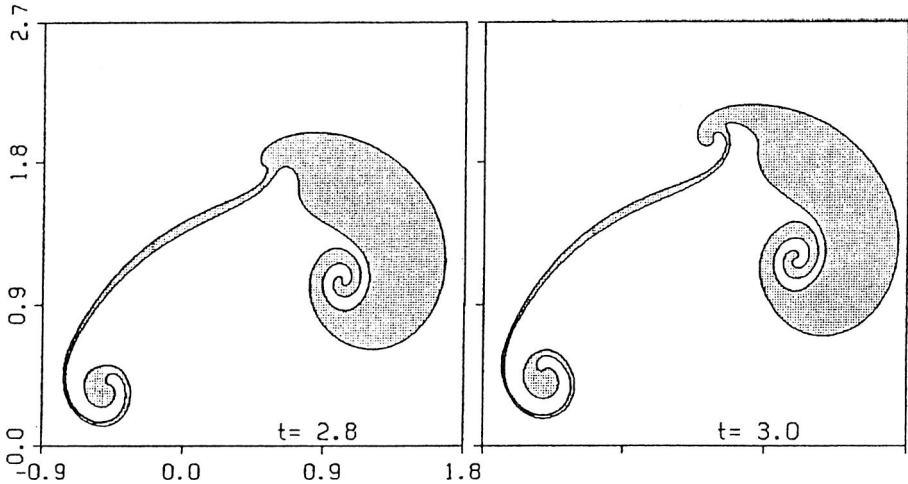


Rys. 5.18. Ruch pęcherzyka eliptycznego z parametrami $\delta^2=0,04$ i $\theta=45^\circ$
 Fig. 5.18. The motion of the elliptic bubble with the parameter value as $\delta^2=0,04$ and $\theta=45^\circ$

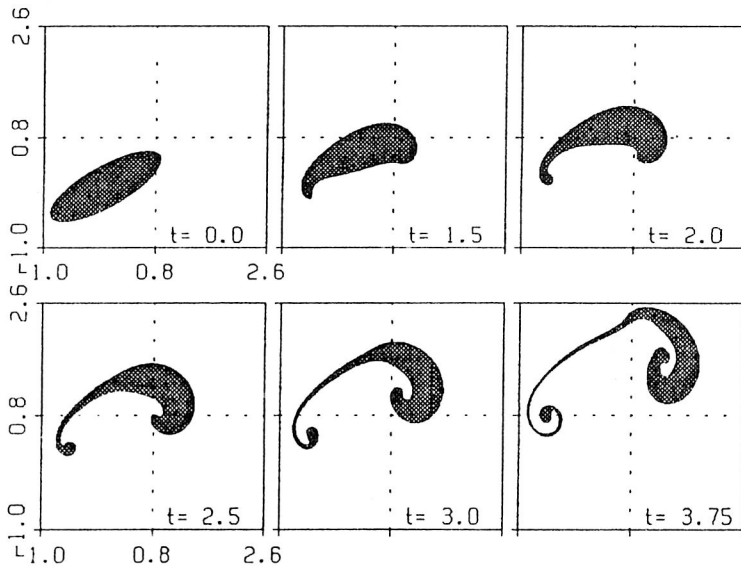


Rys. 5.19. Ewolucja pęcherzyka eliptycznego z parametrami $\Theta=30^\circ$, $\delta^2=0,01$
 Fig. 5.19 Evolution of the elliptic bubble with the parameter values as $\Theta=30^\circ$, $\delta^2=0,01$

Celem dalszego zobrazowania wpływu początkowego kąta Θ na ewolucję pęcherzyka, na rys. 5.18 przedstawiono rozwiązania dla $\Theta=45^\circ$ i $\delta^2=0,04$ (należy porównać z rys. 5.15). Choć zewnętrzne kształty pęcherzyka są podobne to można zauważyć różnice w ewolucji „ogona”, w jego zakończeniu i długości (patrz klatki dla $t=3$). Podkreśla to jeszcze raz fakt dużej wrażliwości ewolucji pęcherzyka od warunków początkowych.



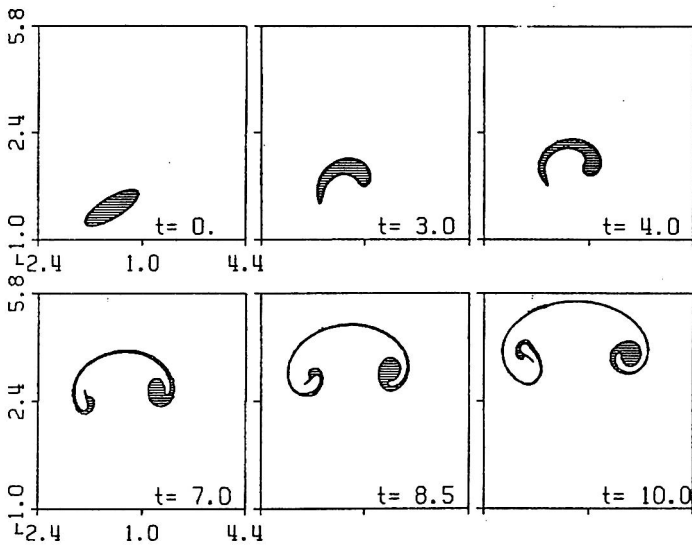
Rys. 5.20. Powiększone klatki z rys. 5.19 dla czasów $t=2,8$ i $t=3$ ($\delta^2=0,01$, $\Theta=30^\circ$)
 Fig. 5.20. Close-up of frames from the fig. 5.19 for the time $t=2,8$ and $t=3$ ($\delta^2=0,01$, $\Theta=30^\circ$)



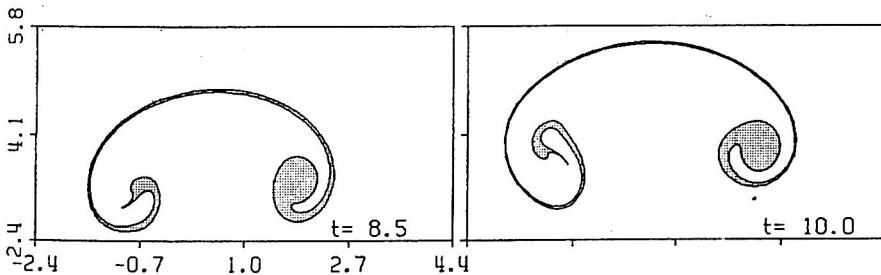
Rys. 5.21. Ewolucja pęcherzyka eliptycznego z parametrami $\Theta=30^\circ$, $\delta^2=0,04$
 Fig. 5.21. Evolution of the elliptical bubble for $\Theta=30^\circ$, $\delta^2=0,04$

Na rysunkach 5.19–5.23 przedstawiono wyniki dla ewolucji pęcherzyka pochylonego w chwili $t=0$ względem osi x o $\Theta=30^\circ$, z różnymi wartościami δ^2 , $\delta^2=0,01$, $0,04$ oraz $0,4$. Raz jeszcze można zauważyć wpływ początkowego kąta na ewolucję pęcherzyka jak również prześledzić modyfikacje tej ewolucji powodowane przez wartość parametru δ^2 .

Porównując ze sobą rys. 5.21 i 5.18 łatwo zauważyć jakościową różnicę, jaką spowodowała zmiana wartości kąta Θ (ta sama wartość parametru δ^2). W końcowej fazie ewolucji pęcherzyka można wyróżnić tylko dwa końce. Różnica ta jest jeszcze bardziej widoczna na rys.5.22 (porównaj z rys. 5.17). Masa pęcherzyka rozłożyła się w cienkiej nici, z której uformowało się czoło pęcherzyka (patrz powiększone klatki czasowe na rys.5.23).



Rys. 5.22. Ewolucja pęcherzyka eliptycznego dla $\delta^2=0,4$, $\Theta=30^\circ$, $N=600$
 Fig. 5.22 Evolution of the elliptical bubble for $\delta^2=0,4$, $\Theta=30^\circ$, $N=600$



Rys. 5.23. Powiększone klatki pęcherzyków z rys.5.22 dla czasów $t=8,5$ i $t=9$, ($\delta^2=0,4$, $\Theta=30^\circ$)
 Fig. 5.23. Close-up of frames with the bubbles from the fig. 5.22
 for $t=8,5$ and $t=9$, ($\delta^2=0,4$, $\Theta=30^\circ$)

5.4. UWAGI KOŃCOWE

Obecne badania nad ruchem i deformacją pęcherzyka, dotyczące morfologicznej niestabilności jego kształtu, zostały zainspirowane pracą H. Arefa [8]. Aref analizując rozwiązania takich zagadnień jak niestabilność Kelvina–Helmholza, Saffmana–Taylora czy Rayleigha–Taylora wykazał, że ewolucji przebiegającej w warunkach niestabilnych towarzyszy powstawanie „ostrzy”, „nici”, „wąsów”. Elementy te pojawiły się również w rozwiązaniach przedstawiających ruch pęcherzyka (termika) w polu grawitacyjnym. Mimo dwuwymiarowego modelu przyjętego w obecnej pracy, przedstawione wyniki dobrze korespondują z danymi eksperymentalnymi. W pracy [96] na podstawie badań eksperymentalnych nad ruchem kropli poruszającej się w polu grawitacyjnym z małą liczbą Reynoldsa stwierdzono następujące stadia ruchu:

1. Powstanie struktury „ogonowej”, która bierze początek w tylnym punkcie stagnacji kropli. Wraz z upływem czasu ogon staje się coraz cieńszy;
2. Obszar u podstawy „ogona” spłaszczają się i powstaje zagłębienie, które z upływem czasu powiększa się wokół osi symetrii kropli (tak, jak to pokazują nasze rys. 5.11). Z upływem czasu „ogon” kropli odrywa się i kropla deformuje się do formy toroidalnej;
3. Toroidalna kropla dalej rośnie i rozpada się na skutek dalszej niestabilności.

Nasza dwuwymiarowa symulacja dokładnie odpowiada opisowi z pkt. 1 i 2. Zawsze na ogonie można wyróżnić miejsca, gdzie grubość dąży do zera. Prawdopodobnie w tym punkcie następuje oderwanie się ogona od pęcherzyka. Z powodu dwuwymiarowego modelu nie jesteśmy w stanie otrzymać formy toroidalnej, ale widać, że grubość pęcherzyka (daszka) na osi symetrii (rys. 5.10) dąży do zera. Odpowiadałoby to w przypadku trójwymiarowym przechodzeniu do struktury toroidalnej [150]. Dzięki jednak dwuwymiarowości naszego modelu sam program obliczeniowy jest stosunkowo prosty i szybki w obliczeniach. Wygenerowano nowe struktury ewolucji pęcherzyka (rys. 5.23), których istnienie może potwierdzić tylko eksperyment.

6. MODELOWANIE PRZEPIYWÓW W KANAŁACH METODĄ KROPEL WIROWYCH

W niniejszym rozdziale omówimy sposób realizacji obliczeń i przedstawimy wyniki numeryczne modelowania przepływu w kanałach metodą kropeł wirowych.

Celem jaki postawiano sobie, podejmując ten temat, było opracowanie programu, który w łatwy sposób umożliwiłby zadawanie złożonej geometrii obszaru przepływowego i rozwiązywanie równań ruchu cieczy lepkiej metodą kropeł wirowych. Przypomnijmy, że metoda kropeł wirowych opiera się na algorytmie dekompozycji lepkościowej (patrz rozdz.3). Rozwiązanie otrzymuje się w dwóch krokach. Jeżeli przez n oznaczymy numer kroku czasowego, to algorytm przemieszczenia cząstki, kropli wirowej, można zapisać:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_j^{n+1/2} &= \mathbf{x}_j + \Delta t (\mathbf{u}_\omega^n + \mathbf{u}_p^n) \\ \mathbf{x}_j^{n+1} &= \mathbf{x}_j^{n+1/2} + \sqrt{2\nu \Delta t} \mathbf{N}_j \end{aligned} \quad (6.1)$$

gdzie \mathbf{u}_ω oznacza prędkość indukowaną przez krople wirowe w punkcie $\mathbf{x}_j = (x_j, y_j)$, \mathbf{u}_p jest prędkością potencjalną dobraną tak, aby składowa normalna wypadkowego pola prędkości $\mathbf{u}_\omega + \mathbf{u}_p$ była równa zero, $\mathbf{N}_j = (N_j^{(1)}, N_j^{(2)})$ jest wektorem losowym o rozkładzie Gaussa, z wartością średnią równą zero i wariancją równą jedności.

Wektor losowy \mathbf{N} zrealizowano przy użyciu generatora liczb losowych o rozkładzie równomiernym i zastosowaniu transformacji Boxa–Mullera [93, 94, 151]:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{-4\Delta t}{Re} \ln \xi_1} \\ N_1 &= q \cos 2\pi \xi_2 \\ N_2 &= q \sin 2\pi \xi_2 \end{aligned} \quad (6.2)$$

gdzie (ξ_1, ξ_2) są niezależnymi liczbami losowymi z przedziału $[0,1)$ o rozkładzie jednostajnym.

Do generacji liczb losowych o rozkładzie jednostajnym wybrano generator multiplikatywny o nazwie GGUBS z biblioteki IMSL*. Znalezienie generatora liczb losowych o dobrych własnościach statystycznych czyli zapewniającego jednostajny rozkład liczb i ich niezależność, nie jest rzeczą łatwą [147], a przeprowadzenie gruntownych testów jest niezwykle czasochłonne [94]. Wybrany generator sprawdzono najprostszymi testami po to tylko, aby wyeliminować wyjątkowo zły generator. Użyto testów częstotliwościowych. Najpierw przeprowadzono test na odcinku $(0,1)$ – odcinek podzielono na 100 równych części i sprawdzano częstość wpadania liczb do danego przedziału. Przeprowadzono również podobny test na płaszczyźnie. Kwadrat o długości boku jeden podzielono na 100 równych części i rejestrowano wpadanie wygenerowanej pary liczb do danego kwadratu. Hipotezę o równomiernym rozkładzie generowanych liczb sprawdzano za pomocą testu χ^2 [93]. Ponadto generator sprawdzono używając testu Kołgomorowa–Smirnowa [94]

* International Mathematical and Statistical Library.

oraz poddano wizualnemu testowi (snowtest) na korelację generowanych liczb [94, 120, 147]. Jeżeli występuje korelacja pomiędzy generowanymi liczbami, to na obrazie otrzymuje się pewne regularne wzory (np. odcinki prostych itp.). Dodatkowo obliczenia powtarzano z użyciem generatora o nazwie UNIRAN, którego algorytm opublikowano w [133]. Wyniki dotyczące uśrednionych rozkładów prędkości oraz linii prądu były prawie identyczne, więc uznano generator z biblioteki IMSL za zadowalający dla obecnych zastosowań. Podjęcie pewnych kroków ostrożności związanych z uniknięciem złego generatora liczb losowych, mimo dużej renomy biblioteki IMSL, było uzasadnione. Mamy tutaj na uwadze niesławny przypadek z generatorem RANDU znajdującym się w bibliotece SSP** IBM/360, firmowanej przez jedną z największych firm komputerowych [151]. Posługiwano się nim przez wiele lat, przekopiowywano do różnych systemów, a jak się okazało miał on wyjątkowo złe własności statystyczne [151, 94].

Ze wzorów (6.1) widać, że w każdym kroku czasowym konieczne jest wyznaczenie prędkości potencjalnej u_p . W niniejszej pracy do wyznaczenia pomocniczego pola potencjalnego wykorzystano podprogram szybkiego rozwiązywania równania Poissona POISX [169, 166] w połączeniu z techniką macierzy pojemnościowej. Szybkie, bezpośrednie algorytmy rozwiązywania równań eliptycznych służą do rozwiązywania układu równań algebraicznych otrzymanych po dyskretyzacji pochodnych w sposób dokładny (w przeciwieństwie do metod iteracyjnych). Charakteryzują się dużą oszczędnością czasu obliczeń i pamięci komputera [116]. Szybkie algorytmy można stosować tylko wtedy gdy możliwe jest wykorzystanie metody rozdzielania zmiennych. A więc obszar, w którym szukamy rozwiązania powinien być prostokątem, a typ warunku brzegowego wzdłuż jednego brzegu nie powinien ulegać zmianie. Aby możliwe było wykorzystanie tych algorytmów w obszarach nieregularnych należało dodatkowo zastosować technikę macierzy pojemnościowej, którą omówimy poniżej.

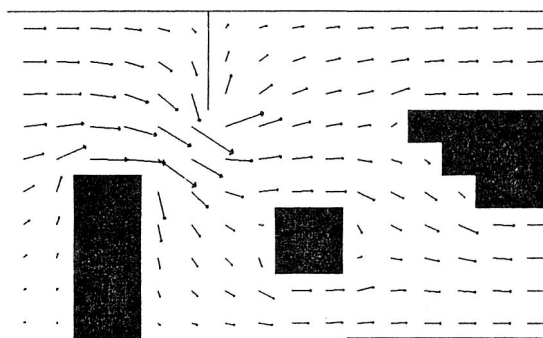
6.1. WYZNACZANIE POTENCJALNEGO POLA PRZEPŁYWU W OBSZARACH NIEREGULARNYCH

Metoda macierzy pojemnościowej polega na tym, że obszar nieregularny, w którym szukamy rozwiązania, jest „zanurzany” w obszar prostokątny, dla którego można zastosować szybką, bezpośrednią metodę rozwiązywania równania Poissona***. Najpierw należy wyznaczyć macierz, zwaną macierzą pojemnościową, którą będziemy oznaczać literą C . Pozwala ona na wyrażenie zmian rozwiązania Δu od zmian członu źródłowego δf (f oznacza prawą stronę równania Poissona $\Delta u = f$), czyli $\Delta u = C\delta f$. Macierz pojemnościowa C jest budowana w ten sposób, że

** Scientific Subroutine Package.

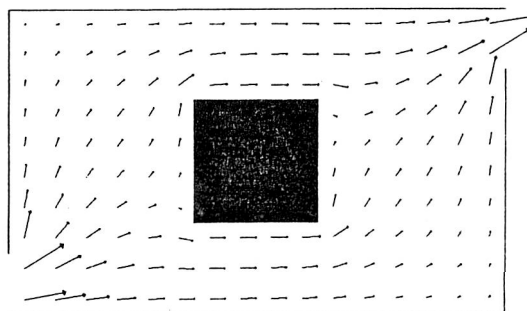
*** Ogólnie chodzi o rozwiązywanie równań eliptycznych, którego szczególną postacią jest równanie Poissona i Laplace'a.

kolejno w punktach nieregularnych (nie należących do brzegu prostokąta) są umieszczane jednostkowe źródła i jest rozwiązywane zagadnienie na powiększonym, prostokątnym obszarze. Rozwiązania w węzłach siatki, które tworzą obszar nieregularny, stanowią kolejne kolumny macierzy C . Po wyznaczeniu macierzy pojemnościowej C , szukanie rozwiązania odbywa się w dwóch krokach: 1 – rozwiązywane jest zagadnienie w obszarze regularnym, a więc z użyciem szybkich podprogramów rozwiązywania równania Poissona [37, 49], i obliczana jest odchyłka δu między otrzymanym rozwiązaniem a wartością, która wynika z warunku brzegowego, określonego na ściankach tworzących obszar nieregularny. Korygowana jest prawa strona równania Poissona zgodnie ze wzorem $f^* = f - WC^{-1}\delta u$, gdzie W jest macierzą operatora odwzorowującego całą siatkę numeryczną na punkty nieregularne [38, 152], 2 – rozwiązywane jest ponownie równanie Poissona na



Rys. 6.1. Przepływ potencjalny wywołany jednostkową różnicą potencjałów pomiędzy wlotem i wylotem z kanału

Fig. 6.1. The potential flow induced by the unit potential difference between the inlet and outlet of the channel



Rys. 6.2. Optyw potencjalny przeszkody w kształcie kwadratu. Na wlocie i na wylocie z komory zadano jednostkowe, jednorodne pole prędkości

Fig. 6.2. The potential flow over the square. At inlet and outlet of the chamber it was given the unit and uniform velocity field

prostokącie (ze zmienioną prawą stroną f'). Otrzymane rozwiązanie w kroku drugim spełnia już pożądane zagadnienie wyjściowe [38, 168]. Przykład rozwiązań przepływu potencjalnego przy użyciu techniki macierzy pojemnościowej przedstawiono na rys. 6.1 i 6.2.

Konieczność wyznaczania macierzy pojemnościowej, mimo że wyznacza się ją tylko raz, limituje efektywność metody. Przy bardzo skomplikowanych geometrycznie kształtach obszaru przepływowego może się okazać, że bardziej efektywną metodą rozwiązywania równania Poissona jest metoda iteracyjna SOR [166].

Potrzebne do realizacji warunku brzegowego potencjalne pole prędkości obliczono przez wyznaczenie potencjalnej funkcji prądu ψ_p ($u_p = -\partial\psi_p/\partial y$, $v_p = \partial\psi_p/\partial x$). Potencjalną funkcję prądu wyznaczono rozwiązując następujące zagadnienie brzegowe:

$$\Delta\psi_p^k = 0 \quad (6.3)$$

$$\psi_p^k(0,y) = Q - \psi_\omega^k(0,y)$$

$$\psi_p^k(x,0) = -\psi_\omega^k(x,y_H)$$

$$\psi_p^k(x,y_H) = Q - \psi_\omega^k(x,y_H)$$

$$\frac{\partial\psi_p^k(L,y)}{\partial x} = 0$$

(6.4)

gdzie Q – strumień masy, równy wartości funkcji prądu $\psi = \psi_\omega + \psi_p$ na górnej ścianie kanału, której rzędną oznaczyliśmy y_H ; ψ_ω oznacza wartość funkcji prądu wytworzonej przez krople wirowe. Na dolnej ścianie wartość funkcji prądu jest równa zero.

Zwróćmy uwagę, że użycie siatki numerycznej do rozwiązywania równania (6.3) ma charakter pomocniczy. Funkcja szukana ψ_p nie zależy wprost od gradientów prędkości wewnątrz obszaru przepływu, lecz tylko od wartości brzegowych. Prędkość potencjalna u_p była wyznaczona za pomocą ilorazu różnicowego centralnego:

$$u_p = -\frac{\psi_p(x,y+\Delta y) - \psi_p(x,y-\Delta y)}{2\Delta y}$$

$$v_p = \frac{\psi_p(x+\Delta x,y) - \psi_p(x-\Delta x,y)}{2\Delta x}$$

(6.5)

gdzie Δx , Δy oznaczają przyrost wartości zmiennej na siatce numerycznej, odpowiednio w kierunku osi x i y .

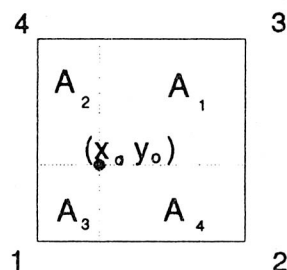
Ze wzoru (6.5) obliczono wartości prędkości pola potencjalnego w węzłach siatki. Składowe styczne potencjalnego pola prędkości na ściankach (np. składowa u wzdłuż dolnej i górnej ścianki kanału) były obliczane ze wzoru ekstrapolacyjnego [132]:

$$u_n = \frac{1}{6h}(-11\psi_0 + 18\psi_1 - 9\psi_2 + 2\psi_3) + O(h^3) \quad (6.6)$$

gdzie indeks 0 odnosi się do wartości funkcji prądu na ściance, indeks 1 odnosi się do wartości funkcji prądu w odległości $h=\Delta y$ wzdłuż prostej prostopadłej do ścianki itd. Prędkości potencjalne dla poszczególnych wirów były obliczane przy użyciu ważonego powierzchniowo schematu interpolacyjnego, używanego w metodzie „wir w komórce” [48]:

$$u(x_o, y_o) = \frac{A_1 u_1 + A_2 u_2 + A_3 u_3 + A_4 u_4}{A} \quad (6.7)$$

gdzie A_i oznaczają pola powierzchni odpowiednich części komórki z węzłami 1,2,3,4, a u_i ($i=1,2,3,4$) oznaczają wartości prędkości w węzłach komórki (rys. 6.3).

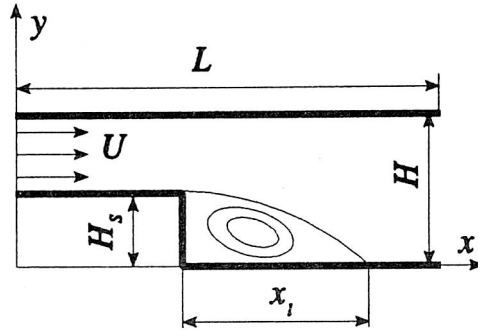


Rys. 6.3. Schemat interpolacji „ważonych” powierzchni
Fig. 6.3. The scheme of interpolation of weighed areas

6.2. PRZEPŁYW W KANAŁE Z GWAŁTOWNYM ROZSZERZENIEM. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Efektywność metody kropel wirowych i jej przydatność do modelowania przepływów w kanałach zbadano na przykładzie przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem. Mimo stosunkowo prostej geometrii, obraz przepływu jest złożony i zawiera kilka istotnych elementów. Można wyróżnić strefę recyrkulacji tuż zaraz za stopniem, oderwanie warstwy przyściennej z rogu stopnia, a także przepływ ustalony poza strefą recyrkulacji.

Schematyczny szkic obszaru przepływu przedstawiono na rys.6.4. Początek układu współrzędnych umieszczono na wlocie do kanału. Zaznaczono długość strefy recyrkulacyjnej za uskokiem. Unormowaną długością strefy recyrkulacyjnej nazywamy iloraz $x_R=x_i/H_s$, gdzie H_s jest wysokością stopnia. Liczbę Reynoldsa zdefiniowano jako $Re=UH_s/\nu$, (U jest prędkością na wlocie). Przyjęto, że rozkład prędkości na wlocie jest równomierny i równy jedności $U=1$. Warunek taki został



Rys. 6.4. Schemat geometrii przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem
Fig. 6.4. The sketch of the geometry for the flow over backward-facing step

również przyjęty w pracach [70, 174]. Umożliwiło to porównanie wyników numerycznych niniejszej pracy z wynikami podanymi w pracach [70, 174].

Stosunek całkowitej szerokości kanału H do wysokości stopnia H_s przyjęto jako równą 0,5. Całkowita długość kanału, którą zastosowano do obliczeń, wynosi $L=12H$. Długość części przewężonej od wlotu kanału do stopnia wynosi $2H$.

6.3. WYBÓR PARAMETRÓW NUMERYCZNYCH

Przypomnijmy, że w metodzie kropli wirowych wirowość rozdzielana jest między dyskretne elementy nazwane kroplami wirowymi i wirowość wyrażana jest przez sumę:

$$\omega^k(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N \Omega_\delta(\mathbf{x}_j^k - \mathbf{x}) \Gamma_j \quad (6.8)$$

gdzie k jest numerem kroku czasowego, \mathbf{x}_j^k oznacza położenie kropli wirowej w chwili $t=k \Delta t$, Ω_δ oznacza funkcję wygładzającą z promieniem wygładzania δ , Γ_j jest cyrkulacją niesioną przez kroplę (patrz wzór (3.20)).

Do obliczeń jako Ω_δ używano funkcji zaproponowanej przez Chorina [42]. Zbadano również wpływ na wyniki numeryczne funkcji obcięcia zaproponowanej przez Nordmarka [145]. Funkcja wygładzająca Chorina ma postać [42]:

$$\Omega_\delta(r) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi\delta r} & r < \delta \\ 0 & r \geq \delta \end{cases} \quad (6.9)$$

Funkcji Ω_δ określonej wzorem (6.9) odpowiada funkcja prądu ($\Delta\psi_\delta = -\Omega_\delta$):

$$\Psi_{\omega}(r) = \begin{cases} -\frac{\Gamma}{2\pi} \ln r & \text{dla } r \geq \delta \\ -\frac{\Gamma}{2\pi} \left(\frac{r}{\delta} + \ln \delta - 1 \right) & \text{dla } r < \delta \end{cases} \quad (6.10)$$

Łatwo zauważyć, że dla $r > \delta$ funkcja prądu dla kropli wirowej jest identyczna jak dla wiru punktowego. Pole prędkości wytworzone przez krople wirowe wyraża się wzorem (patrz wzór 3.23):

$$\mathbf{u}_{\omega}^k(\mathbf{x}) = \sum_{\substack{j=1 \\ \mathbf{x}_j \neq \mathbf{x}}}^N \mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j) \Gamma_j \quad (6.11)$$

gdzie \mathbf{K}_{δ} jest funkcją wygładzającą dla prędkości generowanej przez kroplę wirową. Postać tej funkcji jest określona przez Ω_{δ} (rot $\mathbf{K}_{\delta} = \Omega_{\delta}$) i ma postać:

$$\mathbf{K}_{\delta}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \left(-\frac{y}{2\pi r \delta}, \frac{x}{2\pi r \delta} \right) & \text{dla } r < \delta \\ \left(-\frac{y}{2\pi r^2}, \frac{x}{2\pi r^2} \right) & \text{dla } r \geq \delta \end{cases} \quad (6.12)$$

Warto zwrócić uwagę, że funkcja obciążenia (6.9), zgodnie z twierdzeniem 3.1 z rozdz.3 ma niekorzystne własności: a) ma w punkcie $r=0$ osobliwość, b) jest nieciągłą dla $r=\delta$, c) jest funkcją dodatnią. Aby zbadać wpływ postaci funkcji Ω_{δ} na wyniki numeryczne obliczenia wykonano również dla funkcji obciążenia 8-ego rzędu zaproponowanej przez Nordmarka [145, 79]. Funkcja Nordmarka jest bardzo podobna w kształcie do funkcji obciążenia nieskończonego rzędu [28], zapewniającej najszybszą zbieżność metody kropel wirowych. Funkcje nieskończonego rzędu mają jednak nieograniczony nośnik i jako takie nie nadają się do obliczeń z użyciem szybkich algorytmów do obliczania wzajemnego oddziaływania wirów. Funkcja Nordmarka ma postać:

$$\Omega_{\delta}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{52}{\pi \delta^2} \left(1 - 21 \frac{r^2}{\delta^2} + 105 \frac{r^4}{\delta^4} - 140 \frac{r^6}{\delta^6} \right) \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2} \right)^9 & \text{dla } r \leq \delta \\ 0 & \text{dla } r > \delta \end{cases} \quad (6.13)$$

Pole prędkości indukowane powyższym rozkładem wirowości wewnątrz kropki zdefiniowane jest wzorem:

$$\mathbf{K}_\delta(x) = \begin{cases} \frac{(-y, x)^T}{2\pi r^2} \left[1 + \left[286 - 1092\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) + 1365\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^2 - 560\left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^3 \right] \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right)^{10} \right] & \text{dla } r \leq \delta \\ \frac{(-y, x)^T}{2\pi r^2} & \text{dla } r > \delta \end{cases} \quad (6.14)$$

Natomiast funkcja prądu dla takiej kropki wirowej ma postać:

$$\Psi_\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 \left[-13 + \frac{195}{2} \left(\frac{r}{\delta} \right)^2 - \frac{1430}{3} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 + \frac{25025}{16} \left(\frac{r}{\delta} \right)^6 - \frac{18018}{5} \left(\frac{r}{\delta} \right)^8 + 6006 \left(\frac{r}{\delta} \right)^{10} - \frac{51480}{7} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{12} + \frac{212355}{32} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{14} - \frac{39325}{9} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{16} + \frac{20449}{10} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{18} - \frac{7098}{11} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{20} + \frac{5915}{48} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{22} - \frac{140}{13} \left(\frac{r}{\delta} \right)^{24} \right] + C & \text{dla } r \leq \delta \\ -\frac{1}{2\pi} \ln r & \text{dla } r > \delta \end{cases} \quad (6.15)$$

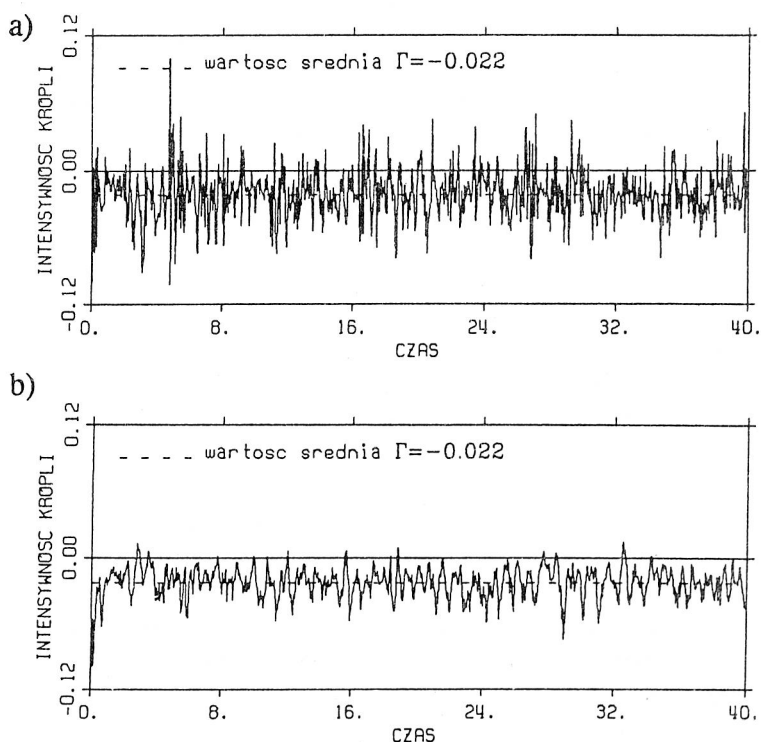
Stałą C dobrano tak, aby funkcja Ψ_δ była ciągła dla $r=\delta$. Stała ta wynosi: $C=1,25337/\pi-(1/2\pi)\ln\delta$.

Do rozwiązania zagadnienia (6.3)–(6.4) wybrano siatkę 120×20 , czyli $\Delta x=0,1$, $\Delta y=0,05$. Do podziału brzegu stałego przyjęto odcinek o długości $h=\Delta x$ (patrz podrozdz. 3.4). Promień obcięcia, zgodnie z twierdzeniem 3.1 z rozdziału 3, przyjęto nieco większy niż długość h , a mianowicie $\delta=h^{0,95} \approx 0,112$. W innych pracach długość promienia obcięcia δ przyjmowano $\delta=h/\pi$ [35, 69, 170], a początkowo nawet $\delta=h/2\pi$ [42].

W wyżej cytowanych pracach metodę kropeł wirowych stosowano łącznie z metodą warstw wirowych [43]. W obliczeniach brały udział zarówno kropki

wirowe, jak i warstwy wirowe. Warstwy wirowe były używane do obliczeń w obszarze blisko ścianki. Grubość tego obszaru była dobierana arbitralnie. Poza obszarem przyściennym, warstwy wirowe były zamieniane na krople wirowe, a jeżeli kropla wirowa wpadała w obszar przyścienny była zamieniana na warstwę wirową. Stosowanie dwóch nośników wirowości, którymi rządzą odmienne prawa ruchu (równania ruchu dla warstw wirowych wynikają z równań Prandtla dla warstwy przyściennej [43, 44]), powoduje znaczne zwiększenie kodu programu a także wywołuje kłopoty interpretacyjne w przypadku, gdy przy ściance powstają strefy recyrkulacyjne. Wiadomo, że równania Prandtla przestają obowiązywać w pobliżu punktów oderwania warstwy przyściennej. Dlatego w niniejszej pracy przyjęto, że jedynymi nośnikami wirowości będą krople wirowe.

Głównym powodem, dla którego została opracowana metoda warstw wirowych była powolna zbieżność metody kropek wirowych w pobliżu ścianki [44]. Spowodowane było to faktem, iż powstające wiry mogły zmieniać znak swojej intensywności w każdym kroku czasowym. Przypomnijmy, że generacja kropek wirowych odbywa się, tak aby skompensowana została niezerowa warstwa wirowa wzdłuż brzegu stałego. Nowo wytworzona kropla wirowa, wskutek niewielkiego



Rys. 6.5. Wykres zmiany intensywności generowanych kropek wirowych w zależności od czasu w ustalonym punkcie ścianki, $x=1, y=0,5, Re=500$; a- dla $\delta=h/2\pi$, b- dla $\delta = h^{0.95}$

Fig. 6.5. Plot of the intensity of the new generated blobs vs time at the fixed point on the wall, $x=1, y=0,5, Re=500$; a- for $\delta=h/2\pi$; b- for $\delta = h^{0.95}$

przemieszczenia w pobliżu ścianki może powodować w następnym kroku czasowym generację kropli o cyrkulacji przeciwnej. Przyjęcie odpowiednio dużego promienia obcięcia zdecydowanie osłabia ten efekt. Na rys. 6.5 przedstawiono przykładowe wykresy zmian intensywności kropeł wirowych generowanych na ściance w punkcie $x=1, y=0,5$, dla $\delta=h/2\pi$ (rys.6.5a) oraz dla $\delta=h^{0.95}$ (rys. 6.5b), w zależności od czasu. Na rys. 6.5b widać, że intensywność generowanych kropeł jest prawie zawsze tego samego znaku a amplituda wahań intensywności kropeł jest dużo mniejsza. Średnie wartości wygenerowanej wirowości są podobne.

Krok czasowy użyty do rozwiązania równania (6.1) przyjęto jako $\Delta t=0,05$. Wybór kroku czasowego dokonano tak, aby spełnione było kryterium [154]:

$$\Delta t U_{\max} \leq \Delta x \quad (6.16)$$

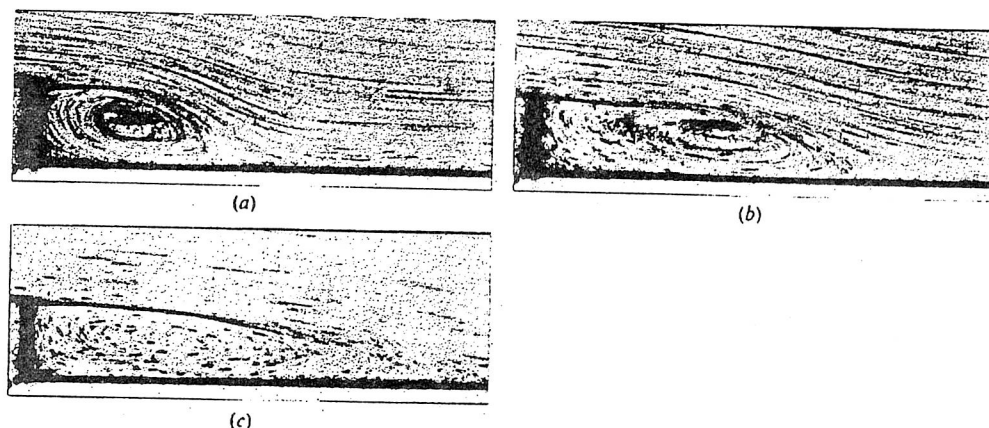
gdzie U_{\max} oznacza maksymalną prędkość w obszarze przepływu, Δx przyrost zmiennej x na siatce numerycznej $\Delta x=h$, $h=0,1$. Ostateczne wielkości h i Δt ustalono na podstawie prób obliczeniowych. Zmniejszenie kroku czasowego Δt lub podziału ścianki h o połowę w badanym przedziale liczb Reynoldsa, nie dawało już istotnych zmian w wynikach obliczeniowych. Przyjęcie zbyt małego kroku czasowego, albo zbyt małej wartości h wydłużało znacząco czas obliczeń ze względu na większą liczbę kropeł wirowych biorących udział w obliczeniach. Dla przyjętych parametrów czas obliczeń jednego zadania (800 kroków czasowych), z użyciem szybkich algorytmów sumowania wzajemnego oddziaływania wirów, na komputerze PC-486/66MHz wynosił ok. 10 godzin. W pracach [35, 69, 70, 71, 174] wartości dla h były przyjmowane z przedziału $[0,1, 0,4]$ a dla kroku czasowego Δt z przedziału $[0,05, 0,2]$.

6.4. WYNIKI NUMERYCZNE DLA PRZEPŁYWU W KANAŁE Z GWAŁTOWNYM ROZSZERZENIEM

Wyniki numeryczne jakie otrzymał autor pracy porównywano z danymi doświadczalnymi, dostępnymi w literaturze [14, 57] jak również z wynikami badań numerycznych innych autorów [70, 88, 174, 146]. Na podstawie badań eksperymentalnych [14, 57] wiadomo, że dla $Re < 225$ za występowaniem tworzy się stabilna strefa recyrkulacyjna o eliptycznym kształcie. Długość strefy recyrkulacyjnej wzrasta liniowo wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Dla ustalonej liczby Reynoldsa przepływ można uważać za stabilny i stacjonarny.

Na rys.6.6 przedstawiono zamieszczone w pracy [85] zdjęcia z wizualizacji przepływu nad gwałtownym rozszerzeniem. Można zauważyć, że strefa recyrkulacyjna rozbudowuje się stopniowo, tak jakby z przepływu potencjalnego.

Na rys. 6.7 przedstawiono przebiegi linii prądu – uśrednione tylko po 10 krokach czasowych dla zredukowania zaburzeń stochastycznych – w odcinku



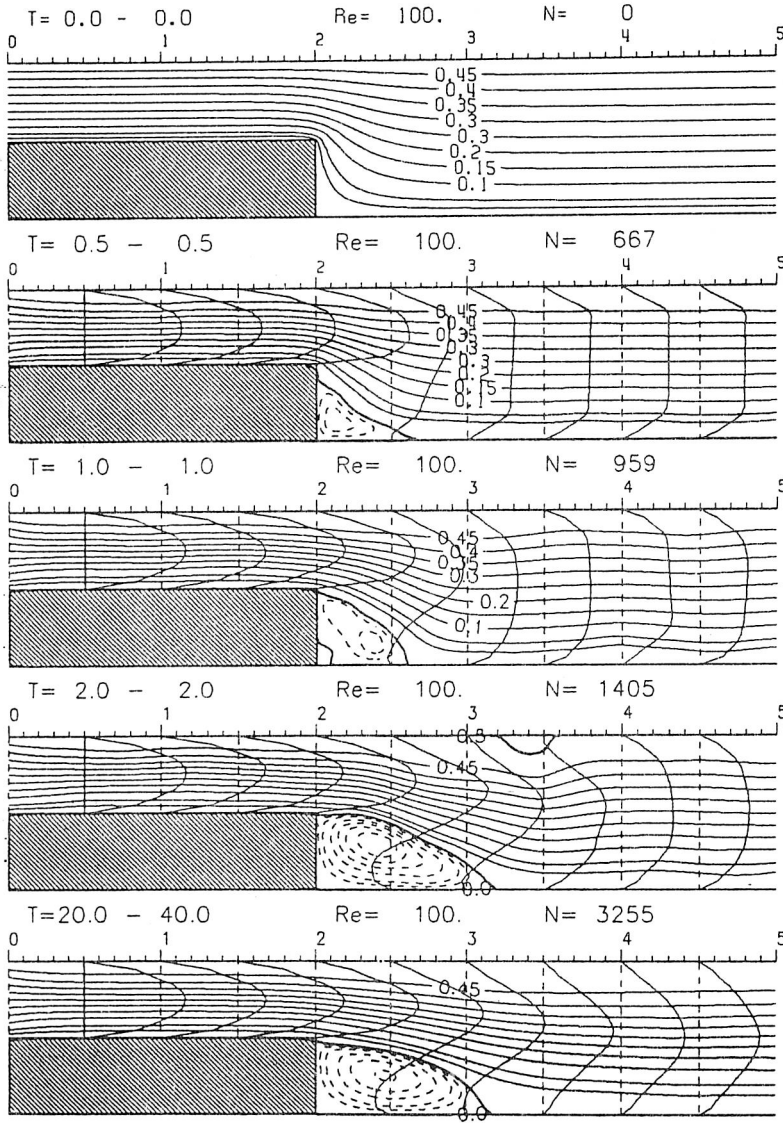
Rys. 6.6. Fotografie z badań eksperymentalnych [85]: czasowy rozwój linii prądu w obszarze z gwałtownym rozszerzeniem, $Re=99,6$, $t_a < t_b < t_c$ (za zgodą autora)

Fig. 6.6. The pictures from the experiment [85]: timewise development of streamlines for the flow past a downstream-facing step, $Re=99,6$, $t_a < t_b < t_c$ (with permission of the autor)

kanалу tuż za stopniem, dla liczby Reynoldsa $Re=100$. Sekwencja, poczynając od góry zaczyna się przepływem potencjalnym i kończy obrazem linii prądu uśrednionych po 200 krokach czasowych dla czasu T między 30 a 40. Widać, że strefa recyrkulacyjna rozwija się z przepływu potencjalnego. Wyznacza ją linia prądu o wartości równej 0, która odrywa się z rogu stopnia i kończy na dolnej ściance. Dolna ścianka kanału stanowi linię prądu o wartości równej zero, a górna ścianka kanału odpowiada linii prądu o wartości 0,5.

Na wykresach linie prądu o wartości $\psi=0$ oraz $\psi=0,5$ są pogrubione, natomiast linie prądu o wartości poniżej zero jak i większe od 0,5 są narysowane liniami przerywanymi. Zaznaczono również profile prędkości w przekrojach poprzecznych kanału. Skala naniesiona na górnej ściance ułatwia odczyt długości strefy recyrkulacyjnej jak również wartość prędkości. Skala dla prędkości jest tak dobrana, że jednostce prędkości odpowiada 0,5 jednostki długości na skali. Na rysunkach widać formowanie się profilu prędkości (od prostokątnego – dla przepływu potencjalnego, do parabolicznego dla przepływu lepkiego, ustalonego poza strefą recyrkulacji). Dla kontroli stałości przepływającej masy obliczano strumień masy w przekroju poprzecznym kanału. Strumień masy zawsze wynosił $0,5 \pm 0,01$.

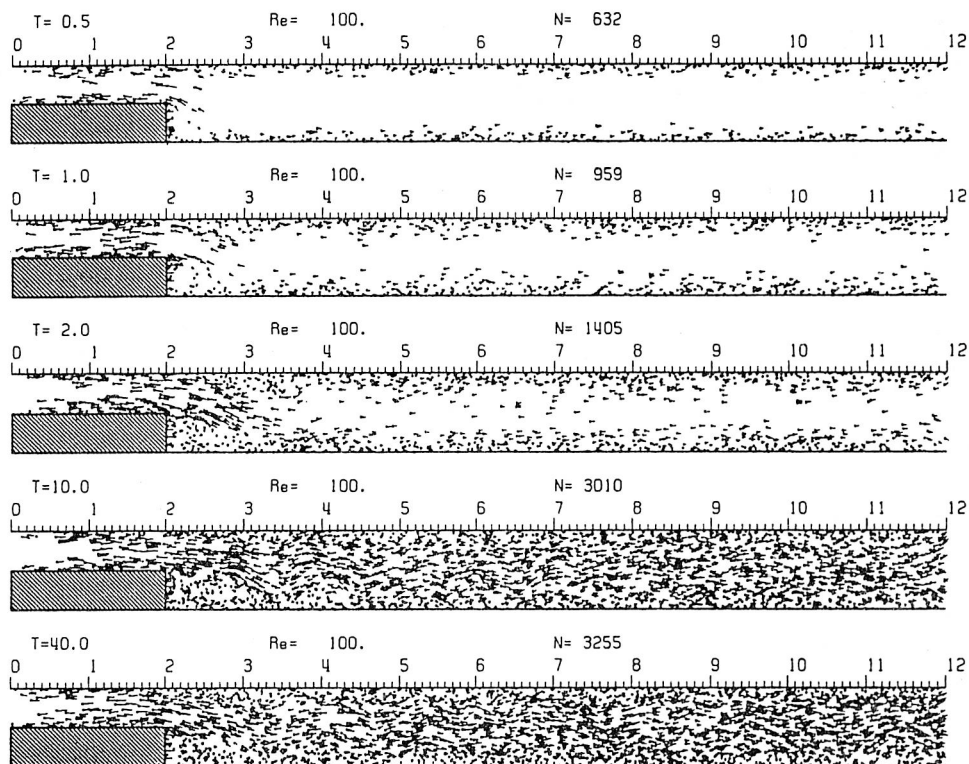
Interesujących informacji o przepływie dostarczają portrety położenia kropeł wirowych. Krople wirowe poruszają się tak jak cząstki cieczy, więc stanowią wygodne i atrakcyjne narzędzie wizualizacji przepływu. Ponieważ są również nośnikami wirowości dają obraz pola wirowości. Na rys. 6.8 przedstawiono położenia kropeł wirowych w obszarze przepływu po 4, 10, 20, 40 i 200 krokach czasowych. Do cząstki dołączony jest odcinek, którego długość jest proporcjonalna do modułu wektora prędkości. Zwrot odcinka odpowiada kierunkowi wektora prędkości. Łatwo stwierdzić, gdzie występuje maksymalna prędkość w danym obszarze jak również zaobserwować, gdzie powstają strefy



Rys. 6.7. Sekwencja chwilowych przebiegów linii prądu wraz z profilami prędkości dla $Re=100$
 Fig. 6.7. Instantaneous sequence of the streamlines together with the velocity profiles at $Re=100$

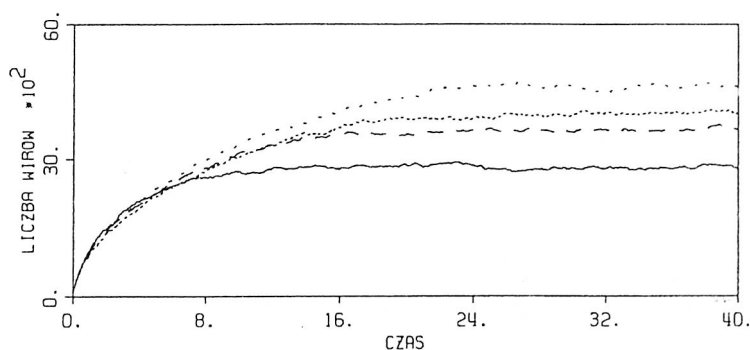
recyrkulacyjne. Na ekranie kolorowego monitora można łatwo zorientować się co do znaku cyrkulacji niesionej przez krople.

Z sekwencji rysunków przedstawiających położenie kroplel wirowych na rys. 6.8 widać narastanie warstwy przyściennej. Ponieważ przepływ jest laminarny, warstwa przyścienna szybko obejmuje całą szerokość kanału. Można zaobserwować powstawanie strefy recyrkulacyjnej.



Rys. 6.8. Chwilowe położenia kropek wirowych wraz z wektorem prędkości; $Re=100$

Fig. 6.8. The instantaneous position of the vortex blobs together with the vector velocity; $Re=100$

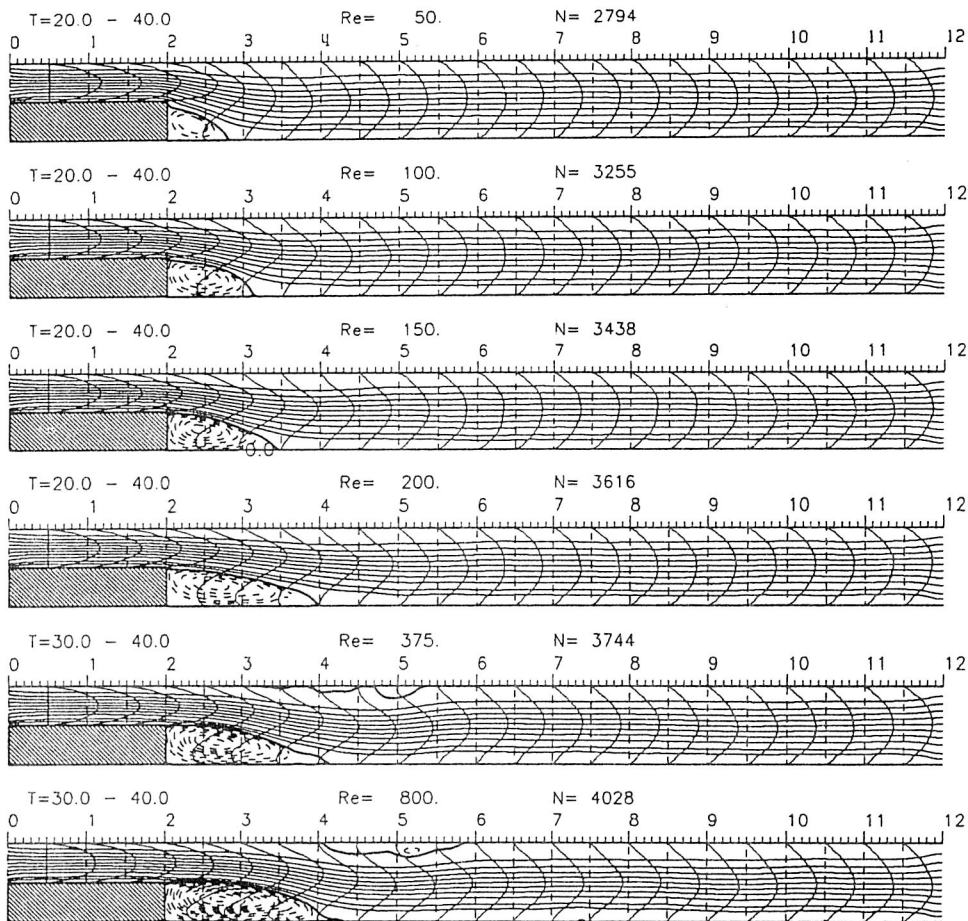


Rys. 6.9. Liczba kropek wirowych biorących udział w obliczeniach w zależności od czasu i liczby Reynoldsa; — $Re=50$, — — — $Re=250$, $Re=500$, ···· $Re=10000$

Fig. 6.9. Number of the vortex blobs taking part in the calculation vs time and Reynolds number; — $Re=50$, — — — $Re=250$, $Re=500$, ···· $Re=10000$

Liczba wirów biorących udział w obliczeniach po kilkudziesięciu krokach stabilizowała się w przybliżeniu na stałym poziomie, który zależał od liczby Reynoldsa. Jak widać na rys. 6.9, im większa liczba Reynoldsa, tym liczba wirów biorących udział w obliczeniach jest większa.

Na rys. 6.10 przedstawiono uśrednione przebiegi linii prądu dla liczb Reynoldsa $Re=50, 100, 150, 200, 357$ i 800 . Uśrednienia dokonano w przedziale

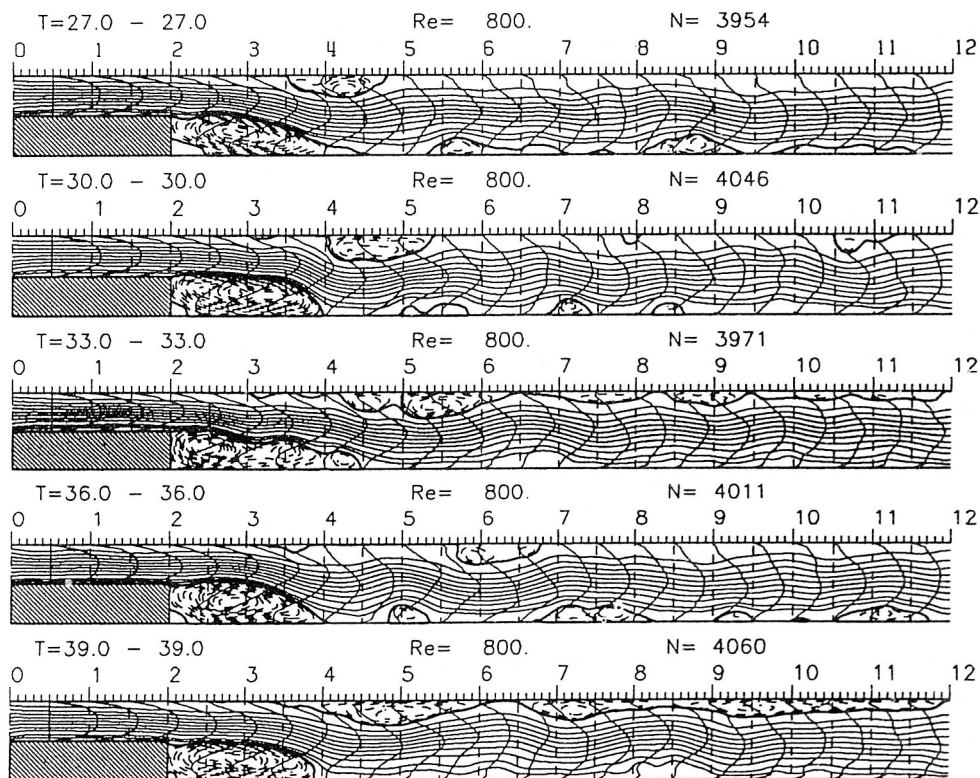


Rys. 6.10. Uśrednione przebiegi linii prądu dla $Re=50, 100, 150, 200, 375, 800$
 Fig. 6.10. Averaged streamlines at $Re=50, 100, 150, 200, 375, 800$

czasu od 20 do 40. Obrazy linii prądu dla $Re < 220$ niewiele zależą od liczby kroków czasowych biorących udział w uśrednianiu. Świadczy to o tym, że przepływ ma charakter stacjonarny.

Na rys. 6.10 widać bardzo wyraźnie narastanie długości strefy recyrkulacyjnej za stopniem wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Otrzymana długość strefy

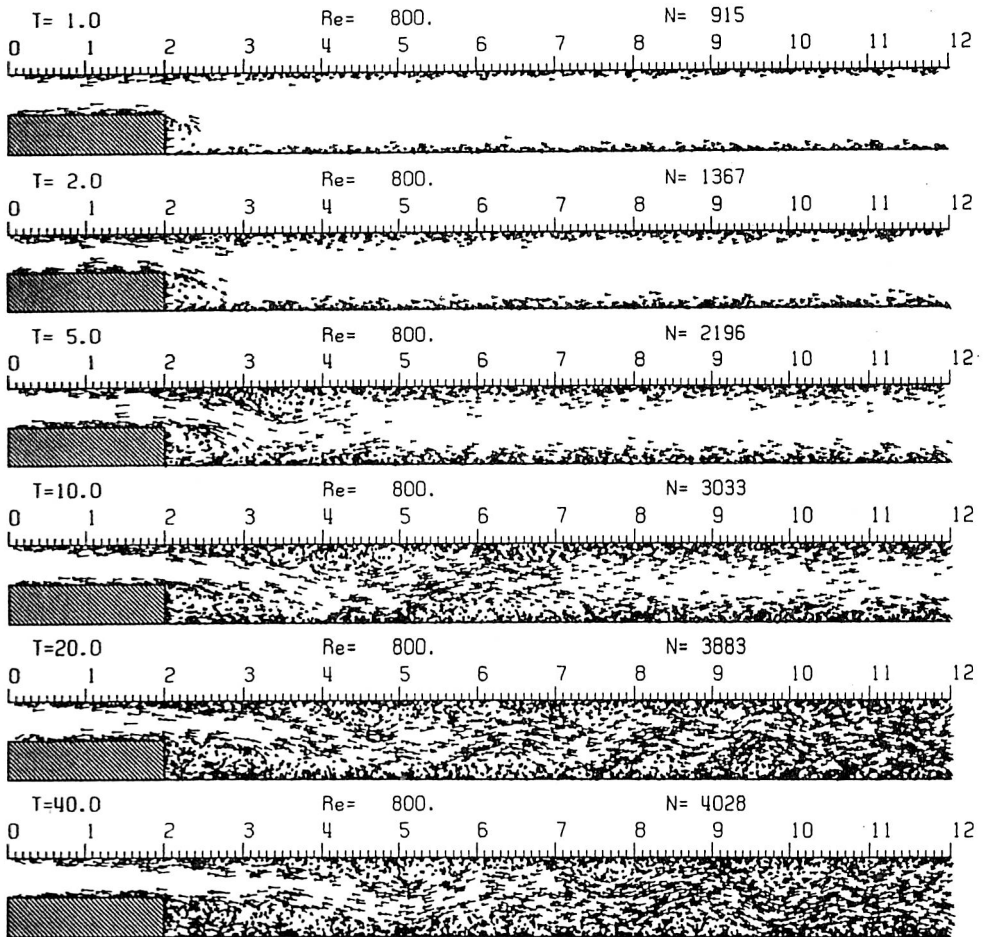
recyrkulacyjnej dla $Re \leq 250$ jest zgodna z danymi doświadczalnymi [14, 57]. Dla $Re > 250$ długość strefy recyrkulacyjnej przestaje wzrastać liniowo wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa. Z pomiarów doświadczalnych wynika, że wzrost długości strefy recyrkulacyjnej wraz ze wzrostem liczby Reynoldsa odbywa się aż do $Re \approx 1000$. Przyczyna tej niezgodności może wynikać z faktu, że w metodzie kropeł wirowych rozwiązania są nieustannie zaburzane. Wynika to ze sposobu rozwiązywania równania dyfuzji. Powoduje to, że strefa recyrkulacyjna przestaje wzrastać przy niższej liczbie Reynoldsa niż to ma miejsce w eksperymencie. Z literatury wiadomo też [14, 57], że dla $Re > 250$ strefa recyrkulacyjna za stopniem traci swoją stabilność. Podobną zależność wzrostu długości strefy recyrkulacyjnej otrzymali Sethian, Ghoniem w pracy [174], w której stosowano również metodę kropeł wirowych w połączeniu jednak z metodą warstw wirowych. Praca Sethiana i Ghonima jest również interesująca, dlatego że autorzy badali zbieżność metody kropeł wirowych. Przeprowadzali obliczenia w szerokim zakresie zmian parametrów numerycznych, a więc między innymi kroku czasowego Δt i długości h . Taka sama zależność długości strefy recyrkulacyjnej od liczby Reynoldsa w niniejszej pracy i pracy [174], świadczy o tym, że konieczność wprowadzania warstw wirowych do obliczeń wydaje się być zbyteczna.



Rys. 6.11. Sekwencja chwilowych przebiegów linii prądu dla $Re=800$

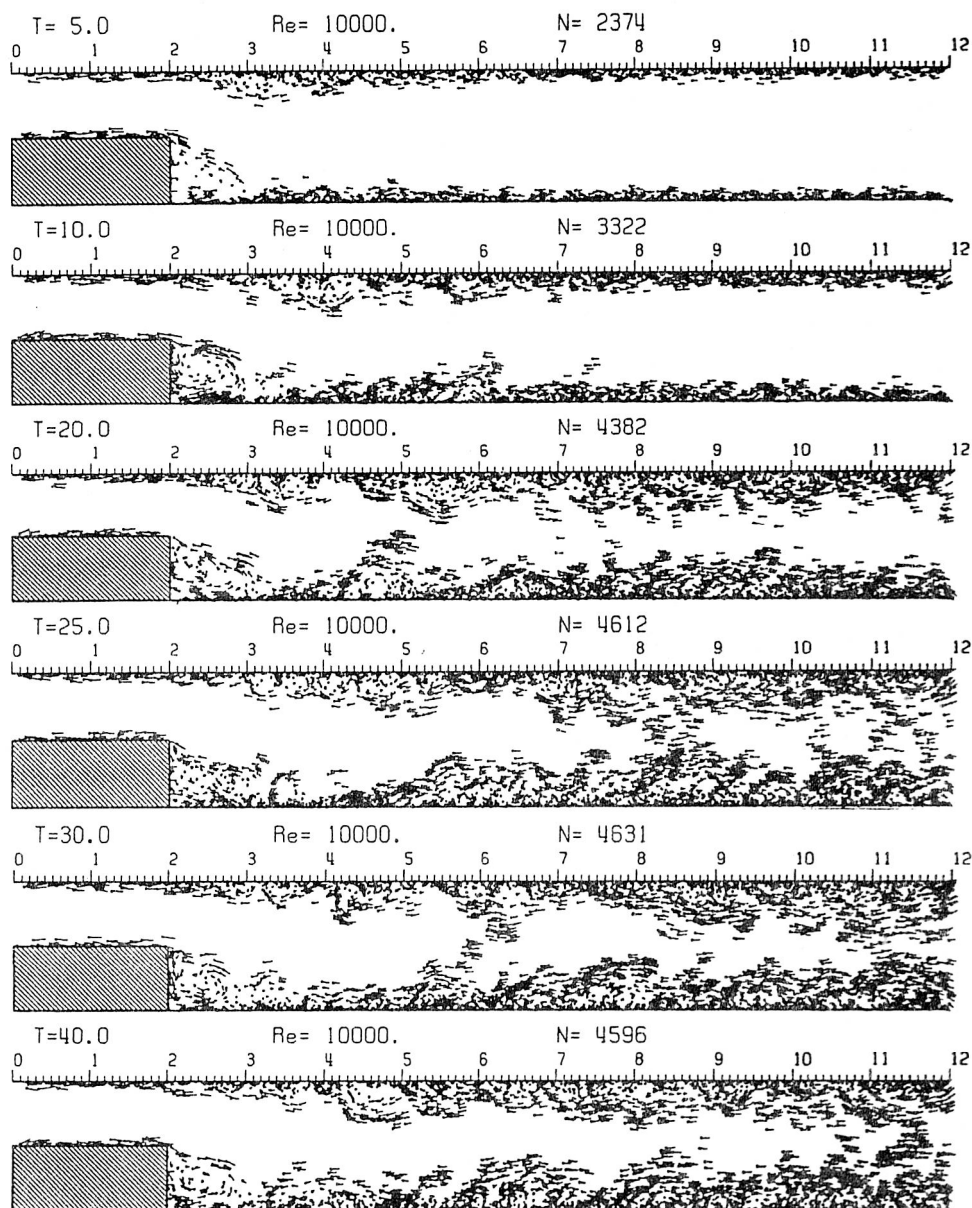
Fig. 6.11. Sequence of the instantaneous streamlines at $Re=800$

Warto zwrócić uwagę na fakt, że wprowadzenie skończonego promienia obciążenia jest przy ścianie obszaru przepływu źródłem pewnego błędu. Krople wirowe, które zbliżyły się do ścianki na odległość mniejszą niż δ , swoim nośnikiem wystają poza obszar przepływu. Ta wystająca część kropli wirowej nie powinna być brana pod uwagę przy rekonstrukcji pola wirowości, a tym samym i przy obliczaniu pola prędkości. Pewnym rozwiązaniem, którego celem jest skompensowanie utraty masy kropli wirowej wskutek wystawania jej poza obszar przepływu, mogłaby być: a) zmiana lokalnej intensywności wirów [114, 115] b) użycie wirów w pobliżu ścianki o zmiennym, adaptującym się kształcie kropli wirowej w taki sposób, aby nie wystawał poza brzeg. Takim prototypem kropli mogłaby być eliptyczna kropla wirowa [187].



Rys. 6.12. Położenia kropli wirowych w różnych chwilach wraz z wektorami prędkości, $Re=800$
 Fig. 6.12. The positions of the vortex blobs with velocity vector at different time , $Re=800$

Mimo że dla większych liczb Reynoldsa brak jest zgodności między długością strefy recyrkulacyjnej zmierzoną [14] a obliczoną, to jakościowy obraz przepływu



Rys. 6.13. Sekwencja położenia kropel wirowych wraz z wektorami prędkości dla $Re=10000$
 Fig. 6.13. The sequence of the vortex blob positions with velocity vector at $Re=10000$

otrzymywany z obliczeń jest poprawny. Na obrazie linii prądu na rys. 6.10 dla $Re=375$ widać powstawanie dodatkowej strefy recyrkulacyjnej. Fakt formowania

się tej dodatkowej strefy recyrkulacyjnej dla $Re \approx 400$ potwierdzają również badania eksperymentalne [14].

Na rys. 6.11 przedstawiono sekwencję chwilowych przebiegów funkcji prądu dla $Re=800$. Widać, że długość strefy recyrkulacyjnej zmienia się. Strefa rwie się na oddzielne porcje wirowości, które następnie przemieszczają się wzdłuż ścianki. Przepływ ma charakter niestacjonarny. Górna strefa recyrkulacyjna po ukształtowaniu się również przesuwa się wzdłuż górnej ścianki, rozprasza się i odbudowuje w pierwotnym miejscu.

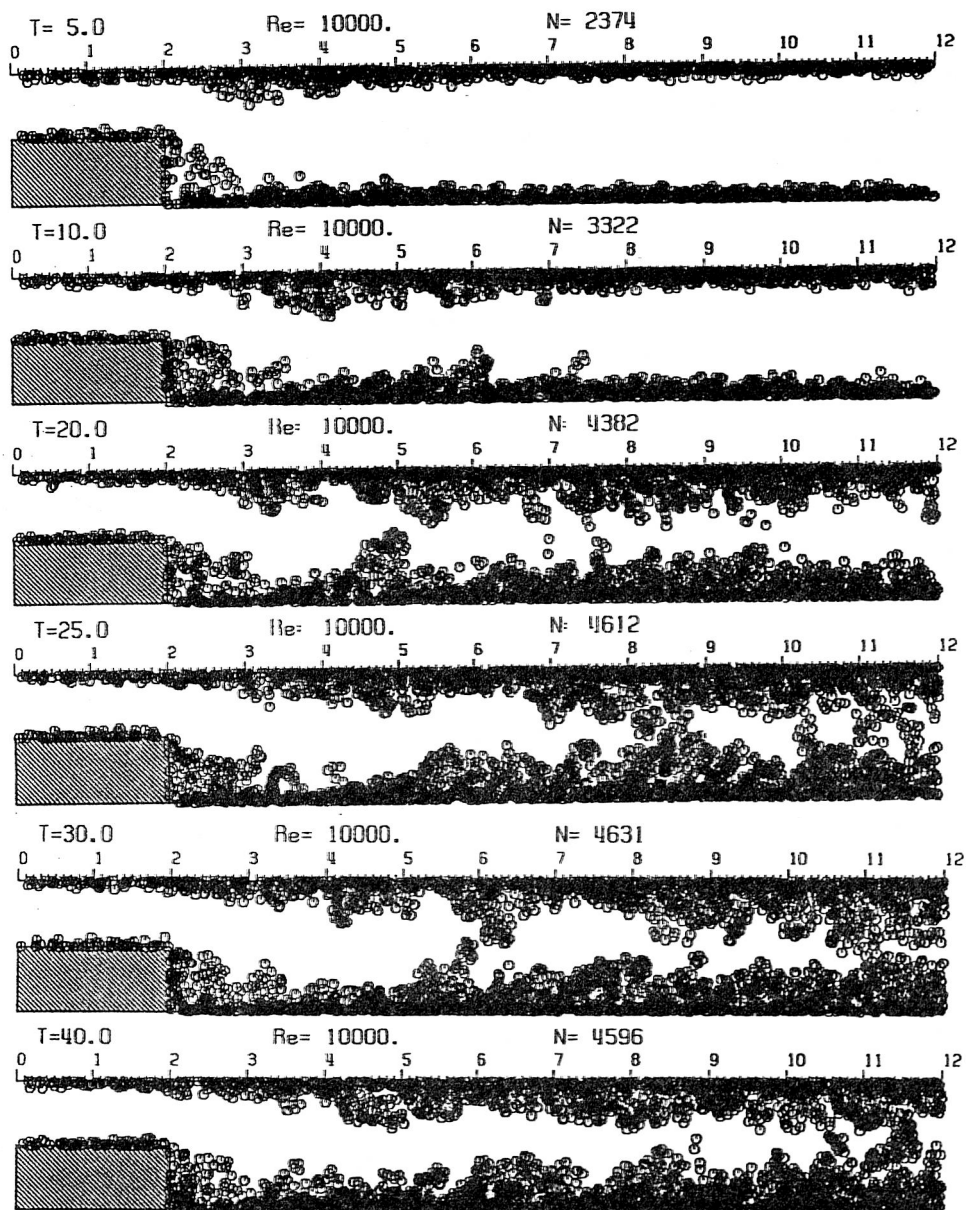
Na rys. 6.12 przedstawiono sekwencję chwilowych położenia kropel wirowych, które zarazem obrazują pole wirowości. W porównaniu do przepływu z $Re=100$ z rys. 6.8 można zauważyć, że warstwa przyścienna narasta o wiele wolniej. Z obrazu przepływu dla $t=40$ wyraźnie widoczny jest rdzeń potencjalny, a wzdłuż ścianki widoczne są duże okresowe struktury wirowe, utworzone z mniejszych kropel wirowych.

Zjawiska, które delikatnie się zaznaczają dla przepływu z liczbą Reynoldsa $Re=800$ bardzo wyraźnie widać dla $Re=10000$. Na rys. 6.13 przedstawiono sekwencję położenia kropel wirowych dla $Re=10000$. Warstwa przyścienna jest jeszcze cieńsza niż dla $Re=800$. Widać wyraźnie rdzeń potencjalny, formowanie się strefy recyrkulacyjnej zarówno przy górnej ścianie, jak i przy dolnej. Dolna strefa „rwie się” i odbudowuje. Górna przesuwa się wzdłuż górnej ścianki, jest rozpraszana i również odbudowuje się w pierwotnym miejscu. Strefy recyrkulacyjne są zbudowane z kropel wirowych o przeciwnej cyrkulacji niż krople w ich otoczeniu (przy dolnej ścianie powstają krople cyrkulacji ujemnej, ale strefa recyrkulacyjna jest utworzona z kropel o cyrkulacji dodatniej, przeciwnie niż to ma miejsce dla strefy recyrkulacyjnej przy ścianie górnej). Struktury wirowe wzdłuż ścianek górnej i dolnej układają się na przemian.

Dla lepszego zobrazowania zmian pola wirowości przepływu na rys. 6.14 przedstawiono tę samą sekwencję położenia kropel wirowych, co na rys. 6.13 ale tym razem położenie kropli wirowej zaznaczono okręgiem o promieniu δ (promień wygładzania), który był użyty w obliczeniach (patrz wzór 6.9).

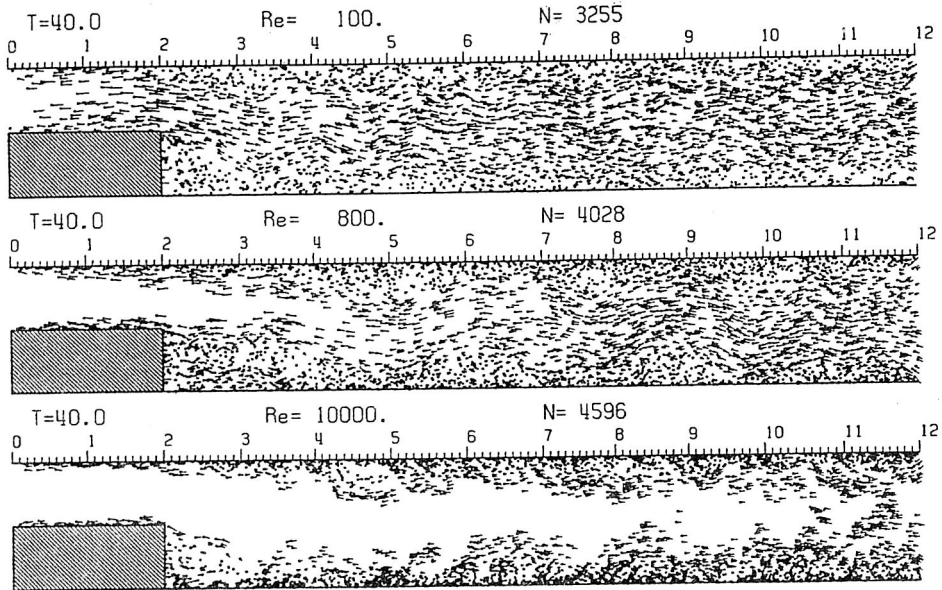
Na rys. 6.14 widać wyraźnie obszary pozbawione wirowości. Jest ona skoncentrowana w pobliżu ścianki. Zaznaczają się też charakterystyczne „języki” świadczące o zwijaniu się warstwy wirowej, a obserwowane zarówno w eksperymentach, jak i otrzymywane w obliczeniach numerycznych przez innych autorów [144].

Aby łatwiej można było porównać obrazy pól wirowości dla przepływów z różnymi liczbami Reynoldsa na rys. 6.15 zestawiono te pola razem. Dla przepływu laminarnego ($Re=100$) krople wirowe są rozłożone równomiernie. Dla liczby Reynoldsa $Re=800$ zaznacza się rdzeń potencjalny i powstają wzdłuż ścianek duże struktury wirowe utworzone z mniejszych elementów wirowych jakimi są krople wirowe. Dla przepływu w pełni turbulentnego, $Re=10000$, krople wirowe mają tendencje do tworzenia skupisk. Zjawiska wirowe koncentrują się przy ścianie.



Rys. 6.14. Sekwencja położenia kropel wirowych dla $Re = 10000$. Kropki zaznaczone są okręgami o promieniu odpowiadającym promieniowi obcięcia $\delta \approx 0,112$
 Fig. 6.14. The sequence of the vortex blob positions at $Re=10000$. The vortex blobs are marked by the circle with the radius equal to the cut-off length $\delta \approx 0.112$

Użycie funkcji Nordmarka (6.15) praktycznie dawało takie same obrazy wirowości, uśrednionych linii prądu i długości stref recyrkulacyjnych. Z twierdzenia 3.1 wynika, a potwierdzają to również eksperymenty numeryczne [145, 148] dotyczące modelowania ruchu cieczy nielepkiej, że postać funkcji wygładzającej wpły-



Rys. 6.15. Portrety pól wirowości dla przepływów z różnymi liczbami Reynoldsa: $Re=100, 800, 10000$

Fig. 6.15. The vorticity fields for the flow at different Reynolds number: $Re=100, 800, 10000$

wa istotnie na dokładność i szybkość zbieżności metody kropel. Jednak w przypadku modelowania ruchu cieczy lepkiej, o dokładności metody kropel wirowych przesądza rząd metody numerycznej użytej do rozwiązywania stochastycznego równania ruchu cieczy (3.34). W niniejszej pracy użyto metody Eulera pierwszego rzędu i tym należy tłumaczyć niewrażliwość wyników numerycznych od przyjętego kształtu funkcji wygładzającej. Podniesienie rzędu dokładności metody rozwiązywania równania stochastycznego (3.32) prawdopodobnie spowoduje, że postać funkcji wygładzającej będzie miała bardziej widoczny wpływ na wyniki numeryczne.

6.5. OPŁYW NIESKOŃCZENIE CIENKIEJ PŁYTKI USTAWIONEJ PROSTOPADLE DO KIERUNKU PRZEPŁYWU

Celem dalszego przetestowania możliwości zbudowanego programu, wykorzystującego metodę kropel wirowych, było podjęcie próby zamodelowania opływu nieskończonej cienkiej płytki ustawionej prostopadle do kierunku przepływu. Nieskończenie cienka płytka wymaga odpowiedniego traktowania w procesie generacji wirów. Istnieje obszerna literatura na temat modelowania opływu cieczą nielepka ciał z ostrymi krawędziami [22, 31, 127, 128, 164, 182]. Przyjmuje się, że ostre krawędzie są punktami oderwania się warstwy przyściennej i na tych krawędziach następuje generacja wirowości, która dostaje się w obszar przepływu po-

tencjalnego. Jednym z bardziej znanych i powszechnie stosowanych równań opisujących prędkość generacji wirowości na ostrzu jest wzór [22, 127]:

$$\frac{d\Gamma}{dt} = -\frac{1}{2}(u_+^2 - u_-^2) \quad (6.17)$$

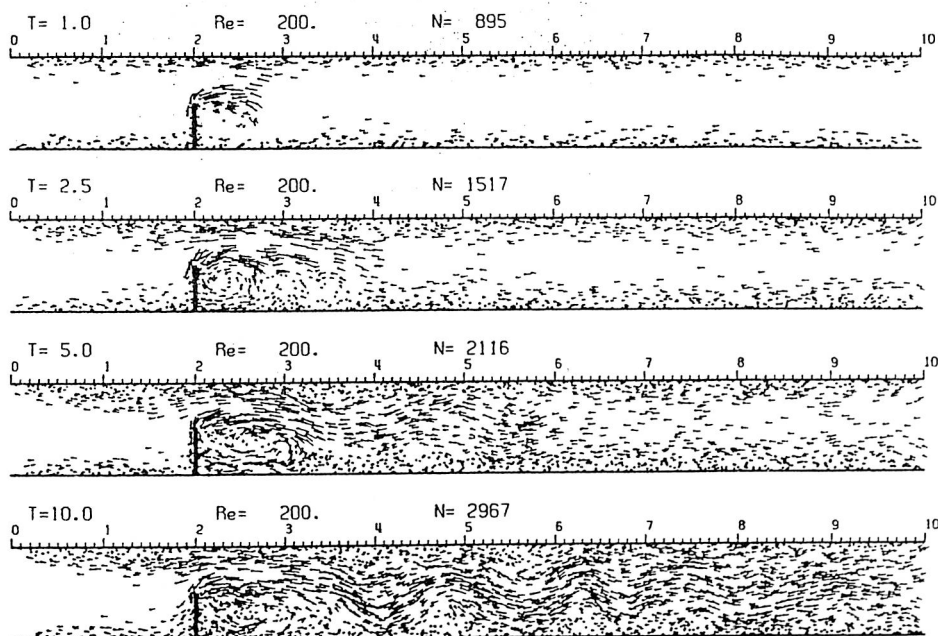
gdzie u_+ , u_- oznaczają górną i dolną prędkość po obu stronach odrywającej się warstwy przyściennej. Najczęściej przyjmuje się również, że wartość $u_+ > u_-$ i u_- jest we wzorze pomijana. Dalej w obliczeniach przyjęto, że kropla wirowa, która była wprowadzana do przepływu w każdym kroku czasowym miała intensywność:

$$\Delta\Gamma = -\frac{1}{2}u_+^2\Delta t \quad (6.18)$$

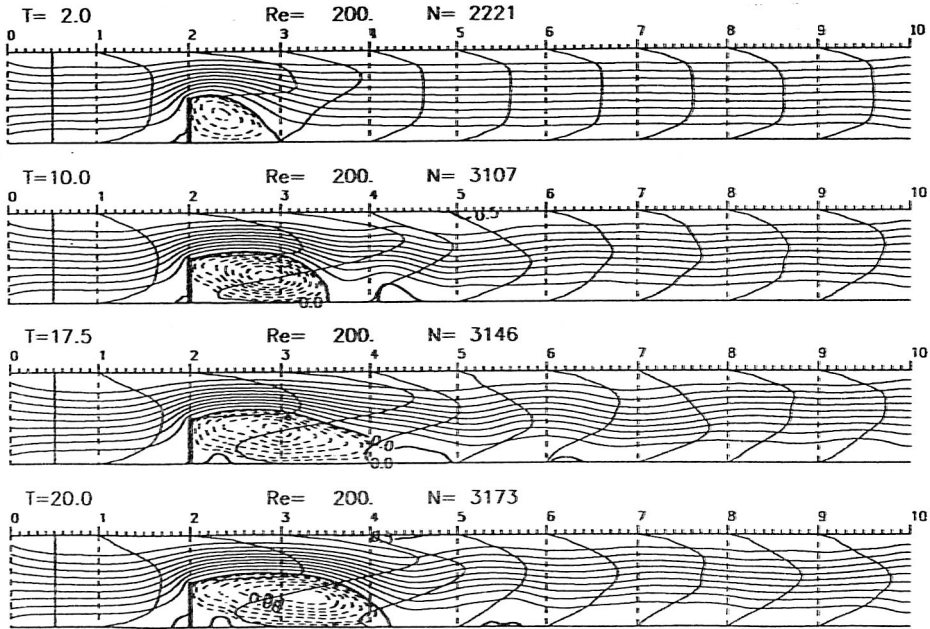
gdzie u_+ jest sumą prędkości potencjalnej i pochodzącej od kropli wirowych na ostrzu.

Poniżej przedstawiono rozwiązania dla dwóch różnych liczb Reynoldsa $Re=200$ i $Re=5000$. Przede wszystkim zależało nam na zbadaniu jak reaguje metoda kropli wirowych na zmianę liczby Reynoldsa.

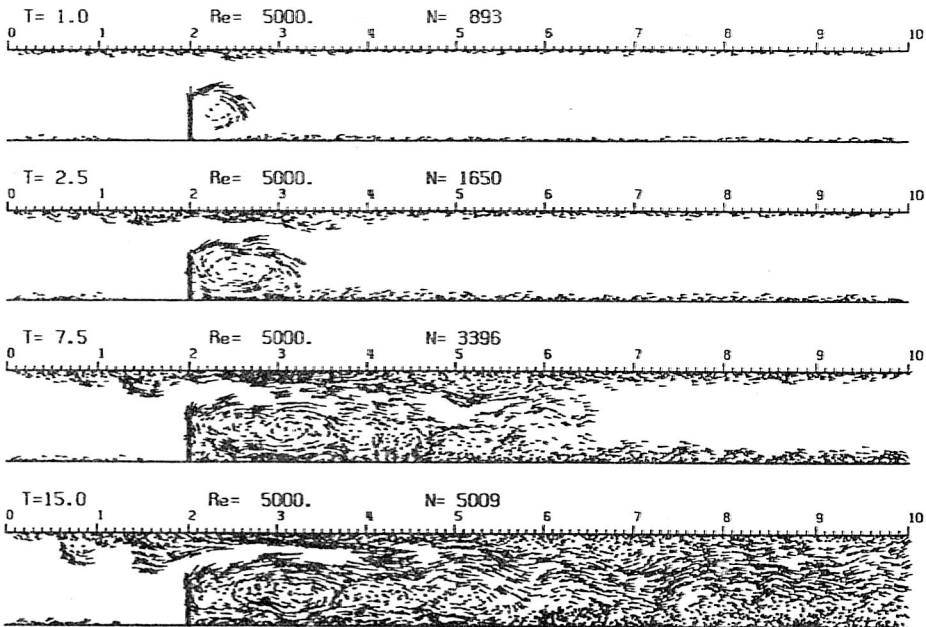
Na rys. 6.16 przedstawiono sekwencję położenia kropli wirowych dla $Re=200$.



Rys. 6.16. Sekwencja położenia kropli wirowych; $Re=200$
 Fig. 6.16. The sequence of the vortex blob position; $Re=200$



Rys. 6.17. Sekwencja chwilowych przebiegów linii prądu; $Re=200$
 Fig. 6.17. The sequence of the instantaneous streamlines; $Re=200$

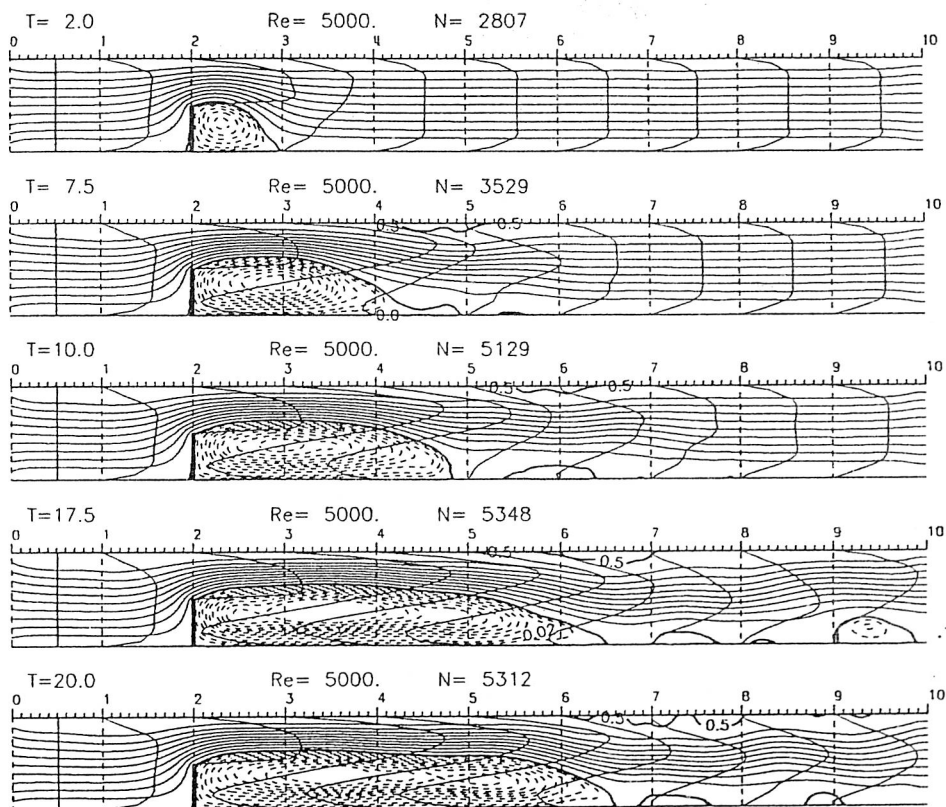


Rys. 6.18. Sekwencja położenia kropel wirowych; $Re=5000$
 Fig. 6.18. The sequence of the vortex blob positions; $Re=5000$

Ponieważ przepływ jest laminarny, warstwa przyścienna szybko rozszerza się na całą szerokość kanału. Widać zasilanie pola wirowości wirami odrywającymi się z końca płytki. Pole wirowości w środku kanału wskutek oddziaływania ostrza jest zafalowane.

Na rys. 6.17 przedstawiono chwilowe rozkłady linii prądu (uśrednione po 10 krokach czasowych) wraz z rozkładami prędkości dla $Re=200$. Widać narastanie strefy recyrkulacyjnej za płytką, w której, jak pokazują rozkłady prędkości, występuje przepływ wsteczny.

Na rys. 6.18 przedstawiono sekwencję kropek wirowych dla $Re=5000$. Warstwa przyścienna kształtuje się teraz dużo wolniej. Źródłem wirowości jest koniec płytki, z którego spływają wiry oraz niestabilna strefa recyrkulacyjna za płytką. Tuż nad płytką widać wyraźnie uformowany rdzeń potencjalny, który jednak ma skończony zasięg. Wzdłuż kanału uformowały się z kropek wirowych duże, okresowe struktury wirowe. Na rys. 6.13 przedstawiono sekwencję chwilowych wykresów linii prądu wraz z profilami prędkości. Po porównaniu ze sobą pól wirowości



Rys. 6.19. Sekwencja chwilowych przebiegów linii prądu wraz z rozkładami prędkości; $Re=5000$

Fig. 6.19. The sequence of the instantaneous time portrait of the streamlines with the velocity distribution; $Re=5000$

przepływów dla $Re=200$ oraz $Re=5000$ widać, że produkcja wirowości na końcu płytki dla liczby Reynoldsa $Re=5000$ jest znacznie większa niż dla $Re=200$. Strefa recyrkulacji jest znacznie dłuższa. Widać wyraźniej ukształtowane struktury wirowe wzdłuż ścianek kanału dla większej liczby Reynoldsa ($Re=5000$). Reagowanie metody kropeł wirowych na zmianę liczby Reynoldsa jest więc poprawne.

Porównując otrzymane obrazy przepływów przedstawionych na rys. 6.18, ze zdjęciami przepływów rzeczywistych z dużą liczbą Reynoldsa opublikowanych w literaturze, np. [165, 194] należy stwierdzić, że komputerowe obrazy przepływów otrzymane metodą kropeł wirowych są bardzo podobne to przepływów rzeczywistych. Mając więc na uwadze fakt prawidłowych zmian pól prędkości i wirowości w zależności od liczby Reynoldsa należy przyjąć, że metoda kropeł wirowych w zaproponowanej realizacji jest użytecznym, narzędziem badawczym, nadającym się do modelowania przepływów w złożonych geometrycznie obszarach.

7. PODSUMOWANIE

Ze względu na typ modelowanych zjawisk przedstawione metody dyskretnych wirów można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej grupy zaliczamy metody znajdujące zastosowanie w badaniu ruchu nieskończenie cienkiej powierzchni rozgraniczającej dwa ośrodki, na której składowa styczna pola prędkości jest nieciągła. Może ona być wykorzystywana do badania niestabilności Kelvina–Helmholtza, Rayleigha–Taylora czy też ruchu fal powierzchniowych. Przyjmuje się dość restrykcyjne założenia odnośnie do ruchu cieczy i własności fizycznych płynów (ruch potencjalny, ciecz nielepka). Pozwala to jednak na przedstawienie równań ruchu w postaci zagadnienia początkowego dla warstwy wirowej. Dzięki temu metoda charakteryzuje się dużą dokładnością, o kilka rzędów przewyższającą dokładność metod siatkowych, oraz efektywnym wykorzystaniem czasu i pamięci komputera. Stanowi precyzyjne narzędzie badania formowania się osobliwości w ruchu warstwy wirowej. Ze względu na przyjęte założenia upraszczające zagadnienie początkowe musi podlegać regularyzacji.

Do głównych osiągnięć obecnej pracy w zakresie modelowania ruchu warstwy wirowej w przypadku niestabilności Rayleigha–Taylora można zaliczyć:

- Pokazanie, przez eksperyment numeryczny, formowania się w rozwiązaniach osobliwości. Było to możliwe dzięki włączeniu do równań efektu napięcia powierzchniowego, który spełniał rolę filtra tłumiącego wzrost błędów numerycznych, mających swoje źródło w skończonej reprezentacji liczb w maszynie. Pojawianie się osobliwości w rozwiązaniach jest przyczyną, dla której algorytm metody wirów podany w pracy [17] zawodził dla liczb Atwooda mniejszych od jeden.

- Wskazanie doboru najkorzystniejszej wartości parametru α (wzór (4.9)). Najkorzystniejszą wartością parametru jest $\alpha = -A/2$. Dla tej wartości w równaniu intensywności ewolucji warstwy wirowej zeruje się człon nieliniowy $(1/2)\partial/\partial e[\gamma^2/z_c z^*]$ (patrz wzór (4.20)).

- Przykładowe rozwiązania dla równań zregularyzowanych, z różnymi wartościami liczb Atwooda i różnymi rodzajami zaburzeń początkowych (w przypadku aproksymacji Boussinesqa).

- Zbadanie wpływu wartości parametru δ użytego do regularyzacji na przykładzie ruchu pęcherzyka cylindrycznego w polu grawitacyjnym.

- Zbadanie wpływu warunków początkowych pęcherzyka eliptycznego na jego ewolucję. Stwierdzono, że eliptyczna forma pęcherzyka w chwili początkowej powoduje, że podczas ewolucji z jego masy wysnuwa się nici („ogon”). Szczegóły ewolucji pęcherzyka takie jak: zakończenie nici, jej kształt, położenie punktu, z którego wysnuwa się nici zależą od warunków początkowych. Nici, ostrza, struktury spiralne są typowymi elementami pojawiającymi się w trakcie ewolucji form w warunkach „dalekich od równowagi” [8, 124].

Do drugiej grupy metod wirowych należą metody służące do rozwiązywania równań ruchu cieczy lepkiej, np. metoda kropel wirowych. Została ona pomyślana jako metoda do rozwiązywania równań ruchu cieczy lepkiej z małą wartością współczynnika lepkości (dużą liczbą Reynoldsa). Głównymi osiągnięciami niniejszej pracy odnośnie do metody kropel wirowych są:

- Zbudowanie uniwersalnego programu do modelowania przepływów w kanałach o złożonej geometrii, a więc ważnych dla praktyki inżynierskiej, z wykorzystaniem metody kropel wirowych. Ważnym etapem w realizacji tego zadania było opanowanie sposobu szybkiego wyznaczania przepływów potencjalnych w kanałach o złożonej geometrii.

- Włączenie do programu metody szybkiego sumowania wzajemnego oddziaływania wirów, co pozwoliło na pięciokrotne przyspieszenie obliczeń.

- Przetestowanie programu dla przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem i opływu nieskończenie cienkiej płytki ustawionej prostopadle do przepływu.

W metodzie kropel wirowych otwartym problemem pozostaje dowód zbieżności metody w obszarze ze ściankami sztywnymi. W niniejszej pracy przyjęte za Chorinem [42] podejście do realizacji warunku przylegania płynu do ścianek sztywnych przez generację kropel wirowych na ściance opiera się na przesłankach empirycznych. Należy się spodziewać dalszych prac teoretycznych uzasadniających i racjonalizujących takie podejście [97, 184].

Z przeprowadzonych tu badań wynika, że w metodzie kropel wirowych do obliczeń nie jest konieczne stosowanie warstw wirowych jako dodatkowego nośnika wirowości w pobliżu ścianki. Otrzymano jakościowo poprawne obrazy przepływów turbulentnych. Program stanowi interesujące narzędzie badawcze procesów przejściowych i turbulentnych w przepływach dwuwymiarowych. Pewną wadą stochastycznego podejścia do metody kropel wirowych jest utrata precyzji punktowego przewidywania prędkości oraz powolny wzrost dokładności w zale-

żności od liczby wirów ($\sim N^{1/2}$). W ostatnich latach pojawiło się wiele prac dotyczących modelowania lepkości cieczy metodami deterministycznymi [54, 55, 64, 97, 135, 161]. Należy się spodziewać dalszych prób wyeliminowania z algorytmu kropel wirowych stochastycznego podejścia do rozwiązywania równania dyfuzji. Może jednak okazać się, że skuteczność metody kropel wirowych ma swoje źródło właśnie w stochastycznej realizacji algorytmu. Stochastyczność pola prędkości przepływów z dużą liczbą Reynoldsa jest jego charakterystyczną cechą.

Algorytm metody kropel wirowych daje się rozszerzyć na przepływy trójwymiarowe [5, 44, 126]. Prezentowane w pracy podejście wyznaczania potencjalnego pola przepływu, za pomocą szybkich metod siatkowych też można rozszerzyć na przypadek trójwymiarowy [167]. W przyszłości istnieje więc szansa na zbudowanie uniwersalnego programu, w oparciu o metodę kropel wirowych dla przepływów trójwymiarowych. Obliczenia takie wymagają jednak dostępu do komputerów o dużej mocy obliczeniowej (wzrost liczby oddziaływań, konieczność użycia większej liczby kropel wirowych ze względu na potrzebę dobrego zamodelowania efektu rozciągania linii wirowej). Dostęp do komputerów o dużej mocy obliczeniowej będzie coraz łatwiejszy ze względu na ciągły rozwój technologiczny techniki komputerowej. Modelowanie przepływów trójwymiarowych bardziej wiąże się z realnymi, fizycznymi przepływami niż modelowanie przepływów dwuwymiarowych. Dlatego w najbliższych latach należy oczekiwać wzrostu publikacji na temat modelowania przepływów trójwymiarowych.

Nie ulega wątpliwości, że metody dyskretnych wirów będą się dalej intensywnie rozwijały. Wynika to z atrakcyjnych cech metody, takich jak możliwość modelowania przepływów w zakresie dużych liczb Reynoldsa oraz analizy i interpretacji wyników numerycznych modelowanych zjawisk z użyciem wirowości. Wirowość natomiast jest „mięśniami i nerwami” dynamiki płynów, nieodłącznym elementem wszystkich rzeczywistych zjawisk wiążących się z ruchem płynu.

LITERATURA

- [1] AMSDEN A., HARLOW F.H. *The SMAC Method. A Numerical Technique for Calculating Incompressible Fluid Flows*, Los Alamos Scientific Laboratory report LA- 4370, 1970.
- [2] ANDERSON C.R., *A Method of local correction for computing the velocity field due to a distribution of vortex blobs*, J. Comp. Phys., Vol. 62 (1986), s. 111-123.
- [3] ANDERSON C., *A vortex method for flows with slight density variations*, J. Comp. Phys., vol. 61, (1985), s. 417-444.
- [4] ANDERSON C. R., *Vorticity boundary conditions and boundary vorticity generation for two-dimensional viscous incompressible flows*, J. Comp. Phys., vol. 80, (1989), s.72-97.
- [5] ANDERSON C., GREENGARD C., *On vortex methods*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 22, (1985), s. 413 - 440.
- [6] ANDREWS M.J., SPALDING D.B., *A simple experiment to investigate two-dimensional mixing by Rayleigh-Taylor instability*, preprint, Phys. Fluids (1991).
- [7] APPEL A.W., *An efficient program for many-body simulation*, SIAM J. Sci. Stat. Comput., vol.6, No. 1 (1985), s. 85-103.
- [8] AREF H., *Finger, Bubble, Tendril, Spike*, Fluid Dynamics Transactions, vol.13, (1987), PWN, Warsaw, s. 25-54.
- [9] AREF H., *The numerical experiment in fluid mechanics*, J. Fluid Mech., vol. 173, (1986), s. 15-41.
- [10] AREF H., *Integrable, chaotic, and turbulent vortex motion in two-dimensional flows*, Ann. Rev. Fluid Mech., 15, (1983), s. 345-389.
- [11] AREF H., KAMBE T., *Report on the IUTAM symposium: fundamental aspects of vortex motion*, J.Fluid Mech., vol. 190, (1988), s. 571-595.
- [12] AREF H., POMPHREY N., *Integrable and chaotic motions of four vortices*, Phys. Letters, vol. 78A, (1980), s.297-300.
- [13] AREF H., TRYGGVASON G., *Model of Rayleigh- Taylor Instability*, Phys. Rev. Letters, vol. 62, (1989), s. 749 - 752.
- [14] ARMALY B.F., DURST F., PERERIRA J.C., SCHÖNUNG B., *Experimental and Theoretical Investigations of Backward-Facing Step Flow*, J. Fluid Mech., vol. 127, (1983), s.473-496.
- [15] BADEN S.B., *Very Large Vortex Calculations in Two Dimensions*, w zbiorze Vortex Methods, Proc. of the U.C.L.A. Workshop, eds.C.Anderson, C.Greenard, Lecture Motes in Mathematics 1360., (1988), s. 96-120
- [16] BAKER G.R., *A test of the method of Fink & Soh for following vortex-sheet motion*, J. Fluid Mech., vol.100, (1980),s. 209-220.
- [17] BAKER G.R., MEIRON D.I.,ORSZAG S.A., *Vortex simulation of the Rayleigh-Taylor Instability*, Phys.Fluids, vol.23, (1980), s.1485-1490.
- [18] BAKER G. R., *Generalized vortex methods for free-surface flows*, Proc. „Wave on Fluid Interface”. Academic Press, (1983),pp.53-81
- [19] BAKER G., CAFLISH R., SIEGEL M., *Singularity formation during Rayleigh-Taylor instability*,J. Fluid Mech. (1993), vol. 252, s. 51-78.
- [20] BAKER G. R. ,MEIRON D. I.,ORSZAG S. A., *Generalized vortex methods for free surface flow problems*, J.Fluid Mech., vol.123, (1982), s.477-501.
- [21] BARNES J., HUT P., *A hierarchical $O(N \log N)$ force-calculation algorithm*, Nature, vol.324, (1986),s. 446-449.
- [22] BASU B. C., HANCOCK G. J., *The unsteady motion of a two-dimensional aerofoil in incompressible inviscid flow*, J. Fluid Mech., vol.87 (1978) s.159-178.

- [23] BATCHELOR G. K., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press, (1970).
- [24] BEALE T. J., *A Convergent 3-D Vortex Method With Grid-Free Stretching*, Math. Computation, vol.46, (1986) s. 401-424.
- [25] BEALE J. T., MAJDA A., *Vortex Method I: Convergence in Three Dimensions*, Math. Comp. Vol. 39 (1982), s. 1-27.
- [26] BEALE J. T., MAJDA A., *Vortex Method II: Higher Order Accuracy in Two and Three Dimensions*, Math. Comp. Vol. 39 (1982), s. 29-52.
- [27] BEALE J. T., MAJDA A., *Rate of Convergence for Viscous Splitting of the Navier-Stokes Equations*, Math. Computation, vol.37, (1981), s. 243-259.
- [28] BEALE J. T., MAJDA A., *High Order Accurate Vortex Method with Explicit Velocity Kernels*, J. Comp. Phys. Vol. 58 (1985), s.188-208.
- [29] BELLMAN R., PENNINGTON R. H., *Effects of surface Tension and Viscosity on Taylor Instability*, Quart. Appl. Math., vol.12, (1954), s.151-162.
- [30] BIELOCERKOWSKIJ S. M., LIFANOW I. K., *Čislennyye metody w singul'arnych integralnych urawnienijach*, Moskwa, Nauka 1985.
- [31] BIELOCERKOWSKIJ S. M., NIŠT M. I., *Otrywnoje i bezotrywnoje obtiekan'je kryl'ow idealnoj židkost'ju*, Moskwa, Nauka 1978.
- [32] BIRKHOFF G., *Helmholtz and Taylor instability*, Proc.Symp. Appl. Math., Am. Math. Soc., Providence, R.I. (1962).
- [33] BIRKOFF G., FISHER J., *Do vortex sheets roll up*, Rend. Circ. Math. Palermo, Ser. 2, vol. 8, (1959), s. 77-90.
- [34] BŁAŻEWICZ J., STYCZEK A., *The stochastic simulation of the viscous fluid flow past an airfoil-part I*, Mechanika teoretyczna i Stosowana 1,31,(1993) s.175-204.
- [35] BUI T. D., OPPENHEIM A.K., *Evaluation of the Wind Effect on Model Buildings by the Random Vortex Method*, Applied Num. Math., vol. 3, (1987), s. 193-207.
- [36] BUNEMAN O., *A compact non-iterative Poisson Solver*, SUIPR Report No. 294, 1969
- [37] BUZBEE B.L., *Fast Poisson subroutine for x-y and z-r coordinate*, Los Alamos Scientific Lab., Los Alamos, 1973.
- [38] BUZBEE B.L., DORR F.W., GEORGE J.A., GOLUB G.H., *The Solution of the Discrete Poisson Equation on Irregular Regions*, SIAM, J. Num. Anal., Vol. 8 (1971), s. 722-736.
- [39] CHANG C.-C., *Random Vortex Methods for the Navier-Stokes Equations*, J. Comp. Phys., Vol. 76, (1988), s. 281-300.
- [40] CARRIER J., GREENGARD L., ROKHLIN V., *A fast adaptive multipole algorithm for particle simulations*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., vol.9, No. 4 (1988), s. 669-686.
- [41] CHEER A.Y., *Numerical Study of Incompressible Slightly Viscous Flow Past Blunt Bodies and Airfoils*, SIAM, J. Sci. Stat. Comput., Vol.4, No.4, 1983.
- [42] CHORIN A.J., *Numerical Study of Slightly Viscous Flow*, J. Fluid Mech. Vol. 57 (1973), s. 785-796.
- [43] CHORIN A.J., *Vortex Sheet Approximation of Boundary Layers*, J. Comp. Phys. Vol. 27 (1978), s. 428-442.
- [44] CHORIN A.J., *Vortex Model and Boundary Layer Instability*, SIAM J. Sci. Stat. Comp. vol. 1 (1980), s. 1-22.
- [45] CHORIN A.J., MARS DEN J.E., *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer 1979.
- [46] CHORIN A.J., BERNARD P.S., *Discretization of a vortex sheet with an example of roll-Up*, J. Comp. Phys., vol.13, (1973), s. 423-429.
- [47] CHORIN A.J., HUGHES J.R., McCracken M.F., MARS DEN J., *Product formulas and numerical algorithm*, Commun. on Pure and Applied Mathem., vol. 31, (1978), s.205-256.

- [48] CHRISTIANSEN J.P., *Numerical simulation of Hydrodynamics by the Method of Point Vortices*, J. Comp. Phys., Vol. 13 (1973), s. 363-379.
- [49] CHRISTIANSEN J.P., HOCKNEY R.W. - *DELSQPHI - a 2D Poisson -Solver program.*, Computer Physics Comm. 2,(1971), s. 139-155.
- [50] CLEMENTS R. R., *Flow representation, including separated regions, using discrete vortices*, Lecture Series No.86 on Computational Fluid Dynamics, AGARD, North Atlantic Treaty Organization, s.5/1 -5/20, (1974)
- [51] CLEMENTS R. R., MAULL D. J., *The representation of the sheets of vorticity by discrete vortices*, Prog. Aerospace Sci. vol.16, No. 2, (1975)
- [52] COTTET G-H., *A new approach for the analysis of vortex methods in two and three dimensions*, Ann. Institute H.Poincare, 5, 1988.
- [53] COTTET G-H., *Boundary Conditions and Deterministic Vortex Methods for the Navier-Stokes Equations*, Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, ed.R.Caflish, SIAM (1988), s.128-143.
- [54] COTTET G-H, *Large-time behavior of deterministic particle approximations to the Navier-Stokes equations*, Math. Comput., vol. 56, No. 193, s. 45 - 59.
- [55] COTTET G-H., *A particle-grid superposition method for the Navier-Stokes equations*, J. Comp. Phys., vol. 89, (1990), s. 301-318.
- [56] DALY B.J., *Numerical Study of the Effect of Surface Tension on Interface Instability*, Phys. Fluids ,vol.12, (1969), s. 1340-1354.
- [57] DENHAM H.K., PATRICK M.A., *Laminar flow over a downstream-facing step in a Two-dimensional Flow Channel*, Trans. Instn Chem. Engrs., Vol.52 (1974), s. 361-367.
- [58] DOMMELEN L., RUNDENSTEINER E., *Fast,adaptive summation of point forces in the two-dimensional Poisson Equation*, J. Comp. Phys., vol.83, (1989), s. 126-147.
- [59] DRAZIN P. G., REID W. H., *Hydrodynamic stability*, Cambridge University Press, (1982)
- [60] DUSHANE T. E.,*Convergence for a vortex method for solving Euler's equations*, Math. Comp., vol., 27, (1973), s. 423-429.
- [61] FELLER W., *Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa t.I, II*, Warszawa, PWN, 1966
- [62] FINK P.T., SOH W.K., *Calculation of vortex sheets in unsteady flow and applications in ship hydrodynamics*, Tenth Symposium NAVAL HYDRODYNAMICS, ACR-204, Office of Naval Research Department of the Navy, (1974), s.463-491.
- [63] FINK P.T., SOH W.K., *A new approach to roll-up calculations of vortex sheets*, Proc. R. Soc. London, Ser. A,vol. 362 (1978), s. 195-209.
- [64] FISHELOV D., *A new vortex scheme for viscous flows*, J. Comp. Phys., vol. 86, (1990), s. 211-224.
- [65] FORTYTHE G., MALCOLM M. A., MOLER C., *Computer methods for mathematical computations*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. 1977
- [66] GAHOV F.D., *Krajevyje zadaci*, Moskwa, Izd. Nauka, 1977.
- [67] GARABEDIAN P.R., *Partial differential equations*, New York (1964).
- [68] GARABEDIAN P.R., *On steady-state bubbles generated by Taylor instability*, Proc. Roy. Soc. London, Ser. A 241, (1957), s.423-431.
- [69] GARDINER C.W. *Handbook of stochastic methods*, Springer Seris in Synergetics, ed. H.Haken, vol.13, Springer-Verlag (1985).
- [70] GHONIEM A.F., SETHIAN J.A., *Effect of Reynolds number on the Structure of Recirculating Flow*, AIAA J., vol. 25, (1987), s. 168-171.
- [71] GHONIEM A.F., CAGNON V., *Vortex Simulations of Laminar Recirculating Flow*, J. Comp. Phys. Vol.68 (1987), s. 348-377.
- [72] GHONIEM A.F., CHORIN A.J., OPPENHEIM A.K., *Numerical modeling of turbulent flow in a combustion tunnel*, Philos. Trans. Roy. Soc. Lond. A-304, (1982),s. 303-325.

- [73] GHONIEM A.F., SHERMAN F.S., *Grid-free Simulation of Diffusion Using Random Walk Method*, J. Comp. Phys. Vol.61 (1985), s. 1-37.
- [74] GLIMM J., McBRYAN O., MENIKOFF R., SHARP D. H., *Front tracking applied to Rayleigh-Taylor instability*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., vol.7, (1986), s. 230-251.
- [75] GREENGARD C., *The core spreading vortex method approximates the wrong equation*, J. Comp. Phys., vol. 61, (1985), s. 345-348.
- [76] GREENGARD L., ROKHLIN V., *A fast algorithm for particle simulation*, J. Comp. Phys. vol. 73, (1987), s. 325-348.
- [77] GRIFFITHS R.W., *Thermals in extremely viscous fluids, including the effects of temperature-dependent viscosity*, J. Fluid Mech., vol. 166, (1986), s. 115-138.
- [78] HALD O.H., *Convergence of Vortex Method for Euler's Equations II*, SIAM, J. Numer. Anal. Vol. 16 (1979), s. 726-755.
- [79] HALD O.H., *Convergence of Vortex Method for Euler's Equations III*, SIAM, J. Numer. Anal. Vol. 24 (1987), s. 538-582.
- [80] HALD O. H., *Convergence of vortex methods*, w zbiorze Vortex Methods and Vortex Motion, eds. K.E. Gustafson, J.A.Sethian, SIAM Philadelphia, Pennsylvania (1991), s. 33 - 58.
- [81] HALD O.H., DEL PRETE V. M. *Convergence of Vortex Methods for Euler's Equations*, Math. Comp., vol. 32, (1978), s.791-809.
- [82] HOCKNEY R.W., EASTWOOD J.W. - *Computer Simulation Using Particles*, (przekład rosyjski), Moskwa, Mir, 1987.
- [83] HOCKNEY R.W. - *A fast direct solution of Poisson's equation using Fourier analysis*, J. Assoc. Comput. Mech., 12, 95-113, 1965.
- [84] HOCKNEY R.W. - *The potencial calculation and some applications*, w zbiorze Methods of Computational Physics, vol. ed. Alder S., Fernbach M., Rotenberg, (przekład rosyjski), Moskwa, Mir 1974.
- [85] HONJI H., *The starting flow down a step*, J.Fluid Mech. (1975), vol.69, s.229-240.
- [86] HOU T.Y., LOWENGRUB J., KRASNY R., *Convergence of a point vortex method for vortex sheets*, SIAM J. Numer. Anal., vol. 28, No. 2, (1991), s. 308-320.
- [87] HOU Y. T., *A survey on convergence analysis for point vortex methods*, Lectures in Applied Mathematics - Vortex Dynamics and Vortex Methods, vol. 28, (1991), s. 327 - 339.
- [88] HYMAN J.M., *Numerical methods for tracking interface*, Los Alamos National Laboratory, LA-9917-MS (1984).
- [89] KAIKTSIS L., KARNIADAKIS G., ORSZAG S. A., *Onset of the three dimensionality, equilibria, and early transition in flow over a backward-facing step*, J. Fluid Mech. vol. 213.,(1991) s.501-528.
- [90] KATZENELSON J.,*Computational structure of the N-body problem*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., vol. 10, No. 4 (1989), s. 787-815.
- [91] KERR R.M., *Simulation of Rayleigh-Taylor Flows Using Vortex Blobs*, J. Comp. Phys., vol.76, (1988), s. 48-84.
- [92] KIM J., MOIN P., *Applications of a fractional-step method o incompressible Navier-Stokes equations*, J. Comput. Phys., vol. 59, (1986), s. 308.
- [93] KLOEDEN P., PLATEN E., *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*, Springer-Verlag (1992)
- [94] KNUTH E. D., *The Art of Computer Programming*, Vol.2, Addison-Wesley Publis., 1981
- [95] KOČIN N. E., KIBEL' I. A., ROZE N. W., *Teoretičeskaja gidromechanika*, t. 1 i 2, Moskwa 1963.
- [96] KOJIMA M., HINCH E.J., ACRIVOS A., *The formation and expansion of a toroidal drop moving in a viscous fluid*, Phys. Fluids, 27, (1984), s. 19-32.

- [97] KOUMOUTSAKOS P., LEONARD A., *High Resolution Simulations of The Flow Around an Impulsively Started Cylinder Using Vortex Methods*, Preprint (1994), przesłano do J. Fluid Mech.
- [98] KRASNY R., *Desingularization of periodic vortex sheet roll-up*, J. Comp. Phys., vol.65, (1986), s. 292-313.
- [99] KRASNY R., *Computation of vortex sheet roll-up in the Trefftz plane*, J.Fluid Mech., vol.184,(1987), s. 123-155.
- [100] KRASNY R., *A study of singularity formation in a vortex sheet by the point-vortex approximation*, J.Fluid Mech., vol.167, (1986), pp.65-93.
- [101] KUDELA H., *Badanie ewolucji powierzchni rozdzielającej dwa ośrodki metodą wirów punktowych*, W:Metoda brzegowych równań całkowych w mechanice płynów, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji Maszyn Politechniki Wrocławskiej 59, Seria: Studia i Materiały 26, PWr (1993), s.31-42.
- [102] KUDELA H., *Metody dyskretnych wirów*, W: Metody analityczne i numeryczne w mechanice płynów - wykłady, Letnia Szkoła Mechaniki Płynów 1983, PAN Olsztyn-Mikołajki, s. 111-130.
- [103] KUDELA H., *Badania nad metodą dyskretnych warstw wirowych*, Krajowa Konferencja Mechaniki Cieczy i Gazów 1984, Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej - ENERGETYKA, Z.87, 1984, Gliwice, s. 285-292.
- [104] KUDELA H., *Badania numeryczne niestabilności Rayleigha-Taylora metodą wirów punktowych*, VII Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów t.II, Warszawa (1986). s.317-323.
- [105] KUDELA H., *A study on the generalized vortex method for Rayleigh-Taylor instability*, International seminar on engineering applications of the surface and cloud vorticity methods 1986, Part II, Scientific Papers of the Institute of Machine Construction and Operation of Technical University of Wrocław, 1987, No 51, s.53-62.
- [106] KUDELA H., *Modelowanie ewolucji powierzchni rozdziału dwóch ośrodków metodą dyskretnych wirów*, IX Konferencja Metody Komputerowe w Mechanice, Kraków - Rytro, (1989), s.627-634.
- [107] KUDELA H., *The influence of surface - tension effects on using vortex method in the study of Rayleigh-Taylor Instability*, Notes on Numerical Fluid Mechanics, vol. 29,(1990), ed. P. Wesseling, Vieweg, s. 273 -282.
- [108] KUDELA H., *Numerical studies of Rayleigh - Taylor instability by the vortex method*, Arch. Mech., vol. 42, 4-5, (1990), s.493-505.
- [109] KUDELA H., *Modelowanie przepływów w kanałach o złożonej geometrii metodą kropeł wirowych*, X Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Gdańsk-Sarnówek, (1992),s. 356-361.
- [110] KUDELA H., *Badanie ruchu i deformacji dwuwymiarowego pęcherzyka metodą dyskretnych wirów*, X Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Gdańsk-Sarnówek, (1992), s. 362-367.
- [111] KUDELA H., *Study of the motion of the two-dimensional bubble by the vortex method*, Z. Angew. Math, Mech. vol. 72,5, (1992), s. 369 - 373.
- [112] KUDELA H., *Numerical study of the motion and deformation of two-dimensional bubbles by vortex method*, Vortex Flows and Related Numerical Methods, NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences Vol.395, ed. J.T. Beale, G-H. Cottet & S. Huberson (1993) Kluwer Academic Pub., s. 191- 205.
- [113] KUDELA H., *Vortex blob simulation of the two-dimensional flow in channel with complex geometry*, II International Conference on Boundary Element Techniques and Singularity Methods in Engineering, Prace Naukowe Instytutu Konstrukcji i Eksploatacji Maszyn Politechniki Wrocławskiej Nr 74, Seria Konferencje Nr 20, Wrocław 1993, s. 71-86.

- [114] KUDELA H., *Modelowanie zjawisk hydrodynamicznych metodami dyskretnych wirów*, Instytut Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej, Raport Serii SPR 3/94, Wrocław 1994.
- [115] KUDELA H., *Badania nad metodą kropeł wirowych na przykładzie przepływu w kanale o gwałtownym rozszerzeniu*, XI Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, WAT, Warszawa 1994.
- [116] KUDELA H., KOSTECKI S., *Wykorzystanie szybkich algorytmów rozwiązywania równań Poissona w mechanice płynów*, IX Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów, Kraków 1990, s.183-188.
- [117] KUDELA H., KOSTECKI S., *Vortex blob simulation of two-dimensional flow over a backward-facing step*, *Studia Geotechnica et Mechanica*, vol.XII, No,1-2,(1992), s. 3-17.
- [118] KULL H-J., *Theory of the Rayleigh-Taylor Instability*, *Physics Reports*, (1991), praca habilitacyjna w Technischen Hochschule Darmstadt, Darmstadt (1991)
- [119] KUWAHARA K., TAKAMI H., *Numerical studies of two-dimensional vortex motion by system of Points*, *J. Phys. Soc. Japan*, 34, s.147-253, (1973)
- [120] L'ECUYER P., *Efficient and Portable Combined Random Number Generators*, *Comm. ACM*, vol.31, No 6, s. 742-774.
- [121] LAM K., *Potential flow calculation by surface vorticity method and computer graphics*, *Comput. & Graphics* vol.11, No. 1, (1987),s.35-47.
- [122] LANDAU L.D., LIFŠIČ E.M., *Gidrodinamika*, Moskwa Nauka, 1986.
- [123] LANSING F.S., MAXWORTHY T., *On the generation and evolution of internal gravity waves*, *J. Fluid Mech.*, vol.145, (1984),s. 127-149.
- [124] LANGER J.S., *Instability and pattern formation in cristal growth*, *Rev. Modern Physics* vol.52, (1980), s. 1-27.
- [125] LEJA F., *Funkcje zespolone*, Warszawa, PWN, (1973).
- [126] LEONARD A., *Computing three-dimensional incompressible flows with vortex elements*, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 17, (1985), s. 523 - 559.
- [127] LEONARD A., *Review - vortex methods for flow simulation*, *J. Comp. Phys.*, vol. 37, (1980), s. 289-335.
- [128] LEWIS R. I., *Vortex Element Methods for Fluid Dynamic Analysis of Engineering Systems*, Cambridge University Press, 1991.
- [129] LEWIS D. J., *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes.II*, *Proc. R. Soc.*, A202,(1950), s. 81-96.
- [130] LONG D-G., *Convergence of the Random Vortex Method in Two Dimensions*, *J.of the American Mathematical Society*, vol.1, No 4, (1988), s.779-804,
- [131] LONGUET-HIGGINS M.S., COKELET E.L., *The deformation of steep surface waves on water, I. A numerical method of computation*, *Proc. Roy. Soc., Ser. A*, vol.350, (1976), s.1-26.
- [132] ŁUKASZEWICZ J., WARMUS M., *Metody numeryczne i graficzne*, Warszawa, PWN, 1956.
- [133] MARSE K., ROBERTS S. D., *Implementing a portable FORTRAN Uniform (0,1) generator*, *Simulation*, October 1983, s.135-139.
- [134] MATHEMATICAL ASPECTS OF VORTEX DYNAMICS, ed. R.E.Cafflisch, SIAM Philadelphia, Proceedings of the Workshop on Mathematical Aspects of Vortex Dynamics, Leesburg, Virginia 1988.
- [135] MAS-GALLIC S., *Deterministic particle method: Diffusion and boundary conditions*, *Lectures in Applied Mathematics - "Vortex Dynamics and Vortex Methods"*, vol. 28., (1991) s. 433-465.
- [136] MEIRON D. I., BAKER G. R., ORSZAG S. A., *Analytic structure of vortex sheet dynamics. Part 1. Kelvin-Helmholtz instability*, *J. Fluid Mech.*, vol.114, (1982), s. 83-298.

- [137] MENG J. S., THOMSON J. A. L., *Numerical studies of some nonlinear hydrodynamic problems by discrete vortex element method*, J. Fluid Mech., vol 84., (1978), s. 433-453.
- [138] MENKOFF R., ZEMACH C., *Rayleigh - Taylor instability and the use of conformal maps for ideal fluid flow*, J. Comp. Phys., vol. 51, (1983), s. 28-64.
- [139] MODRZEWSKA-PONIŻY B., STYCZEK A., *Modelling a plane jet via the vortex blob method*, Arch. Budowy Maszyn, 2, XXXIX, (1992)
- [140] MOORE D. W., *The spontaneous appearance of singularity in the shape of an evolving vortex sheet*, Proc. Roy. Soc. Lond. ,Ser. A, vol. 365, (1979), s. 1.
- [141] MOORE D. W., *On the point vortex method*, SIAM J. SCI. STAT. COMPUT., vol.2, (1981), s. 65-84.
- [142] MOORE D. W., *Numerical and Analytical aspects of Helmholtz Instability*, 1985 ,Theoretical and Applied Mechanics ,IUTAM, s. 263-274.
- [143] MOORE D. W., *The motion of a vortex layer of small thickness*, Stud. Appl. Math., vol. 58.,(1978), s. 119-140.
- [144] MORZYŃSKI M., THIELE F., *Receptivity of sudden channel expansion and backward facing step flows*, Referat prezentowany na 2ed European Fluid Mechanics Conference, Warszawa, wrzesień 20-24, 1994r., materiały niepublikowane. Autorzy referatu przekazali wybrane wyniki numeryczne, wykresy linii prądu i wirowości, autorowi niniejszej monografii.
- [145] NORDMARK H. O., *Rezoning for higher order methods*, J. Comp. Phys., vol. 97, (1991), s. 336-397.
- [146] OSSWALD G. A., GHIA K. N., GHIA U., *Study of incompressible sperated flow using an implicit time-dependent technique*, w zbiorze AIAA, Sixth CFD Conf., Danvers, MA, (1983), s.686.
- [147] PARK S., MILLER K., *Random Number Generators: Good Ones Are Hard to Find*, Comm. ACM, Vol. 31, (1988), s. 1192-1201.
- [148] PERLMAN M., *On the accuracy of vortex methods*, J. Comp. Phys. vol. 59, (1985), s. 200-223.
- [149] PIETROWSKI I., *Równania różniczkowe cząstkowe*, Warszawa, PWN,(1955).
- [150] POZRIKIDIS S. C., *The instability of a moving viscous drop*, J. Fluid Mech., vol. 210, (1990), s.1-21.
- [151] PRESS H. W., TEUKOLSKY S. A., VETTERLING W., FLANNERY B. P., *Numerical recipes in Fortran. The art of scientific Computing*, Cambridge University Press 1992.
- [152] PROSKUROWSKI W., WIDLUND O. *On the numerical solution of Helmholtz's equation by the capacitance matrix method*, Math. of Comput.,vol.30, No.135, (1976) 433-468.
- [153] PUCKED E.G., *A Study of the Vortex Sheet Methods and it Rate of Convergence*, SIAM, J. Sci. Stat Comp., vol.10, No.2 (1989), s.298-327.
- [154] PUCKETT E. G., BADEN S. B., *A Fast Vortex Method for Computing 2-D Viscous Flow*, J. Comp. Phys., Dec. 1990.
- [155] PULLIN D. I., *Numerical studies of surface-tension effects in nonlinear Kelvin-Helmholtz and Rayleigh-Taylor instability*, vol. 119, (1982), s. 507-532.
- [156] READ K. I., *Experimental investigations of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability*, Physica D, 12, (1984), s. 45-58.
- [157] RIZZI A., ENQUIST B., *Review article - Selected topics in the theory and practice of computational fluid dynamics*, J. Comp. Phys., vol. 72, (1987), s. 1-69.
- [158] ROBERTS A. J., *A stable and accurate numerical method to calculate the motion of sharp interface between fluids*, IMA J. Appl. Math., vol. 31, (1983), s. 13 - 35.
- [159] ROBERTS S., *Accuracy of the Random Vortex Method for a Problem with Non-Smooth Initial Conditions.*, J. Comp. Phys., Vol.58, (1985), s. 29-43

- [160] ROSENHEAD L., *The formation of vortices from a surface of discontinuity*, Proc. R. Soc. Lond., A 134, (1931), s. 170 -192.
- [161] RUSSO G., *A deterministic vortex method for the Navier - Stokes equations*, J. Comp. Phys., vol.107, (1993)
- [162] SAFFMAN P. G., BAKER G. R., *Vortex interactions*, Ann. Rev. Fluid Mech., 11, (1979), s. 95 - 120.
- [163] SAFFMAN P. G., *Dynamics of vorticity*, J. Fluid Mech. vol.106, (1981), s.49-58.
- [164] SARPKEYA T., *Computational methods with vortices -the 1988 Freeman Scholar Lecture*, J. Fluids Eng., vol.111 (1989), s.5-52.
- [165] SCHLICHTING H., *Teoria pograničnowo sloja*, Moskwa, Nauka, (1974).
- [166] SCHUMANN U., SWEET R. A., *Direct Poisson Equation Solver for Potential and Pressure Fields on a Staggered Grid with Obstacles*, Lecture Notes in Physics, vol. 59, (1976) s. 397-403.
- [167] SCHUMANN U., SWEET R. A., *Fast Fourier Transforms for Direct Solution of the Poissons Equation with Staggered Boundary Condition*, J. Comp. Phys., vol.75, (1988), s. 123-132.
- [168] SCHUMANN U., *Fast elliptic solvers and their application to fluid dynamics problems*, Comp. Fluid Dynamics, Lecture ser. 1987, 4, For Karman Inst. for Fluid Dynamics, Hemisphere, Publ. Co.,1980.
- [169] SCHUMANN U., SWEET R.A., *A Direct Method for the Solution of the Poisson Equation with Neumann Boundary Conditions on a Staggered Grid of Arbitrary Size*, J. Comp. Phys., Vol. 26, No.2, (1976) s.171-182.
- [170] SCHUSS Z., *Teoria i zastosowania stochastycznych równań różniczkowych*, Warszawa PWN,(1989).
- [171] SCORER R. S., *Environmental Aerodynamics*, Halsted Pres. (1978).
- [172] SEDOW L. I., *Mechanika splošnoj sredy*, tom II, Moskwa, Nauka, (1973).
- [173] SEKERKA R. F., *Morphological stability*, w zbiorze Crystal Growth: an introduction, ed. P.Hartman. (1975)
- [174] SETHIAN J.A., GHONIEM A.F., *Validation Study of Vortex Method*, J. Comp. Phys., Vol. 74 (1988), s. 283-317.
- [175] SETHIAN J.A., *A Brief Overview of Vortex Method*, in Vortex Methods and Vortex Motion, ed. Gustafson k., Sethian j.A., SIAM Frontiers in Applied Mathematics, 1990.
- [176] SETHIAN J.A., *On Measuring the Accuracy of the Vortex Method: Using a Random Method to Model Stable and Unstable flow*, in Vortex Methods, Los Angeles (1987), Lecture Notes in Mathematics 1360, Springer Verlag.
- [177] SETHIAN J.A., BRUNET J.P., GREENBERG A., MESISOV J.P., *Two- Dimensional, Viscous, Incompressible Flow in Complex Geometries on a Massively Parallel Processor*, PAM-504, Center for Pure and Applied Mathematics University of California, Berkeley 1990.
- [178] SHARP D.H., *An overview of Rayleigh-Taylor Instability*, Physica 12D, (1984), s. 3-18.
- [179] SHELLY M. J., *A study of singularity in vortex-sheet motion by a spectrally accurate vortex method*, J. Fluid Mech. 1992
- [180] SOMMERFELD M., *Mechanika deformirujušich sred*, Moskwa 1954.
- [181] SPARROW E. M., HUSAR R.B., GOLDSTEIN R. J., *Observations and other characteristics of thermals*, J. Fluid Mech., vol. 41, (1970), s. 793 - 800.
- [182] STANSBY P.K., *A generalized discrete-vortex method for sharp-edged cylinders*, AIAA J., vol. 23, No. 6, (1985), s. 856-861.
- [183] STOER J., BULIRSCH R., *Wstęp do metod numerycznych t. I i II*, Warszawa, PWN, (1980).
- [184] STYCZEK A., *The vortex blobs method of simulating the viscous liquid motions*, Archiwum Budowy Maszyn, tom XXXIV, (1987), s. 225 - 241.

- [185] SZUMBARSKI J., *Zastosowanie stochastycznej metody wirowej do modelowania nieustalonego ruchu cieczy lepkiej w palisadzie profili*, Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział Mechaniczny Energetyki i Lotnictwa, Warszawa (1993).
- [186] TAYLOR G., *The instability of liquid surfaces when accelerated in a direction perpendicular to their planes.I*, Proc. R. Soc., A201, (1950), s. 192-196.
- [187] TENG Z-H., *Elliptic-Vortex Method for Incompressible Flow at High Reynolds Number*, J. Comp. Phys. vol. 46, (1982), s.54-68.
- [188] TRITTON D. J., *Physical fluid dynamics*, Van Nostrand Reinhold Company, (1977).
- [189] TRYGGVASON G., *Numerical simulation of the Rayleigh -Taylor instability*, J. Comp. Phys., vol.75, (1988), s. 253-282.
- [190] TRYGGVASON G., *Numerical studies of large amplitude instabilities of fluid interface*, Advance in Multiphase Flow and Related Problems, ed. G. Papamicolau, SIAM Philadelphia (1986), s. 257 - 272.
- [191] TRYGGVASON G., AREF H., *Numerical experiments on Hele-Shaw flow with sharp interface*, J. Fluid Mech., vol. 136, (1983), s. 1-30.
- [192] TURNER J. S., *Buoyancy Effects in Fluids*, Cambridge University Press, (1973), przekład rosyjski, Moskwa, Mir, (1977).
- [193] VAN DER VOOREN A.I., *A numerical investigation of the rolling up of vortex sheets*, Proc. R. Soc. Lond., A, vol. 373, (1980), s. 67 - 91.
- [194] VAN DYKE, *An Album of Fluid Motion*, The Parabolic Press, Stanford, California 1982, przekład rosyjski ,Moskwa, Mir 1986
- [195] VORTEX DYNAMICS AND VORTEX METHODS, eds. Ch.R. Anderson, C.Greenard, Lectures in Applied Mathematics vol.28, The Proceedings of the 1990 Summer Seminar on Vortex Dynamics and Vortex Methods, Seattle 1990.
- [196] VORTEX METHODS AND VORTEX MOTION, eds. K.E. Gustawson, J.A.Sethian, SIAM Philadelphia, Pennsylvania 1991.
- [197] VORTEX FLOWS AND RELATED NUMERICAL METHODS, eds. J.T.Beale, G-H. Cottet, S. Huberson, Proceedings of the NATO Advanced Research Workshop on Vortex Flows and Related Numerical Methods, Grenoble 1992, NATO ASI Series, Series C: Mathematical and Physical Sciences - vol.395.
- [198] WHITTAKER E.T., WATSON G.N., *Kurs analizy współczesnej*, Warszawa, PWN, (1987).
- [199] YOUNGS D. L., *Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability*, Physica 12D, (1984), s. 32-44.
- [200] ZALOSH R. G., *Discretized Simulation of vortex sheet evolution with buoyancy and surface tension effects*, AIAA J., vol. 14, (1976), s.1517 - 1523.
- [201] ZHANG H-S., *Numerical modeling of Kelvin-Helmholtz instability and Rayleigh-Taylor Instability at Large Deformation Stage - (I) Numerical Method and Numerical Results of Rayleigh-Taylor Instability*, J. of Hydrodynamics, Ser.B 1(1991), s. 37-44.

NUMERICAL MODELLING OF THE HYDRODYNAMIC PHENOMENA BY THE VORTEX METHODS

The vortex methods used to modelling of the hydrodynamic phenomena were described. The mathematical foundation of the methods was given. Numerical results that were obtained by vortex method for the Rayleigh-Taylor instability and for the motion of the bubble in the gravity field were presented. Numerical results for the viscous flow in the channel with complex geometry were also presented. For the Rayleigh-Taylor instability it was assumed that the flow is potential and the fluid is incompressible and inviscid. The interface can be regarded as vortex sheet. The study of the motion could be reduced to the solution of the initial value problem for the vortex sheets. It was numerically shown that the initial value problem for the vortex sheet is ill-posed and the equations of motion must be regularized. Regularization was done by introducing δ parameter to the equation of motion. The numerical results for regularized equations are presented. Using the example of the numerical study of the bubble motion it was shown that the δ parameter acts like the viscosity of the fluid. From the initially elliptic bubble a thread emerged. The evolution of the bubble was sensitive on initial condition. The thread structure was observed in the experiments. For the study of the viscous flow by vortex blob method a general proposed program was built. To calculate the auxiliary potential flow which was needed to satisfy the boundary condition on the wall the fast elliptic solver with the capacitance matrix technique was used. The results for the backward-facing step flow and for the flow over the thin plate were presented. Numerical results were compared with the experimental data.

SPIS RZECZY

Wykaz ważniejszych oznaczeń	4
1. WPROWADZENIE	5
1.1. Krótka charakterystyka metod wirowych	5
1.2. Cel i zakres pracy	8
2. PODSTAWOWE RÓWNANIA MATEMATYCZNE KINEMATYKI RUCHU WIROWEGO	9
2.1. Pojęcia wstępne	10
2.2. Twierdzenie o rozkładzie pola wektorowego	10
2.3. Pole prędkości nici wirowej	13
2.4. Wir punktowy	13
2.5. Warstwa wirowa - modelowanie numeryczne	18
2.5.1 Regularyzacja równań warstwy wirowej	22
3. METODA DYSKRETNICZY WIRÓW W PRZESTRZENI DWUWYMIAROWEJ	24
3.1. Równania ruchu dla cieczy nielepkiej w zmiennych Lagrange'a	27
3.1.1. Równania ruchu cieczy nielepkiej w przestrzeni trójwymiarowej	28
3.2. Aproksymacja równań ruchu cieczy nielepkiej w przestrzeni dwuwymiarowej	29
3.2.1. Badania nad zbieżnością metody kropeł wirowych dla przepływu nielepkiego	31
3.3. Aproksymacja równań. Stochastyczna metoda kropeł wirowych	33
3.4. Realizacja warunków brzegowych	36
3.4.1. Składowa normalna	36
3.4.2. Składowa styczna	37
3.5. Szybkie algorytmy metody metody dyskretnych wirów	38
3.5.1. Metoda rozwinąć biegunowych	39
4. NUMERYCZNE MODELOWANIE RUCHU GRANICY ROZDZIAŁU DWÓCH PŁYNNYCH OŚRODKÓW O RÓŻNYCH GĘSTOŚCIACH	42
4.1. Zjawisko niestabilności Rayleigha-Taylor'a	42
4.2. Równania ruchu warstwy wirowej dla zagadnienia Rayleigha-Taylor'a i opis algo- rytmu obliczeniowego	43
4.3. Wybrane fakty z liniowej teorii stabilności	51
4.4. Wyniki badań numerycznych dla niestabilności Rayleigha-Taylor'a metodą dyskre- tnych wirów	52
4.4.1. Przypadek $A=1$ ($\rho_1/\rho_2=\infty$)	52
4.4.2. Przypadek $A<1$ ($\rho_1/\rho_2\neq\infty$)	56
4.4.3. Wyniki dla równań zregularizowanych	61
4.4.4. Przypadek $A=0$ (aproksymacja Boussinesq'a)	63
4.5. Uwagi podsumowujące obliczenia dla zagadnienia Rayleigha-Taylor'a	66
5. RUCH I DEFORMACJA DWUWYMIAROWEGO PĘCHERZYKA	67
5.1. Sformułowanie zagadnienia. Równania ruchu	68
5.2. Wyniki numeryczne dla pęcherzyka kołowego	69
5.3. Ruch pęcherzyka eliptycznego	73
5.4. Uwagi końcowe	82
6. MODELOWANIE PRZEPŁYWÓW W KANAŁACH METODĄ KROPEŁ WIROWYCH	82
6.1. Wyznaczanie potencjalnego pola przepływu w obszarach nieregularnych	84
6.2. Przepływ w kanale z gwałtownym rozszerzeniem. Sformułowanie zagadnienia	87
6.3. Wybór parametrów numerycznych	88
6.4. Wyniki numeryczne dla przepływu w kanale z gwałtownym rozszerzeniem	92
6.5. Opływ nieskończenie cienkiej płytki ustawionej prostopadle do kierunku przepływu	102
7. PODSUMOWANIE	106
LITERATURA	109

CONTENTS

List of main symbols used	4
1. INTRODUCTION	5
1.1. The short description of the vortex method	5
1.2. The goal and the scope of the work	8
2. THE BASIC MATHEMATICAL EQUATIONS FOR KINEMATIC MOTION OF THE VORTEX MOTION	9
2.1. Introductory conception	10
2.2. Theorem for the vector field decomposition	10
2.3. The velocity field of the vortex thread	13
2.4. Vortex point	13
2.5. The vortex sheet-numerical modelling	18
2.5.1. Regularization of the equation of vortex sheet motion	22
3. FLUID MOTION EQUATIONS IN THE TWO-DIMENSIONAL SPACE	24
3.1. Equation of motion in the Lagrangian variables for invicid fluid	27
3.1.1. Equation of motion in three dimensional space	28
3.2. Approximation of the equation of the motion two-dimensional space	29
3.2.1. Study on the convergence of the vortex blob method for the invicid flow	31
3.3. Stochastic vortex blob method. Approximation of the equation of motion	33
3.4. Realization of the boundary conditions	36
3.4.1. Tangential component of the velocity	36
3.4.2. Normal component of the velocity	37
3.5. Fast algorithm of the discrete vortex method	38
3.5.1. The fast multipole algorithm	39
4. NUMERICAL MODELLING OF THE MOTION OF THE INTERFACE BETWEEN TWO FLUIDS OF DIFFERENT DENSITIES	42
4.1. The Rayleigh-Taylor instability phenomena	42
4.2. Equation of motion for vortex sheet in Rayleigh-Taylor instability phenomena and description of the computational algorithm	43
4.3. Some results from the linear theory of the stability	51
4.4. Numerical results for Rayleigh-Taylor instability	52
4.4.1. The case $A=1$ ($\rho_1/\rho_2=\infty$)	52
4.4.2. The case $A<1$ ($\rho_1/\rho_2\neq\infty$)	56
4.4.3. The results for the regularized equation	61
4.4.4. The case $A=0$ (Boussinesq approximation)	63
4.5. Concluding remarks for computation of the Rayleigh-Taylor instability	66
5. THE MOTION AND DEFORMATION OF THE TWO-DIMENSIONAL BUBBLE ..	67
5.1. Statement of the problem. The equation of motion	68
5.2. The numerical results for the circular bubble	69
5.3. The motion of the elliptical bubble	73
5.4. The final remark	82
6. MODELLING OF THE FLOW IN THE CHANNEL BY THE VORTEX BLOB METHOD	82
6.1. The computation of the potential flow in the irregular region	84
6.2. The flow in channel with the backward-facing step	87
6.3. The choice of the numerical parameter values	88
6.4. The numerical results for the flow in channel with backward-facing step	92
6.5. The flow over the thin plate suited orthogonal to the flow	102
7. SUMMARY AND CONCLUSIONS	106
REFERENCES	109



PRACE NAUKOWE INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
I MECHANIKI PŁYNÓW
(wydane w latach 1990—1995)

- Nr 38, Monografie nr 16, E. Bodio, *Możliwości uogólnienia charakterystyk skraplarek kriogenicznych Linde-Hampsona działających w systemach otwartych*, Wrocław 1990
- Nr 39, Monografie nr 17, M. Lech, *Metoda radioizotopowa w metrologii przepływu dwufazowego*, Wrocław 1990
- Nr 40, Monografie nr 18, A. Bucewicz, *Termodynamiczna teoria procesów transportowych w porowatych materiałach budowlanych*, Wrocław 1990
- Nr 41, Monografie nr 19, A. Wanik, *Model matematyczny procesów ciepłno-przepływowych w płaszczowo-rurowych wymiennikach ciepła*, Wrocław 1991
- Nr 42, Monografie nr 20, Z. Królicki, *Dławienie dwufazowych czynników chłodniczych*, Wrocław 1991
- Nr 43, Monografie nr 21, K. J. Jesionek, *Analiza nieściśliwego przepływu dyfuzorowego i powstających strat*, Wrocław 1992
- Nr 44, Monografie nr 22, W. Rybak, *Szybkość spalania węgla i materiałów węglowych*, Wrocław 1993
- Nr 45, Monografie nr 23, J. Jędrzysek, *Modelowanie zjawisk akustycznych w osiowych maszynach przepływowych*, Wrocław 1994
- Nr 46, Monografie nr 24, K. Wójs, *Przepływ rozcieńczonych roztworów wielocząsteczkowych polimerów w przewodach gładkich i chropowatych*, Wrocław 1994





BIBLIOTEKA GŁÓWNA

308720 L/1

**Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”**

**Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 20 25 34
oraz Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 20 32 52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową**

ISSN 0324-9387