

A4111 I

Prace Naukowe Instytutu Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej

73

Seria: Monografie

32

Andrzej Ubysz

**Odkształcenia plastyczne i samonapężenia
w żelbetowych konstrukcjach prętowych**

Wrocław 1999

el



Andrzej UBYSZ

Plastic strains and self-stresses
in reinforced-concrete bar constructions

Prace Naukowe Instytutu Budownictwa
Politechniki Wrocławskiej

73

Seria:
Monografie

32

Andrzej Ubysz

Odkształcenia plastyczne i samonaprężenia w żelbetowych konstrukcjach prętowych



Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej · Wrocław 1999

Recenzenci

Jan BILISZCZUK
Kalikst GRABIEC

Opracowanie redakcyjne

Hanna BASAROWA

Korekta

Alina KACZAK

© Copyright by Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej, Wrocław 1999

OFICyna WYDAWNICZA POLITECHNIKI WROCLAWSKIEJ
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław

ISSN 0324-9875

Ark. wyd. 13,5. Ark. druk. 11³/₄. Papier offset. kl. III, 70 g, B1.
Drukarnia Oficyny Wydawniczej Politechniki Wrocławskiej. Zam. nr 948/99.

*beton, cechy fizyczne,
badania laboratoryjne, badania modelowe,
odkształcenia, naprężenia*

Andrzej UBYSZ*

ODKSZTAŁCENIA PLASTYCZNE I SAMONAPRĘŻENIA W ŻELBETOWYCH KONSTRUKCJACH PRĘTOWYCH

Monografia jest rozwinięciem prac Profesora Augustyna Borcza, prezentujących oryginalny model betonu i teorię konstrukcji żelbetowych w pierwszej i drugiej fazie pracy. Opierają się one na założeniu, że praca konstrukcji przy powtarzalnych obciążeniach jest sprężysta, a odkształcenia w betonie są sumą deformacji sprężystych i plastycznych.

Poszczególne rozdziały zawierają przegląd modeli betonu i pokazują, jak model Borcza mieści się w szeroko pojętej przestrzeni istniejących koncepcji oraz charakterystykę morfologii rys w betonie.

Rozdziały 4 i 5 zawierają najważniejsze wyniki badań i metody ich analizy z ponad dziesięcioletniej pracy autora nad badaniem modeli laboratoryjnych i numerycznych. Także autorskim wkładem do tych rozdziałów jest opracowanie metody badań modelowych i obliczeń żelbetowych konstrukcji prętowych, która umożliwia modelowanie efektów związanych z zarysowaniem i trwałymi odkształceniami w betonie w sposób dyskretny. Kolejnym oryginalnym wkładem do pracy są rezultaty własnych badań doświadczalnych, na podstawie których zarówno weryfikowano teorię Borcza, jak i wyznaczono wartości parametrów doświadczalnych, umożliwiających efektywne wykorzystanie opracowanej metody obliczeniowej. Na podstawie wyników doświadczeń – popartych wynikami innych autorów – w pracy ustosunkowano się głównie do fragmentu teorii Borcza, która zawiera opis powstawania wymuszonych deformacji plastycznych i sprężystych (samonaprężeń) w przekroju.

Ponadto przedstawiono założenia i wyniki własnych badań numerycznych, w których posługiwano się modelem kontynuualnym opartym na modelu Miera, Wechsego i Eligehausena, które autor opracował w ramach współpracy z Katedrą Wytrzymałości Materiałów w TU Stuttgart. Ten fragment pracy ma na celu pokazanie różnic zarówno w założeniach, jak i w metodologii badań numerycznych i laboratoryjnych przy ciągłym i dyskretnym modelowaniu konstrukcji prętowych. Autorskim elementem pracy są również przykłady analiz numerycznych za pomocą zweryfikowanej doświadczalnie teorii Borcza i opracowanej metody.

*Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej, Zakład Konstrukcji Betonowych, 50-370 Wrocław, Wybrzeże Wyspiańskiego 27.

W pracy przyjęto sposób obliczania zarysowanych konstrukcji żelbetowych w klasie funkcji uogólnionych. Wprowadzone funkcje dystrybucyjne opisują w sposób dyskretny wszystkie efekty związane z zarysowaniem i deformacjami niesprężystymi.

Praca ma na celu uzupełnienie cyklu prac dotyczących metod badawczych zarysowanych, żelbetowych konstrukcji prętowych. Zastosowana metoda analiz jest jednak poprawna także przy analizie dowolnych konstrukcji prętowych z lokalnymi nieciągłościami (np. defektami) i może być bezpośrednio do takich zadań wykorzystywana.

1. Wprowadzenie

1.1. Uwagi wstępne

Realizowane z końcem lat pięćdziesiątych przez Augustyna Borcza badania płyt żelbetowych umożliwiły zebranie założeń do teorii tych konstrukcji pracujących w II fazie. Kolejne lata przyniosły ponad 20 badawczych i teoretycznych prac doktorskich, a także monografie opracowanych pod Jego kierunkiem. Każda była przyczynkiem do teorii przedstawionej w 1986 r., której najbardziej oryginalnym elementem był opis deformacji żelbetowych konstrukcji ulegających zarysowaniu. Teoria ta zwraca uwagę między innymi na samonapężenia wywołane niesprężystymi deformacjami betonu, na sprężysty charakter pracy konstrukcji przy obciążeniach wielokrotnych, ale wprowadza również oryginalny model matematyczny do opisu żelbetowych belek, tarcz, płyt i powłok. Tak sformułowana teoria była polemiczna z obowiązującą od 1984 r. Polską Normą dotyczącą projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych PN-84/B-03264 [192] oraz do związanych tematycznie rozdziałów projektu normy PN-Pr/B-03264 [193] i Eurokodu 2 [57].

Teoria opracowana przez Borcza [25, 26] – mimo że została opublikowana jako zamknięta całość – pozostawiła niektóre zagadnienia dotyczące eksperymentu na etapie badań wstępnych. Zainicjowany przez Profesora program badań, wykonywany w kierowanym przez siebie zespole, nie doczekał się pełnej realizacji. Pozostawione notatki nie dają pełnego wglądu w całość zamierzenia. Jednak otrzymane – częściowo po Jego śmierci – wyniki z realizowanych programów badawczych potwierdzają wiele oczekiwań oraz nakazują raz jeszcze powrócić do wspomnianej teorii i uzupełnić ją, uwzględniając obecny poziom wiedzy.

Niniejsza praca przedstawia założenia i matematyczny model belki żelbetowej Borcza uzupełnione o wyniki badań doświadczalnych Tomczaka, Eissay i badania własne. W ramach badań własnych wykonano ponadto obliczenia oparte na modelach numerycznych, które stanowiły przygotowanie do eksperymentalnej części zagadnienia. Przegląd bibliograficzny stanowi wprowadzenie do sformułowania związków konstytutywnych dla modelu dyskretnego oraz do matematycznego modelowania zadań technicz-

nych (także z efektami dyskretnymi), jak na przykład równanie osi ugiętej elementu prętowego. Obejmuje on także studium modeli betonu, stali i współpracy między nimi w różnych fazach wyteżenia materiału. Przedstawienie fizykochemicznego modelu betonu jest próbą interpretacji niektórych wyników badań mechanicznych betonu na podstawie wybranych wiadomości o strukturze betonu. Wykorzystano natomiast obszerniej monografie Godyckiego-Ćwirko [68] w rozdziale 2 oraz Boreza [26] w wybranych podrozdziałach. W monografii przedstawiono zarówno wyniki badań doświadczalnych, jak i przykłady rozwiązań numerycznych tego zagadnienia. Szczególną uwagę zwrócono na:

- badania zakresu liniowości betonu w związku konstytutywnym dla betonu,
- rozkład naprężeń przy wielokrotnych cyklach obciążania i odciążania,
- efekt samonaprężeń w konstrukcji żelbetowej i częściowo sprężonej,
- sztywność konstrukcji w różnych fazach jej pracy,

a także traktowane uzupełniająco:

- zagadnienia związane z efektywnym numerycznym modelowaniem konstrukcji;
- użytkowe zastosowanie otrzymanych wyników do aktów normatywnych i projektowania.

Część doświadczalna oprócz rozstrzygnięć merytorycznych wymagała tutaj szczegółowych rozwiązań dotyczących przygotowania stanowisk do badania elementów próbnych w skali naturalnej, elementów sprężonych i elementów rozciąganych (m.in. przy cyklicznym wymuszaniu przemieszczeń w badanych elementach, przy dopracowaniu technik pomiarowych), a także sposobu przygotowania elementów próbnych, ustalenia metod realizacji pomiarów oraz opracowania i analizy wyników.

1.2. Charakterystyka zagadnienia

W konstrukcjach żelbetowych oblicza się siły wewnętrzne według klasycznej teorii sprężystości, natomiast przy wymiarowaniu przekroju wykorzystuje się metodę stanów granicznych. Jest to wewnętrzna sprzeczność, z powodu której zaprojektowana konstrukcja mniej lub bardziej odbiega od optymalnych przekrojów.

Dokładne poznanie zjawisk towarzyszących deformacjom i redystrybucji sił wewnętrznych w konstrukcji pozwala na:

- efektywniejsze wykorzystanie materiałów konstrukcyjnych,
- dokładniejsze określenie granicy bezpieczeństwa przy obciążeniach wyjątkowych (przeciążenie w przypadku awarii, nieprzewidziane szkody górnicze, huragan itd.).

Doświadczenia nawiązują do badań modelowych prowadzonych przez inne ośrodki zagraniczne opracowujące europejską normę dotyczącą projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych (głównie prowadzonych przez Lehrstuhl für Werkstoffe im Bauwesen der Universität Stuttgart pod kierunkiem prof. R. Eligehausena). Obliczenia wykonywane zarówno na modelach nieliniowych, jak i sprężysto-plastycznych pokazują ponadto, w jaki sposób zbrojenie konstrukcji wpływa na jej pracę. Niektórych z oczekiwanych i potwierdzonych empirycznie efektów, a także wynikających

z nich skutków nie uwzględniają aktualnie obowiązujące normy projektowania tych konstrukcji (m.in. PN-86/B-03264 i Eurocode 2). Dostępne dzisiaj metody wykonywania obliczeń statycznych i wymiarowania umożliwiają natomiast uwzględnienie w pracy konstrukcji nieliniowych modeli materiałowych (betonu i stali), ich współpracy czy samonaprężeń.

Eksperyment dotyczy pracy konstrukcji obciążonej cyklicznie w przedziale przed- i ponadkrytycznym, a szczegółowe badania określają:

- naprężenia pozostające w zbrojeniu po odciążeniu,
- przegrupowania sił wewnętrznych w konstrukcji,
- przegrupowania sił wewnętrznych w konstrukcji,
- zmiany sztywności w procesie cyklicznie narastających obciążeń w zależności od cech materiału i efektów spowodowanych zarysowaniem i reologią betonu.

Istotą badań jest wyznaczenie parametrów opisujących deformacje i samonaprężenia, a także redystrybucję sił wewnętrznych w konstrukcji. Badania mają na celu weryfikację przyjętego modelu obliczeniowego, a w szczególności:

- doświadczone uściślenie parametrów przyjętych do obliczeń,
- określenie wpływu samonaprężeń na wyężenie konstrukcji,
- określenie granic redystrybucji sił wewnętrznych w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych.

1.3. Założenia

Ponieważ w niniejszej pracy podstawą sformułowania badań na modelach numerycznych i realizacji eksperymentu jest weryfikacja założeń przedstawionych przez Borcza [26], dlatego zamieszczono je w części wstępnej:

- W obecnym etapie rozwoju teorii konstrukcji betonowych nie wystarcza założenie liniowego jednorodnego modelu betonu. Należy uwzględnić rysy w strefie rozciąganej betonu, przy czym nie można pominąć efektów pochodzących z jego cech niesprężystych.

• Przyjęto model betonu odpowiadający odkształceniu podczas wielokrotnych obciążeń. Z dobrym przybliżeniem można wówczas przyjąć model jak dla materiału sprężystego, na który nakładają się odkształcenia niesprężyste. Deformacje całkowite są sumą deformacji sprężystych i plastycznych.

• Współczynniki sprężystości zależą od wieku betonu, nie zależą natomiast od obciążenia. Założenie to, chociaż przybliżone, oddaje jednak charakter deformacji podczas obciążeń wielokrotnych.

• Niesprężyste deformacje betonu zależą nieliniowo od wielkości obciążenia. Celowe jest opisanie cech niesprężystych za pomocą współczynnika pełzania, który można obliczać na podstawie danych dotyczących reologii betonu lub wyznaczać doświadczalnie.

- Nieliniowe, niesprężyste odkształcenia betonu nie spełniają warunku spójności, wymuszają więc powstanie samonaprężeń. Pochodzą one od nieliniowych deformacji niesprężystych spowodowanych obciążeniem, ale również skurczem betonu, deformacjami wilgotnościowymi i temperaturowymi. Naprężenia pochodzące od obciążeń sumują się z samonaprężeniami. Samonaprężenia stanowią układ sił samozrównoważony i pozostają, gdy zdejmuje się obciążenie zewnętrzne.

- Niesprężyste cechy betonu zbrojonego są afiniczne do cech betonu niezbrojonego. Cechy betonu przeważają w elementach konstrukcyjnych zbrojonych.

- Rysy w strefie rozciąganej elementów żelbetowych zmieniają sztywność konstrukcji. Efekty pochodzące od zarysowania są w modelu matematycznym opisane w sposób dyskretny, z uwzględnieniem każdej rysy za pomocą rachunku dystrybucyjnego.

- Model obliczania deformacji konstrukcji żelbetowych można określić jako niejednorodny, sprężysto-plastyczny. Opis uwzględnia wszystkie stany deformacji konstrukcji pod obciążeniem wraz ze stanem krytycznym i następującym po nim stanem pokrytym.

W części doświadczalnej pominięto analizę podobieństwa modelowego, co uzasadniają wymiary elementów próbnych.

2. Wybrane zagadnienia dotyczące modelu betonu i betonu zbrojonego.

Właściwości mechaniczne betonu

Modele konstrukcji betonowej lub żelbetowej są sformułowaniem ogólnych relacji, które mogą być wykorzystywane zarówno do prac badawczych, jak i do projektowania. Można zatem mówić o:

- modelach materiału (betonu i stali),
- modelach współpracy elementów konstrukcyjnych (np. betonu i stali, elementów konstrukcji zespolonych, wzmocnień),
- modelach konstrukcji (zastępcza geometria układu),
- modelach obciążenia (zastępczy schemat statyczny).

W mechanice najczęściej przez model betonu rozumie się:

- związek konstytutywny, pokazujący relację między tensorami odkształceń i naprężeń z ewentualnym uwzględnieniem warunków środowiska zewnętrznego (wilgotność, temperatura),
- prawo pękania betonu zdefiniowane w przestrzeni odkształceń lub naprężeń.

Na tej podstawie można określić właściwości mechaniczne betonu, na przykład parametry fizyczne i reologiczne potrzebne do formułowania zależności niezbędnych do projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych.

W niniejszym opracowaniu pominięto przegląd literatury, ograniczając się do tych teorii i badań, które służą do opisu sprężystych cech betonu i efektu naprężeń rezydualnych w betonie podczas wielokrotnych cykli obciążeń i odciążeń konstrukcji¹.

2.1. Modele konstytutywne

Sformułowanie równań konstytutywnych można oprzeć na właściwościach elementarnych cząsteczek składowych. Jest to możliwe na przykład na gruncie mechaniki sta-

¹ W kolejnych podrozdziałach oparto się na opracowaniach Chena [38], Bażanta [10], Godyckiego-Ćwirko [68–72], Boreza [17–33], Dyducha [48–52], Biliszczuka [13–16], Derskiego [42] i Wojewódzkiego [245].

tystycznej zajmującej się stanami nieustalonymi. Jednak – jak dotychczas – nie sformułowano takiego modelu teoretycznego. Innym podejściem do zagadnienia równań konstytutywnych jest otrzymanie fizycznych zależności na drodze doświadczalnej. Także i w tej pracy oparto się głównie na relacjach empirycznych, nadając im jednak – w kontekście przedstawionych uprzednio właściwości fizykochemicznych betonu – w niektórych przypadkach odmienną interpretację. Jako ogólną zależność, spełniającą zasadę izotropii przestrzeni fizycznej, przyjęto relację między tensorem naprężenia Cauchy’ego w ortotropowym układzie współrzędnych a tensorem małych odkształceń²:

$$\mathbf{s} = \mathbf{a}_1 \mathbf{I} + \mathbf{a}_2 \mathbf{e} + \mathbf{a}_3 \mathbf{e}^2 \quad (2.1)$$

w której: \mathbf{s} – tensor naprężenia,
 \mathbf{e} – tensor odkształcenia,
 $\mathbf{a}_i = \mathbf{a}_i (\text{tr } \mathbf{e}, \text{tr } \mathbf{e}^2, \text{tr } \mathbf{e}^3)$,
 \mathbf{I} – tensor jednostkowy
 $\text{tr } \mathbf{e} = \varepsilon_{ii}$,
 $\text{tr } \mathbf{e}^2 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ji}$,
 $\text{tr } \mathbf{e}^3 = \varepsilon_{ij} \varepsilon_{jk} \varepsilon_{ki}$.

W ogólnym przypadku tensory te mogą być także pochodną czasu. Wyrażona w ten sposób zależność tensora naprężenia od tensora odkształcenia pozwoliłaby opisać pętlę histerezy rejestrowane przy krótkotrwałych cyklach obciążeń betonów niskiej i średniej wytrzymałości, na co zwracają uwagę m.in. Dyduch, Destrebecq i Szerszeń [48–50]. Praktyczna interpretacja zostanie pokazana w dalszej części rozdziału. Model betonu częściej opisuje się za pomocą uproszczonych modeli konstytutywnych. Ze względu na program zrealizowanych badań doświadczalnych, które zmierzają do wydzielenia liniowych cech betonu w betonowym modelu i żelbetowej konstrukcji, skoncentrowano się głównie na modelach sprężystych³. Najczęściej spotykane modele to liniowy model ortotropowy oraz modele hiper- i hiposprężyste.

Liniowy model ortotropowy zaproponowany przez Nilsona [183] i Owena [186] zakłada, że w procesie rozciągania beton jest materiałem ortotropowym, który wskutek powstawania lokalnych nieciągłości przyjmuje anizotropowe właściwości. W układzie ortonormalnym zależność przyjmie postać

$$\sigma^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.2)$$

gdzie: σ^{ij} – tensor naprężeń,
 ε_{kl} – tensor odkształceń,
 C^{ijkl} – tensor sztywności.

² W przedstawianych w niniejszej pracy zapisach tensorowych obowiązuje umowa sumacyjna.

³ Pełniejszy opis modeli konstytutywnych (m.in. powierzchni plastyczne, modele plastyczne, modele sprężysto- i sprężysto-plastyczno kruche, modele sprężysto-lepkoplastyczne, modelowanie pełzania i skurczu w betonie) znajdzie Czytelnik w [245].

W bardziej ogólnej postaci model ortotropowy będzie iloczynem skalarnym tensorów:

$$\mathbf{s} = \mathbf{K} \mathbf{e} \quad (2.3)$$

Tensor sztywności \mathbf{K} , który dla materiału sprężystego nazywany jest tensorem stałych sprężystych lub tensorem modułów materiału (uogólnione prawo Hooke'a), tutaj jest funkcją symetrycznego tensora dwuwalencyjnego, wyrażającego efekty wynikające z nieciągłości (zarysowania). Model ten zakłada jednak, że kierunki naprężeń głównych nie ulegają zmianie podczas obciążania, co stanowi kolejne przybliżenie.

Model betonu opisuje się z reguły na podstawie liniowej formy równania (2.1):

$$\mathbf{s} = [c_0 + \lambda(\text{tr } \mathbf{e})]\mathbf{I} + 2\mu \mathbf{e} \quad (2.4)$$

lub

$$\sigma^{ij} = [c_0^{ij} + \lambda \varepsilon^{jj}]\delta_{ij} + 2\mu \varepsilon^{ij} \quad (2.5)$$

gdzie: λ, μ – stałe Lamego, δ_{ij} – symbol Kroneckera.

W modelach konstytutywnych betonu stosuje się często założenie, że dla $\sigma^{ij} = 0 \Rightarrow \varepsilon^{ij} = 0$, skąd wynika wartość $c_0^{ij} = 0$. Założenie takie pomija historię obciążenia i dlatego w niniejszej pracy sugeruje się, aby przyjmować $c_0^{ij} = c_0^{ij}(\sigma_{\max}^{ij})$ jako funkcję uwzględniającą maksymalne przeciążenie materiału.

Model hipersprężysty opiera się na I zasadzie termodynamiki, która uzależnia funkcję energii odkształcenia na jednostkę masy od stanu naprężenia i prędkości odkształceń:

$$W_{,t} = \frac{\sigma^{ij} \varepsilon^{ij,t}}{\rho} \quad (2.6)$$

gdzie:

$$W_{,t} = \frac{dW}{dt},$$

$$\varepsilon^{ij,t} = \frac{d\varepsilon^{ij}}{dt}.$$

Równanie konstytutywne oparte na zależności (2.4) wyraża się jako zależność pochodnych tensorów naprężeń i odkształceń:

$$\frac{\partial \sigma^{ij}}{\partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ij} \times \partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} = \mathbf{C}^{ijkl} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \quad (2.7)$$

gdzie: \mathbf{C}^{ijkl} – tensor sztywności

Tensor C^{ijkl} jest wyrażany przez różnych autorów jako funkcja zależna od stanu odkształcenia. Niedogodnością tej funkcji w przypadku modelowania betonu jest założenie odwracalności procesu odkształcenia.

Model hiposprężysty zakłada, że składowe prędkości naprężeń są funkcją składowych prędkości deformacji:

$$\sigma_{,t}^{ij} = C^{ijkl} \varepsilon_{kl,t} \quad (2.8)$$

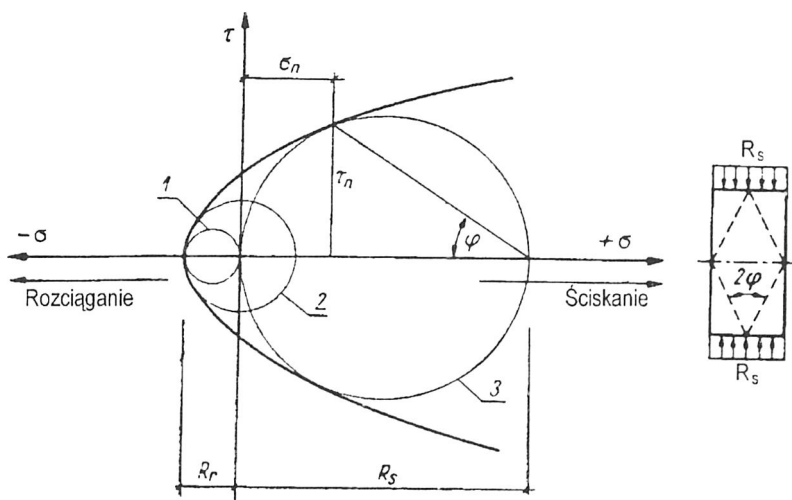
gdzie: $C^{ijkl} = C^{ijkl}(\sigma, \varepsilon)$.

Związki konstytutywne zostały przyjęte jak dla materiału anizotropowego. Tensor $C^{ijkl}(\sigma, \varepsilon)$, wyrażający między innymi współczynniki materiałowe, ma różne wartości przy obciążaniu, przy odciażaniu i przy cyklicznych obciążeniach.

W modelu hiposprężystym współczynniki sprężystości zależą od stanu naprężenia i odkształcenia, a zmiany cech sprężystych mają opisać niesprężyste deformacje w pierwszym przyrastającym obciążeniu. Doświadczalnie stwierdza się natomiast, że cechy sprężyste betonu nieznacznie się zmieniają w kolejnych cyklach odciażenia i odkształcenia. Ponadto mimo ogólności modelu betonu nie uwzględnia on jego cech reologicznych.

Uogólnieniem obserwacji dokonanych na elementach znajdujących się w prostych (np. jednoosiowych) stanach naprężeń są hipotezy wytrzymałościowe, opisujące wyłączenie materiału w złożonych stanach naprężenia i odkształcenia. W przypadku betonu, który jest materiałem o właściwościach w znacznym stopniu niesprężystych i nieliniowych, sformułowanie takiej hipotezy jest zadaniem w zasadzie niejednoznaczny.

Trudno jest sformułować hipotezę dającą względnie dobrą zgodność z doświadczeniem. Korzystając z własnych doświadczeń Dąbrowski, Stachurski i Zieliński [41] wskazują na teorię Caquot–Mohra (rys. 2.1), która znajduje empiryczne potwierdzenie w za-



Rys. 2.1. Krzywa granicznych stanów naprężeń przedstawionych na kole Mohra [41]

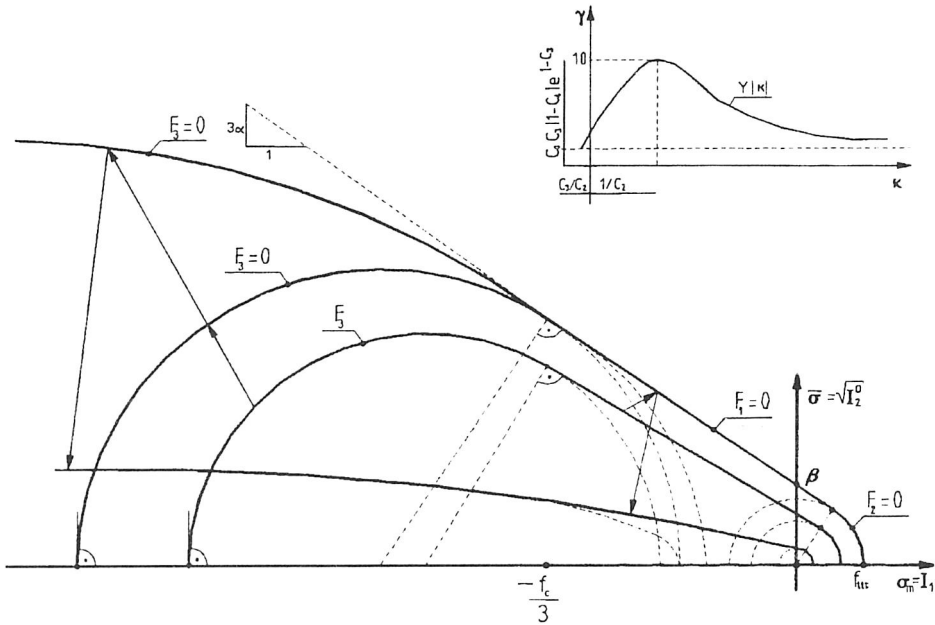
Fig. 2.1. A limited state function of stresses on Mohr's circle [41]

kresie dwuosioowego stanu naprężenia. Teoria ta zakłada istnienie krzywej granicznej, będącej obwiednią kół Mohra, opisujących stan naprężeń granicznych. Przebieg doświadczalnej krzywej granicznej opisuje parabola:

$$\tau^2 = 0,536R_{s,s} + 0,536R_s^2 \quad (2.9)$$

gdzie: R_s – wytrzymałość słupowa betonu na ściskanie.

Obecnie opracowywane teorie coraz częściej odchodzą od opisu betonu za pomocą liniowo-sprężystych związków konstytutywnych. Dąży się do wprowadzania coraz bardziej realistycznych modeli sprężysto-plastycznych. Zaproponowany przez Majewskiego [162] model „podwójnie nasadkowy” wykorzystuje hyposprężyste związki konstytutywne oparte na modelu konstytutywnym Duncana–Changa [47]. Kryterium zniszczenia określa w przestrzeni naprężeń powierzchnia graniczna opisana stożkową powierzchnią Druckera–Pragera zamkniętą powierzchniami kulistymi i elipsoidalnymi, stycznymi do powierzchni stożkowej (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Powierzchnia plastyczności betonu według Majewskiego [161]

Fig. 2.2. Surface of plasticity of concrete according to Majewski [161]

Powierzchnia określająca kryterium zniszczenia jest opisana jako suma trzech powierzchni:

$$F = F_1 + F_2 + F_3 \quad (2.10)$$

z których pierwsza opisuje stożkową powierzchnię Druckera–Pragera:

$$F_1 = \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\sigma_{ij} \sigma_{ij} - \sigma_{ii} \sigma_{jj} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} + (\alpha \sigma_{ii} - \beta) Y(\kappa) = 0 \quad (2.11)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{R_s - R_r}{R_s + R_r} \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (2.11a)$$

$$\beta = \frac{R_s R_r}{R_s + R_r} \frac{2}{\sqrt{3}} \quad (2.11b)$$

$Y(\kappa)$ we wzorze (2.11) wyraża funkcję wzmocnienia–osłabienia:

$$Y(\kappa) = C_4 + (1 - C_4) \left(C_2 \kappa \sqrt{2} + C_3 \right) e^{(1 - C_3 - C_2 \kappa \sqrt{2})} \quad (2.11c)$$

Parametr κ charakteryzujący odkształcenia jest wyrażony za pomocą drugiego niezmiennika dewiatora stanu odkształcenia:

$$\kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2} \left[\left(\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ii} \varepsilon_{jj} \right) \right] \right\}^{\frac{1}{2}} \quad (2.11d)$$

natomiast C_i ($i = 2, 3, 4$) są stałymi materiałowymi (których wartości i interpretację graficzną przedstawiono w pracy Majewskiego [162]):

C_2 – wartość parametru κ , dla której kończy się faza wzmocnienia, zaczyna zaś faza osłabienia materiału,

C_3 – położenie powierzchni początku zniszczeń strukturalnych materiału,

C_4 – położenie końcowej powierzchni osłabienia.

Założenie występowania obciążeń długotrwałych lub cyklicznych inspiruje jawne wydzielenie trwałych odkształceń lepkoplastycznych, uwzględnienie zmian cech wytrzymałościowych betonu. Przy cyklicznie ściskanych (ze stałą częstotliwością 10 Hz) próbkach walcowych Dyduch, Destrebecq i Szerszeń zwracają uwagę na wyróżnienie w równaniu konstytutywnym odkształceń chwilowych (sprężystych) i trwałych [48]:

$$\sigma = \bar{E}(\varepsilon - \varepsilon_p) \quad (2.12)$$

gdzie: σ , ε – chwilowe naprężenie i odkształcenie w n -tym cyklu,

ε_p – odkształcenie trwałe (sposób obliczania por. np. w [48, 49])

$\bar{E} = (1 - D(t))E_0$ – moduł odkształcenia podłużnego,

$D(t)$ – funkcja zniszczenia.

Funkcja zniszczenia $D(t)$ wynika z kinetycznego równania Rabotnowa, w którym wprowadzono zależność od czasu nie tylko dla prędkości przyrostu uszkodzeń, lecz także dla zmiennych w czasie naprężeń cyklicznych:

$$\dot{D} = \left(\frac{\sigma(t)}{A} \right)^k (1 - D(t))^{-r} \quad (2.13)$$

Prędkość przyrostu odkształceń trwałych opisano zmodyfikowanym równaniem Nortona, wprowadzając dodatkowo naprężenia względne zmienne w czasie:

$$\dot{\varepsilon}_p = \left(\frac{\bar{\sigma}(t)}{B} \right)^m \quad (2.14)$$

$$\bar{\sigma}(t) = (1 - D(t))^{-1} \sigma(t) \quad (2.15)$$

Stąd ostatecznie po scałkowaniu względem czasu otrzymano funkcję zniszczenia w postaci:

$$D(t) = 1 - \left[(1 - D_0)^{r+1} - (r+1) \left(\frac{A}{f_c} \right)^{-k} \lambda^k t \right]^{\frac{1}{r+1}} \quad (2.16)$$

gdzie: D_0 – początkowe uszkodzenie materiału,

k, r, A, B, m – stałe wyznaczone analitycznie i doświadczalnie.

W doświadczalnej części niniejszej pracy przyjęto model betonu zaproponowany przez Borcza [26]. Jest on liniowym modelem ortotropowym, uwzględniającym plastyczne cechy betonu, wykorzystującym zapis Nowackiego [185], w którym proponuje się przestrzenne ujęcie problemu pełzania. Model ten opiera się na podstawowych relacjach z teorii sprężystości, wyrażonych za pomocą tensora kulistego i dewiatora oraz współczynników materiałowych – współczynników sprężystości podłużnej, poprzecznej i współczynnika Poissona. Przyjmuje się zatem:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^T = \mathbf{s}^T + \mathbf{s}_{ij}^T, \quad (2.17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^T = \mathbf{e}^T + \mathbf{e}_{ij}^T$$

oraz

$$\mathbf{s}^T = 3\lambda \mathbf{e}^T$$

$$\mathbf{s}_{ij}^T = 2\mu \mathbf{e}_{ij}^T$$

gdzie: $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$, $\lambda = \frac{E}{3(1-2\nu)}$.

W równaniach tych przyjmuje się jednak, że tensor naprężeń i odkształceń jest superpozycją wartości sprężystych i plastycznych:

- sumaryczny tensor naprężeń sprężystych i rezydualnych:

$$\boldsymbol{\sigma}_{ij}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^T & \sigma_{12}^T & \sigma_{13}^T \\ \sigma_{21}^T & \sigma_{22}^T & \sigma_{23}^T \\ \sigma_{31}^T & \sigma_{32}^T & \sigma_{33}^T \end{bmatrix} \quad (2.18a)$$

- sumaryczny tensor kulisty naprężeń sprężystych i rezydualnych:

$$\mathbf{s}^T = \begin{bmatrix} s^E & 0 & 0 \\ 0 & s^E & 0 \\ 0 & 0 & s^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} s^R & 0 & 0 \\ 0 & s^R & 0 \\ 0 & 0 & s^R \end{bmatrix} \quad (2.18b)$$

- dewiator naprężeń:

$$\mathbf{s}_{ij}^T = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^E - s^E & \sigma_{12}^E & \sigma_{13}^E \\ \sigma_{21}^E & \sigma_{22}^E - s^E & \sigma_{23}^E \\ \sigma_{31}^E & \sigma_{32}^E & \sigma_{33}^E - s^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{11}^R - s^R & \sigma_{12}^R & \sigma_{13}^R \\ \sigma_{21}^R & \sigma_{22}^R - s^R & \sigma_{23}^R \\ \sigma_{31}^R & \sigma_{32}^R & \sigma_{33}^R - s^R \end{bmatrix} \quad (2.18c)$$

- sumaryczny tensor odkształceń sprężystych i rezydualnych:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^T & \varepsilon_{12}^T & \varepsilon_{13}^T \\ \varepsilon_{21}^T & \varepsilon_{22}^T & \varepsilon_{23}^T \\ \varepsilon_{31}^T & \varepsilon_{32}^T & \varepsilon_{33}^T \end{bmatrix} \quad (2.19a)$$

- sumaryczny tensor kulisty odkształceń sprężystych i rezydualnych:

$$\mathbf{e}^T = \begin{bmatrix} e^E & 0 & 0 \\ 0 & e^E & 0 \\ 0 & 0 & e^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e^R & 0 & 0 \\ 0 & e^R & 0 \\ 0 & 0 & e^R \end{bmatrix} \quad (2.19b)$$

• sumaryczny dewiator:

$$\mathbf{e}_{ij}^T = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^E - e^E & \varepsilon_{12}^E & \varepsilon_{13}^E \\ \varepsilon_{21}^E & \varepsilon_{22}^E - e^E & \varepsilon_{23}^E \\ \varepsilon_{31}^E & \varepsilon_{32}^E & \varepsilon_{33}^E - e^E \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{11}^R - e^R & \varepsilon_{12}^R & \varepsilon_{13}^R \\ \varepsilon_{21}^R & \varepsilon_{22}^R - e^R & \varepsilon_{23}^R \\ \varepsilon_{31}^R & \varepsilon_{32}^R & \varepsilon_{33}^R - e^R \end{bmatrix} \quad (2.19c)$$

Równania (2.18b), (2.18c), (2.19b) i (2.19c) w zapisie tensorowym przyjmują postać:

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{s}^E + \mathbf{s}^R, \quad \mathbf{e}^T = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^R, \quad (2.20)$$

$$\mathbf{s}_{kl}^T = \mathbf{s}_{kl}^E + \mathbf{s}_{kl}^R, \quad \mathbf{e}_{kl}^T = \mathbf{e}_{kl}^E + \mathbf{e}_{kl}^R. \quad (2.21)$$

Forma ta, jak wspomniano, opiera się na liniowym modelu ortotropowym, lecz wyróżnia ją wydzielenie w równaniu konstytutywnym tensorów opisujących sprężyste cechy betonu, na które nakładają się deformacje trwałe. Tak przedstawiony związek konstytutywny jest dobrą aproksymacją wielokrotnego obciążenia i odciążenia konstrukcji.

W dalszej części pracy zostanie przedstawione obszerniej zastosowanie sprężysto-plastycznego modelu betonu Borcza, który między innymi zakłada występowanie samonaprężeń w zginanym przekroju betonowym i żelbetonowym oraz w sposób oryginalny interpretuje nieliniowy charakter naprężeń na wysokości przekroju. Niektóre z parametrów opisujących sprężyste i plastyczne cechy betonu opierają się na danych doświadczalnych. Określenie ich nie wymaga jednak analizy przyczyn odkształceń plastycznych. Można też wykorzystywać istniejące wyniki badań, opierając się na przykład na teorii liniowego pełzania betonu. Wiele z tych prac realizowane było jednak jako zadanie jednowymiarowe, co mogło powodować niedokładności w stosunku do ogólnego stanu naprężeń i odkształceń.

Opisywanie modelu betonu za pomocą globalnych współczynników opisujących efekty sprężyste i plastyczne w betonie pozwala lepiej opisać rzeczywisty stan badanego elementu. Otrzymane wyniki należy jednak traktować jako superpozycję wielu czynników, których indywidualny wpływ jest trudny do prześledzenia. Wartościowym elementem tego modelu jest możliwość opisanie historii obciążenia. Ma to znaczenie praktyczne do badania zachowania się konstrukcji pod obciążeniami użytkowymi.

2.2. Doświadczalna zależność naprężenie–odkształcenie⁴

Podstawową zależnością wykorzystywaną do doświadczalnego opisu właściwości betonu jest funkcja „naprężenie–odkształcenie”. Do opisu zachowań reologicznych betonu często wzbogaca się ją o parametr czasu. Z zależności tej wynikają najistotniejsze

⁴ Rozdziały 2.2 i 2.3 opracowano na podstawie [68].

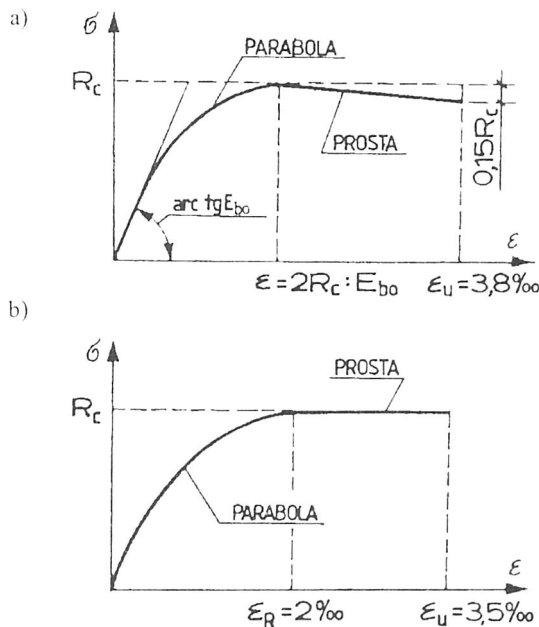
parametry fizyczne i reologiczne, umożliwiające opisanie i przewidywanie właściwości konstrukcji, takich jak: wytrzymałość, sprężystość, deformacje doraźne sprężyste i trwałe, deformacje reologiczne. Parametry te – ujęte w ścisłe lub częściowo w przybliżone zależności – mają zastosowania praktyczne, najczęściej projektowe.

Jednokierunkowy stan naprężeń jest pojęciem umownym. Trójwymiarowy przebieg zjawiska wynika bowiem z budowy sieci krystalicznej. Przez wspomniany stan naprężeń będzie rozumiana próba wytrzymałościowa, podczas której deformacje będą wymuszane w jednym, określonym kierunku oraz podczas której wartości fizyczne mierzone w jednym kierunku znacznie odbiegają od wartości mierzonych w dwóch pozostałych kierunkach głównych.

Zależnością, która przez wiele lat określała tendencje norm projektowych, jest parabola madrycka:

$$\sigma = E_{b0} \varepsilon \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_R} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

Zależność tę ustalono na podstawie wyników badań doświadczalnych dla próby debiutanckiej przy narastającym obciążeniu. Parabola madrycka nie pokazuje zależności podczas odciążania próbki, jak również pomija efekty reologiczne. Pewną jej modyfikacją były przyjęte za Hognestadem [94] w ACI i Rüschem [204] w DIN (rys. 2.3) pa-



Rys. 2.3. Zależność σ - ε według [68] a) Hognestada (ACI) i b) Rüscha (DIN)
 Fig. 2.3. Relationship σ - ε according to [68] a) Hognestad and b) Rüsche (DIN)

rabole, których cechą charakterystyczną było wprowadzenie dla wszystkich klas betonów granicznych wartości tej paraboli:

a) dla Hognestada

$$\sigma = 0 \rightarrow \varepsilon_0 = 0\% \quad (2.23)$$

$$\sigma = R_s \rightarrow \varepsilon_r = 0,2\%$$

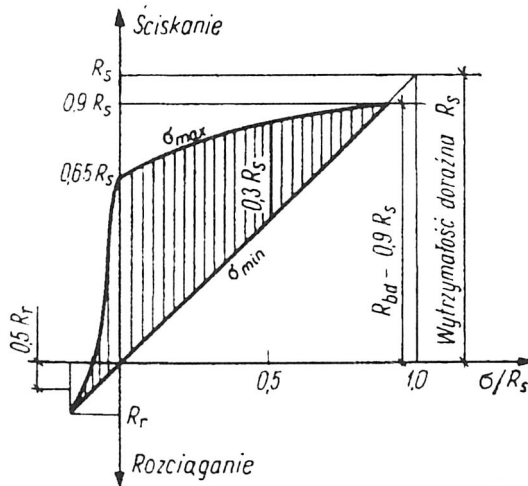
b) dla Rüscha

$$\sigma = 0 \rightarrow \varepsilon_0 = 0\% \quad (2.24)$$

$$\sigma = R_s \rightarrow \varepsilon_r = 0,2\%$$

gdzie ε_r jest odkształceniem, przy którym próbka jednokierunkowo ściskana osiąga wartość graniczną R_s .

Graniczne wartości wytrzymałości betonu oraz zależność σ - ε ulegną zmianie, gdy wymuszanie odkształceń (obciążeń) będzie miało charakter cykliczny. Zmienność wytrzymałości obliczeniowej w zależności od amplitudy zmian naprężeń $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$ pokazali między innymi Dąbrowski, Stachurski i Zieliński [41]. Wyniki tych badań określających wytrzymałość zmęczeniową betonu pokazuje rys. 2.4.



Rys. 2.4. Doświadczalne określenie wytrzymałości zmęczeniowej betonu [41]

Fig. 2.4. Experimental definition of fatigue strength of concrete [41]

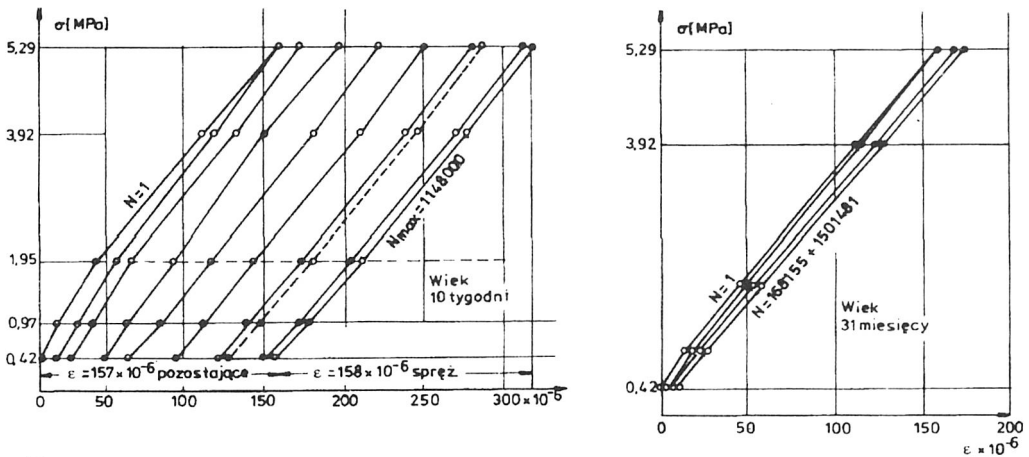
Elwi i Murraya [56] uogólnili krzywą jednoosiowego ściskania Saenza. Przedstawia ją między innymi Grabiec [79] jako funkcję zależną od początkowego współczynnika sprężystości i niektórych granicznych wartości jednoosiowego naprężenia i odkształcenia, na przypadek ściskania i rozciągania.

$$\sigma_i = \frac{E_0 \varepsilon_{iu}}{1 + \left(\frac{E_0}{E_s} - 2 \right) \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right) + \left(\frac{\varepsilon_{iu}}{\varepsilon_{ic}} \right)^2} \quad (2.25)$$

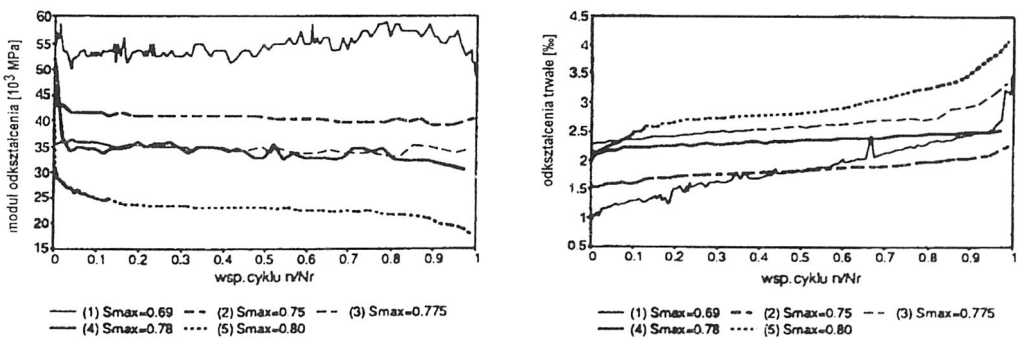
gdzie: ε_{iu} , ε_{ic} – odkształcenia przy ścisaniu granicznym i odpowiadające maksymalnemu naprężeniu.

Badania obciążeń cyklicznych realizowane między innymi przez Kmity, Biliszczuka, Maliszewicza [115, 116], Dyducha, Destrbecq'a i Szeszeń [48–51] pokazały tę zależność dla betonów po 10 tygodniach i 31 miesiącach dojrzewania (rys.2.5a) a także różnice w opisie zachowania się betonu poddanego zmęczeniu pod cyklicznym osio-

a)



b)



Rys. 2.5. a) Wykresy σ - ε przy powtarzalnym obciążeniu ścisającym próbek betonu po $t_1 = 10$ tygodni i $t_2 = 31$ miesięcy [113]; b) zmiany modułu odkształceń i odkształceń trwałych wraz z postępującą liczbą cykli obciążenia [48]

Fig. 2.5. a) Plots σ - ε under repeatable compressive loading samples of concrete after 10 weeks and 31 months; b) changes of elastic and plastic strains at repeatable loading [48]

wym ściskaniem. Doświadczenie wykazało, że na obciążenia zmęczeniowe bardziej wrażliwe są betony młode oraz że w miarę wzrostu liczby cykli obciążeń N narastają odkształcenia nieodwracalne ε_r . Charakter wykresu zmienia się z wypukłego względem osi ε na prosty, a ostatecznie na wklęsły. Występowanie tej wklęsłości równocześnie z narastaniem ε_r oraz wzrastaniem odkształceń sprężystych potwierdzających redukcję E_b świadczy o zbliżaniu się do granicy wytrzymałości zmęczeniowej. Autorzy wyraźnie jednak tutaj podkreślają, aby nie interpretować jednoznacznie wzrostu ε_r jako efektu reologicznego.

Dyduch wyróżnia składnik opisujący lepkoelastyczne zachowanie się betonu, wprowadzając zmodyfikowane równanie Nortona, w którym dla obciążeń oligocyklicznych efektywne naprężenia $\bar{\sigma}(t)$ zmienia się z postępującym uszkodzeniem materiału (por. równ. (2.12)–(2.16)). W tym modelu uzależniono również moduł odkształcenia podłużnego E od funkcji uszkodzeń, której prędkość opisano równaniem Rabotnowa (por. równ. (2.13) i (2.16)):

$$E = (1 - D(t))E_0 \quad (2.26)$$

Zmiany modułu odkształceń wraz z postępującą liczbą cykli obciążenia dla próbek obciążonych różnym poziomem naprężeń $S_{\max} = \sigma_{\max}/f_c$ oraz zmianę w czasie odkształceń trwałych przedstawia rys. 2.5b.

W przypadku obciążeń cyklicznych należy zwrócić uwagę na dwa ważne zjawiska obserwowane również przez cytowanych autorów. Pierwsze z nich to stabilizacja odkształceń trwałych przy wielokrotnym obciążaniu i odciążaniu. Drugie dotyczy cyklicznych obciążeń, gdy poziom naprężeń maksymalnych przekracza wytrzymałość zmęczeniową betonu. W tym przypadku odkształcenia trwałe nie maleją, lecz po określonej liczbie cykli prowadzą do zniszczenia materiału.

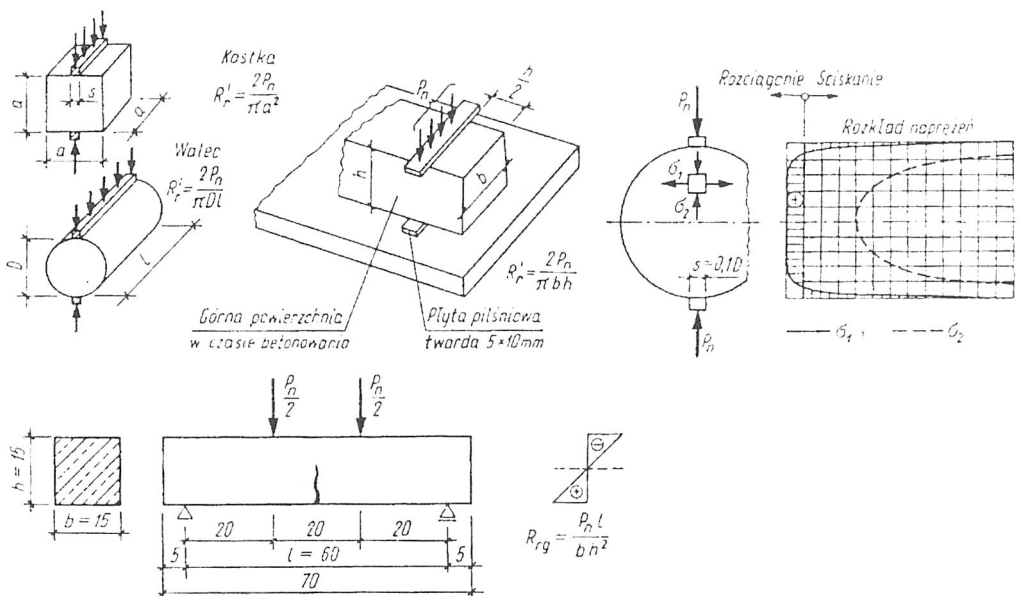
W przypadku rozciągania wytrzymałość betonu zależy w znacznym stopniu od sił kohezji pomiędzy spoiwem a kruszywem. Obserwuje się tutaj znacznie większy rozrzut wyników będący rezultatem zarówno mechanizmu zniszczenia, jak i metody pomiarowej. Z samej struktury betonu wynika niemożność zrealizowania idealnego osiowego badania wytrzymałościowego, jednak w przypadku rozciągania, gdzie wyniki zależą głównie od sił kohezji, każdy defekt (nieciągłość) w przekroju powoduje widoczną nierównomierność procesu⁵.

Jedną z częściej stosowanych metod jest bezpośrednie rozciąganie próbek mocowanych w prasie za pomocą szczepek lub klejonych żywicami epoksydowymi⁶ (rys. 2.6).

Wykorzystywane w praktyce zależności umożliwiają pośrednie określenie wytrzymałości na rozciąganie. Stosuje się tutaj tak zwaną metodę brazylijską, polegającą na rozłupywaniu walców (kostek) lub empiryczne zależności między wytrzymałością próbki na klasyczne ściskanie osiowe a wytrzymałością na rozciąganie:

⁵ W rozdziale 4 pokazano inne zależności σ – ε na przykładzie wyników badań własnych.

⁶ Ta metoda stosowana jest również przez autora.



Rys. 2.6. Metody osiowego rozciągania próbek betonowych [68]

Fig. 2.6. The methods of axial tension of concrete samples [68]

$$R_r \cong 0,41 (R_{20})^{1/2} \cong 0,232 (R_{20})^{1/3} \quad (2.28)$$

Podobnie można wyrazić zależność między wytrzymałością próbki na ściskanie osiowe a wytrzymałością na rozciąganie przy zginaniu:

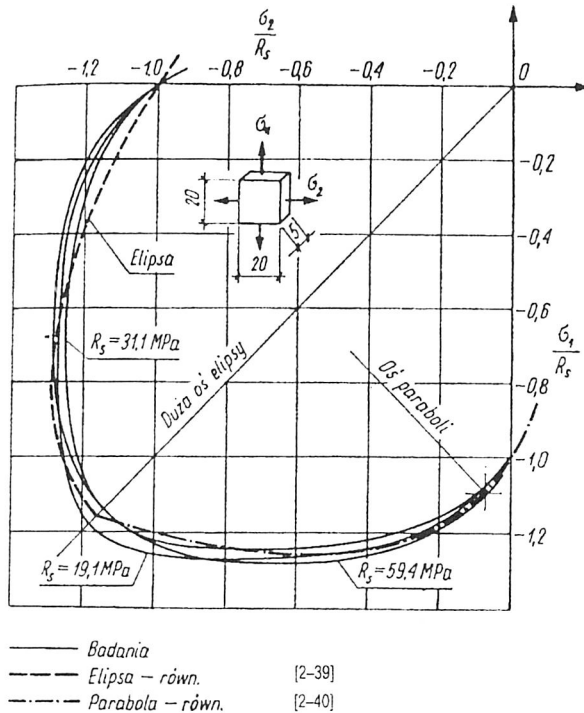
$$R_r \cong 0,79 (R_{20})^{1/2} \cong 0,464 (R_{20})^{1/3} \quad (2.29)$$

Nowym jakościowo podejściem było wprowadzenie *wielokierunkowego stanu naprężeń*. Kupfer [148] w próbie ściskania dwukierunkowego (kostki $20 \times 20 \times 5$ cm) doświadczalnie ustalił zależność granicznych naprężeń głównych za pomocą równania elipsy (2.30) i paraboli (2.31) (rys. 2.7). Otrzymane wartości przedstawiono analitycznie i graficznie jako względne wartości bezwymiarowe w odniesieniu do wytrzymałości przy ściskaniu jednokierunkowym.

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_s}\right)^2 - 1,26 \frac{\sigma_1}{R_s} \frac{\sigma_2}{R_s} + \left(\frac{\sigma_2}{R_s}\right)^2 - 1 = 0 \quad (2.30)$$

$$\left(\frac{\sigma_1}{R_s} + \frac{\sigma_2}{R_s}\right)^2 + \frac{\sigma_1}{R_s} + 3,65 \frac{\sigma_2}{R_s} = 0 \quad (2.31)$$

Praktyczne zastosowanie w badaniach laboratoryjnych (przy określaniu wytrzymałości na rozciąganie metodą brazylijską) ma szczególny przypadek tej próby, uzależnienia



Rys. 2.7. Wytrzymałość betonu w płaskim stanie naprężenia [68, 148]

Fig. 2.7. Strength of concrete in two-dimensional state of stresses

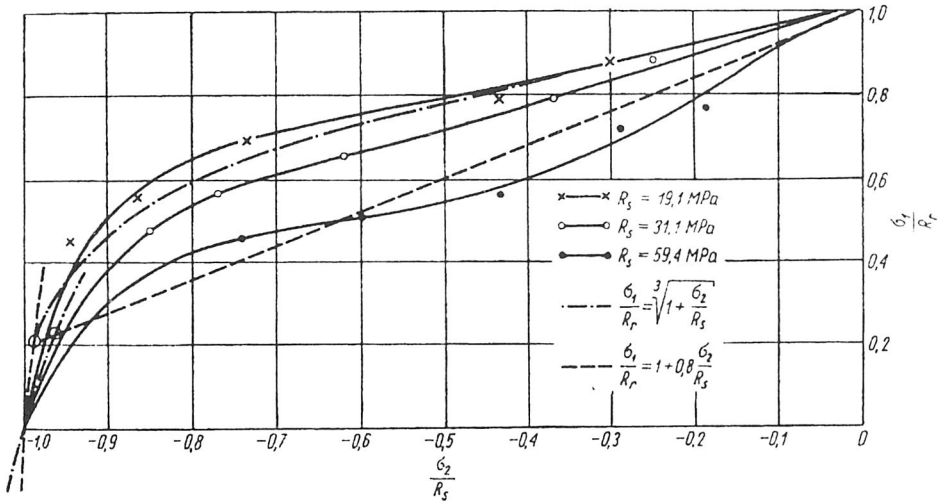
jący wzajemny stan naprężeń $\sigma_1 > 0$ i $\sigma_2 < 0$. Wyniki otrzymane przez Smitha [212], potwierdzone w Polsce przez Krzysztofiaka [122], wskazują na zależność (2.32):

$$\frac{\sigma_1^2}{R_r^2} + \frac{\sigma_2^2}{R_s^2} = 1 \quad (2.32)$$

Dla porównania Kupfer [64] (rys. 2.8) aproksymował wyniki swoich badań pokazujących zależność między naprężeniami rozciągającymi w dwóch kierunkach głównych parabolą trzeciego stopnia:

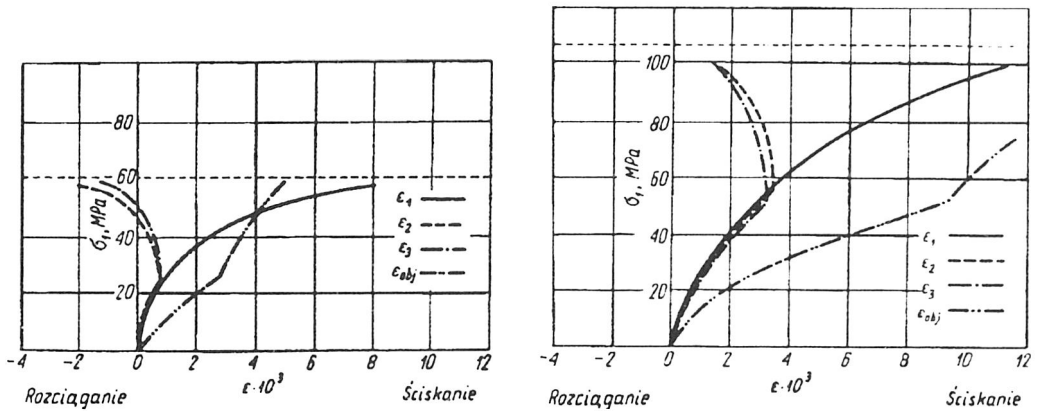
$$\left(\frac{\sigma_1}{R_r}\right)^3 - \frac{\sigma_2}{R_s} - 1 = 0 \quad (2.33)$$

Badania zależności $\sigma_i - \varepsilon_i$ w trójosiowym stanie naprężeń realizowali m.in. Schickert i Winkler [211]. Ustalili oni zależności między naprężeniami a odkształceniami w kierunkach głównych. Określali wstępny, hydrostatyczny stan naprężeń oraz tak zwane ścieżki obciążeń, ustalające priorytet obciążeń w kierunkach głównych. Przykładowe wyniki przy przyroście naprężeń ściskających $\Delta\sigma_1$ i rozciągających $\Delta\sigma_2 = \Delta\sigma_3 = -0,5\Delta\sigma_1$ pokazano na rys. 2.9.



Rys. 2.8. Krzywa naprężeń granicznych w obszarze ściskanie-rozciąganie [68, 148]

Fig. 2.8. The function of limiting stresses in the domain compression-tension



Rys. 2.9. Zależność naprężenia σ_1 od odkształceń w kierunkach głównych (por. rys. 2, 24, 25)

Fig. 2.9. Relationship σ - ϵ in principal directions (see figs. 2, 24, 25)

Zwraca uwagę poziom naprężeń, przy którym następuje nieciągłość pierwszej pochodnej funkcji naprężeń po odkształceniach w kierunkach rozciągania

$$\lim_{\epsilon_i \rightarrow \epsilon_{i,kr}^-} \sigma_{1, \epsilon_i} < \lim_{\epsilon_i \rightarrow \epsilon_{i,kr}^+} \sigma_{1, \epsilon_i} \quad (i = 2, 3) \quad (2.34)$$

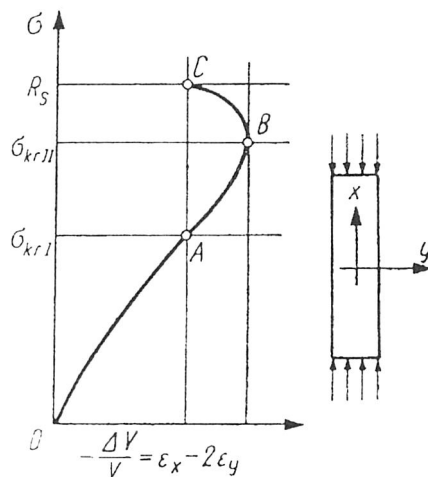
gdzie: $\sigma_{1, \epsilon_i} = \frac{d\sigma_1}{d\epsilon_i}$.

Można to wyjaśnić wartością energii, dla której następuje zniszczenie dużej ilości wiązań wewnątrzcząsteczkowych, a pozostałe dają zwiększenie współczynnika sprężystości materiału w określonym kierunku.

2.3. Inne doświadczalne zależności fizyczne dla próbek betonowych

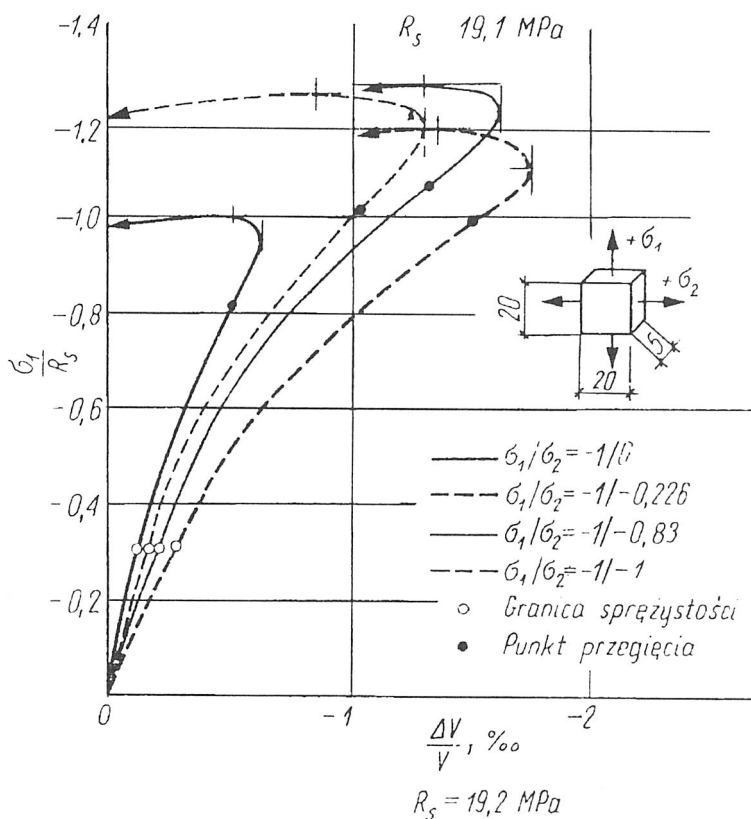
W kolejnych latach nastąpił rozwój wiedzy o betonie i sformułowano inne zależności. Wybrano te z nich, które pozwalają zinterpretować niektóre wyniki otrzymywane przez autora w badaniach własnych.

- *Zmiana objętości próbki pod narastającym obciążeniem.* Zależność dla próbki ściśkanej jednoosiowo podana przez Brandtzaega [34, 68] (rys. 2.10) oraz poddanej dwukierunkowemu ścisłaniu w płaskim stanie naprężeń wykazana doświadczalnie przez Kupfera [148] (rys. 2.11) pokazują, że przy naprężeniach $\sigma < 0,3R_s$ zmiany objętościowe przebiegają liniowo, po czym następuje coraz intensywniejsze zmniejszanie objętości, aby po osiągnięciu określonej wartości siły krytycznej (minimum objętości) powtórnie narastać. Zaobserwowano przy tym, że przy naprężeniach odpowiadających punktowi przegięcia *A* pojawiają się pierwsze mikropęknięcia. Zjawisko to można wytłumaczyć między innymi istnieniem krytycznych poziomów energetycznych: E_{krI} – przy którym następuje zerwanie pierwszych wiązań międzycząsteczkowych oraz E_{krII} – przy którym następuje zerwanie wiązań wewnątrzcząsteczkowych. Gwałtowność zjawiska po osiągnięciu E_{krII} można wyjaśnić „przekraczaniem” energii wiązania dla wiązań jonowych najtrwalszych w strukturze. Zjawisko to opisuje równanie:



Rys. 2.10. Zmiana objętości jednoosiowo ściśkanej próbki betonowej [68]

Fig. 2.10. Change of volume of axially compressed concrete sample [68]



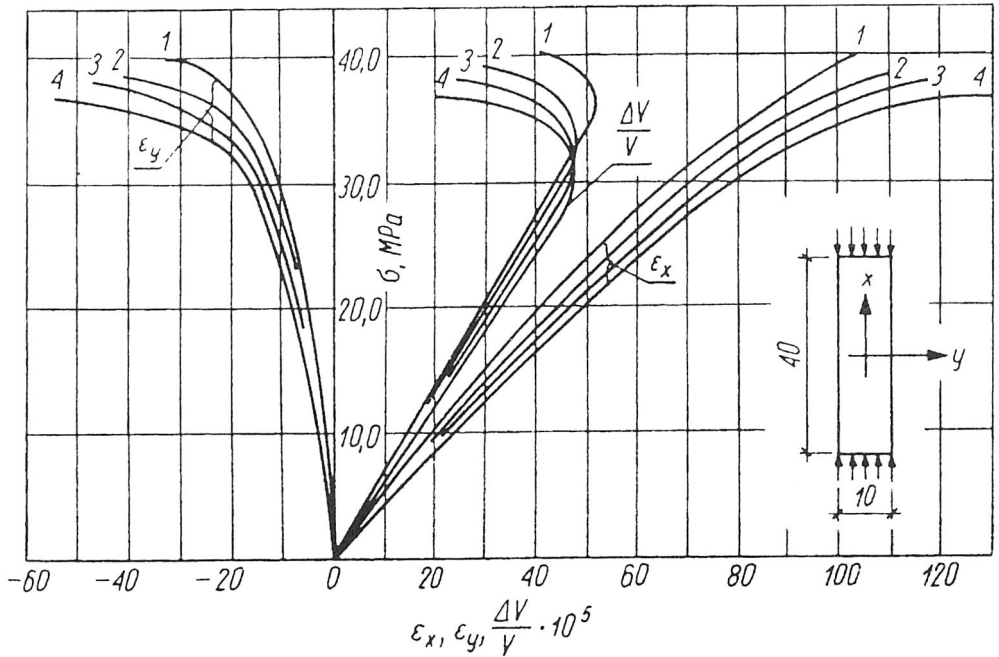
Rys. 2.11. Zmiana objętości dwuosiowo ściskanej próbki betonowej [68, 148]

Fig. 2.11. Change of volume of biaxially compressed concrete sample [68, 148]

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{1-2\mu}{E_{b0}} (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (2.35)$$

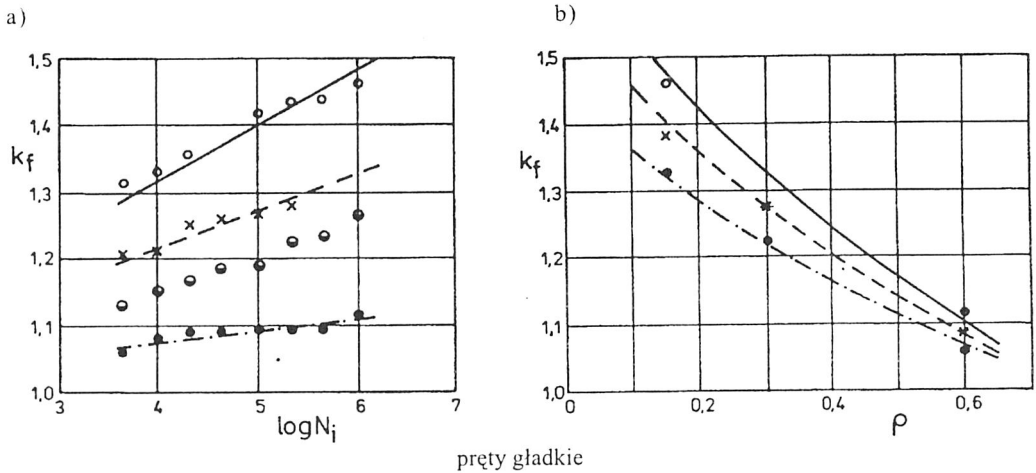
• *Wpływ szybkości obciążenia na odkształcenia jednostkowe i zmianę objętości.* Podobnym w charakterze badaniem było określenie wpływu szybkości obciążenia na wielkość odkształceń jednostkowych ϵ_x i ϵ_y i zmianę objętości $\Delta V/V$ (rys. 2.12) [11, 68]. Przebieg zjawiska można wyjaśnić również występowaniem krytycznych poziomów energetycznych E_{krI} i E_{krII} , a różne kierunki nachylenia krzywych wskutek skracania czasu obciążenia dążeniem do termodynamicznego efektu adiabadyczności procesu.

• *Wpływ zmienności obciążenia na szerokość rozwarcia rys.* Wpływ ten został wykazany doświadczalnie przez Furtaka [64]. Znormalizowana szerokość rysy zależy od liczby cykli obciążenia i od współczynnika asymetrii cyklu ρ , wyrażonego jako stosunek momentu minimalnego do momentu maksymalnego. Zależność tę wykazano empirycznie (rys. 2.13) oraz analitycznie dla prętów gładkich (2.36) i żebrowanych (2.37):



Rys. 2.12. Wpływ szybkości obciążenia na wielkość odkształceń jednostkowych ϵ_x i ϵ_y oraz na zmianę objętości $\Delta V/V$ [11, 68]

Fig. 2.12. Influence of loading rate on the unit strains ϵ_x and ϵ_y and the change of volume $\Delta V/V$ [11, 68]



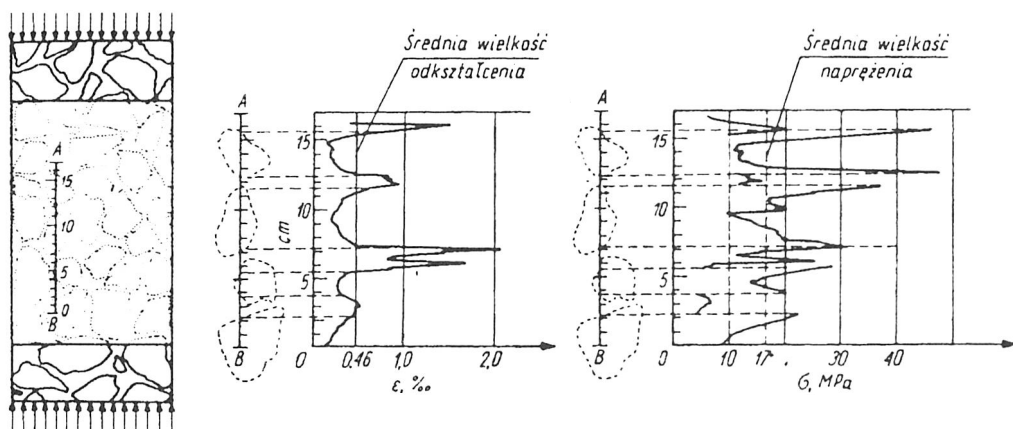
Rys. 2.13. Wpływ cykli obciążenia (a) oraz współczynnika asymetrii (b) na szerokość rozwarcia rysy [64]

Fig. 2.13. Influence of stress cycle (a) and the stress ratio on the width of a crack (b) [64]

$$k_f = \frac{a_{i=\rho}^{rys}}{a_{i=1}^{rys}} = 1 + (1-\rho)^2 \frac{\log N}{12} \quad (2.36)$$

$$k_f = \frac{a_{i=\rho}^{rys}}{a_{i=1}^{rys}} = 1 + (1-\rho)^2 \frac{\log N}{9} \quad (2.37)$$

• *Wymiar próbki.* Przy doborze wymiaru próbki należy zwrócić uwagę na następujące czynniki: po pierwsze, istnieją zaburzenia brzegowe w miejscach mocowania próbek. Powierzchnie docisku wprowadzają dodatkowy, nieopisywany efekt naprężeń w okolicach powierzchni kontaktu. Po drugie, należy zapewnić równomierne rozłożenie obciążenia zewnętrznego na powierzchnię przekroju. Odształcenia wymuszane w kruszywie i w stwardniałym zaczynie cementowym powinny być statystycznie równe. Ze względu na znaczne rozbieżności współczynników sprężystości kruszywa i zaczynu będą występowały różnice potencjałów naprężeń (rys. 2.14). Obliczeniowe naprężenia są więc wielkością umowną, w której nie uwzględnia się lokalnego stanu rzeczywistych naprężeń. Podobnie w przypadku pomiarów tensometrycznych pomiar odkształceń dotyczy również lokalnego, losowo wybranego fragmentu struktury betonu. Wymogi stochastycz-

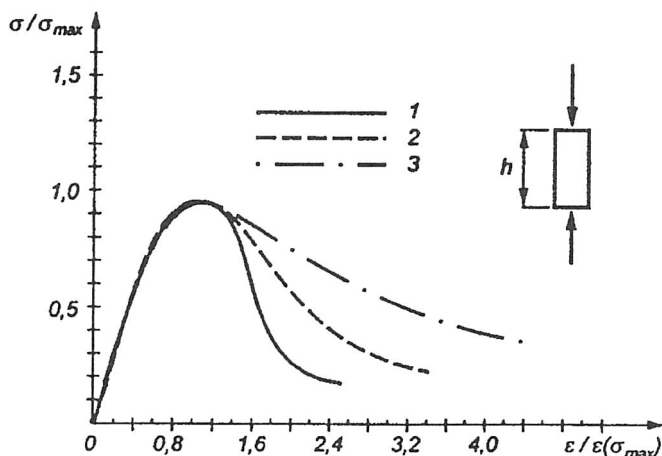


Rys. 2.14. Model Dantu [41] rozkładu odkształceń i naprężeń w przekroju betonowym [49]

Fig. 2.14. Dantu model of stress and strains distribution in a concrete section [49]

ne realizacji próby zalecają przyjmowanie minimalnych liniowych wymiarów elementu od $2,5D_k$ (średnica największego ziarna) dla najmniejszego boku tarczy (przy próbach płaskich) do $(4,5-10)D_k$ dla próbek sześciennych.

Wymiar próbki wpływa zatem na przebieg zależności $\sigma-\epsilon$ w fazie pokrytycznej (rys. 2.15). Tłumaczy się to tym, że na skutek działania sił tarcia (podczas przekazywania sił



Rys. 2.15. Przebieg naprężeń w strefie pokrytycznej dla różnych wysokości próbek [38], [167], [245]

Fig. 2.15. Stresses in a post-critical zone of a sample at different depth [38], [167], [245]

z prasy na próbkę) występuje ścinanie wzdłuż linii głównych naprężeń stycznych pod kątem 45° . W fazie pokrytycznej większe znaczenie mają cechy strukturalne niż materiałowe.

2.4. Model według Borcza

Większość prób zmierzających do opisanía zależności σ – ϵ miała na celu określenie wzajemnej zależności tych wartości za pomocą wielomianu lub krzywych logarytmicznych (por. np. [209], [226], [239]).

Oryginalność opisu modelu betonu przez Borcza [26] polegała na rezygnacji z poszukiwania jednej funkcji opisującej zależność σ – ϵ i zastąpieniu jej superpozycją funkcji opisujących niezależnie deformacje sprężyste i trwałe. Uzależniając deformacje trwałe od maksymalnego poziomu obciążenia próbki (konstrukcji), Borcz przedstawił zależność σ – ϵ także przy obciążeniach powtarzalnych. Do opisu przyjmuje w tym celu tensor odkształceń jak dla materiału sprężystego, którego wartości sumują się z tensorem odkształceń pozostających (trwałych, reszkowych):

$$\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^T = \mathbf{e}^T + \mathbf{e}_{ij}^T \quad (2.38)$$

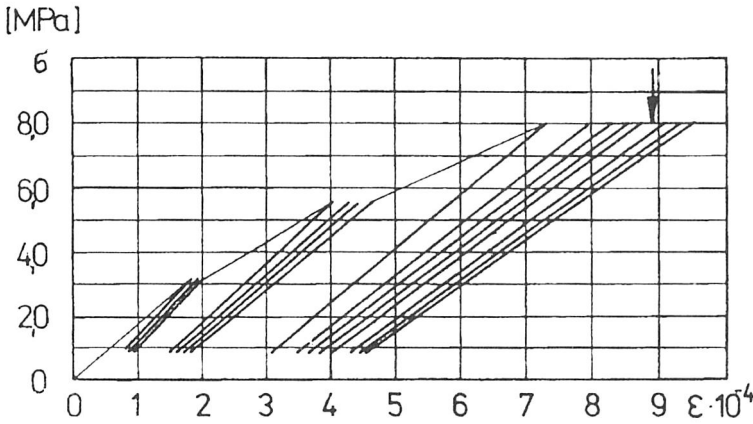
gdzie:

$$\mathbf{e}^T = \mathbf{e}^E + \mathbf{e}^R \quad (2.39)$$

$$\mathbf{e}_{kl}^T = \mathbf{e}_{kl}^E + \mathbf{e}_{kl}^R \quad (2.40)$$

$\boldsymbol{\epsilon}_{ij}^T$, \mathbf{e}^T , \mathbf{e}_{ij}^T – por. równ. (2.20); (2.21); (2.22).

Takie sformułowanie zależności σ – ϵ pozwala traktować beton jak konstrukcję linowo-sprężystą także w przedziale krytycznym i pokrytycznym. W sposób jawny wyróż-



Rys. 2.16. Zależność σ - ϵ według Borcza [26]

Fig. 2.16. Relationship σ - ϵ according to Borcz [26]

nia się sprężystą i plastyczną część deformacji (rys. 2.16). Parametry decydujące o nieliniowych cechach betonu – współpraca betonu ze zbrojeniem, deformacje trwałe, w przypadku rozciągania niesprężyste rozwarcie rysy – są opisywane jako efekty dyskretne, lokalizowane w wyidealizowanych punktach zarysowania. W przekrojach niezarysowanych lub całkowicie ściskanych punkty te mogą mieć charakter nierzeczywisty. Rozstaw rys może być ustalony dowolnie, najczęściej na podstawie którejś z istniejących teorii.

Borcz rozszerzył także pojęcie samonaprzeżeń w betonie. Oprócz zrównoważonych naprzeżeń wewnętrznych spowodowanych czynnikami procesu wiązania i twardnienia betonu (temperatura, wilgotność) Borcz wprowadził pojęcie samonaprzeżeń wywołanych niesprężystymi deformacjami betonu. Zagadnienie to zostanie szerzej omówione w rozdziale 4, w którym przedstawiono model przekroju betonowego i żelbetowego.

Model ten dobrze koreluje ze strukturą betonu, według której można rozłącznie interpretować odkształcenia sprężyste związane z deformacją wiązań wewnątrzcząsteczkowych i odkształcenia trwałe związane ze zniszczeniem tych wiązań. Deformacje sprężyste betonu tłumaczy się odkształceniami pojedynczych wiązań, które ze względu na zdolność przemieszczeń w ramach pojedynczego wiązania dają w skali próbki odkształcenia o mierzalnych wartościach. Odkształcenia trwałe są najczęściej interpretowane jako efekt przemieszczeń struktury betonu w bezpośrednim sąsiedztwie pęknięcia (rysy). Jest to efekt dominujący w przypadku dużych odkształceń, jednak przy małych odkształceniach trwałych interpretację tę należy wzbogacić o zjawiska fizykochemiczne zachodzące w strukturze samego betonu. Odkształcenie tego typu można wytłumaczyć dodatkowo wymuszeniem takiego wzajemnego przemieszczenia jonów dodatnich i ujemnych, że zaczną się one wzajemnie odpychać. Interpretacja ta tłumaczy także kruche pęknięcia betonu. Trwałe odkształcenia konstrukcji, w następstwie których nie dochodzi do jej zarysowania, można wyjaśnić częściowo mikrorysami powstającymi wewnątrz

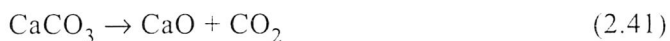
struktury betonu. Można to wytłumaczyć działaniem w strukturze betonu najsłabszych sił van der Waalsa ($E_w = 4\text{--}25$ kJ/mol), które ulegają zniszczeniu przy dość niskich poziomach obciążenia. W przypadku domieszek polimerowych, nieusieciowanych odkształcenia trwale tłumaczy się „rozprostowywaniem” liniowych łańcuchów makrocząsteczek. Właściwości te wpływają zarówno na cechy sprężyste (współczynnik sprężystości), jak i plastyczne (wydłużalność przy rozciąganiu i ściśliwość przy ściskaniu) betonu.

Model ten pozwala też wyjaśnić sprężyste rozwieranie się rysy oraz stan wymuszonych odkształceń sprężystych nazywanych w dalszej części samonaprężeniami. Dyslokacje w strukturze betonu wymuszają lokalne deformacje przyległych wiązań wewnątrzcząsteczkowych. Podobnie można wytłumaczyć skurcz, który jest wynikiem samonaprężenia wywołanych nierównomierną fazą procesu egzotermicznego na zewnątrz i wewnątrz betonu.

2.5. Energetyczny model betonu

Aby przedstawić model betonu za pomocą relacji chemicznych lub fizycznych, należy sformułować zasadę zachowania energii.

W przypadku reakcji chemicznych oznacza to, że odrębnie substraty i odrębnie produkty mają większą energię potencjalną niż wszystkie reagenty znajdujące się w stanie równowagi w określonych stężeniach. Ujęcie ilościowe równowagi chemicznej definiowane jest przez prawo działania mas, mówiące że w stanie równowagi chemicznej w układzie jednorodnym stosunek iloczynów stężeń molowych produktów reakcji do substratów jest wartością stałą w danej temperaturze i pod danym ciśnieniem. Według Czarneckiego [39] przebiegu reakcji w układach niejednorodnych nie można traktować jako zgodnego bez ograniczeń z prawidłowościami wyprowadzonymi dla stanu równowagi układów jednorodnych. Na przykład podczas wypalania kamienia wapiennego



zwiększanie ilości CaO powinno doprowadzić do zmniejszenia stężenia CO_2 . W praktyce nie znajduje to według autorów potwierdzenia. Nie osiąga się stanu równowagi w większości procesów technicznych opierających się na reakcji w ciałach stałych, a więc w takich procesach, jak otrzymywanie klinkieru cementu portlandzkiego, powstawanie mulitu $3\text{Al}_2\text{O}_3 \cdot 2\text{SiO}_2$ czy podczas reakcji wypalania cementu.

Prawo działania mas charakteryzuje jednak stan równowagi chemicznej podczas reakcji, podobnie jak zasady termodynamiki, które traktują również o efektach energetycznych związanych z przemianami energetycznymi. To powszechne dążenie do osiągnięcia stanu równowagi w ustalonych warunkach ma jednak wpływ na mechaniczne właściwości betonu. Pozwala ono wytłumaczyć zmianę niektórych właściwości fizycznych w czasie, a także cech reologicznych betonu.

Zasada zachowania energii formułowana za pomocą relacji fizycznych opiera się najczęściej na zasadzie prac przygotowanych i jest wykorzystywana do opisu doraźnych

zachowań materiału. Teorie wytrzymałościowe mechaniki ciała zakładają jednak kontinuum materialne, w którym funkcje opisujące stan naprężenia i odkształcenia materiału są funkcjami ciągłymi i różniczkowalnymi. Założenia te nie są zgodne z rzeczywistością i budowany w ten sposób model można uważać za statystyczne przybliżenie. Taka interpretacja znajduje potwierdzenie w eksperymencie.

Energetyczne teorie wytrzymałościowe są oparte na założeniu, że miarą wyciężenia jest ilość energii potencjalnej odkształcenia w jednostce objętości materiału w chwili osiągnięcia granicznego stanu energii odkształcenia U^{gr} , wspólnej dla wszystkich stanów naprężenia. Wartość U^{gr} wyznacza się doświadczalnie na podstawie prostych prób wytrzymałościowych.

$$\mathbf{U}^{gr} = \sigma^{ij} \varepsilon_{ij} \quad (2.42)$$

Zgodnie z założeniami Borcza (rozd.1.3) w równaniu (2.51) można wydzielić tensory naprężeń i odkształceń jak dla materiału sprężystego oraz tensory naprężeń i odkształceń resztkowych:

$$\mathbf{U}^{gr} = \sigma^{ijT} \varepsilon_{ij}^T \quad (2.43)$$

przy czym:

$$\sigma^{ijT} = \mathbf{s}^T + \mathbf{s}^{ijT}, \quad (2.44)$$

$$\varepsilon_{ij}^T = \mathbf{e}^T + \mathbf{e}_{ij}^T;$$

gdzie: σ^{ijT} , \mathbf{s}^T , \mathbf{s}^{ijT} , ε_{ij}^T , \mathbf{e}^T , \mathbf{e}_{ij}^T – jak w równaniach (2.17–2.22) oraz

$$\mathbf{s}^T = \mathbf{s}^E + \mathbf{s}^R, \quad (2.45)$$

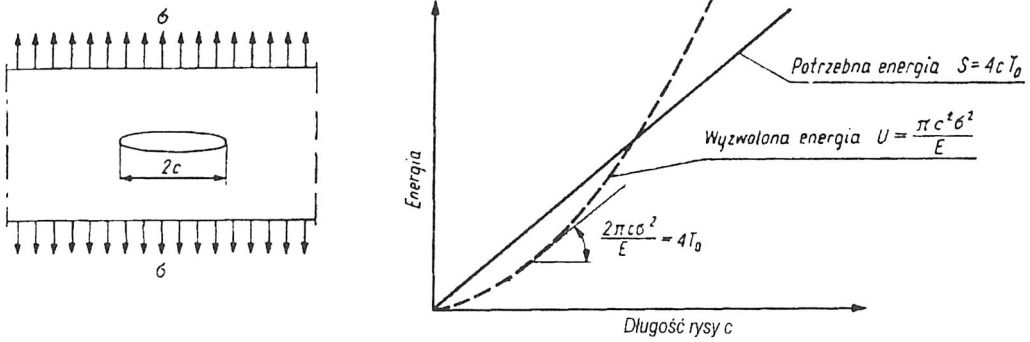
$$\mathbf{s}^{klT} = \mathbf{s}^{klE} + \mathbf{s}^{klR}. \quad (2.46)$$

Takie sformułowanie modelu energetycznego traktuje materiał jako kontinuum sprężysto-plastyczne bez uwzględnienia struktury molekularnej betonu.

Oryginalnym ujęciem energii samego procesu zarysowania jest teoria Griffitha [68, 88], który oprócz pojęcia energii odkształcenia wprowadził także pojęcie energii powierzchniowej, odpowiedzialnej za niszczenie więzi molekularnej. Formułuje on bilans energetyczny wzrostu energii wyzwalonej podczas rozwijania się rysy U i energii potrzebnej do przyrostu długości rysy S (rys. 2.17).

$$U = \frac{\pi c^2 \sigma^2}{E} \quad (2.47)$$

$$S = 4cT_0 \quad (2.48)$$



Rys. 2.17. Zależność energii od długości rysy [67, 68]

Fig. 2.17. Relationship energy-length of a crack

Warunkiem niszczenia próbki jest spełnienie zależności:

$$dU > dS \quad (2.49)$$

wyrażające stan, w którym proces niszczenia narasta bez działania sił zewnętrznych. Naprężenie graniczne można wyznaczyć dla stanu, w którym pochodne funkcji energii potrzebnej i wyzwolonej są sobie równe:

$$\frac{dU}{dc} = 2 \frac{\pi c \sigma^2}{E} \quad (2.50)$$

$$\frac{dS}{dc} = 4T_0 \quad (2.51)$$

Wynika stąd wartość naprężenia granicznego

$$\sigma = \sqrt{\frac{2ET_0}{\pi c}} \quad (2.52)$$

Tak sformułowany bilans energetyczny pomija jednak zachowanie materiału w procesie odwrotnym (odciążenie), a także analizę wartości sił międzycząsteczkowych.

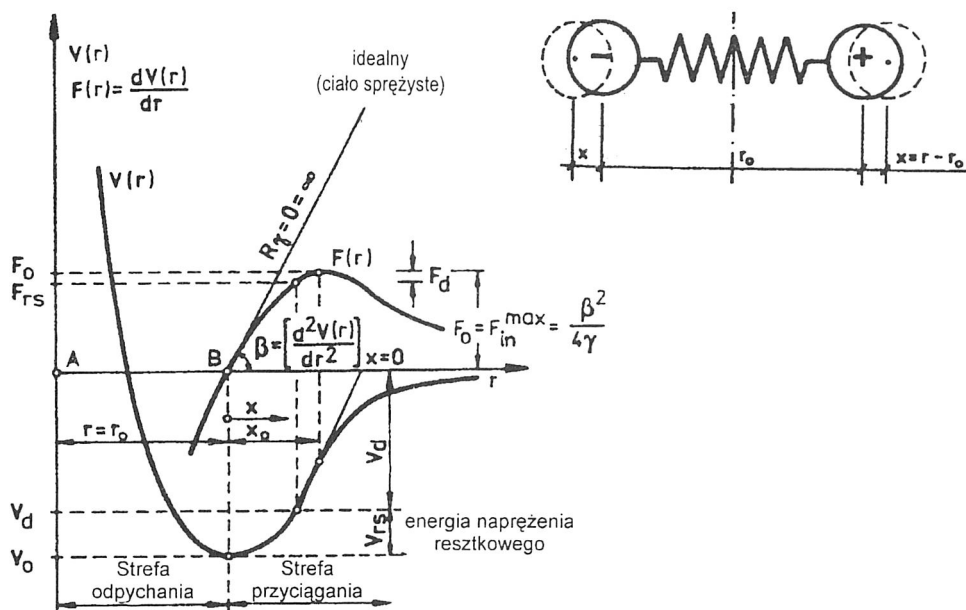
Energetyczną analizę naprężeń resztkowych na poziomie fizyki molekularnej podjął również Flaga [59, 60]. Wychodząc z wartości energii cząstki elementarnej

$$E_\nu = (\nu + 0,5)h\nu - (\nu + 0,5)2h\nu\chi \quad (2.53)$$

gdzie: ν – liczba kwantowa (0, 1, 2...),

$h\nu$ – energia cieplna,

h – stała Plancka ($h = 6,6254 \pm 0,0002 \cdot 10^{-34}$ J·s)

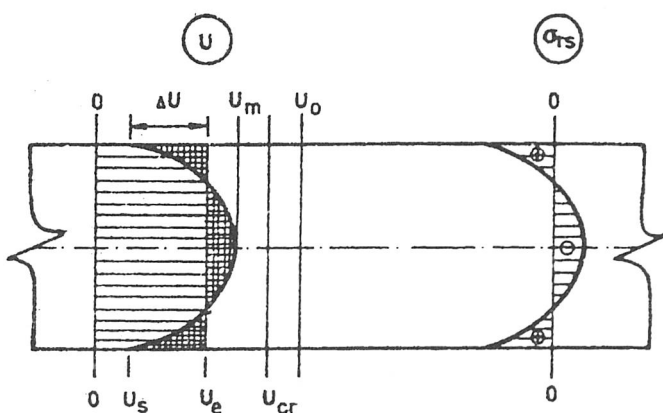


Rys. 2.18. Funkcja energii i sił wiązania [57]

Fig. 2.18. Function of energy and bond's strength [57]

można uzyskać funkcję energii i sił wiązania międzycząsteczkowego w zależności od wzajemnej odległości między molekułami (rys. 2.18).

Z analizy tej wynikają między innymi wnioski dotyczące naprężeń resztkowych w makro- (10^{-2} m), mikro- (10^{-4} m) i submikrostrefach (10^{-10} m) przekroju. W [59] naprężenia resztkowe typu makro zinterpretowano jako efekt nieustalonego pola tem-



Rys. 2.19. Naprężenia typu makro w betonowym przekroju [59]

Fig. 2.19. Makro stresses in a concrete section [59]

peratury i wilgotności (rys. 2.19). Według Boreza podobny jakościowo efekt zrównoważonych naprężeń osiąga się w następstwie obciążenia i odciążenia konstrukcji.

Naprężenia rezydualne typu mikro powstają na granicy kontaktu kruszywa i zaczynu cementowego. Naprężenia te wyjaśniają zjawisko powstawania mikrorys w przekroju. Naprężenia typu submikro traktuje się jako następstwo procesów hydrolizy i hydratacji, w wyniku których znaczny wzrost powierzchni wewnętrznej cementu jest związany z wzajemnym przemieszczaniem się cząsteczek spoiwa.

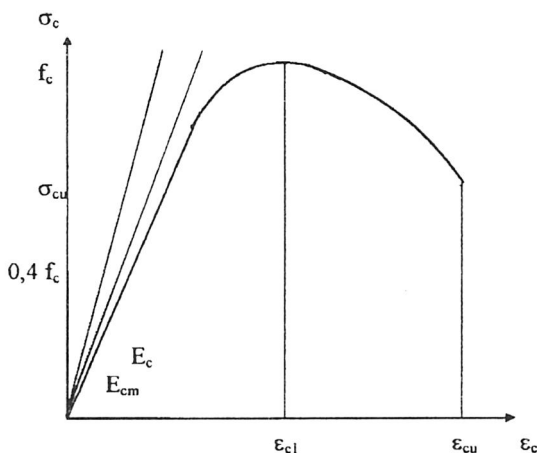
Analiza naprężeń na poziomie makro, mikro i submikro umożliwia dokładniejsze wyjaśnienie zjawisk związanych z powstawaniem odkształceń resztkowych (samonaprężeń). Weryfikacja doświadczalna przedstawiona w niniejszym opracowaniu dotyczy badania naprężeń i odkształceń w skali makro. Z tej przyczyny do analizy otrzymywanych wyników model energetyczny nie jest stosowany w dalszej części pracy.

2.6. Model betonu według Eurokodu 2

Eurokod 2 modyfikuje istniejące opisy betonu. Formułując odpowiednie równania wzorowano się na normatywach niemieckich przystosowanych głównie do praktycznego zastosowania w projektowaniu i realizacji. Zależność naprężenie–odkształcenie przy jednoosiowym ściskaniu opisuje krzywa przedstawiona na rys. 2.20.

Zależność funkcyjną dla obciążenia krótkotrwałego wyraża wzór:

$$\sigma_c = \frac{1,1E_{c,nom}\epsilon_{c1} \epsilon_c - \left(\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}\right)^2}{f_c + \left(\frac{1,1E_{c,nom}\epsilon_{c1}}{f_c} - 2\right)\frac{\epsilon_c}{\epsilon_{c1}}} f_c \quad (2.54)$$



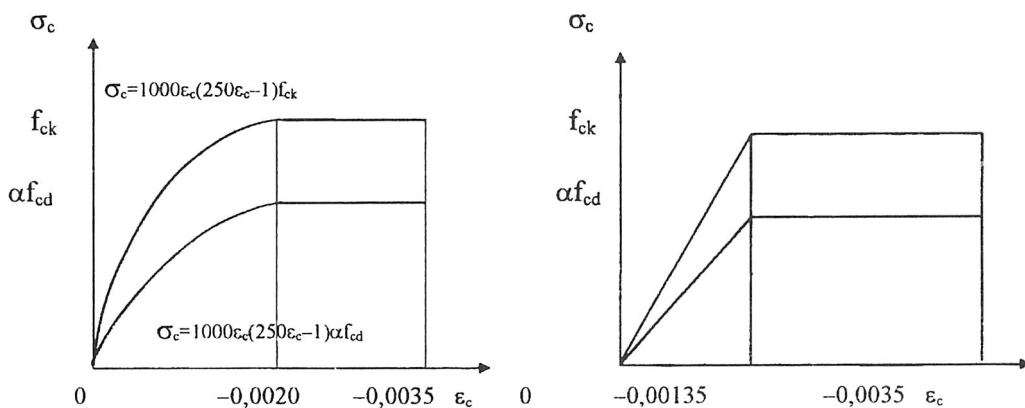
Rys. 2.20. Zależność σ – ϵ przy jednoosiowym ściskaniu wg Eurocode 2 [57]

Fig. 2.20. Relationship σ – ϵ during uniaxial compression according to Eurocode 2 [57]

gdzie: $E_{c,nom}$ – średnia wartość współczynnika sprężystości E_{cm} lub odpowiadająca jej wartość obliczeniowa E_{cd}

ε_{c1} – odkształcenie przy maksymalnym naprężeniu ($\varepsilon_{c1} = -0,0022$).

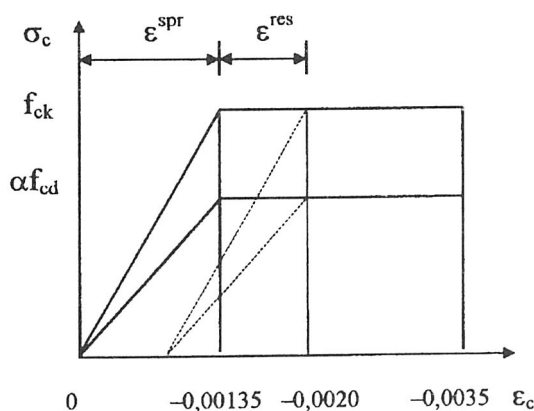
Do wymiarowania przekrojów dopuszcza się zależność paraboliczno-prostokątną dla wartości $e_{cu} = 3,5\%$ lub użycie wykresu bilinearnego, zakładającego, że do osiągnięcia przez beton charakterystycznej wytrzymałości betonu funkcja σ – ε jest liniowo-sprężysta (rys. 2.21).



Rys. 2.21. Paraboliczno-linearny i bilinearny wykres σ – ε przy ścisnaniu [57]

Fig. 2.21. Parabolic-linear and bilinear diagram of σ – ε during compression [57]

Na rysunku 2.22 można zauważyć analogię w interpretacji naprężeń sprężystych i resztkowych według teorii Borceza na wykresie bilinearnym, chociaż autorzy zakładają odmienny charakter zależności naprężenie–odkształcenie. Istotną różnicą jest tutaj



Rys. 2.22. Analogia do interpretacji naprężeń sprężystych i resztkowych według teorii Borceza na wykresie bilinearnym

Fig. 2.22. Analogy to the Borcz interpretation of elastic and residual stresses in a bilinear diagram

uwzględnianie odkształceń resztkowych dopiero po przekroczeniu wartości granicznych (f_{ck}, f_{cd}), podczas gdy według Borcza odkształcenia resztkowe uwzględnia się na wszystkich poziomach obciążeń.

Z Eurokodu 2 wynika również, że właściwości betonu przydatne do wyznaczania odkształceń betonu – doraźnych i reologicznych – zależą nie tylko od klasy betonu, ale także od właściwości kruszywa, które wpływają bezpośrednio na współczynniki sprężystości podłużnej i odkształcenia poprzecznego, a w konsekwencji na wartości odkształceń sprężystych i resztkowych w betonowej próbce.

2.7. Funkcja czasu. Reologia betonu

W przypadku obciążeń przed- i pokrytycznych, najczęściej występujących jako obciążenie wyjątkowe, zjawiska reologiczne mają drugorzędne znaczenie. Jednak ponieważ model Borcza uwzględnia możliwość wprowadzania parametrów reologicznych i istnieje fizyczna możliwość wystąpienia efektów reologicznych, więc zagadnienie to zostanie krótko przedstawione.

Korzystając z praw termodynamiki, można wyprowadzić reologiczne równania stanu [42]. Zgodnie z pierwszą zasadą termodynamiki przyrost energii wewnętrznej ciała jest sumą pracy sił zewnętrznych i ilości ciepła dostarczonego do tego ciała:

$$\Delta U_v + \Delta U_h = \Delta L + Q \quad (2.55)$$

Można je wyrazić jako pochodną funkcji czasu:

$$\frac{dU_v}{dt} + \frac{dU_h}{dt} = \frac{dL}{dt} + \frac{dQ}{dt} \quad (2.56)$$

lub

$$U_{v,t} + U_{h,t} = L_{,t} + Q_{,t} \quad (2.56a)$$

gdzie: ΔU_v – przyrost energii kinetycznej,
 ΔU_h – przyrost energii potencjalnej,
 ΔL – praca sił zewnętrznych,
 Q – ciepło wymienione,

$U_{,t} = \frac{dU}{dt}$ – pochodna energii względem czasu (oznaczenia pozostałych obciążeń są analogiczne).

Wyrażając przyrost ciepła za pomocą funkcji stanu – entropii:

$$Q_{,t} = S_{,t}T \quad (2.56b)$$

gdzie: S – entropia,
 T – temperatura bezwzględna

i przekształcając wyrażenie (2.56b), otrzymuje się równanie stanu:

$$L_{,t} = -S_{,t}T + U_{v,t} + U_{h,t} \quad (2.58)$$

Termodynamiczne równania stanu można zastosować do adiabatycznych i izotermicznych zmian stanu. Odpowiada to warunkom:

$$Q_{,t} = 0 \text{ dla adiabatycznej zmiany stanu ciała,} \quad (2.59)$$

$$T = \text{const} \ (T_{,t} = 0) \text{ dla izotermicznej zmiany stanu.} \quad (2.60)$$

Dla zmiany adiabatycznej równanie stanu (2.58) przyjmuje postać:

$$L_{,t} = U_{v,t} + U_{h,t}. \quad (2.61)$$

Dla zmiany izotermicznej przyjmuje się temperaturę otoczenia jako stałą oraz pojemność cieplną otoczenia jako nieskończoną. Podczas izotermicznej zmiany stanu ciepło wytworzone podczas przetworzenia części energii mechanicznej układu może być z niego odprowadzane, lecz nie może być odzyskiwane. To odprowadzone ciepło określa się jako energię rozproszoną U_{roz} . Wynika stąd warunek:

$$U_{\text{roz},t} = Q_{,t} = S_{,t}T \quad (2.62)$$

$$L_{,t} = U_{\text{roz},t} + U_{v,t} + U_{h,t} \quad (2.63)$$

Występujące w równaniach stanu funkcje określają stan mechaniczny ciała. Są więc one de facto funkcjami zmiennych mechanicznych. Energię kinetyczną U_v , potencjalną U_h i rozproszoną U_{roz} można wyrazić za pomocą równań różniczkowych ruchu:

$$\sigma_{xx,x} + \sigma_{xy,y} + \sigma_{xz,z} + P_x = \rho v_{x,tt} \quad (2.64)$$

$$\sigma_{yx,x} + \sigma_{yy,y} + \sigma_{yz,z} + P_y = \rho v_{y,tt} \quad (2.65)$$

$$\sigma_{zx,x} + \sigma_{zy,y} + \sigma_{zz,z} + P_z = \rho v_{z,tt} \quad (2.66)$$

spełniających warunki brzegowe:

$$p_x = \sigma_{xx} \cos(x, n) + \sigma_{xy} \cos(y, n) + \sigma_{xz} \cos(z, n) \quad (2.67)$$

$$p_y = \sigma_{yx} \cos(x, n) + \sigma_{yy} \cos(y, n) + \sigma_{yz} \cos(z, n) \quad (2.68)$$

$$p_z = \sigma_{zx} \cos(x, n) + \sigma_{zy} \cos(y, n) + \sigma_{zz} \cos(z, n) \quad (2.69)$$

gdzie: P_i (dla $i = x, y, z$) – współrzędne sił masowych na jednostkę objętości ciała,
 ρ – gęstość,

v_i – przemieszczenia w kartezjańskim układzie współrzędnych i ,
 p_i – współrzędne sił powierzchniowych,
 $\cos(i, n)$ – kosinus kąta normalnej zewnętrznej do brzegu ciała z osiami i ;
 lub w formie skróconej równania (2.64)–(2.66); (2.67)–(2.69):

$$\sigma_{ij,j} + \mathbf{P}^i = \rho v_{i,t} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{p}^i = \sigma_{ij} \cos(\mathbf{x}^j, \mathbf{n}), \quad (2.71)$$

gdzie: $i = 1, 2, 3$,
 $j = 1, 2, 3$.

Pracę sił zewnętrznych wyraża się następująco:

$$dL = \iiint_V (P_x dv_x + P_y dv_y + P_z dv_z) dV + \iint_F (p_x dv_x + p_y dv_y + p_z dv_z) dF \quad (2.72)$$

$$dL = \iiint_V (P_i dv_i) dV + \iint_F (p_i dv_i) dF$$

gdzie: V – objętość ciała,
 S – powierzchnia ciała.

Korzystając z równania ruchu, warunków brzegowych oraz twierdzenia Greena można pracę sił zewnętrznych wyrazić zależnością:

$$\begin{aligned}
 dL &= \iiint_V (\sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} d\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} d\varepsilon_{zz}) dV \\
 &+ \iiint_V (2\sigma_{xy} d\varepsilon_{xy} + 2\sigma_{yz} d\varepsilon_{yz} + 2\sigma_{xz} d\varepsilon_{xz}) dV \\
 &+ \iiint_V \left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial t^2} dv_1 + \frac{\partial^2 v_2}{\partial t^2} dv_2 + \frac{\partial^2 v_3}{\partial t^2} dv_3 \right) dV \\
 dL &= \iiint_V (\sigma_{ii} d\varepsilon^{ii}) dV + \iiint_V (2\sigma_{ij} d\varepsilon^{ij}) dV + \iiint_V \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} dv^i \right) dV
 \end{aligned} \quad (2.73)$$

Wzór (2.73) wyraża sumę przyrostu pracy sił wewnętrznych i energii kinetycznej. Uwzględniając to oraz przedstawiając równanie jako pochodną funkcji czasu, otrzymuje się zależność:

$$L_{,t} = L_{w,t} + U_{v,t} \quad (2.74)$$

Porównując to równanie stronami z równaniem (2.72) otrzymuje się:

$$L_{w,t} = U_{roz,t} + U_{h,t} \quad (2.75)$$

Z równania tego wynika, że praca sił wewnętrznych przechodzi w energię potencjalną i energię rozproszoną.

Układ o n stopniach swobody (dowolne parametry opisujące lokalny stan, np. lokalna temperatura, współrzędna, koncentracja ośrodka itd.) można określić za pomocą współrzędnych uogólnionych q^i (nazywanych również zmiennymi stanu). Przyrost energii w układzie następuje wskutek oddziaływania uogólnionych sił Q_i (np. obciążenie zewnętrzne wywołujące określony stan naprężeń). Jeżeli przyjmiemy, że przed przyłożeniem sił entropia układu ma wartość ekstremalną i wyrazi się ją za pomocą dodatnio określonej formy kwadratowej

$$TS = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q^i q^j \quad (2.76)$$

to po przyłożeniu sił entropię wyraża zależność:

$$TS = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q^i q^j + \sum_{i=1}^n Q_i q^i \quad (2.77)$$

Warunki równowagi całego układu wynikają z tego, że dla każdego ze stopni swobody istnieją stany równowagi, w których entropia osiąga ekstremum. Wynika stąd, że muszą być spełnione warunki:

$$\frac{\partial S}{\partial q_i} = 0 \quad (2.78)$$

które stanowią układ n równań wiążących uogólnione siły Q_i z uogólnionymi współrzędnymi q^i .

W przypadku procesów nieodwracalnych pochodne entropii względem współrzędnych uogólnionych są siłami związanymi ze zmianami w czasie zmiennych stanu q^i . Korzystając z twierdzenia Onsagera, według którego pochodna entropii jest liniową funkcją prędkości zmian współrzędnych uogólnionych

$$T \frac{\partial S}{\partial q_i} = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad (2.79)$$

w równaniu tym (zgodnie z twierdzeniem Onsagera) $[B]$ jest macierzą symetryczną. Na podstawie równania (2.79) tworzy się następną formę kwadratową \mathcal{D} proporcjonalną do przyrostów entropii:

$$\sum_{i=1}^n T \frac{\partial S}{\partial q_i} \frac{\partial q^i}{\partial t} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial t} \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad (2.80)$$

Z równań (2.77) i (2.79) wynika układ równań liniowych wiążących uogólnione siły Q_i , współrzędne q^i i prędkości zmian $\partial q^i / \partial t$:

$$Q_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} q^j + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad (2.81)$$

lub w postaci równań Lagrange'a, korzystając z form kwadratowych (2.76) i (2.80):

$$\mathcal{W} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} q^i q^j \quad (2.82)$$

$$\mathcal{D} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} \frac{\partial q^i}{\partial t} \frac{\partial q^j}{\partial t} \quad (2.83)$$

otrzymuje się:

$$Q_i = \frac{\partial \mathcal{W}}{\partial q^i} + \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \left(\frac{\partial q^i}{\partial t} \right)} \quad (2.84)$$

Jednorodny układ równań (2.81) wyrażamy w postaci:

$$\sum_{j=1}^n \left(a_{ij} + b_{ij} \frac{\partial}{\partial t} \right) q^j = 0 \quad (2.85)$$

lub

$$\sum_{j=1}^n (a_{ij} + p b_{ij}) q^j = 0 \quad (2.86)$$

w którym p jest operatorem różniczkowym $\partial/\partial t$.

Całkę ogólną jednorodnego układu równań różniczkowych (2.85) otrzymuje się w postaci:

$$q^j = \sum_{s=1}^n \Phi^{js} e^{-\lambda_s t} \quad (2.87)$$

gdzie: λ_s – stała relaksacji.

W rozwiązaniu każdemu pierwiastkowi λ_s odpowiada składowa relaksacji:

$$q^{js} = \Phi^{js} e^{-\lambda_s t} \quad (2.88)$$

Z reguły w badaniach laboratoryjnych liczba stopni swobody jest większa od liczby obserwowanych zmiennych. Współrzędne q^i nie podlegające obserwacji nazywa się ukła-

Otrzymane z rozwiązania układu równań pierwiastki λ_s tworzą układ dyskretny czasów relaksacji, zwany również widmem czasów relaksacji.

Rozwiązanie niejednorodnego układu równań różniczkowych (2.81) można transformować do układu nowych współrzędnych normalnych. Równanie (2.87) przyjmuje wówczas postać:

$$q^i = \sum_{s=1}^n \Phi^{is} \xi_s \quad (2.89)$$

Ostatecznie rozwiązanie układu równań (2.81) przedstawia zależność między uogólnionymi siłami przyłożonymi do układu Q_i a uogólnionymi współrzędnymi (zmiennymi układu stanu) q^i :

$$q^i = \sum_{j=1}^n Q^j \left(\sum_{s=1}^n \frac{\Phi_{is} \Phi_{js}}{p + \lambda_s} + \sum_{s=1}^n \Phi_{is} \Phi_{js} \right) \quad (2.90)$$

W realizowanych badaniach, których wyniki przedstawiono w rozdziale 5, uogólniony układ sił i współrzędnych jest zredukowany do układu jednowymiarowego, w którym uogólnioną siłą jest naprężenie σ , a uogólnioną współrzędną odkształcenie ε . Układ równań redukuje się wówczas do równania stanu:

$$\alpha \sigma + \beta \frac{\partial}{\partial t} \sigma + \dots + \nu \frac{\partial^i}{\partial t^i} \sigma = a \varepsilon + b \frac{\partial}{\partial t} \varepsilon + \dots + n \frac{\partial^i}{\partial t^i} \varepsilon \quad (2.91)$$

w którym współczynniki $\alpha, \beta, \dots, \nu$ i a, b, \dots, n zależą od przyjętego modelu reologicznego.

Oryginalną koncepcję uwzględniania w obliczeniach właściwości reologicznych betonu przedstawił Biliszczuk [13, 14]. Na podstawie istniejących teorii rozwinął zagadnienie redystrybucji stanu naprężeń w niejednorodnych⁷ konstrukcjach betonowych w zależności od zachodzących w nich zjawisk reologicznych. Przedstawiona metoda obliczeń pozwala z dobrą dokładnością przewidzieć zmianę stanu naprężeń w konstrukcji po dowolnym czasie. Praktyczne zastosowanie metody wymaga użycia złożonych algorytmów, możliwych do zastosowania wyłącznie za pomocą komputera, jednak w przypadku „odpowiedzialnych” konstrukcji – głównie sprężonych (np. przęsła mostowe, dźwigary o dużych rozpiętościach) – uwzględnianie efektów redystrybucji naprężeń powinno stać się obowiązującą normą⁸.

⁷ Zachowano oryginalne sformułowanie z pracy [13], w której autor określa tym terminem konstrukcje uzyskane przez połączenie betonu i stali w jeden element nośny. Chodzi więc tutaj o wyróżnienie betonowych konstrukcji zbrojonych (konstrukcje żelbetowe, sprężone i zespolone), nie zaś o strukturalną niejednorodność betonu.

⁸ Szczegółowy algorytm obliczenia przegrupowania naprężeń w konstrukcjach żelbetowych, sprężonych i zespolonych wraz z liczbowymi przykładami znajduje Czytelnik w pracy J. Biliszczuka *Reologicz-*

Na podstawie badań przedstawiono również koncepcję nieliniowego, reologicznego równania stanu, w którym do liniowej teorii pełzania ciała sprężystego Masłowa i Arutiuniana [5] dodano funkcję opisującą zmiany wytrzymałościowe betonu w czasie:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_c(t_0)}{\partial t_0} J(t, t_0) dt_0 + \frac{1}{2} \varphi_p^{end} R^{\max} \left| \ln \left\{ 1 - [\eta_{\max}(t)]^2 \right\} \right| \quad (2.92)$$

Trzeci składnik sumy określa nieliniowe, plastyczne odkształcenia betonu. Występujące tu funkcje i parametry są zdefiniowane następująco:

$$\eta_{\max}(t) = \frac{\sigma_{\max}(t_0)}{R(t_0)} + \int_{t_0}^t \frac{\partial \sigma_{\max}(t)}{\partial t} \frac{1}{R(t)} dt \quad (2.93)$$

gdzie: $\sigma_{\max}(t)$ – maksymalne naprężenia w przedziale czasu $\langle t_0, t \rangle$,
 $R(t)$ – funkcja zmian wytrzymałości betonu w zależności od jego wieku,
 $R_{\max} = \lim_{t \rightarrow \infty} R(t)$ – graniczna wartość $R(t)$, gdy $t \rightarrow \infty$,
 φ_p^{end} – końcowa wartość odkształceń plastycznych.

Z praktycznych opracowań dotyczących sposobów uwzględniania w obliczeniach właściwości reologicznych betonu można wymienić tu modele MC 78 (Model Code 1978) oraz GTG 9 (General Task Group 9), którego ostateczna forma (MC 90) została przyjęta do EC2⁹.

Według Model Code 1990 równanie przedstawiające odkształcenia w betonie zachodzące w czasie opisuje następująca zależność:

$$\varepsilon_c(t, t_0) = \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, t_0) \partial \sigma_c(t_0), \quad (2.94)$$

funkcję pełzania zaś:

$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \left[1 + \frac{E_c(t_0)}{E_c} \phi(t, t_0) \right] \quad (2.95)$$

Współczynnik pełzania $\phi(t, t_0)$ może być obliczany ze wzoru:

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \beta_c(t - t_0) \quad (2.96)$$

na redystrybucja stanu naprężenia w niejednorodnych izostatycznych konstrukcjach betonowych, PWN, Warszawa 1982 [13].

⁹ Pełna charakterystyka tych modeli jest zawarta w Biuletynie CEB 1990 – *Bulletin d'Information No 199. Evaluation of the time dependent behaviour of concrete*, CEB, Paris, 1990 [37].

$$\phi(t, t_0) = \phi_0 \beta_c(t - t_0) \quad (2.96)$$

gdzie: t – wiek betonu w dniach w rozpatrywanym czasie;

t_0 – wiek betonu od chwili obciążenia;

$\phi_0 = \phi_{RH} \beta(f_{cm}) \beta(t_0)$ – podstawowy współczynnik pełzania;

$$\phi_{RH} = 1 + \frac{1 - \frac{RH}{100}}{0,1 \sqrt[3]{h_0}} \quad (2.97)$$

gdzie: RH – względna wilgotność otaczającego środowiska;

$h_0 = 2A_c/u$ – umowny, względny wymiar elementu;

A_c – przekrój poprzeczny;

u – obwód elementu konstrukcyjnego mający kontakt z atmosferą;

$$\beta(f_{cm}) = \frac{16,8}{\sqrt{f_{cm}}} \quad (2.98)$$

$$\beta(t_0) = \frac{1}{0,1 + t_0^{0,2}} \quad (2.99)$$

gdzie: $\beta_c(t - t_0) = [(t - t_0)/\beta_H + (t - t_0)]^{0,3}$ – współczynnik opisujący rozwój pełzania w czasie po obciążeniu;

$\beta_H = 1,5[1 + (0,012RH)^{18}]h_0 + 250 < 1500$ dni – współczynnik uwzględniający wpływ wymiaru elementu i wilgotności środowiska na postęp pełzania.

Prezentowany model pełzania może uwzględniać wpływ rodzaju zastosowanego cementu i stopnia hydratacji w chwili obciążenia na współczynnik pełzania betonu, określając następująco wiek betonu:

$$t_0 = t_{0,T} \left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{1,2}} + 1 \right]^\alpha \geq 0,5 \text{ dnia} \quad (2.100)$$

gdzie:

$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^n \Delta t_i e^{-\left[\frac{4000}{273+T(\Delta t_i)} - 13,65 \right]}$$

jest temperaturą modyfikującą wiek obciążonego betonu. Pozostałe oznaczenia w równ. (2.100) są następujące:

Δt_i – liczba dni, w których przeważa temperatura T [°C],

$T(\Delta t_i)$ – temperatura T [°C] w czasie Δt_i [dni],

n – liczba rozpatrywanych przedziałów czasu;

$$\alpha = \begin{cases} -1 & \text{dla cementów wolno twardniejących,} \\ 0 & \text{dla cementów normalnie i szybko twardniejących,} \\ 1 & \text{dla cementów szybko twardniejących o wysokiej wytrzymałości} \end{cases}$$

Za pomocą temperatury modyfikującej wiek obciążonego betonu $t_{0,T}$ można również uwzględnić wpływ wzrostu i zmniejszania się temperatury na proces pełzania. Przy stacjonarnym przebiegu tego procesu podstawowy współczynnik pełzania wynosi:

$$\phi(t, t_{0,T}) = \phi_{T,st}(t, t_0) = \phi_0 \beta_c (t - t_{0,T}) \quad (2.101)$$

natomiast przy przebiegu niestalonym:

$$\phi(t, t_{0,T}) = \phi_{T,st}(t, t_0) + \phi_{T,trans}(t, t_0) \quad (2.102)$$

gdzie: $\phi_{T,trans}(t, t_0) = 0,004(T - 20)^2$,

T – temperatura [°C], do której jest ogrzany obciążony element konstrukcyjny.

Model MC 90 pozwala również na uwzględnienie wpływu wysokiego poziomu naprężenia. Przy poziomym naprężeniu $0,4f_c < \sigma_c \leq 0,6f_c$ należy zwiększyć podstawowy współczynnik pełzania zgodnie ze wzorem:

$$\phi\left(t, t_0, \frac{\sigma_c}{f_c}\right) = \phi(t, t_0) \exp\left[1,5\left(\frac{\sigma_c}{f_c} - 0,4\right)\right] \quad (2.103)$$

Przedstawiony model MC 90 stał się podstawą do obliczania efektów pełzania w Eurokodzie 21. Ostatecznie według EC2 równanie przedstawiające odkształcenia w betonie – po uwzględnieniu odkształceń wymuszonych $\varepsilon_{c,n}$, niezależnych od naprężeń (np. wywołanych skurczem lub temperaturą) – przyjmie następującą postać ogólną:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{c,tot}(t, t_0) &= \varepsilon_{c,n}(t) + \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \int_{t_0}^t J(t, t_0) d\sigma_c(t_0) \\ &\cong \varepsilon_{c,n}(t) + \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + \sum J(t, t_i) d\sigma_c(t_i) \end{aligned} \quad (2.104)$$

lub w proponowanej do obliczeń formie uproszczonej:

$$\varepsilon_{c,tot}(t, t_0) = \varepsilon_{c,n}(t) + \sigma_c(t_0)J(t, t_0) + [\sigma_c(t) - \sigma_c(t_0)] \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \kappa \frac{\phi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] \quad (2.105)$$

Funkcja pełzania natomiast ma postać:

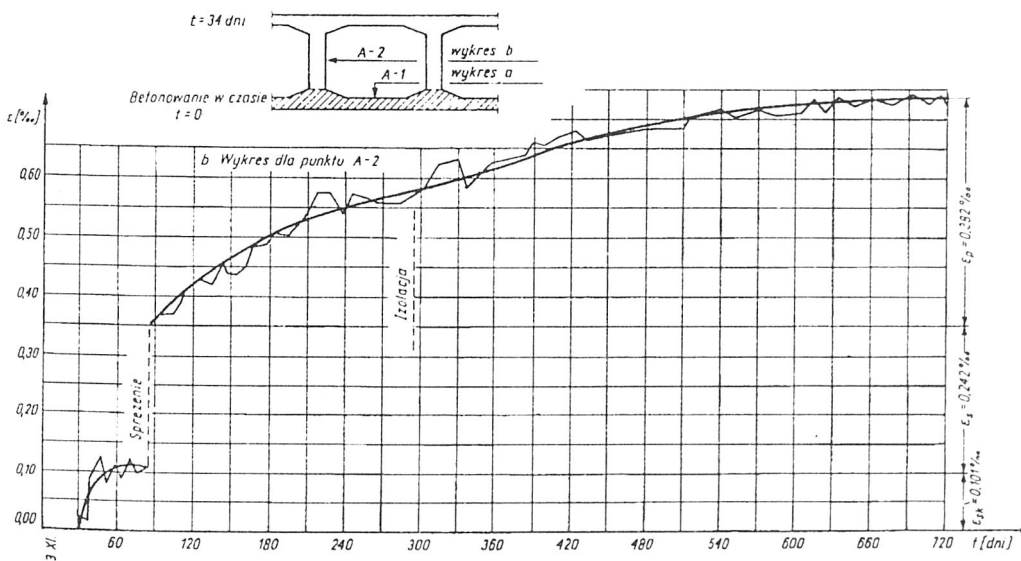
$$J(t, t_0) = \frac{1}{E_c(t_0)} \left[1 + \frac{E_c(t_0)}{E_{c,28}} \phi(t, t_0) \right] \quad (2.106)$$

W wielu prostych przypadkach, jeżeli naprężenia w betonie zmieniają się nieznacznie, można obliczać odkształcenia posługując się zastępczym (efektywnym) współczynnikiem sprężystości:

$$E_{c,eff} = \frac{E_c(t_0)}{1 + \phi(t, t_0)} \quad (2.107)$$

W rozdziale 3 opisującym morfologię rys zostanie przedstawiona propozycja Dyducha [53] dotycząca określenia szerokości rozwartości rys jako funkcji m.in. pełzania i skurczu betonu.

Zależności reologiczne wykorzystuje się z reguły w praktyce do określenia stanów granicznych użytkowania. Przedstawione teorie – dość powszechnie stosowane do określania związków między naprężeniami a odkształceniami w elementach betonowych i żelbetowych – podlegały weryfikacjom także w przypadku obiektów o znaczących wymiarach. Do takich należą badania Kmity [113] sprężonych dźwigarów mostowych. Istotnym wynikiem praktycznym tych badań jest między innymi uzyskanie reologicznych założeń odkształceń, pokazujących, że procesy reologiczne mają w rzeczywistych konstrukcjach mostowych przebieg mniej regularny niż w warunkach laboratoryjnych. Ry-



Rys. 2.23. Przykładowy wykres wyniku pomiaru odkształceń reologicznych w przęśle mostowym [113]

Fig. 2.23. Example of experimental reological strains diagram on a bridge span [113]

sunek 2.23 pokazuje jedną z takich zależności dla skrzynkowego dźwigara mostu rzecznoego. Wykres wskazuje na moment sprężenia oraz na wpływ zmiany wilgotności betonu po założeniu izolacji, które powoduje zmniejszenie nierówności odkształceń w betonie.

W dalszej części niniejszej pracy przyjęto za podstawę do rozważań ogólne zależności, co umożliwiła stosowanie dowolnej teorii pełzania. W obliczeniach weryfikujących wyniki doświadczeń posługiwano się założeniami teorii sprężystopełzającego ciała jako najbardziej odpowiadającymi rzeczywistości.

2.8. Modele betonu zbrojonego [78]

Poprawny opis modelu żelbetu powinien uwzględniać oprócz związków konstytutywnych w betonie także zachowanie się stali oraz wzajemną współpracę pomiędzy nimi. Do opisu betonu jako materiału fizycznego przyjmuje się zazwyczaj modele konstytutywne przedstawione we wcześniejszych rozdziałach. Można oczywiście modele te rozwijać, uwzględniając na przykład niemonotoniczny lub cykliczny charakter obciążeń, lecz wymaga to znajomości większej liczby parametrów doświadczalnych.

Prostszy model przyjmuje się zazwyczaj dla stali, dla której z dobrym przybliżeniem można założyć uproszczony, jednoosiowy stan naprężeń, w którym pręty przejmują tylko siły osiowe.

Koncepcje tworzenia modeli żelbetowych wynikają z równań konstytutywnych betonu. Można tu dokonać podziału na modele sprężyste i plastyczne. W przypadku modeli sprężystych wyróżnia się modele liniowe i nieliniowe. Modele liniowe mają w zasadzie zastosowanie tylko do opisu naprężeń w zbrojeniu i niskich poziomach wyciężenia betonu. Poparty doświadczeniami opis zachowania betonu przy wolnozmiennych obciążeniach zaproponowany przez Borcza [26] pozwala na wykorzystywanie tego modelu także przy obciążeniach przedkrytycznych, jednak pod warunkiem, że uwzględnia się odkształcenia plastyczne w betonie przy wzrastaniu obciążenia.

Modele nieliniowo sprężyste można podzielić na:

- Modele hipersprężyste, które posługują się pojęciem siecznego modułu sprężystości; spełniają one równania termodynamiczne, lecz nie opisują odkształceń trwałych, ważnych przy wzroście obciążenia.

- Modele hiposprężyste opisuje się za pomocą stycznego modułu sprężystości; charakteryzują się one jednoznacznością między przyrostem odkształceń i naprężeń.

W modelach tych należy uwzględnić również kryteria określające zniszczenie materiału.

Do modeli plastycznych można zaliczyć:

- model ciała idealnie sprężysto-plastycznego zakładający liniową postać zależności odkształcenie–naprężenie przed osiągnięciem warunku plastyczności i po zniszczeniu; warunek określają kryteria von Misesa, Druckera–Pragera czy Coulomba; zachowanie się betonu w zakresie plastycznego płynięcia opisuje się za pomocą prawa płynięcia lub stowarzyszonego prawa płynięcia;

- model plastyczny ze wzmocnieniem, który spełnia dodatkowo wymagania mechaniki ośrodków ciągłych, takich jak na przykład jednoznaczność rozwiązania;
- model endochroniczny, który umożliwia jednolity, ciągły opis zachowania się materiału bez podziału na okresy do osiągnięcia warunku plastyczności, płynięcia, spadku naprężeń itp.; równanie konstytutywne umożliwia opis zachowania się materiału w całym zakresie obciążenia i odciążenia, także z uwzględnieniem cykliczności obciążeń i zjawisk reologicznych.

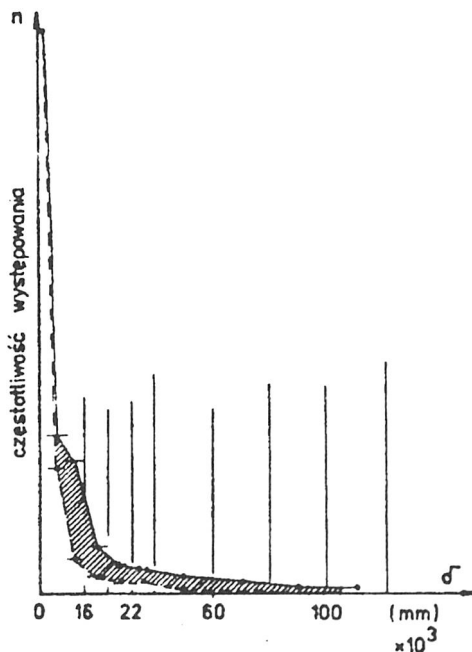
Modele te są wykorzystywane do formułowania modeli obliczeniowych konstrukcji (por. rozdział 4).

2.9. Model współpracy betonu ze zbrojeniem

Ze względu na relatywnie małą wytrzymałość betonu na rozciąganie celowe jest wprowadzenie do współpracy materiału o cechach wytrzymałościowych umożliwiających równomierne wykorzystanie materiału w strefach ściskanej i rozciąganej. Rolę taką może spełniać materiał, który nie tylko wykazuje dużą wytrzymałość na rozciąganie, ale który można także efektywnie połączyć z betonem, tak aby uzyskać możliwie dużą jednorodność strefy rozciąganej.

Stosowane zbrojenie jest dość odległe od tej idei. Strefa rozciągana jest wzmocniana punktowo, a współczynniki sprężystości obu materiałów różnią się w przybliżeniu o rząd wielkości. Są to przyczyny, dla których w betonie występują koncentracje zbrojenia w otoczeniu prętów zbrojeniowych, a oba materiały nie współpracują równomiernie. Na styku obu materiałów powstają więc znaczne siły rozwarstwiające, które w idealnie współpracującym przekroju są przenoszone przez wzajemne „zazębienie” się obu materiałów oraz przez siły kohezji i efekt skurczu betonu wokół zbrojenia. Kohezja i skurcz mają jednak bardzo małe znaczenie. W zbrojeniu gładkim współpraca przez zazębienie jest w praktycznych przypadkach z reguły niewystarczająca (rys. 2.24).

Współpraca materiałów była przedmiotem wielu prac badawczych. Dla potwierdzenia też niniejszej pracy duże znaczenie praktyczne mają badania Dyducha i Stankiewicza [52] (modele numeryczne) oraz Kozłowskiego



Rys. 2.24. Mikrowgłębienia w zbrojeniu gładkim [26]

Fig. 2.24. Micro-valley on a smooth reinforcement [26]

[120] (badania laboratoryjne), w których określano wpływ obciążeń zmiennych na współpracę betonu i stali oraz modelowano strefę rozciąganą zginanego przekroju betonowego i pokazano efekt narastania trwałych deformacji w zbrojeniu w przekroju zarysowanym i w jego otoczeniu przy obciążeniach cyklicznych. Opis będący funkcyjnym przedstawieniem współpracy betonu i stali przedstawiono w rozdziale 3.6 po opisie mechanizmu tworzenia się rysy. Wyniki tych badań przedstawiono w rozdziale 5.4.

2.10. Podsumowanie

Przedstawione modele betonu i żelbetu stanowią teoretyczną podstawę do sformułowania modeli numerycznych. Modelowane są cechy materiałów (betonu i stali), ich współpraca oraz proces tworzenia się rys. Ogólność modeli pozwalała również na wprowadzanie parametru czasu. Metodologię numerycznego modelowania przedstawiono w rozdziale 4.

Badania własne autora w zakresie cyklicznych obciążeń doraźnych skłaniają do poszukiwania modelu pozwalającego opisać zachowanie się konstrukcji pod obciążeniem o takim właśnie charakterze. Takie obciążenie umożliwia opis wielu praktycznych przypadków pracy konstrukcji. W tym zakresie badań pomocne są zatem modele opisujące zależność σ – ε , sprężyste w zakresie obciążeń cyklicznych, ale uwzględniające niesprężyste cechy betonu (deformacje przy obciążeniu pierwotnym i odkształcenia pod obciążeniem długotrwałym). Pewnym przybliżeniem, znajdującym jednak w znacznym stopniu potwierdzenie w eksperymencie, jest założenie stałej wartości współczynnika sprężystości. Przyjęcie tego założenia zostanie uzasadnione w rozdziale zawierającym dyskusję wyników doświadczeń (rozdział 5). Stosowany model powinien także dawać możliwość uwzględnienia odkształceń długotrwałych, wynikających z procesów reologicznych. Odkształcenia spowodowane obciążeniami długotrwałymi są jednak na razie przyjmowane a priori, na podstawie badań innych autorów.

W kontekście istniejących koncepcji modeli betonu autor opiera się na modelu Borcza w dalszej części pracy. Mieści się on w szeroko pojętej przestrzeni istniejących koncepcji. Model ten, będący efektem wieloletnich analiz teoretycznych, stanowi spójną teorię opisu betonu. Analityczny opis deformacji pozwala między innymi wydzielić w konstrukcji zakres jej sprężystej pracy, także na poziomie obciążeń krytycznych. Doświadczalne potwierdzenie poprawności założeń tej teorii i możliwość wyznaczenia empirycznych współczynników jest jednym z celów niniejszego opracowania.

3. Morfologia mikrorys i rys

3.1. Właściwości wiązania i rozwój mikrostruktury w betonie

Model betonu jest często formułowany na podstawie właściwości mechanicznych materiału jako zależność stanu naprężenie–odkształcenie (σ – ϵ). Zależność ta, zwana również w mechanice równaniem konstytutywnym¹, jest nierzadko podstawowym założeniem, z którego korzysta się podczas projektowania konstrukcji. Do sformułowania takiego modelu betonu wystarczająca jest znajomość wielkości fizycznych otrzymanych w wyniku eksperymentu, takich jak wytrzymałość materiału, współczynniki sprężystości, parametry reologiczne, współczynnik rozszerzalności termicznej itd. Można jednak obecnie stwierdzić, że istnieje także związek między chemiczną strukturą betonu i właściwościami składników mieszanki betonowej a właściwościami mechanicznymi betonu. Opis zależności chemicznych występujących w procesie wiązania i eksploatacji może okazać się pomocny nie tylko do zobrazowania niektórych właściwości fizycznych betonu, ale również do:

- optymalnego doboru składników mieszanki betonowej i procesu technologii wytwarzania w zależności od warunków eksploatacji;
- przewidywania zmian jego właściwości i trwałości podczas użytkowania;
- modyfikowania właściwości materiału do warunków eksploatacji.

Perspektywiczne spojrzenie na relację między strukturą a właściwościami materiału może mieć także konsekwencje podczas projektowania konstrukcji, gdzie dobór składników betonu stałby się integralną częścią dokumentacji technicznej.

Ustalona przez lata technologia betonu oraz doświadczenie uzyskane w zakresie określania jego cech mechanicznych nie wymagały wnikliwej analizy struktury tego materiału. Opisywane w pracy odkształcenia plastyczne i samonaprężenia zachodzą jednak *de facto* w strukturze betonu. Stąd przedstawione informacje dotyczące struktury betonu sugerują interpretowanie cech sprężystych betonu jako cech sieci krystalograficznej, a cech plastycznych jako jej trwałe zaburzenie.

¹ W pracy nie uwzględniono warunków hydrotermicznych w związkach konstytutywnych.

Mówiąc o betonie jako o materiale budowlanym, patrzymy na niego z jednej strony jak na związek chemiczny, czyli pierwiastki połączone ze sobą naturalnie za pomocą różnych wiązań chemicznych zaistniałych w wyniku reakcji swobodnych lub wymuszonych, z drugiej zaś jak na materiał fizyczny w określonym stanie skupienia i o określonej sieci krystalograficznej. Pod tym kątem zwrócono uwagę na składniki mieszanki betonowej, które mogą kształtować cechy fizykochemiczne betonu.

Według Kuczyńskiego [128] podczas procesu wiązania betonu produkty hydratacji cementu tworzą trójwymiarową sieć, która łączy poszczególne ziarna cementu i kruszywo. Zaczyn tworzą koloidalne żełe połączeń uwodnionych związanych siłami adhezji oraz żełe o więźbie przestrzennej. Rolę sił wiążących spełniają tu siły polaryzacji, które w znacznym stopniu wpływają na właściwości mechaniczne (wytrzymałościowe) zaczynu. Utwory krystaliczne tworzą sieci liniowych łańcuchów, a przestrzeń między nimi mogą wypełniać koloidy. Związane siłami walencyjnymi łańcuchy kryształów łączą się z kryształami stosu okruszowego przez przenikanie jonów tych kryształów w luki sieci przestrzennej kryształów ziaren kruszywa. Podobne przenikanie występuje również na styku koloidów z kruszywem i tworzy się tak zwana warstwa stykowa, która znacząco wpływa na właściwości wytrzymałościowe betonu.

Pomimo że beton *in corpore* jest kompozytem, a związki chemiczne istnieją najczęściej jako odmiany polimorficzne, które mogą różnić się budową krystaliczną, a w konsekwencji właściwościami fizycznymi, budowanie modeli zmierza w swej istocie do uporządkowania i uproszczenia rzeczywistych relacji. Rzeczywiste ciała stałe różnią się od idealnych wskutek:

- tworzenia się struktury mozaikowej, w której tylko najmniejsze obszary (10^{-7} m) są monokryształami;
- tworzenia się konglomeratów, które składają się z nieregularnych ziaren małych kryształów (10^{-2} – 10^{-5} m) zawierających pory i wtrącenia;
- defektów struktury sieciowej (10^{-10} m), takich jak: luki, obce atomy, międzywęzła, dyslokacje, które przy wymuszeniu odkształceń mogą przejść w mikrorysy i rysy.

Dewiacje te, które w istotny sposób wpływają na cechy fizyczne materiałów, są najczęściej uwzględniane w modelu betonu jako uśredniony na pewnym obszarze efekt losowy. Model konstrukcji zbudowany z takiego materiału jest wówczas odcinkami (elementami) jednorodny, choć parametry charakteryzujące materiał mogą się zmieniać na przykład w zależności od wieku betonu, poziomu jego wyężenia itd. Istnieje jednak możliwość innego modelowania materiału konstrukcyjnego, w którym redukuje się ilość zmiennych parametrów, wprowadzając w zamian elementy, które ujmują te zmiany w sposób dyskretny – na przykład jako sumaryczne defekty materiałowe.

Według Czarneckiego [39] parametry wytrzymałościowe betonu są w znacznym stopniu zależne od wiązań wewnątrzcząsteczkowych:

- jonowych – powstających między atomami różnych pierwiastków metali i niemetałów w wyniku przeniesienia elektronu;

- atomowych – między atomami pierwiastków niemetalu o zbliżonej lub tej samej elektroujemności ($E_j + E_p$);
- metalicznych – między atomami z reguły tych samych pierwiastków metali (odniesienie do stali zbrojeniowej).

Tworzenie się wiązań jest zgodne z prawem termodynamiki mówiącym o dążeniu układu do zmniejszenia energii, co fizycznie jest związane z przemieszczeniem elektronów walencyjnych na powłokach zewnętrznych. Symbolicznie związek ten można zapisać następująco:



gdzie: A – atom,

K^+ – kation,

A^- – anion,

E_j – energia jonizacji,

E_p – energia powinowactwa elektronowego.

W materiałach mineralnych i spoiwach zbudowanych z cząsteczek wieloatomowych występuje najczęściej kilka rodzajów wiązań. W przypadku hydrokompleksów glinowych $[Al(OH)_6]^{3-}$, a także hydratów, jonów uwodnionych (np. kompleksowych anionów sześćoakwoglinowych $[Al(H_2O)_6]^{3+}$ lub magnezowych $[Mg(H_2O)_6]^{2+}$) występują na przykład wiązania koordynacyjne. Z obecnością wody są związane mostki wodorowe. Między jonami Ca^{2+} i SO_4^{2-} występuje wiązanie jonowe, a w jonie SO_4^{2-} wiązania atomowe spolaryzowane i koordynacyjne. Wszystkie wiązania różnią się istotnie energią wiązań.

Większość stosowanych składników materiałów budowlanych przyporządkowanych jest do jednego z układów krystalograficznych². Atomy danego pierwiastka tworzą jedną, charakterystyczną sieć krystalograficzną. W materiale może występować jednak kilka sieci wzajemnie przenikających się. Spotykane jest zjawisko polegające na zdolności wzajemnego zastępowania jonów atomów lub cząsteczek przez inne o zbliżonych wymiarach. Zjawisko to – zwane diadochią – może występować w przypadku substancji izomorficznych i jest obserwowane między innymi w glinokrzemianach, takich jak muskowitz $[KAl_2(AlSi_3O_{10})(OH)_2]$ lub chabazyt $[CaNa_2(Al_2Si_4O_{12}) \cdot 6H_2O]$.

Według najnowszych badań prezentowanych w raporcie RILEM [201] próbkę betonową określa się jako mieszankę ziarn kruszywa, piasku, cementu, włókien, jeśli są obecne, oraz wody. Wszystkie składniki betonu wiążą się ze sobą, osiągając stałą konsystencję. Wiązania w betonie dzielimy na dwa rodzaje: chemiczne i fizyczne. Wiązanie chemiczne to oddziaływanie między atomami, prowadzące do tworzenia trwałych pod

² Kształty geometryczne, układy krystalograficzne i parametry sieci krystalograficznej elementarnej komórki kryształu przedstawia obszerniej Czarnecki [39].

względem chemicznym układów cząsteczek lub ich fragmentów. Każdy inny typ wiązania jest określany mianem wiązania fizycznego. Z uwagi na to, że tworzenie się wiązania fizycznego nie wymaga szczególnego uporządkowania atomów, wiązania te łatwo się tworzą i równie łatwo ulegają rozpadowi. Wiązanie chemiczne jest ponad dziesięciokrotnie silniejsze niż fizyczne, łącznie z wiązaniem wodorowym³. Zarówno obliczenia teoretyczne, jak i badania doświadczalne wykazują, że wiązania chemiczne praktycznie nie mają znaczenia w tworzeniu się wiązań składników betonu⁴. Innymi słowy, należy brać pod uwagę tylko słabe wiązania fizyczne. Sytuację tę można rozważyć jeszcze z innego punktu widzenia. Utwardzony zaczyn z cementu portlandzkiego zawiera objętościowo około 20–30% wodorotlenku wapnia oraz pewną ilość uwodnionego glinianu wapniowego. Składniki te mają dobrze określone struktury, które różnią się od struktur uwodnionego krzemianu wapniowego, najsilniej wiążącego składnika wiązania cementu. Bardzo trudno jest określić warunki, w jakich krzemian wapniowy może tworzyć wiązania chemiczne zarówno z $\text{Ca}(\text{OH})_2$, jak i z glinianem wapniowym. Równie trudne jest określenie warunków, w jakich krzemian wapniowy może tworzyć wiązania chemiczne z kruszywem o innym składzie chemicznym i wyraźnej strukturze (budowie). Jest to sprzeczne z niektórymi twierdzeniami, że chemiczne wiązania pełnią ważną rolę w wiązaniu poszczególnych składników betonu⁵.

Interesujące jest badanie procesów mieszania, wiązania i twardnienia betonu. Na początku, w trakcie mieszania betonu, zewnętrzną powierzchnię wszystkich pojedynczych cząsteczek składników pokrywa warstwa wody; ziarna cementu są bezwodne, w fazie łączenia z wodą tworzą się sukcesywnie produkty hydratacji cementu. Łatwo zauważyć, że w betonie w stanie świeżym zewnętrzne powierzchnie wszystkich składników, łącznie z produktami uwadniania cementu, są pokryte warstwą wody. W tej fazie grubość przenikających się wzajemnie warstw wody jest nierówna i różni się w zależności od miejsca. Żeby mogło dojść do powstania wiązania między dwoma produktami uwodnienia cementu lub między produktem uwodnienia cementu a ziarnami kruszywa, należy usunąć wodę. Jednak, jak wiadomo z chemii sorpcji powierzchniowej, usunięcie pierwszych dwóch warstw molekuł wody adsorbowanych na krzemianie jest niezwykle trudne. Niemniej łatwo jest utworzyć silne wiązanie fizyczne poprzez adsorbowane molekuły wody.

W związanym cemencie pojedyncze cząsteczki wiążą się z innymi cząsteczkami poprzez warstwy wody dzięki porównywalnie słabym wiązaniom fizycznym⁶. Molekuły wody w warstwach wody, których liczba przekracza 4, mogą się z swobodnie poruszać

³ LEA F.M.: *Chemistry of Cement and Concrete*. Arnold. 1971, 263. (Mat.źródł.).

⁴ CHATTERJI S.: *Estimation of chemical bonding in hardened cement paste and its implications*. 7th Intern. Congress. Cent.Paris, VI 1980, 5–9. (Mat. źródł.).

⁵ RAMACHANDRAN V.S., FELDMAN R.F., BEAUDOIN J.J.: *Concrete Science*, Heydon. London 1981, 5. (Mat. źródł.).

⁶ CHATTERJI S.: *Load-bearing structures and crystal intergrowth*. Nature 252/1974, 383. (Mat. źródł.).

zarówno wewnątrz próbki betonowej, jak i poza nią. Ruch wody jest spowodowany różnymi procesami, takimi jak zamarzanie, odtajanie, wysychanie, samodesykacja czy różnica temperatur itd. W próbce betonowej, z której usunięto wodę, będzie zachodzić przegrupowanie udziału procentowego składników, a także nastąpi zmniejszenie objętości; natomiast próbka, która wchłonęła wodę, również przechodzi takie przegrupowanie oraz zwiększa swoją objętość. Innymi słowy, stwardniała struktura betonu jest wewnętrznie niestabilna i podlega różnego rodzaju przemianom w zależności od jego wyteżenia, które jest związane z wpływem środowiska.

Należy także zauważyć kilka innych faktów. We wczesnej fazie twardnienia w prawie wszystkich urabialnych mieszankach betonowych następuje wyciekanie wody. Tylko pewna ilość wody pojawia się na powierzchni próbki. Większa ilość gromadzi się wokół ziarn kruszywa wewnątrz mieszanki. Im większe są ziarna kruszywa, tym więcej wody gromadzi się wokół nich⁷. Warstwy wody, która wyciekła, tworzą słabe połączenia między dwoma mocniejszymi składnikami, tzn. ziarnami kruszywa po jednej stronie i silnie związanym zaczynem po drugiej. Podobnie słaba, nasycona wodą warstwa tworzy się, kiedy między ziarnami kruszywa a zaczynem zachodzi relatywny ruch; jest to ruch podobny do tego, jaki występuje podczas vibracji betonu w formie. (Pojawienie się dobrze nasyconej wodą warstwy jest najlepiej widoczne, kiedy warstwa nieabsorbująca jest wolno poruszana wokół zaczynu o małym stosunku ilości cementu do wody). Nasycone wodą warstwy wokół ziarn kruszywa tworzą jądro mikrorys, w przypadku kiedy zachodzi relatywna zmiana objętości między zaczynem a kruszywem.

We wczesnej fazie wiązania i twardnienia betonu jego temperatura rośnie, ponieważ podczas uwadniania frakcji zaczynu wydziela się ciepło. W tym samym czasie frakcja zaczynu samoistnie kurczy się.

3.2. Określenie, lokalizacja i parametry mikrorys

Zespół opracowujący RILEM [201], zajmujący się mikrorysami i ich wpływem na przewidywaną wytrzymałość lub trwałość konstrukcji betonowych przyjmuje, że górny limit szerokości dla mikrorys wewnątrz konstrukcji wynosi 10 μm . Uzasadnia to tym, że powyżej tej granicy obserwuje się znacznie szybszą wymianę płynów z otoczeniem niż w niezarysowanych częściach tej samej konstrukcji.

Dlatego praktyczne znaczenie będą miały te mikrorysy, które umożliwiają stosunkowo szybkie przenikanie mediów do wewnątrz, jak i na zewnątrz konstrukcji betonowych. Przenikalność mediów jest zwykle uzależniona od środowiska konstrukcji. W przypadku powstania siatki rys ich zakończenia umiejscawiają się na zewnętrznych powierzchniach konstrukcji, niekoniecznie jednak są to pojedyncze rysy. Kiedy układ mikrorys tworzy siatkę, niektóre z nich, te które nie stykają się z powierzchnią zewnętrzną, mogą

⁷ WINSLOW D.N., LIU D.: *The pore structure of paste in concrete*. Cement and Concrete Res. 20. 1990, 227. (Mat.źródł.)

wpływać na przenikalność bezpośrednio albo pośrednio przez spoiwo. W odniesieniu do mikrorys pojawiających się w betonie na skutek oddziaływania czynników zewnętrznych, takich jak: wysychanie czy obciążenia mechaniczne, należy zwrócić uwagę na to, że prawdopodobieństwo tworzenia się rys jest znacznie większe na powierzchniach styku zaczyn–kruszywo. Prawdopodobieństwo to wzrasta wraz z grubością ziarn kruszywa. Mikrorysy powstałe przy sąsiadujących ziarnach kruszywa mają tendencję do łączenia się ze sobą.

Postać fizyczna przenikającego medium w pewnym stopniu będzie miała wpływ na wielkość układu mikrorys. Jeśli dla przykładu przenikające medium jest w stanie gazowym, jak np. CO_2 , para wodna lub opary kwasu, a siłą motoryczną przenikania jest ciśnienie atmosferyczne, to w procesie przenikania medium mogą uczestniczyć rysy o szerokości poniżej kilku dziesiątych mikrometra. Jeśli natomiast przenikające medium znajduje się w stanie ciekłym, jak woda czy rozcieńczone roztwory kwasów z kwaśnych deszczów, a siłą motoryczną jest ciśnienie atmosferyczne, to mikrorysy o szerokości poniżej $1 \mu\text{m}$ nie mają praktycznie znaczenia. Pod wyższym ciśnieniem mniejsza szerokość rys może mieć znaczenie, chociaż brak jest danych eksperymentalnych na ten temat.

Oprócz szerokości istnieją inne ważne parametry mikrorys. Należą do nich długość, głębokość penetracji, gęstość przypadająca na jednostkę powierzchni (jednostkę objętości) oraz ich wzajemne połączenia. Liczba prac na ten temat jest znikoma, szczególnie w odniesieniu do trwałości konstrukcji betonowych. Należy przeprowadzić w tej dziedzinie badania.

W ocenie geometrii rys w konstrukcji betonowej należy uwzględnić zarówno kryterium inicjacji rysy, jak i kryterium jej propagacji. Inicjacja i propagacja może występować w warunkach różnych obciążeń zarówno chemicznych, jak i fizycznych. Najbardziej powszechnym kryterium inicjacji rysy jest wytrzymałość materiału na rozciąganie. Na przykład wytrzymałość materiału na rozciąganie może najpierw być przekroczona w wyniku koncentracji naprężeń w sąsiedztwie porów albo na granicy styku ziarn kruszywa. Alternatywnie można zastosować liniowo-sprężystą mechanikę pękania. W takim przypadku należy zrobić założenie o wgłębieniach szczelinowych (np. Broek⁸). Liniowo-sprężysta mechanika pękania znajduje zastosowanie na poziomie mikroskopowym, kiedy można rozróżnić pojedyncze pory i cząsteczki skupione. Jednakże przy rozpatrywaniu betonu jako kontinuum należy stosować inne teorie. Określanie geometrii rys w systemie rys jest czasochłonne. Można je przeprowadzić za pomocą omówionych bardzo rygorystycznych narzędzi analitycznych.

W najbliższej przyszłości narzędzia numeryczne odegrają prawdopodobnie zasadniczą rolę w szczegółowej ocenie geometrii rys na średnim poziomie. Dzięki zastosowaniu modeli numerycznych można będzie analizować zjawisko inicjacji i propagacji

⁸ BROEK D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers 1982. (Mat. źródł.).

w elemencie betonowym z uwzględnieniem obciążenia mechanicznego (np. Schlangen i Van Mier⁹). Coraz powszechniejsze staje się zastosowanie modeli dla różnych obciążeń w warunkach różnych temperatur i wilgotności. Ponadto, dzięki zastosowaniu modeli numerycznych, można przeprowadzić analizę przenikalności zaczynu cementowego.

Modele te są nadal niedoskonałe, ale będą ulepszone w miarę rozwoju techniki komputerowej i powstawania nowych rozwiązań technicznych. Zaletą modeli jest to, że można dzięki nim zanalizować takie parametry badanego zjawiska, których nie można określić w badaniach fizycznych.

3.3. Mikrorysy w betonie spowodowane oddziaływaniem czynników środowiskowych

Możliwe jest przedstawienie opisu procesu tworzenia się mikrorys w próbkach betonu spowodowanych działaniem różnych czynników środowiska. Przedstawiono sposób oddziaływania kilku czynników środowiskowych [201]. Tę samą procedurę można jednak zastosować również do innych czynników. W większości przypadków początek powstawania mikrorys można monitorować techniką emisji akustycznej (w Polsce m.in. Flaga, Piwowarczyk [59] i Moczko [178]).

3.3.1. Powstawanie mikrorys w świeżym betonie wskutek wstępnego chłodzenia

W pierwszej fazie wiązania i tężenia cementu, szczególnie w masywnych budowlach, obserwujemy wzrost jego temperatury powyżej temperatury otoczenia. W tych warunkach wszystkie składniki betonu rozszerzają się termicznie. Ziarna kruszywa, zwłaszcza te większe, mając strukturę polikrystaliczną i poliminerálną, mogą odznaczać się różnymi współczynnikami rozszerzalności termicznej. Jednak przeciętnie współczynniki rozszerzalności termicznej są mniejsze dla kruszywa niż dla zaczynu cementowego. W wyższych temperaturach zarówno ziarna kruszywa, jak i zaczyn znajdują się w stanie równowagi termicznej i mechanicznej. W wyniku usunięcia formy następuje wyrównanie temperatury do temperatury otoczenia, co powoduje powrót kruszywa do pierwotnej objętości. Jednak do tego czasu frakcja zaczynu jest już właściwie związana. Jeśli współczynniki rozszerzalności termicznej stwardniałego zaczynu i kruszywa różnią się zasadniczo, wówczas pierwsze chłodzenie do temperatury roboczej powoduje skurcz zaczynu w większym stopniu niż kruszywa. Kruszywo będzie zatem poddane ściskaniu, a zaczyn rozciąganiu. Może to przyczynić się do powstawania zarysowań w zaczynie, szczególnie wokół dużych ziarn. Ten typ zarysowań będzie wspomagany przez proces parowania i autogenicznego kurczenia się frakcji zaczynu. Taki rodzaj zaryso-

⁹ SCHLANGEN E., VAN MIER J. G. M.: *Experimental and numerical analysis of micro-mechanisms of fracture of cement-based composites*. Cement and Concrete Composites 14, 1982, 105–118. (Mat. Źródł.)

wań przeważa zatem w wysokiej temperaturze, tzn. wewnątrz próbki betonu. Stosunek ilości wody do cementu jest mały, szczególnie wokół dużych ziarn kruszywa. Ten typ zarysowań nie jest obserwowany w małych próbkach betonu, zwłaszcza gdy ziarna kruszywa są małe ze względu na niewielki wzrost temperatury małej próbki oraz niewielkie naprężenia rozciągające w zaczynie wokół małych ziarn kruszywa. Na powierzchniach małych próbek betonu, gdzie temperatura maksymalna jest niska, a wilgotność względna duża, zarysowania tego typu nie mogą się tworzyć. Wobec złożoności problemu nie dziwi, że niektórzy autorzy obserwują tego typu mikrorysy (np. Hsu, Slate, Sturman, Winter¹⁰), inni zaś nie (Olliver, Ringot, Escadeillas¹¹).

Istnieje jeszcze inny proces powstawania rys, szczególnie w masywnych budowlach, podczas wstępnego chłodzenia. Elementy masywów tuż po wyjęciu z formy są nadal słabe i bardzo podatne na działanie naprężeń rozciągających. Jeśli nie stosuje się specjalnych środków ostrożności, to zewnętrzne powierzchnie masywu ochładzają się znacznie szybciej niż jego wnętrze. Powierzchnia zewnętrzna znajdzie się wówczas pod działaniem sił rozciągających, a wewnętrzna – ściskających. Jeśli w tym czasie naprężenie rozciągające jest większe niż naprężenie rozciągające betonu, to zaczynają się tworzyć zarysowania – zarówno mikrorysy, jak i makrorysy (Fitzgibbon¹²).

3.3.2. Powstawanie mikrorys wskutek wysychania

Proces powstawania mikrorys wskutek wysychania próbki betonu wywołuje szereg mikroskopijnych procesów. Rozważmy przykład próbki, która jest całkowicie nasycona wodą. Kiedy próbka zostanie pozostawiona w suchym środowisku, warstwa wody wkrótce zniknie. Powstanie menisk, który zacznie penetrować w głąb próbki. Promienie menisków będą różnić się w zależności od położenia. Wewnętrzna, nasycona część próbki poddana jest siłom ściskania, a zewnętrzna, bardziej sucha – siłom rozciągania. Jednak siła rozciągania jest większa niż siła ściskania. Taki rozkład sił powoduje zgrupowanie stałych cząsteczek wewnątrz niestabilnej wewnętrznie próbki. Wskutek zmian promieni menisków w zależności od położenia cząsteczki stałe, które były położone blisko siebie, jeszcze bardziej się do siebie zbliżają, a te, które były pierwotnie oddalone, jeszcze bardziej się od siebie oddalają. Ze względu na to, że do „wprawienia kruszywa w ruch” potrzeba większej siły niż do „wprawienia w ruch” dużej ilości produktów uwodnienia cementu, najwięcej ruchów cząstek będzie odbywać się we frakcji zaczynu.

¹⁰ HSU T.T.C., SLATE F., STURMAN G., WINTER G.: Jour. Amer. Conc. Inst. 60/1963, 209–224. (Mat. źródł.)

¹¹ OLLIVER J.P., RINGOT E., ESCADEILLAS G.: Intern. Conf. Measure and Civil Eng. Lyon 1988. Gammac RILEM. (Mat. źródł.)

¹² FITZGIBBON M.E.: *Large pour for reinforced concrete structures*. Concrete 10/1976, No 3/41, No 12/33. (Mat. źródł.)

W wyniku tego procesu zaczną się tworzyć zarysowania. Większość mikrorys powstanie na odkrytych powierzchniach oraz wokół większych ziarn kruszywa, a następnie będą one penetrować próbkę. Kiedy proces suszenia osiągnie środkowe partie próbki, wówczas mikrorysy zaczną się również tworzyć wokół dużych ziarn kruszywa, nawet wewnątrz próbki (Chatterji¹³).

W wyniku ponownego namoczenia próbki nastąpi dalsze przegrupowanie stałych cząsteczek, któremu będzie towarzyszyć proces poszerzania się starych rys i powstawanie nowego układu rys. W konstrukcji betonowej narażonej na naprzemienne suszenie i nasiąkanie powstanie zatem układ mikrorys. Prawdopodobieństwo tworzenia się mikrorys jest tym większe, im większy jest poziom wysuszenia (Banthia, Pigeon, Lachance¹⁴).

3.3.3. Powstawanie mikrorys pod wpływem jednoczesnego chłodzenia i suszenia

W praktyce budowlanej w momencie usunięcia formy rozpoczyna się jednocześnie proces chłodzenia i parowania wody. Ilość wyparowanej wody wzrasta w zależności od różnicy między temperaturą konstrukcji a temperaturą otoczenia. W niekorzystnych warunkach zjawisko to prowadzi do powstawania mikro- i makrorys (Chatterji¹⁵). Takie oddziaływanie środowiska jest źródłem mikro- i makrorys nazywanych skurczowymi.

3.3.4. Powstawanie mikrorys wskutek cyklicznego zamarzania i odtajania betonu

Następujące procesy zachodzą w czasie zamarzania betonu. Woda zamarzając zwiększa swą objętość, powodując narastanie tworzywa. Lód zwiększając swoją objętość komprimuje wodę w czerepie ciała, która z dużym oporem ustępuje w głąb betonu. Powstały lód przyciąga wolną wodę, bo ciśnienie pary lodu jest o wiele niższe niż ciśnienie wody. Woda czerepu kondensuje się więc na lodzie i ulega pompującemu działaniu lodu (model Powersa). Dzieje się tak na skutek termodynamicznej stabilności lodu w temperaturach poniżej punktu zamarzania w porównaniu z wodą o tej temperaturze (model Litvana). Wszystkie te procesy powodują odkształcenia próbki, a w niekorzystnych warunkach prowadzą do powstawania zarysowań. W zależności od stopnia nasycenia próbki betonu wodą zarysowania mogą wystąpić przy powierzchni próbki lub wewnątrz niej.

Jeśli próbka zawiera pewną ilość porowatego kruszywa, to zamarzanie powoduje zarysowania po nasyceniu wodą kruszywa.

¹³ CHATTERJI S.: *Probable mechanisms of crack formation at early ages of concrete*. Intern. Conf. Concrete at Early Ages. École Nationale des Ponts et Chaussées. Paris 1982, 34–38. (Mat. źródł.).

¹⁴ BANTHIA N., PIGEON M., LACHANCE L.: *Calorimetric study of freezable water in cement paste*. Cement and Conc. Res. 19/1989, 939. (Mat. źródł.).

¹⁵ CHATTERJI S.: *Probable mechanisms of crack formation at early ages of concrete*. Cement and Concrete Res. 12/1982, 371–376. (Mat. źródł.).

Proces tworzenia się rys wskutek zamarzania–odtawiania jest o wiele bardziej złożony, niż to wynika z powyższego omówienia. Na przykład, powstawanie lodu wewnątrz próbki betonu powoduje nie tylko naprężenia, ale także wzmacnia ją¹⁶. Rozsadzająca siła lodu musiałaby być znacznie większa niż wytrzymałość zamarzniętego betonu na rozciąganie. Znaczenie różnych zjawisk biorących udział w procesie powstawania rys nie zostało jeszcze w pełni wyjaśnione.

Oprócz wymienionych procesów istnieje jeszcze cały szereg dobrze znanych reakcji, które przyczyniają się do pęknięcia betonu. Należą do nich: osiadanie, skurcz, agresja siarczanowa, agresja chlorku wapnia, karbonizacja czy reakcje wylugowania składników.

Powyżej omówiono wewnętrzne i środowiskowe pochodzenie mikrorys. W dalszych rozdziałach zostanie omówione zjawisko tworzenia się rys pod wpływem oddziaływań mechanicznych.

3.4. Wykrywanie i obserwacja mikrorys w betonie

3.4.1. Metody: optyczna i segmentacji seryjnej

Metody: optyczna i segmentacji seryjnej polegają na pobraniu rdzenia z odpowiedniego miejsca konstrukcji. Po podzieleniu rdzenia na różne odcinki są one badane pod mikroskopem. W metodzie optycznej poszczególne kawałki impregnuje się gumą fluorescencyjną, a następnie dzieli na wąskie odcinki, które bada się pod mikroskopem za pomocą modułu fluorescencyjnego. W metodzie segmentacji seryjnej poszczególne odcinki bada się wizualnie. Mogą one być impregnowane gumą fluorescencyjną. Jest to metoda stosowana dla kwazistatycznych warunków propagacji rysy.

3.4.2. Metoda skanowania mikroskopem elektronowym

Przed przystąpieniem do badań poleruje się badaną powierzchnię. Następnie za pomocą folii ze sztucznego tworzywa zmiękzonej rozpuszczalnikiem organicznym przygotowuje się kopię. Kopię powleka się warstwą metalu i bada za pomocą mikroskopu elektronowego. Zaletą tej metody jest to, że tę samą powierzchnię można badać wielokrotnie w dużych odstępach czasu. Dokonuje się również prób bezpośredniego badania mikrorys mikroskopem skanującym.

Niestety, powstaje wówczas ryzyko tworzenia się mikrorys pod wpływem wysokiej próżni w mikroskopie. Nawet z zastosowaniem pompowania różnicowego przez otwór w badanej próbce trudno jest uniknąć wysychania i pęknięcia cementu. Ze względu na to, że w tej metodzie rdzenie również są pobierane w odpowiednich miejscach konstrukcji, nie można powtórnie badać powierzchni.

¹⁶ TOGNON G.: *Behaviour of mortars and concretes in the temperature range from -20 °C to 196 °C*. Proc. 5th Intern. Symp. Chemistry of Cements. Tokyo. Suppl. Paper No III/1958, III-24/1958. (Mat. źródł.).

3.4.3. Metoda przenikania barwnika

Barwnik fluorescencyjny albo barwnik ciemnego koloru rozpuszczony w rozpuszczalniku organicznym o małej lepkości penetruje próbkę. Następnie usuwa się nadmiar barwnika i bada się próbkę w trzecim wymiarze, tzn. głębokość, lub w dwóch wymiarach, czyli na powierzchni. Metodę tę stosuje się również dla półstatycznych warunków propagacji rysy.

3.4.4. Technika emisji akustycznej

Technika emisji akustycznej pozwala na wykrywanie procesu tworzenia się mikrorys w trakcie jego trwania, nawet w konstrukcji. Jakkolwiek jest prawdopodobne, że za pomocą tej metody można oszacować wielkość zniszczenia, to jednak nie można wstępnie przewidzieć powstawania mikrorys. Metoda ta znajduje zastosowanie głównie w przypadku szybkiej propagacji rysy.

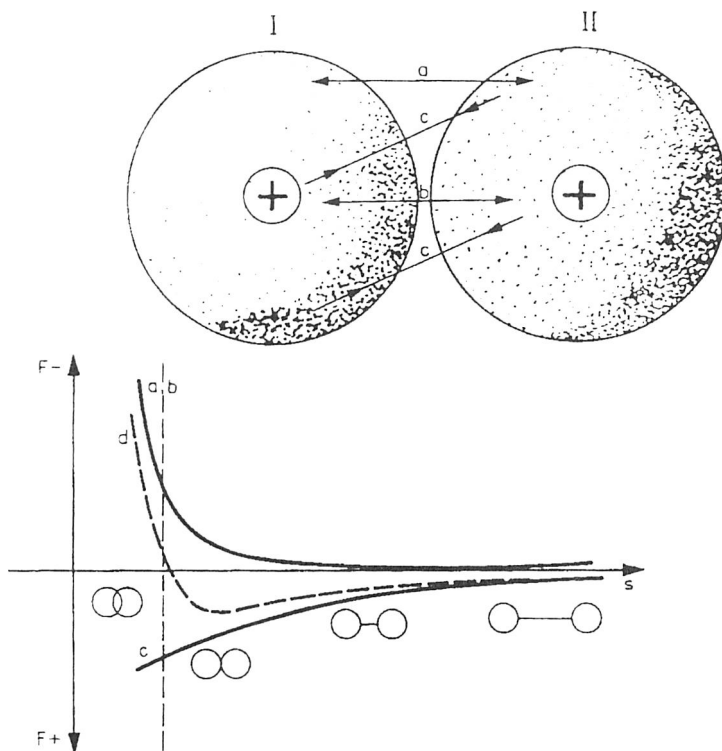
Metody fraktografii promieniami X oraz penetracji rtęciowej mają małą rozdzielczość i ze względu na określone warunki doświadczalne można je stosować tylko do próbek laboratoryjnych.

3.5. Właściwości fizykochemiczne betonu wynikające z jego struktury

Przedstawione w rozdziale 3.1 występowanie określonych wiązań determinuje właściwości fizykochemiczne materiałów budowlanych do tego stopnia, że mogą one stanowić podstawę ich podziału. Wpływ na właściwości fizykochemiczne betonu mają między innymi: skład chemiczny i typ wiązań chemicznych, struktury nadcząsteczkowe, stan skupienia, makrostruktura i zjawiska powierzchniowe. Budowa atomów składników betonu i rozmieszczenie elektronów na powłokach walencyjnych ma wpływ na zdolność pierwiastków do tworzenia wiązań wewnątrz- i międzycząsteczkowych.

W materiałach mineralnych, do których zalicza się również beton, dominują wiązania jonowe, jonowo-atomowe, atomowe spolaryzowane, a także koordynacyjne wiązania z udziałem cząsteczek wody i wiązanie wodorowe. W przygotowawczym procesie technologicznym materiały te charakteryzuje wysoka temperatura topnienia (klinkier), substraty zaś (cement) łatwa rozpuszczalność w wodzie. Jako produkt beton wykazuje mechanizm zarysowania i zniszczenia typowy dla materiałów o wiązaniach jonowych. Twardość betonu wzrasta w miarę wzrostu udziału wiązań atomowych.

Beton zalicza się do kompozytowych materiałów budowlanych z wypełniaczem ziarzystym. Charakteryzuje go faza rozproszona zagregowana i otwarte pory ciągłe. Cząstki fazy rozproszonej wpływają na uporządkowanie cząstek spoiwa względem powierzchni ziarna kruszywa oraz na oddziaływanie międzycząsteczkowych sił adhezji. Efekt uporządkowania występuje również w stosunku do większych elementów struktury, jak na przykład cząstek tworzącej się fazy krystalicznej kamienia cementowego (znany jako



Rys. 3.1. Siły występujące między dwoma atomami [95], a – odpychanie między powłokami elektronów, b – odpychanie między jądrami atomów, c – wzajemne przyciąganie jąder atomowych i powłok elektronowych, d – siła wypadkowa, s – odległość między atomami
 Fig. 3.1. Interatom forces [95]; a – repulsion between electronic shells, b – repulsion between atomic nuclei, c – atomic nuclei and electronic shell attraction, d – resultant forces, s – distance between nuclei

efekt epitaksji). O właściwościach kompozytu decyduje więc nie tylko skład jakościowy, ale grubość spoiwa otaczającego ziarna kruszywa.

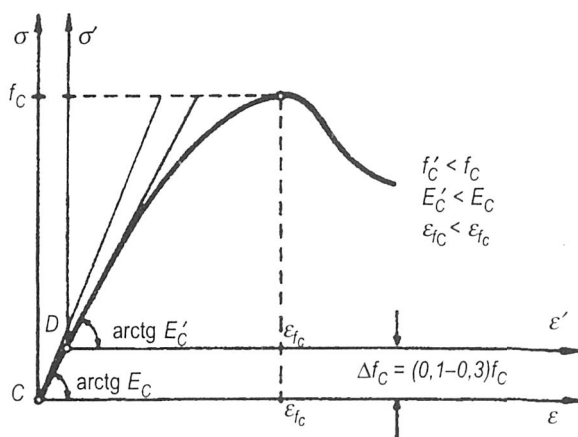
O wielu cechach fizycznych betonu, takich jak gęstość, mrozoodporność, współczynnik rozszerzalności termicznej, szczelność, izolacyjność termiczna i akustyczna czy odporność chemiczna materiału decyduje porowatość. Za najistotniejsze uważa się przy tym tak zwane pory otwarte. Dla wartości wytrzymałości na ściskanie i współczynnika sprężystości Czarnecki [21] przedstawia zależność między cechą materiału nieporowatego i materiału o określonej porowatości:

$$f_c = f_{c0}(1 - p)^c \quad (3.3)$$

$$E = E_0(1 - p)^n \quad (3.4)$$

gdzie: f_{c0} – wytrzymałość na ściskanie betonu bez porów,
 f_c – wytrzymałość na ściskanie betonu z porami,
 p – porowatość m^3/m^3 ,
 c – współczynnik charakterystyczny dla danego materiału, dla betonu przyjmuje się najczęściej $c = 6$, co oznacza, że wzrost zawartości porów o 10% powoduje spadek wytrzymałości o połowę,
 E – współczynnik sprężystości dla materiału bez porów,
 E_0 – współczynnik sprężystości dla materiału z porami,
 n – współczynnik charakterystyczny dla danego materiału, dla betonu przyjmuje się najczęściej $n = 3$.

O wartościach współczynnika sprężystości decyduje ponadto tak zwana ostrość minimum energetycznego (rys. 3.1). Im pochodna funkcji dla argumentów na prawo od ekstremum bardziej dąży do zera, tym wartości współczynnika sprężystości są większe. Zależności między wartością współczynnika sprężystości i wytrzymałości betonu a minimum energetycznym wyjaśnia Flaga [59]. Podaje on interpretację naprężeń resztkowych opierając się na fizyce molekularnej i termodynamice (rys. 3.2).



Rys. 3.2. Zależność σ - ϵ przy wzroście temperatury dojrzewania betonu [59]

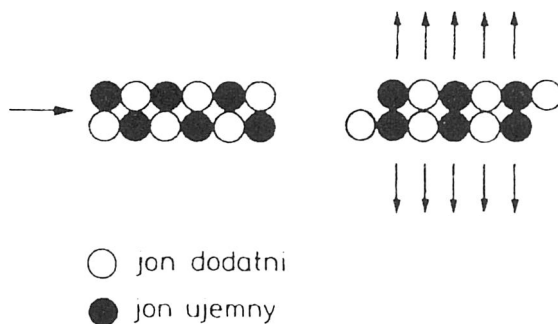
Fig. 3.2. Relationship σ - ϵ at the increase of temperature of curing of concrete [59]

Energia wiązania określa cechy wytrzymałościowe materiału, czym można wytlumaczyć bezpośrednie zależności między wytrzymałością materiału (np. na ściskanie) a jego współczynnikiem sprężystości.

Dyslokacje w strukturze betonu wymuszają lokalne deformacje przyległych wiązań wewnątrzcząsteczkowych. Część z nich będzie miała charakter odwracalny (sprężyste), część – nieodwracalny (trwałe).

Deformacje sprężyste betonu tłumaczy się odkształceniami pojedynczych wiązań. Ze względu na to, że zdolność do przemieszczeń w ramach pojedynczego wiązania jest rzędu 10^{-15} – 10^{-20} m (wartości orientacyjne) ich pomiar jest możliwy dopiero przy makroilości tych wiązań. Nie nastręcza on jednak trudności, gdyż sposób wymuszania deformacji powoduje określone oddziaływanie praktycznie na wszystkie wiązania. Całkowita deformacja sprężysta jest więc superpozycją odkształceń wszystkich wiązań w próbce. Można w ten sposób wyjaśnić zarówno sprężystą część deformacji w rysie, jak i mechanizm powstawania stanu wymuszonych odkształceń sprężystych – samonaprzeżeń. Również w ten sam sposób można wytłumaczyć powstawanie samonaprzeżeń wywołane nierównomierną fazą procesu egzotermicznego na zewnątrz i wewnątrz betonu (efekt skurczu), które interpretowane w ten sposób można również zakwalifikować do odkształceń sprężystych.

Deformacji trwałych nie można wyjaśnić za pomocą tak prostego modelu. Ze względu na niejednorodność materiału mechanizm niszczenia ma charakter losowy. Można przyjąć, że rozerwanie sił wewnątrzcząsteczkowych jest możliwe zarówno wskutek dostarczenia energii mechanicznej (próby wytrzymałościowe), jak i energii termicznej (reakcja dehydratacji podczas pożaru). Zniszczenie mechaniczne tłumaczy się wymuszeniem takiego wzajemnego przemieszczenia jonów dodatnich i ujemnych, które prowadzi do ich wzajemnego odpychania (rys. 3.3). Ten mechanizm zniszczenia dobrze tłumaczy kruche pęknięcia betonu z mechanizmem zniszczenia włócznic. Przy obciążeniach eksploatacyjnych dochodzi jednak często do odkształceń (trwałe ugięcia), których konsekwencją nie jest zarysowanie konstrukcji. Częściowo można to wyjaśnić powstawaniem mikrorys wewnątrz struktury betonu, co można potwierdzić doświadczalnie, między innymi metodą emisji akustycznej [61], [178]. Wydaje się, że można to też wytłumaczyć tworzeniem się w złożonej strukturze betonu sił Van der Waalsa, wiązań najslabszych energetycznie ($E_w = 4$ – 25 kJ/mol), które ulegają „pojedynczym zrywaniam”, niewidocznym dla obserwatora. W przypadku domieszek polimerowych, nieusieciowanych, odkształcenia trwałe można wytłumaczyć „rozprostowywaniem” liniowych łańcuchów makrocząsteczek.



Rys. 3.3. Zniszczenie materiału o wiązaniach jonowych pod obciążeniem mechanicznym [39]

Fig. 3.3. Mechanical destruction of material with ionic bonds [39]

Efekty deformacji trwałych i sprężystych mogą się nakładać. Analityczna próba interpretacji tych deformacji na podstawie wyników i powstałych w ich następstwie samonaprężeń, oparta na wynikach badań eksperymentalnych jest tematem następnych rozdziałów.

Na właściwości fizykochemiczne wpływa jednak nie tylko struktura betonu. Również reakcje chemiczne zachodzące w betonie wpływają na wyniki badań doświadczalnych zarówno przy obciążeniach doraźnych, gdzie istotną rolę odgrywa wiek obciążanego betonu, jak i przy obciążeniach długotrwałych, gdzie ujawniają się procesy reologiczne. Można to wykazać na przykład w kontekście procesów termodynamicznych. Zmiana parametrów wytrzymałościowych betonu i powstawanie samonaprężeń (głównie spowodowane niejednakowymi warunkami termohigroskopijnymi) mogą być bowiem następstwem zmiany stanu termodynamicznego lub dostarczonej do układu z zewnątrz energii. Efekty te można zarejestrować doświadczalnie i dlatego uznano potrzebę uwzględniania ich w badaniach laboratoryjnych. Z obserwacji tych wynika, że na wypadkowe właściwości mechaniczne betonu mają wpływ także warunki termodynamiczne, w jakich zachodzi reakcja – między innymi temperatura i ciśnienie (obciążenie) – oraz stan energetyczny betonu.

Widać zatem, że ze względu na powolny przebieg reakcji heterogenicznych czas jest również parametrem wpływającym na właściwości mechaniczne betonu. Na podstawie eksperymentów określających cechy fizyczne materiałów jako funkcji czasu – takie jak wytrzymałość (R_b^G) lub współczynnik sprężystości (E_b) – można stwierdzić, że gdy czas reakcji zmierza do nieskończoności, wówczas układ dąży do osiągnięcia stanu równowagi i wielkości fizyczne zmierzają asymptotycznie do ściśle określonych wartości. Efekt tych zmian jest mierzalny jako zjawisko fizyczne i może być wykorzystany do określenia końcowego stanu konstrukcji (np. ugięcia) w określonych warunkach.

3.6. Morfologia rys

Charakterystycznym stanem pracy przekrojów betonowych, zbrojonych, który powinien być uwzględniany do modelowania żelbetowych konstrukcji jest stan po zarysowaniu przekroju. Powstawanie rys może być następstwem procesów fizykochemicznych zachodzących w betonie lub oddziaływań mechanicznych, które powodują wewnętrzny stan naprężeń prowadzący do rozrywania wiązań międzycząsteczkowych. Badania laboratoryjne i analizy oparte na badaniach stanów awaryjnych konstrukcji realizowali między innymi: Ajdukiewicz, Biliszczuk, Dąbrowski, Dyduch, Flaga, Furtak, Goszczyński, Kamiński, Kmita, Kobiela, Kuczyński, Lempicki, Runkiewicz, Stachurski, Starosolski, Ścibak, Zieliński, Więclawski [1, 2, 14, 41, 50, 60, 115, 127, 141, 212, 213, 214, 216], a z autorów zagranicznych – Baalbaki, Aictin, Ballivy, Bazant, Duncan, Chang, Giurani, Rosati, Rokač, Rüsç [7, 10, 47, 65, 202, 204].

Wyniki tych prac oraz badań własnych zostały wykorzystane w obszernej monografii Godyckiego-Ćwirko [69]. Monografia [69] jest studium powstawania i propagacji

rys oraz zawiera odniesienie zagadnień badawczo-analitycznych do aspektów projektowych, między innymi według normy DIN 1045, która znalazła odbicie w Eurocode 2 [57]. Ze względu na charakter niniejszej pracy ograniczono się jednak do wyjaśnienia mechanizmu powstawania i rozwoju rys w zakresie ilustrującym przyjęte modele obliczeniowe w procesach cyklicznych obciążeń.

Obliczeniowy model powstawania rys opracowuje się na podstawie analizy stanu naprężeń wyidealizowanego materiału o uśrednionych cechach materiałowych charakteryzujących beton. W przypadku elementów żelbetowych uwzględnia się dodatkowo stal – jako drugi wyidealizowany materiał o znacznie bardziej regularnym układzie krystalograficznym – i rozkład naprężeń w następstwie wymuszanych przemieszczeń. Ten układ naprężeń może zostać zaburzony przez dyskretne nieciągłości, co występuje na przykład w przypadku zbrojenia żebranego.

Powstawanie i rozwój rys inspirowane są głównie naprężeniami rozciągającymi. W elemencie betonowym przestrzenny stan wyężenia, ze stanem wyczerpania nośności włącznie, dobrze odwzorowuje kulisty tensor naprężeń [69, 70]. Wyidealizowany stan naprężeń jest jednak zaburzony przez efekty skurczu, temperatury (gradient) i skali oraz spowodowane nimi mikrorysy. Propagację rys w betonowym elemencie zginanym charakteryzuje doświadczalny model Giurani–Rosatiego [65], w którym wartości naprężeń po zarysowaniu σ_{ct}^{per} zależą od szerokości rozwarcia rys, średnicy kruszywa oraz wydłużenia jednostkowego, przy którym następuje pęknięcie betonu [69]:

$$\sigma_{ct}^{per} = \frac{\sigma_{ct}^{cr}}{k \frac{a_{rys}}{\Phi_a} + 1} \quad (3.5)$$

$$\sigma_{ct}^{per} = E_b \left(\varepsilon^{cr} - \frac{\varepsilon^c}{2\varepsilon^k} \right) \quad (3.6)$$

gdzie: σ_{ct}^{per} – rysujące naprężenie rozciągające,

a_{rys} – szerokość rozwarcia rysy,

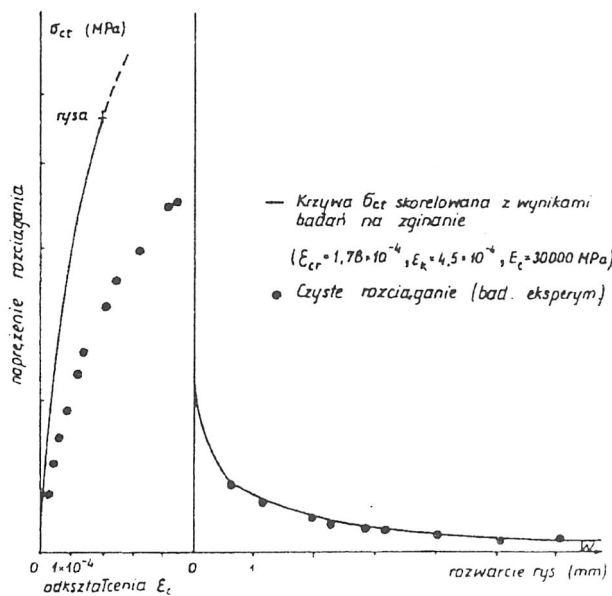
Φ_a – średnica ziarna kruszywa,

ε^{cr} – wydłużenie jednostkowe, przy którym następuje pęknięcie betonu,

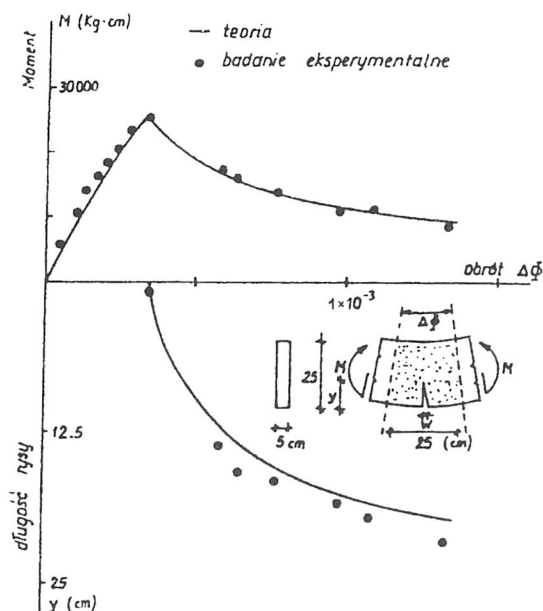
E_b – współczynnik sprężystości betonu,

k, ε^k – stałe doświadczalne.

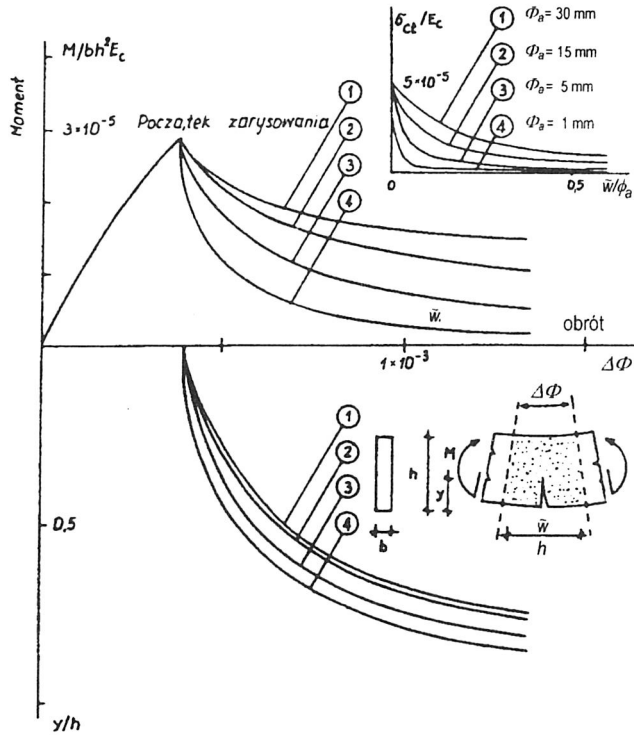
Zależności te Godycki-Ćwirko korelował doświadczalnie dla elementu zginanego [69]. Otrzymał on dobrą zgodność naprężenia z szerokością rozwarcia rysy, natomiast widoczną na rysunku 3.4 rozbieżność w porównaniu z odkształceniami i wartością ε^{cr} . Bardzo dobrą zgodność otrzymano natomiast dla zależności momentu i długości rysy od kąta obrotu w przekroju zarysowanym $\Delta\varphi$ (rys. 3.5). Istotną rolę przy określaniu zależności momentu i długości rysy od kąta obrotu $\Delta\varphi$ odgrywa średnica ziaren kruszywa. Zależność tę, opartą na równaniu doświadczalnym, przedstawia rys. 3.6.



Rys. 3.4. Zależność między napężeniem a szerokością rozwarcia rysy i odkształceniami [69]
 Fig. 3.4. Relationship stress–strain and stress–width of crack



Rys. 3.5. Zależność momentu i długości rysy od kąta obrotu w przekroju zarysowanym $\Delta\phi$ [69]
 Fig. 3.5. Relationship bending moment–angular displacement and length of crack–angular displacement [69]



Rys. 3.6. Wpływ średnicy ziaren kruszywa na zależność momentu i długości rysy od kąta obrotu $\Delta\varphi$ w przekroju zarysowanym [69]

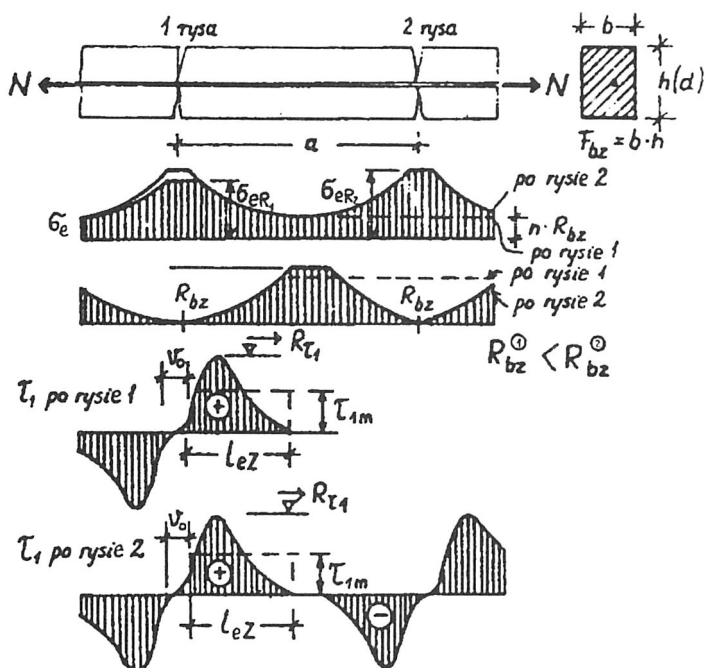
Fig. 3.6. Influence of diameter of aggregate in cracking section on the dependence of the bending moment as well as the length of crack on the angular displacement $\Delta\varphi$ [69]

Bardziej złożony proces zarysowania obserwuje się w zginanych elementach żelbetowych. Dochodzi tutaj kolejny parametr losowy, jakim są wartości naprężeń stycznych na granicy współpracy betonu i stali. W warunkach laboratoryjnych częstym, choć niezbyt ścisłym, modelowaniem strefy rozciąganej w przekroju zginanym jest element betonowy rozciągany za pomocą wstawionego osiowo pręta zbrojeniowego. Z warunków równowagi można określić naprężenia w betonie i stali przed i po zarysowaniu (rys. 3.7):

$$\sigma_{bz} = \frac{P}{F_{bz} [1 + (n-1)\mu]} \quad (3.7a)$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{bz} [1 + (n-1)\mu]}{\mu} \quad (3.7b)$$

oraz zależność między naprężeniami normalnymi a stycznymi:



Rys. 3.7. Rozkład naprężeń w rozciągającym przekroju żelbetowym [69]

Fig. 3.7. Distribution of stresses in reinforced concrete section [69]

$$\tau \sum U_a = F_a \sigma_{a,x} \quad (3.8)$$

gdzie: $\sum U_a$ – sumaryczny obwód zbrojenia.

Ponieważ ze związku fizycznego Guyona i Hooke'a wynika, że

$$\tau = k \varepsilon_a \quad (3.9a)$$

$$\sigma_a = E_a \varepsilon_{a,x} \quad (3.9b)$$

gdzie: k – współczynnik proporcjonalności,

ε_a – wydłużenie pręta zbrojeniowego,

więc równanie różniczkowe zwyczajne pierwszego rzędu (3.8) przyjmuje postać równania różniczkowego zwyczajnego drugiego rzędu:

$$j \varepsilon_{a,xx} - k \varepsilon_a = 0 \quad (3.10a)$$

gdzie:

$$j = \frac{E_a F_a}{\sum U_a} \quad (3.10b)$$

Standardowe rozwiązanie takiego równania ma postać superpozycji funkcji eksponencjalnych:

$$\varepsilon_a = \alpha_1 \exp(-\lambda x) + \alpha_2 \exp(\lambda x) \quad (3.11)$$

gdzie:

$$\lambda = \sqrt{\frac{kU_a}{F_a E_a}} \quad (3.12)$$

$\alpha_1; \alpha_2$ – stałe całkowania.

Rozwiązanie to zakłada jednak, że pręt jest gładki i brak poślizgu zbrojenia w betonie. Odrzucenie tych założeń i rozwiązanie zadania na przykład metodami statystycznymi bardzo komplikuje zadanie. Rozwiązaniem alternatywnym jest oparcie się na teorii Borcza [26], w której proponuje on skorzystywanie z wyników badań doświadczalnych i określanie na ich podstawie średnich naprężeń w zbrojeniu na odcinku między rysami. Podobne rozwiązanie znajduje się w aktualnie obowiązującej normie, jednak nie wyróżnia ono sprężystej i trwałej części wydłużenia zbrojenia. Rozwiązanie uwzględniające deformacje sprężyste i trwałe oparte na wynikach badań Kozłowskiego [120] przedstawiono w rozdziale 5.

Analizę rozwoju rys w czasie przeprowadzili m.in. Kuczyński [127] i Dyduch [53]. Oryginalne rozwiązanie Kuczyńskiego opiera się na założeniach kontynuualnej teorii zginania przekrojów żelbetowych (por. p. 4.1.2). Autor określa szerokość rysy wychodząc z określenia odkształcenia skrajnego włókna rozciąganego

$$\varepsilon_d = \frac{bh^2 R_{bk} s_b l}{bh^3 E_b (ej)_0} \bar{\rho}(m) \xi'_{sr} \lambda \quad (3.13)$$

gdzie: $s_b = Mbh^2 R_{bk}$

$(ej)_0$ – zredukowana sztywność

$\xi'_{sr} = \xi_0 + m(\xi'_n - \xi'_0)$ – średnie położenie osi obojętnej zależne od stopnia wyłączenia przekroju m

Ostatecznie po przekształceniach wzór określający szerokość rysy przyjmuje postać

$$a_f = \frac{s_b \varepsilon_{sc} l_f}{w'_0 (\Delta m)} \left\{ \Delta(m\Phi) + \delta_\xi \left[\Delta(m^2\Phi) - \Delta(m^2\bar{Y}) \right] \right\} \quad (3.14)$$

gdzie: $w'_0 = \frac{(ej)_0}{\xi'_0}$,

$$m_2 = \frac{M\left(x_r + \frac{l_f}{2}\right)}{M_n}, \quad m_1 = \frac{M\left(x_r + \frac{l_f}{2}\right)}{M_n},$$

$$\Delta(m\Phi) = m_2\Phi(m_2) - m_1\Phi(m_1),$$

$\bar{\rho}$, $\bar{\Phi}$, \bar{Y} – wartości stabelaryzowane [127].

Metoda kontynuualna umożliwi uwzględnienie reologii betonu.

Propozycja Dyducha [47] wykorzystuje bezpośrednio całkowite równanie Volterry, opisujące odkształcenie betonu strefy ściskanej pod wpływem zmiennych naprężeń:

$$\varepsilon_b(t) = \phi(t - t_0)\sigma_b(t_0) + \int_{t_0}^t \phi(t - \tau) \frac{d\sigma_b(\tau)}{d\tau} d\tau \quad (3.15)$$

gdzie funkcję pełzania $\phi(t, t_0)$ przyjęto zgodnie z propozycją CEB. Zakładając średni rozstaw rys l_f^{sr} otrzymuje się rozwartość rysy dla dowolnego czasu t :

$$a_f^{sr}(t) = \frac{l_f^{sr}}{E_a} \left[\sigma_a(t) - \frac{U}{F_a} \int_0^{0,5l_f^{sr}} \left(1 - \frac{2x}{l_f^{sr}} \right) \tau_{ax}(t) dx \right] + \lambda l_f^{sr} \varepsilon_s. \quad (3.16)$$

Analiza ta umożliwi również przewidywania rozwoju stanu równowagi wewnętrznej przekroju przy różnych poziomach obciążenia.

Dyduch i Stankiewicz przedstawili uzyskane numerycznie wartości rozkładów poślizgu zbrojenia i odkształcenia stali w przedziale od środka między rysami do czoła rysy w zależności od liczby cykli (rys. 3.8). Wyniki tych analiz są ważnym uzupełnieniem informacji do badań Kozłowskiego [120] (por. rys. 5.11) na temat odkształceń sprężystych i trwałych w zbrojeniu, przy obciążeniach cyklicznych.

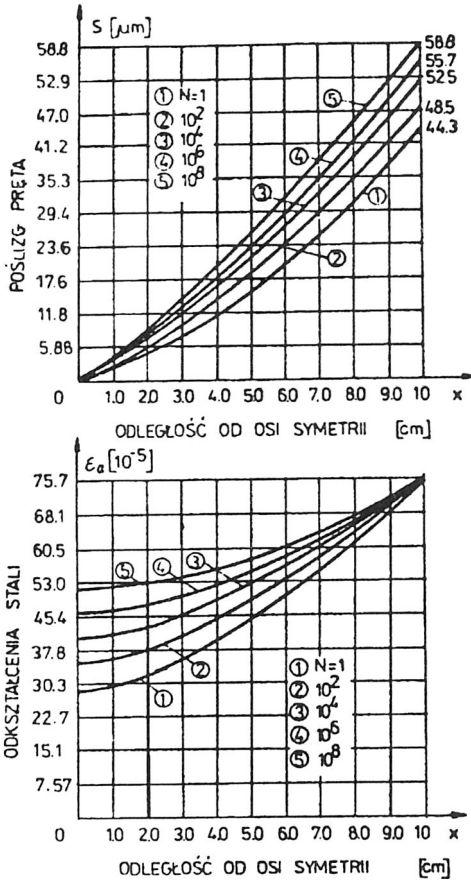
Doświadczalnie wykazano, że rysy rozwierają się w kierunkach równoległych do głównych naprężeń normalnych (rys. 3.9). Eksperyment polegał na wymuszeniu kierunku rysy przez początkowe „nacięcie” próbki. Zaobserwowano, że wskutek wcześniejszych przemieszczeń i mikrorys spowodowanych wzajemnymi przemieszczeniami kruszywa i zaprawy cementowej materiał staje się coraz bardziej anizotropowy i w miarę zwiększania się rys ich trajektorie zbiegają asymptotycznie do trajektorii naprężeń głównych.

Przedmiotem osobnej analizy powinien być wpływ na przyczepność naprężeń od obciążeń prostopadłych do pręta oraz wpływ przecięcia prętów zbrojenia. Oba te zadania zostały zrealizowane numerycznie i empirycznie [211, 212]. W przypadku pierwszego z tych czynników ustalano zależność siły niszczącej zakotwienie P_n od długości zakotwienia l_z . Porównując wartości siły bez obciążeń i z uwzględnieniem naprężeń prostopadłych do pręta o wartości 7,5 MPa, działających na powierzchni bocznej próbki otrzymano zależności:

– dla prętów o ϕ 18 mm:

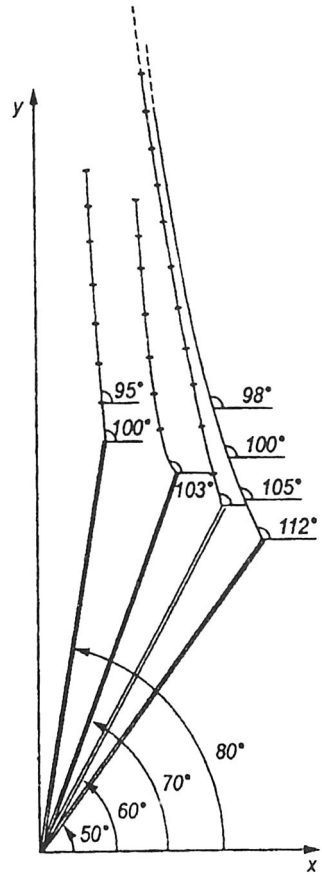
$$P_n(p = 0,0) = 5,31 + 0,90\alpha - 0,017\alpha^2 + 0,00011\alpha^3,$$

$$P_n(p = 7,5) = 8,35 + 1,09\alpha - 0,032\alpha^2 + 0,00030\alpha^3,$$



Rys. 3.8. Rozkład poślizgu zbrojenia i odkształceń stali [52]

Fig. 3.8. Distribution of slipend strain of steel [52]



Rys. 3.9. Trajektorie rys na płaszczyźnie obliczone na podstawie mechaniki zniszczenia dla różnych kątów nachylenia nacięcia początkowego przy osiowym ściskaniu [187, 245]

Fig. 3.9. Trajectories of crack on the plane on the basis of destruction mechanics by different initial cut angle for axial compression [187, 245]

– dla prętów o ϕ 22 mm:

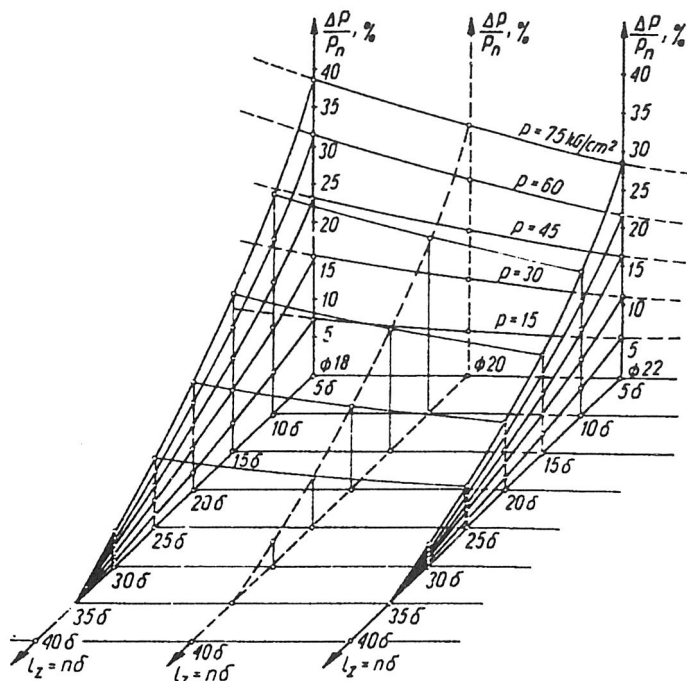
$$P_n(p = 0,0) = 8,78 + 1,02\alpha - 0,023\alpha^2 + 0,00017\alpha^3,$$

$$P_n(p = 7,5) = 12,93 + 0,96\alpha - 0,027\alpha^2 + 0,00024\alpha^3,$$

gdzie: $\alpha = l_z/d$,

d – średnica pręta.

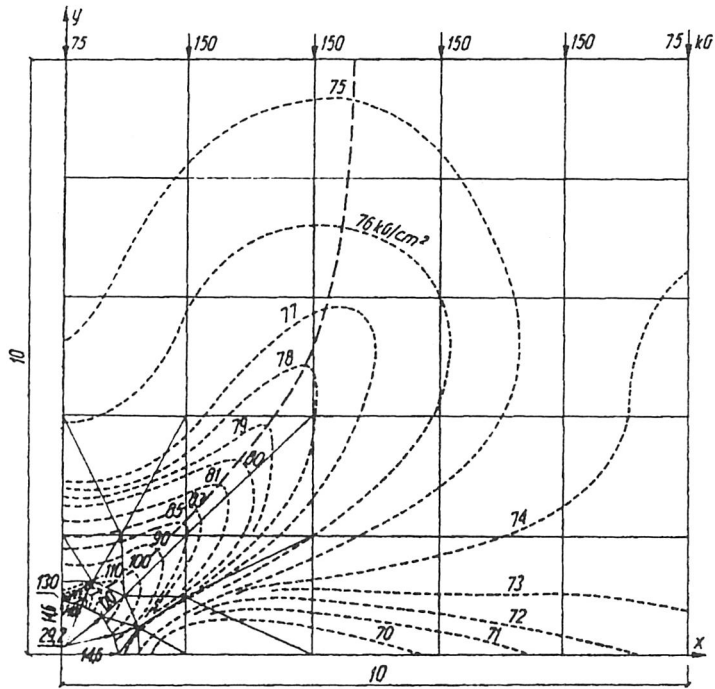
Autorzy zaobserwowali, że czynna długość zakotwienia przy oddziaływaniu naprężeń prostopadłych do pręta maleje o około 10 wartości średnic. Na rysunku 3.10 pokazano przyrosty sił niszczących przyczepność przy różnych średnicach prętów, różnych długościach zakotwienia i różnych wartościach obciążenia prostopadłego do pręta.



Rys. 3.10. Określenie względnego przyrostu siły niszczącej zakotwienie przy zmniejszających się średnicach prętów i długościach zakotwień [211]

Fig. 3.10. Relative increase of destructive forces in anchorage depending on diameter of reinforced and anchorage length [121].

W przypadku modelowania numerycznego dla próbek bez obciążenia prostopadłego rozkład naprężeń jest niemal kołowo-symetryczny. Przy działaniu na próbkę obciążenia prostopadłego do pręta następuje istotna redystrybucja naprężeń w otoczeniu pręta (rys. 3.11). Ekstremalne naprężenia mogą prowadzić do powstawania rys rozklinowujących. Rozwiązaniem alternatywnym jest oparcie się na teorii Borcza [26], w której proponuje on wykorzystywanie wyników badań doświadczalnych i określanie na ich podstawie średnich naprężeń w zbrojeniu na odcinku pomiędzy rysami. Podobne rozwiązanie zawarte jest w aktualnie obowiązującej normie, jednak nie wyróżnia ono sprężystej i trwałej części wydłużenia zbrojenia. Rozwiązanie uwzględniające deformacje sprężyste i trwałe oparte na wynikach badań Kozłowskiego [120] przedstawiono w rozdziale 5.



Rys. 3.11. Wykres naprężeń powstałych na skutek rozklinowującego działania zbrojenia żebrowanego przy działaniu na próbkę naprężeń prostokątnych [214]

Fig. 3.11. Diagram of stresses vs. tensions caused by reinforcement by influence of external perpendicular stresses [214]

3.7. Szacowanie wpływu obciążeń cyklicznych na szerokość rysy

W realizacji eksperymentu przydatne jest teoretyczne określenie zmian wartości szerokości rozwarcia rysy w żelbetowych elementach rozciąganych. Rozwijane obecnie metody opierają się na opisie zjawiska wzajemnej przyczepności betonu i zbrojenia. Można tu wskazać trzy zasadnicze metody:

- opis empirycznej funkcji uzależniającej lokalny poślizg od lokalnego naprężenia stycznego;
- określenie zależności naprężeń przyczepności od położenia przekroju;
- skorzystanie z metod energetycznych.

Metodę opartą na określeniu zależności między wartością naprężeń przyczepności a położeniem przekroju względem osi rysy lub środka rozpiętości próbki zaproponowali Pędziwiatr i Minch [189]. Metoda ta umożliwia otrzymywanie rozwiązań analitycznych pokazujących rozwój zarysowania, zmian sztywności itd.

Podstawowymi równaniami są tutaj:

• zależność między naprężeniami przyczepności a naprężeniami w zbrojeniu przedstawia

$$\tau(x) = g x s_s(x) \quad (3.17)$$

gdzie: g – parametr przyczepności,
 x – odległość od rysy pierwszego rzędu;

• równanie równowagi sił w przekroju:

$$A_s \sigma_s(x) + A_c \sigma_c(x) = F \quad (3.18)$$

• zależność między zmianą naprężeń normalnych w zbrojeniu a naprężeniami przyczepności:

$$\frac{d\sigma_s(x)}{dx} = -\frac{4\tau(x)}{dx} \quad (3.19)$$

• warunek zgodności przemieszczeń stali, betonu i poślizgu:

$$\varepsilon_s(x) + \varepsilon_c(x) = \frac{ds}{dx} \quad (3.20)$$

gdzie: s – wartość poślizgu.

Przyjmując jako $\beta(x)$ względną różnicę przemieszczeń pręta w odległości x od przekroju zarysowanego w przypadku braku przyczepności s_0 oraz w przypadku konkretnego modelu s_1 , otrzymuje się wartość przemieszczeń reszkowych dla poślizgu¹⁷:

$$s^r(x) = \beta(x) s_0(x) \quad (3.21)$$

oraz odpowiadające mu odkształcenia reszkowe w stali:

$$\varepsilon_s^r(x) = \frac{s^r(x)}{dx} \quad (3.22)$$

Przy założeniu, że szerokość rozwarcia rysy jest sumą przemieszczenia (poślizgu) od bieżącego obciążenia i przemieszczenia pozostającego po ostatnim odciążeniu oraz że odkształcenie w stali pozostające po odciążeniu jest równe jednostkowej różnicy kolejnych przemieszczeń, model ten umożliwi określenie granicznej wartości szerokości rozwarcia rysy przy obciążeniach cyklicznych. Przy stałej wartości naprężenia kolejne przemieszczenia wynoszą zatem:

$$s_0, s_0\beta, s_0 + s_0\beta, s_0 + s_0\beta^2, \dots \quad (3.23)$$

a odpowiadające im przemieszczenia reszkowe

$$s_0\beta, s_0\beta + s_0\beta^2, s_0\beta + s_0\beta^2 + s_0\beta^3, \dots \quad (3.24)$$

¹⁷ Wyrowadzenie zależności w [189].

Graniczne wartości tych ciągów wynoszą odpowiednio:

$$s = \frac{s_0}{1 - \beta} \quad (3.25a)$$

$$s^r = \frac{s_0 \beta}{1 - \beta} \quad (3.25b)$$

3.8. Założenia probabilistycznego opisu odkształceń rezydualnych przekroju

Brak jest dotychczas zweryfikowanego doświadczalnie probabilistycznego modelu umożliwiającego opis zależności między strukturą betonu a jego mechanicznymi właściwościami, a także zmianą tych właściwości w czasie. We wcześniejszych rozdziałach wymieniono rodzaje wiązań wewnątrz- i międzycząsteczkowych, zwrócono uwagę na różnorodność i odmiany polimorficzne związków chemicznych oraz na występowanie w tych związkach nieciągłości strukturalnych (mozaiki, konglomeraty, defekty).

Jako punkt wyjścia przyjęto probabilistyczną teorię defektów Zhurkova [249] i Valanisa [242], zakładającą stochastyczną postać defektów, które powstają w wyniku procesów lepkoplastycznych i wprowadzającą pojęcie tak zwanego „czasu własnego procesu”. Przyłożenie zewnętrznej siły do układu powoduje zmianę potencjału energetycznego w mikroelemencie:

$$\Delta E = \Delta E^{\text{spr}} + \Delta E^{\text{res}} \quad (3.26)$$

gdzie: ΔE^{spr} , ΔE^{res} – zmiana energii spowodowana deformacjami sprężystymi i trwałymi.

Dla całego elementu efekt ten jest opisany zależnością:

$$E_w = \iiint_V dE^{\text{spr}} dV + \iiint_V dE^{\text{res}} dV \quad (3.27)$$

Można z pewnym uproszczeniem przyjąć, że zmiana energii spowodowana odkształceniami sprężystymi ΔE^{spr} wpływa na zmiany odległości pomiędzy atomami (rys. 3.2) lub cząsteczkami. Implikuje to zależność znaną w mechanice jako uogólnione prawo Hooke’a (umowa sumacyjna):

$$\sigma^{ij} = E^{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (3.28)$$

gdzie: E^{ijkl} – współczynniki sprężystości.

Bardziej złożony jest opis trwałych defektów w elemencie. Zmianę energii w mikroelemencie wyraża wówczas zależność:

$$\Delta E^{\text{res}} = E - \Delta E^{\text{spr}} - E_R \quad (3.29)$$

gdzie: E – energia całkowita układu,

E_R – energia odniesienia układu nieobciążonego.

Gęstość prawdopodobieństwa $f(E)$ wyraża funkcję przetrwania (*survival function*) mikroelementu. Jeżeli dla konkretnego materiału przyjmie się wartość energii powodującej pęknięcie (defekt) jako E_0 , to funkcję przetrwania można wyrazić jako:

$$f = 1 - h(E - E_0)[1 + f(\Delta E - E_0)] \quad (3.30)$$

przy czym: $h(E - E_0)$ – funkcja – dystrybucja Heaviside'a.

Dla materiału jednorodnego:

$$f(\Delta E - E_0) = \exp\left[-\frac{c(\Delta E - E_0)}{kT}\right] \quad (3.31)$$

gdzie: k – stała Boltzmanna,

T – temperatura (K),

c – stała materiałowa.

Z równania (3.30) wynika bezpośrednio prawdopodobieństwo wystąpienia defektu:

$$p = [1 + f(\Delta E - E_0)]h(E - E_0). \quad (3.32)$$

Jeżeli defektem jest naruszenie mikrostruktury betonu, to przyjmując krzywą przetrwania w postaci (3.31) i wykorzystując zależności dla energetycznego modelu betonu (rozdział 2.5), można określić zakres wartości odkształceń resztkowych na określonym poziomie wyężenia.

Taka interpretacja zjawisk zachodzących w betonie wymaga jednak jeszcze uzupełniających badań eksperymentalnych.

4. Modele żelbetowych konstrukcji prętowych

Uwagi dotyczące metodologii modelowania

Modelowanie konstrukcji jest kształtowaniem pewnego wzorca, który wskutek idealizacji i świadomych uproszczeń powinien przyczynić się do opracowania efektywnych metod projektowania. Zagadnienie modelowania można rozpatrywać zasadniczo w dwóch grupach:

- Modelowanie elementów konstrukcji w sensie fizycznym z zastosowaniem wiernych lub modelowych materiałów konstrukcyjnych, schematów statycznych, warunków brzegowych itp. Stosuje się w tym celu metody analizy wymiarowej, bada się efekty skali oraz realizuje zasadniczy eksperyment z zachowaniem pewnych reżimów (np. prędkość wymuszenia obciążeń lub odkształceń, warunki temperaturowo-wilgotnościowe, izolacja sejsmiczna) możliwych do uzyskania praktycznie tylko w warunkach laboratoryjnych. Tak otrzymane wyniki można, po wielokrotnym powieleniu eksperymentu, poddać obróbce statystycznej i na ich podstawie opisać model fenomenologiczny, wyprowadzić wzory empiryczne, ustalić istniejące relacje fizyczne.

- Drugim sposobem modelowania jest opis schematu statycznego, materiałów konstrukcyjnych i ewentualnie warunków zewnętrznych za pomocą relacji liczbowych. Metody te, zwane numerycznymi, służą do szybkiego wzbogacenia naszej wiedzy o dodatkowe relacje liczbowe lub funkcyjne charakteryzujące konstrukcję, a przez to do formułowania dodatkowych wniosków i przewidywania skutków pracy konstrukcji.

Modelowanie konstrukcji w obu przypadkach łączy tylko zbieżność nazw, gdyż osiągnane cele są w znacznym stopniu różne. O ile w pierwszym przypadku otrzymujemy wyniki z bezpośredniego pomiaru, o tyle w drugim dokonujemy obróbki liczbowej wyników otrzymanych uprzednio z eksperymentu.

Pojęcie modelu materiałów konstrukcyjnych i współpracy między nimi przedstawione w rozdziale 3 nie uwzględniało zagadnienia modelowania materiału w konstrukcji. W niniejszym rozdziale zostaną przedstawione – opracowane przez autora – zagadnienia modelowania i obliczania żelbetowych konstrukcji prętowych pod kątem dyskretnego opisu niesprężystych cech konstrukcji.

4.1. Sztywność żelbetowych elementów zginanych

Podstawowym parametrem charakteryzującym konstrukcję prętową jest sztywność. W przypadku modelowania zginanych konstrukcji prętowych jest to sztywność giętna elementu. Zarówno w opisie teoretycznym, jak i pomiarze doświadczalnym określenie tej sztywności jest trudne ze względu na parametry zmienne w zależności od czasu i poziomu wyteżenia materiału. Duża nieregularność mikrorys, rys i pęknięć nie pozwala na deterministyczny opis zmian sztywności. Aktualnie istnieje wiele koncepcji dotyczących opisu zmian sztywności na długości zginanego elementu żelbetowego¹. Najbardziej charakterystyczne z nich to:

- koncepcja sztywności stałej odcinkami,
- kontynuualna koncepcja sztywności,
- skokowa koncepcja sztywności,
- falowa koncepcja sztywności,
- dystrybucyjna koncepcja sztywności,

4.1.1. Sztywność stała odcinkami

Muraszow [179] opisuje sztywność elementu w fazie zarysowania, przyjmując jako kryterium tego stanu warunek:

$$M > M_{cr} \quad (4.1)$$

gdzie: $M_{cr} = f_{ctm} W_{zr}$,

W_{zr} – wskaźnik wytrzymałości przekroju według Muraszowa.

Spełnienie tego kryterium przez jeden z przekrojów w elemencie kwalifikuje cały element jako zarysowany.

Równanie wiążące krzywiznę przekroju z momentem ma postać

$$\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_{s\dot{s}r}}{d - x_{\dot{s}r}} = \frac{M\psi_s}{W_s E_s (d - x_{\dot{s}r})} = \frac{M}{B} \quad (4.2)$$

Średnie wartości odkształceń $\varepsilon_{c\dot{s}r}$ i $\varepsilon_{s\dot{s}r}$ przyjmuje się ze związków geometrycznych:

$$\varepsilon_c = \varepsilon_{s\dot{s}r} \frac{x_{\dot{s}r}}{d - x_{\dot{s}r}} \quad (4.3)$$

Metoda ta opiera się na znajomości wartości doświadczalnych²

¹ Dokładny opis tych koncepcji wraz z metodami obliczania ugięć można znaleźć w pracach Szechińskiego (por. np. [105], [221]).

² Koncepcja ta była rozwijana między innymi przez Nemirowskiego [181, 182], Rokacza [201, 202], Gornowa [74], Wilkova [244], polegała na określeniu wartości Ψ i n , opartym na własnych badaniach.

$$\Psi_s = \frac{\varepsilon_{s\dot{s}r}}{\varepsilon_s} \quad \text{i} \quad \Psi_c = \frac{\varepsilon_{c\dot{s}r}}{\varepsilon_c} \quad (4.4)$$

4.1.2. Kontynuualna zmiana sztywności

Koncepcję przyjmującą kontynuualną zmianę sztywności sformułował Kuczyński (por. [127, 129]), a następnie ją rozwinął [131–133], [135–141], [143, 144] (por. też Goszczyński i in. [75, 76] i Granosik [82, 83]).

Podstawowe założenia koncepcji kontynuualnej zmiany sztywności podano w pracy [127] na podstawie wcześniejszych badań doświadczalnych.

Proponuje się tam następujące założenia:

- przyjęcie określonego modelu przekroju żelbetowego,
- przyjęcie kontynuualnej zmiany sztywności uwarunkowanej zmianą momentu zginającego, przy czym zmiana ta zachodzi zarówno na długości elementu, jak też wraz ze wzrostem obciążeń,
- przyjęcie prawdziwości założonego prawa w sensie statystycznym,
- wprowadzenie jednego parametru uwzględniającego uplastycznienie i zarysowanie,
- przyjęcie, że w fazie I belka pracuje kwazisprężystie,
- powstanie rysy związane z momentem rysującym jest odpowiednikiem drugiego stanu granicznego belki,
- stan graniczny zniszczenia następuje po osiągnięciu granicy plastyczności w stali i wytrzymałości na ściskanie przy zginaniu³ w betonie i odpowiada on stanowi przegubu plastycznego w elemencie,
- krzywizna belki odnosi się do osi środkowej belki,
- oś obojętna jest osią teoretyczną i nie musi pokrywać się z linią, na której naprężenia normalne są równe zero.

Na podstawie tych założeń teoria kontynuualna umożliwia rozwiązywanie dwóch grup zagadnień:

- obliczanie przemieszczeń (krzywizny, ugięcia i kąty obrotu) belek żelbetowych statycznie wyznaczalnych i niewyznaczalnych,
- analizowanie pracy belek statycznie niewyznaczalnych z uwzględnieniem redystrybucji momentów oraz powstawania łańcuchów kinematycznych.

Opierając się na tych założeniach, Kuczyński podał dwie postaci funkcyjnego ujęcia tego procesu:

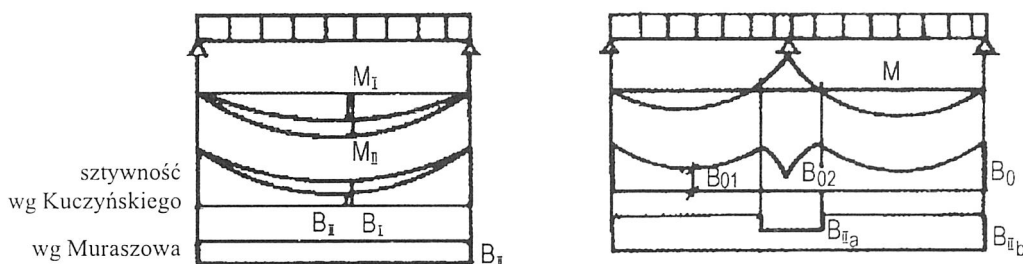
³ W okresie, gdy formułowano kontynuualną teorię żelbetu, wyróżniano pojęcia wytrzymałości betonu na ściskanie na próbkach walcowych (R_w) i słupowych (R_s) oraz pojęcie wytrzymałości na ściskanie przy ścisaniu mimośrodowym i zginaniu (R_m). Doświadczalnie określa się, że jej wartość jest o 25% większa od wytrzymałości słupowej ($R_m \cong 1,25R_s$), m.in. [127], [PN-56/03260].

- hipotezę liniowych zmian sztywności, gdzie $B = B_0(1 - \varphi m)$,
- hipotezę potęgowych zmian sztywności, gdzie $B = B_0(1 - m^\psi)$.

Mimo że oba podejścia różnią się między sobą, wspólną cechą jest jednoparametrowe przedstawienie zjawiska zginania we wszystkich fazach pracy belki żelbetowej. Parametry φ i ψ wyznacza się doświadczalnie. Zależą one od stopnia uplastycznienia i zarysowania elementu.

Często obliczaną wielkością podczas projektowania są ugięcia belek. Można je obliczyć, korzystając z równania krzywizny w postaci $1/\rho = M/B$, w którym sztywność B można wyznaczyć w sposób omówiony poprzednio.

Różnice wartości wynikające z założeń teorii Kuczyńskiego i Muraszowa pokazano na rys 4.1.



Rys. 4.1. Porównanie sztywności belek wyznaczonej metodami Muraszowa i Kuczyńskiego [221]

Fig. 4.1. Comparison stiffness of beams according to the Muraszow and Kuczyński methods

Kontynuinalną teorię zginania żelbetu rozwinięto znacznie w latach sześćdziesiątych. Kuczyński i in. zastosowali ją m.in. do:

- obliczania wpływów reologicznych na ugięcia belek żelbetowych [134], [146],
- obliczania przemieszczeń belek [133], [137], [144], [146],
- obliczania stanów zarysowania i zniszczenia belek [141], [142], [147],
- opisu redystrybucji momentów w elementach statycznie niewyznaczalnych,
- analizy stanów granicznych w świetle teorii plastyczności.

Stosując tę teorię analizowano również ugięcia elementów żelbetowych z uwzględnieniem wpływu różnych czynników, takich jak: rodzaj betonu i stali, uziarnienie kruszywa, kształt przekroju itp. [147], także z zastosowaniem technik numerycznych [140].

W roku 1970 Kuczyński i Goszczyński zaproponowali zastosowanie metody normowej uproszczonego obliczania ugięć i rys w elementach żelbetowych. Sztywność oblicza się z równania

$$B = B_1 \left[1 - m \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I} \right) \varphi_{sch} \varphi_N \right] \quad (4.5)$$

w którym: $m \left(1 - \frac{J_{II}}{J_I} \right)$ – stopień zaangażowania przekroju,

m – stopień zaawansowania obciążenia.

$J_{II} = nF_a(d - x_{II})(d - 1/3x_{II})$,

φ_N – uwzględnia wpływ sił podłużnych,

φ_{sch} – uwzględnia rodzaj obciążenia belki.

W równaniu (4.5) dla małych wartości współczynnika m sztywność średnia B równa się sztywności w fazie I, (B_I), natomiast dla M/M_n dążącego do 1 wartości sztywności zbliżają się do wartości sztywności odpowiadającej fazie II (M_n – moment niszczący)

Rozwartość rys tą metodą określa się ze wzoru

$$a_f = \frac{M(h-x)}{B} l_f \quad (4.6)$$

Badania w podanych kierunkach są kontynuowane również w ostatnich latach.

Problemem uogólniania podanych w teorii rozwiązań zajmowali się Kuczyński [137] i Goszczyński [142]. Ich zdaniem w większości zagadnień praktycznych ugięcia oraz kąty obrotu belek statycznie wyznaczalnych mogą być obliczane dla stałego współczynnika podatności $K = M_n/B_0$ (M_n – moment niszczący, B_0 – sztywność początkowa).

Wpływem wskaźnika podatności na ugięcia zajmował się również Goszczyński [142], [144]. Podaje on równanie, z którego można obliczyć współczynnik podatności

$$K = \frac{\lambda}{h} \quad (4.7)$$

w którym:

$$\lambda = \frac{R_m}{E_c} (1 - \alpha)^2 \frac{S_b}{e_j} \quad (4.8)$$

R_m – wytrzymałość betonu na ściskanie przy zginaniu,

S_b – moment statyczny przekroju betonowego w I fazie.

Ugięcia w tym przypadku oblicza się z następującego wyrażenia:

$$\frac{d^2 v(\xi)}{d\xi^2} = \frac{M_n}{B_0} \frac{m}{1 - m^\psi} = K \frac{1}{1 - m^\psi} \quad (4.9)$$

Goszczyński wspólnie z Kuczyńskim zajmują się również obliczaniem rozwarcia rys w ujęciu teorii [75, 76], a wspólnie z Kuczyńskim, Kamińską, Wałaskiem, Ulańską i Kowalską – analizą pracy ciągłych belek żelbetowych [139–146]. W obliczeniach autorzy korzystają ze zdefiniowanego w równ. (4.7) wskaźnika podatności, analizę prowadzą natomiast metodą obciążeń wtórnych. Ponieważ wskaźnik podatności jest zmienny na długości przęsła, dzieli się je na odcinki, na których $K_i = \text{const}$ i oblicza średni wska-

źnik $K_0 = \sum K_i l_i / l$. Granosik zajmował się jeszcze badaniami zależności ugięcia od różnorodnych czynników, takich jak uziarnienie kruszywa, wytrzymałość betonu, wpływy losowe i wytrzymałość kruszywa [85–87].

4.1.3. Skokowa zmiana sztywności

Koncepcja skokowej zmiany sztywności opracowana przez Ryżyńskiego i Apanasa zakłada skokowe przyjęcie zmian sztywności na długości elementu. W przekrojach zarysowanych przyjmuje się wartości $B_{II} = E_c J_{II}$, natomiast między nimi $B_I = E_c J_I$. Uogólnione wartości przemieszczeń i sił oblicza się z równania różniczkowego ugiętej osi pręta sprężystego:

$$EJ_{I,II} \frac{d^4 y}{dx^4} = q \quad (4.10)$$

Do obliczenia rozstawu rys Ryżyński proponuje zastosowanie równań podanych w CEB, korygowanych do najbliższego rozstawu strzemion. Długość odcinka, na którym nastąpiło lokalne zerwanie przyczepności, określa zależność:

$$s_n = \frac{a_{cr}}{\varepsilon_{ct} + \frac{\sigma_{sn}}{E_s}} \quad (4.11)$$

w którym: a_{cr} – rozwartość rys,

σ_{sn} – naprężenie w zbrojeniu w badanej rysie,

ε_{cr} – wydłużenie ekstremalne betonu.

Metoda ta była weryfikowana doświadczalnie, a wyniki podano w pracach [205–207].

4.1.4. Falowy rozkład sztywności

Propozycję funkcyjnego przedstawienia zmian sztywności w elemencie zarysowanym przedstawił Szechiński [221]. Nazwę metody przyjęto na podstawie założeń i wyników badań doświadczalnych, według których w otoczeniu rysy oś obojętna oraz krzywe rozkładu odkształceń i naprężeń wzdłuż belki w stali i w betonie osiągają lokalne, kwaziskokowe ekstremum, zwane przez autora *sfalowaniem*. Metoda ta umożliwia również obliczanie zmian lokalnych ekstremów w czasie.

Sztywność elementu zginanego jest funkcją trzech podstawowych parametrów: obciążenia, położenia przekroju i czasu. Można to zapisać następująco:

$$B = B(p, \xi, t) \quad (4.12)$$

Jako kryterium występowania przekroju zarysowanego przyjęto: $m_{cr} = M/M_{cr} \geq 1$. Funkcję sztywności można przedstawić jako sumę dwóch funkcji, z których jedna będzie opisywać belkę na całej długości, druga zaś – dyskretnie w otoczeniu rysy. Dla obciążeń doraźnych można tę sztywność przedstawić w postaci superpozycji:

$$B = f(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0) + h(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0) \quad (4.13)$$

gdzie: f – funkcja sztywności jak dla fazy I,

h – funkcja sztywności opisująca fale w otoczeniu przekroju zarysowanego,

$m_{cr} = M/M_{cr}$ – stosunek momentu w belce do momentu rysującego,

$t - t_0 = 0$ – moment przyłożenia obciążenia.

Po określeniu funkcji $f(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0)$ i $h(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0)$ znany będzie poszukiwany rozkład sztywności. Szechiński proponuje następujące sposoby obliczania funkcji rozkładu sztywności. Dla funkcji f :

$$f(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0) = \frac{B_{10} - B_{1b}}{1 + \alpha m_{cr} (B_{10} - B_{1b})} + B_{1b} \quad (4.14)$$

gdzie: B_{10} – sztywność przekroju żelbetowego, nie obciążonego w chwili przyłożenia obciążenia,

B_{1b} – sztywność przekroju żelbetowego tuż przed zarysowaniem w chwili początkowej działania obciążenia; sztywność B_{1b} odpowiada sztywności minimalnej dla fazy I_b ,

α – współczynnik poziomu sztywności podczas zarysowania; wyznacza się go z warunku, że dla $m_{cr} = 1$ (zarysowanie) $f = B_{11}$ ($B_{1b} < B_{11} < B_{10}$)

$$\alpha = \frac{B_{10} - B_{11}}{(B_{10} - B_{1b})(B_{11} - B_{1b})} \quad (4.15)$$

Dla funkcji h zależność ta jest następująca

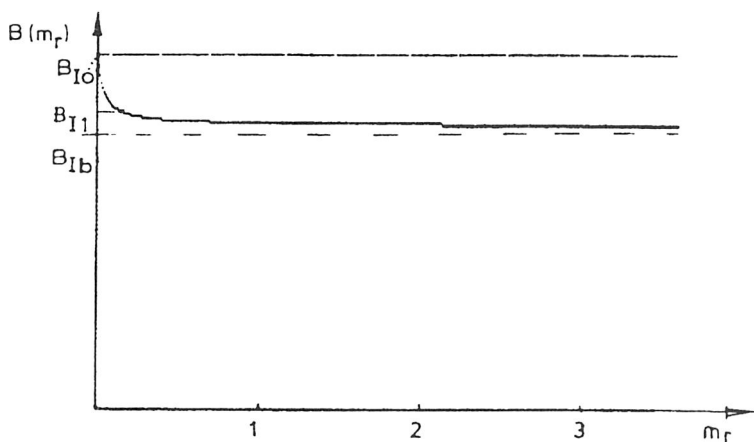
$$h(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0) = -(B_{1b} - B_{11}) \frac{1,1 m_{cr}^4}{2,1 + m_{cr}^4} g(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0) \quad (4.16)$$

gdzie: B_{11} – sztywność minimalna przekroju zarysowanego (dla II fazy pracy),

$g(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0)$ – funkcja opisująca wpływ rys na wartość sztywności; w szczególnym przypadku funkcja ta może przyjąć wartość stałego współczynnika δ , który będzie określał wypadkowy poziom sztywności na odcinku zarysowanym i uwzględniał pracę przekrojów zarysowanych i niezarysowanych

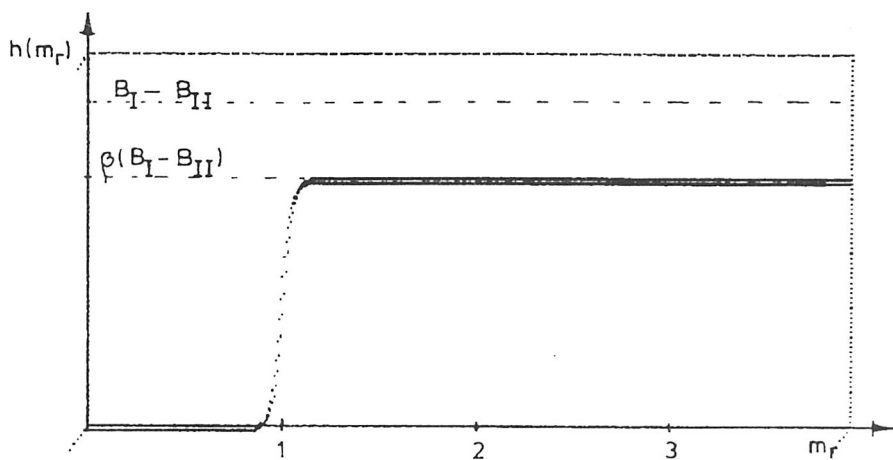
$$g(m_{cr}, t - \tau = 0) = \left\{ \frac{\cos \left[2n\pi \left(\frac{1,1 m_{cr}}{2,1 + m} \right) \right] - 1}{2} \right\}^4 \quad (4.17)$$

Rozkład funkcji $f(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0)$ i $h(m_{cr}, \xi, t - t_0 = 0)$ pod obciążeniem doraźnym pokazano na rys. 4.2 i 4.3.



Rys. 4.2. Funkcja $f(m_{cr}, \xi, t-t_0 = 0)$ rozkładu sztywności dla belki pracującej pod obciążeniem doraźnym

Fig. 4.2. Function $f(m_{cr}, \xi, t-t_0 = 0)$ of stiffness distribution in beams working under immediate load



Rys. 4.3. Funkcja $h(m_{cr}, \xi, t-t_0 = 0)$ rozkładu sztywności dla belki pracującej pod obciążeniem doraźnym

Fig. 4.3. Function $h(m_{cr}, \xi, t-t_0 = 0)$ of stiffness distribution in beams working under immediate load

Podobnie jak we wcześniej przedstawionych metodach uogólnione wartości przemieszczeń i sił oblicza się z równania różniczkowego ugiętej osi pręta sprężystego.

4.1.5. Koncepcja dystrybucyjnego rozkładu sztywności

Koncepcja dystrybucyjnego rozkładu sztywności elementu żelbetowego, sformułowana przez Borcza w pracach [25, 26], była następnie rozwijana przez niego w pracach

[17–24, 27–33] oraz przez Dubisa, Marcinkowskiego [164], Kozłowskiego [30, 120], Mincha [168–171], Baryłę [9], Kiedroń [107, 108], Łuczak [157, 158], Majewskiego [163], Maja [160], Tomczaka [31], Trochanowskiego [228], Dmochowskiego [44], Wawrzyniaka [233] Zadwornego [246], przez autora w pracach [32, 104, 227, 230–232, 234, 235] oraz przez zespół w materiałach [165]¹. Jest ona oparta na ogólnym modelu betonu opisującym stan naprężeń i odkształceń w konstrukcjach żelbetowych.

Zmierzają się do takiego sformułowania modelu obliczeniowego, aby do obliczeń można było zastosować rozwiązania klasycznej teorii sprężystości. Najbardziej charakterystycznym elementem tej koncepcji jest wyraźne rozdzielenie sztywności w przekroju zarysowanym i poza nim. Pozwala to na przyjmowanie sztywności konstrukcji takiej jak dla klasycznego elementu sprężystego z wyłączeniem przekrojów, w których występują rysy. Wszystkie odkształcenia trwałe (trwałe rozwarcie rysy, uplastycznienie przekrojów, efekty reologiczne itd.) wprowadza się do obliczeń jako zastępcze obciążenie dyskretyzowane w miejscach zarysowania. Miejsca te mogą być teoretyczne, co umożliwia uwzględnienie odkształceń trwałych na przykład przed zarysowaniem konstrukcji. Jeżeli przyjmie się dodatkowo pomijalnie mały wpływ poziomu wyężenia betonu na wartość współczynnika sprężystości E_b , to można napisać, że

$$EJ_1 \frac{d^4 v(\xi)}{d\xi^4} = p + D_{cr}, \quad (4.18)$$

gdzie: EJ_1 – sztywność konstrukcji sprężystej,

p – uogólnione obciążenie konstrukcji,

D_{cr} – operator opisujący dyskretnie defekt pochodzący od zarysowania (np. za pomocą funkcji dystrybucyjnej)

Założenia te, chociaż przybliżone, oddają charakter zachowania się konstrukcji w procesach obciążeń wielokrotnych, szczególnie wolnozmiennych. Zostały one wykorzystane także do analizy innych elementów żelbetowych, takich jak słupy ściskane mimośrodowo [107,108], ramy [46, 164], tarcze [168–171, 233], płyty [44, 160, 228] oraz do opisu ugięć pod obciążeniem dynamicznym [157, 158].

4.2. Kontynuálny i dyskretny model konstrukcji żelbetowej

Metody analitycznego modelowania konstrukcji żelbetowych można podzielić na dwie grupy². Pierwsza z nich zakłada tak zwany ciągły model obliczeniowy. Według

¹ Przedstawiona bibliografia ma charakter reprezentatywny i nie wyczerpuje opublikowanego piśmiennictwa w tym temacie.

² W dalszej części pracy pominięto inne koncepcje modelowania żelbetowych konstrukcji prętowych (m.in. koncepcję sztywności stałej odcinkami Muraszowa, koncepcję skokowej zmiany sztywności Rzyżńskiego i Apanasa, koncepcję falowego rozkładu sztywności na długości elementu żelbetowego Szechińskiego).

tego modelu rysy wpływają na sztywność belki w sposób ciągły na całym obszarze zarysowania. Zmienna sztywność w przęśle była przyjmowana między innymi przez Kuczyńskiego [127–147] i Łempickiego [155, 156]. Uwagi praktyczne dotyczące numerycznego modelowania konstrukcji podają Grabiec [80] i Wołowicki [247], który między innymi analizuje wpływ zdolności betonu do odkształceń na nośność przekroju żelbetowego.

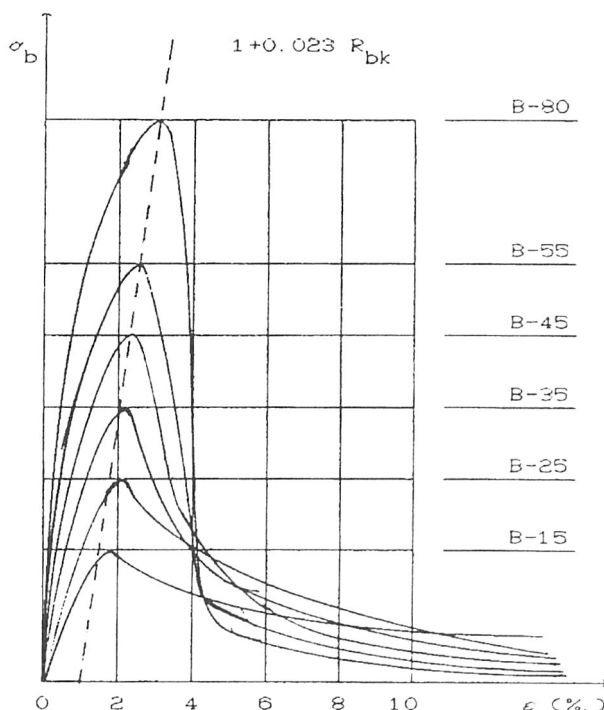
Druga metoda, zbieżna z pierwszą w założeniach dotyczących właściwości materiałów, uwzględnia także zmianę sztywności, lecz umiejscawia ją w zarysowanym przekroju. Takie sformułowanie modelu wpływa zarówno na sposób realizowania doświadczenia, jak i na opis matematyczny modelu belki, który wymaga zastosowania klasy funkcji nieciągłych.

W następnych rozdziałach, dotyczących modelowania konstrukcji, przedstawiono przykłady modelowania obiema metodami.

4.3. Model kontynuacyjny w metodzie elementów skończonych

4.3.1. Model betonu i stali

Metoda ta przyjmuje zweryfikowane numerycznie modele betonu, stali i współpracy między nimi. Umożliwia to uwzględnianie w obliczeniach statycznych właściwości



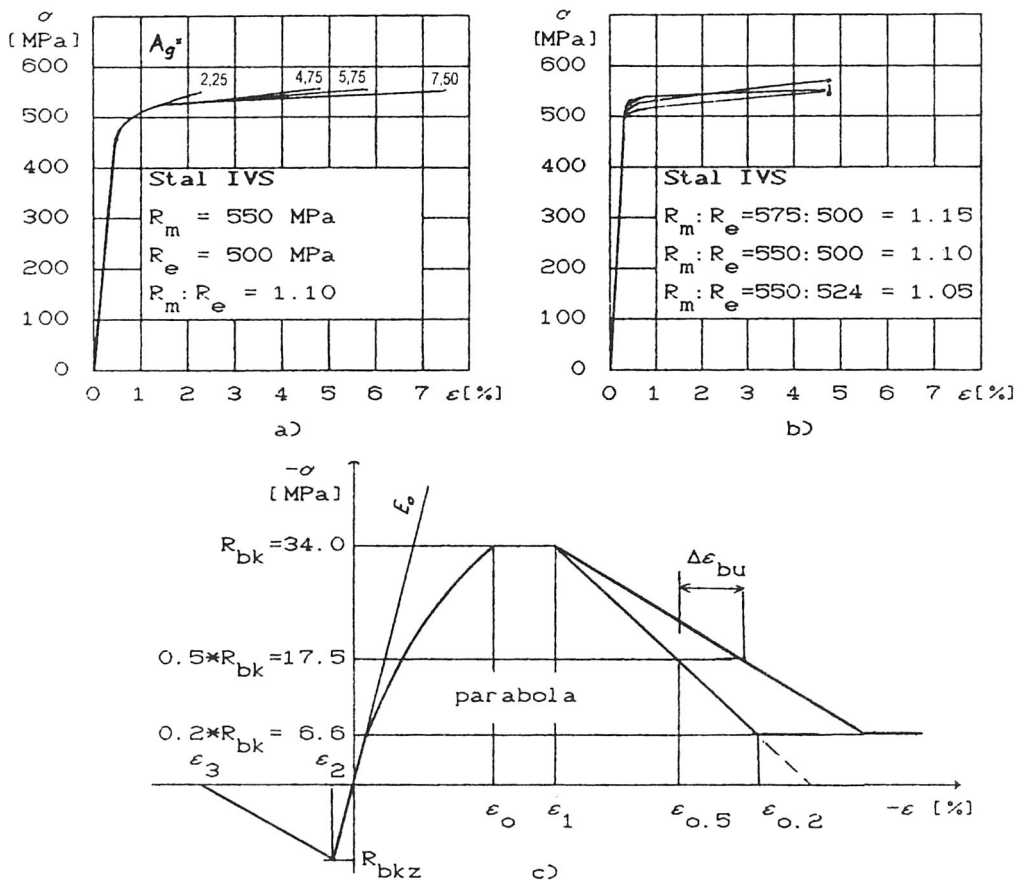
Rys. 4.4. Wyniki badań doświadczalnych Miera [166] i Weschego [242]

Fig. 4.4. Results Mier's [166] and Wesche's [242] experimental investigations

konstrukcji polegającej na tym, że sztywność na długości pręta zmienia się nierównomiernie (np. część przekrojów pracuje jeszcze w fazie pierwszej, podczas gdy w innych występują już rysy). Poniżej przedstawiono analizę wpływu właściwości stali na redystrybucję sił wewnętrznych w belkach statycznie niewyznaczalnych oraz na ich nośność.

W modelu korzysta się z różnych charakterystyk betonu i stali. Opisuje on zależność naprężeń stycznych i wzajemnych przemieszczeń na odcinkach, na których współpraca betonu i stali jest naruszona. Zanalizowano przegrupowanie sił wewnętrznych dla różnych rodzajów stali. Zmieniano też stopień zbrojenia i odchylenia od tak zwanego zbrojenia sprężysto-zgodnego.

Założony obliczeniowy model betonu wykazuje największą zgodność z wynikami badań Miera [166, 167] i Weschego [242] (rys. 4.4).



Rys. 4.5. Charakterystyki materiałowe stali i betonu
Fig. 4.5. Characteristics of reinforced steel and concrete

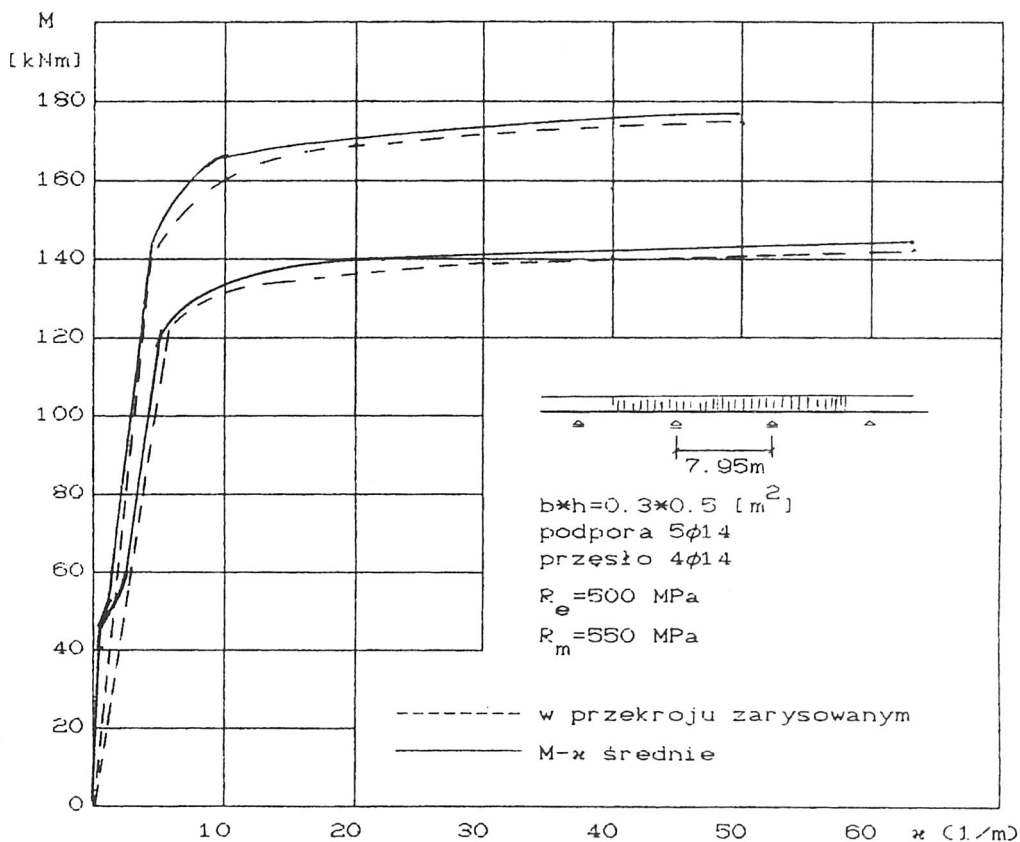
Na zależność $\sigma-\varepsilon$ nałożono linię opisującą zależność ε_0 od wytrzymałości charakterystycznej R_{bk}

$$\varepsilon_0 = 1 + 0,023 R_{bk} \quad (4.19)$$

Przyjęto, że na poziomym odcinku $\varepsilon_1 - \varepsilon_0$ (rys. 4.5c) długości 1% wartość R_{bk} jest stała. Pochylenie gałęzi „opadającej” określane jest pośrednio przez obliczenie

$$\varepsilon_{0,5} = \frac{2 + 0,435 R_{bk}}{0,145 R_{bk} - 1} \quad (4.20)$$

w punkcie $0,5R_{bk}$. Wartość $\Delta\varepsilon_{bu}$ opisuje wpływ zbrojenia strzemionami.



Rys. 4.6. Zależność $M-\kappa$: a) z uwzględnieniem współpracy betonu i stali;
 b) w przekroju zarysowanym

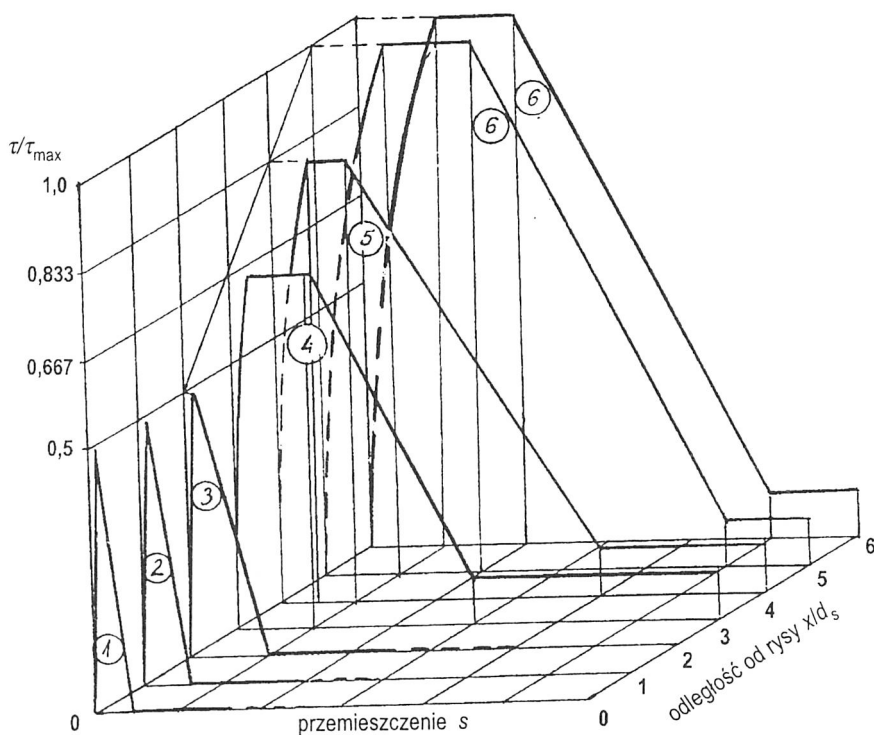
Fig. 4.6. Dependence $M-\kappa$: a) regarding of cooperation of concrete and reinforcing steel; b) in a section with crack

Zależność σ - ε w strefie rozciąganej przedstawiono w sposób uproszczony, gdyż jej wpływ na obliczanie momentów w przekrojach jest nieznaczący. Przyjmowany do obliczeń model stali uwzględnia dwa rodzaje stali: obrabianą na gorąco i na zimno.

Dla wybranego modelu numerycznego linia aproksymowana jest wieloma odcinkami prostymi (rys. 4.5). Parametrami modelu są wydłużalność stali A_s i stosunek wytrzymałości na rozciąganie do granicy plastyczności $R_m:R_e$. Na rysunku 4.5 przedstawiono charakterystyki materiałowe stali i betonu.

Uogólnione siły i przemieszczenia w belce określa się przy założeniu, że po zarysowaniu zmienia się jej sztywność. Obliczenia przeprowadza się numerycznie w dwóch etapach. Najpierw oblicza się zależność M - κ (moment-krzywizna) w przekroju zarysowanym, a następnie korzystając z zależności opisującej współpracę betonu i stali, oblicza się tak zwaną średnią wartość zależności M - κ_{sr} .

Na rysunku 4.6 przedstawiono zależność M - κ w przekroju zarysowanym (linia ciągła) oraz tę samą zależność z uwzględnieniem współpracy betonu i stali (linia przerywana). Na rysunku zaznaczono również przyjęte w tym modelu linie sztywności przy odciążeniu. Prawo współpracy wyrażone w postaci zależności naprężeń stycznych od



Rys. 4.7. Model współpracy betonu i stali [53]

Fig. 4.7. Model of cooperation of concrete and reinforced steel [53]

względnych przemieszczeń przedstawia rysunek 4.7. Jest to model empiryczno-analityczny opracowany przez Eligehausen, Popov, Bertero [53] – adaptowany między innymi przez autora [231, 232] w celu określania długości obliczeniowych przy obciążeniach pokrywających (obciążenia sejsmiczne). Jest on poprawny również w przypadku dużych wydłużeń plastycznych.

Dla tak przyjętych założeń wykonano numerycznie obliczenia przemieszczeń i sił wewnętrznych w belce ciągłej. Wyniki tych badań modelowych przedstawiono w następnym rozdziale.

4.3.2. Badania modelowe

Siły wewnętrzne obliczone na podstawie klasycznej teorii sprężystości różnią się od wielkości otrzymywanych doświadczalnie. Jest to widoczne szczególnie w tym przypadku, gdy sztywność na długości belki zmienia się nierównomiernie, np. gdy część belki znajduje się jeszcze w fazie pierwszej, podczas gdy inny odcinek pracuje już w fazie zarysowanej. Rozbieżności wynikają dodatkowo z rezygnowania niekiedy przez projektantów (na przykład ze względów ekonomicznych) z dokładnego stopniowania i odginania prętów zbrojeniowych.

Doświadczenia i obliczenia wykonywane zarówno na modelach nieliniowych, jak i sprężysto-plastycznych pokazały, w jaki sposób zbrojenie konstrukcji wpływa na jej pracę. Efektów tych, a także wynikających z nich skutków, nie uwzględnia aktualnie obowiązująca norma projektowania tych konstrukcji. Dokładniejsze obliczanie sił wewnętrznych i ich redystrybucji pozwala na:

- przewidywanie skutków dociążania konstrukcji i wykorzystanie rezerw nośności;
- unikanie nadmiernej koncentracji zbrojenia przez zamierzone przegrupowanie sił wewnętrznych z elementów konstrukcji bardziej obciążonych do mniej obciążonych.

Oprócz przedstawionych celów praktycznych zmierza się także do opracowania optymalnej metody obliczeń, która umożliwiłaby szybki i efektywny sposób wyznaczania deformacji i sił wewnętrznych w żelbetowych konstrukcjach prętowych. Badania tego typu prowadzi się również w ośrodkach zagranicznych przygotowujących europejską normę dotyczącą projektowania konstrukcji betonowych, żelbetowych i sprężonych. Wyniki wykorzystywane są zarówno w obowiązującej Polskiej Normie [192], jak i w projekcie PN [193] oraz w przygotowywanej europejskiej normie Eurocode 2 [57].

Jako przykład w polskiej literaturze można podać oryginalną teorię Kuczyńskiego [127], która zmierza do opracowania metody obliczeń za pomocą zmian sztywności opisanych jednoparametrowo, parametrami φ lub ψ . Obie metody opierają się na podobnych założeniach, z których najważniejszym jest przyjęcie kontynuności zmian sztywności zarówno wzdłuż długości belki, jak i ze wzrostem poziomu obciążenia. Proces ten można opisać za pomocą następujących funkcji

- a) hipoteza liniowych zmian sztywności – mutacja φ

$$EJ(\xi) = EJ_0(1 - \varphi m) \quad (4.21)$$

b) hipoteza potęgowych zmian sztywności – mutacja ψ

$$EJ(\xi) = EJ_0(1 - \psi m) \quad (4.22)$$

gdzie: EJ_0 – sztywność początkowa belki nie obciążanej;
 $m = M/M_n$ – względny poziom obciążenia belki.

Rozwiązanie równania różniczkowego otrzymuje się w postaci:

$$v(\xi) = -\frac{1}{L^3} \iint \frac{M}{EJ_0(1 - \varphi m)} \partial \xi \partial \xi + c_1 \xi + c_2 \quad (4.23)$$

$$v(\xi) = -\frac{1}{L^3} \iint \frac{M}{EJ_0(1 - m^\psi)} \partial \xi \partial \xi + c_3 \xi + c_4 \quad (4.24)$$

gdzie c_1, \dots, c_4 są stałymi całkowania do rozwiązań numerycznych rozwijanymi w szeregu Taylora.

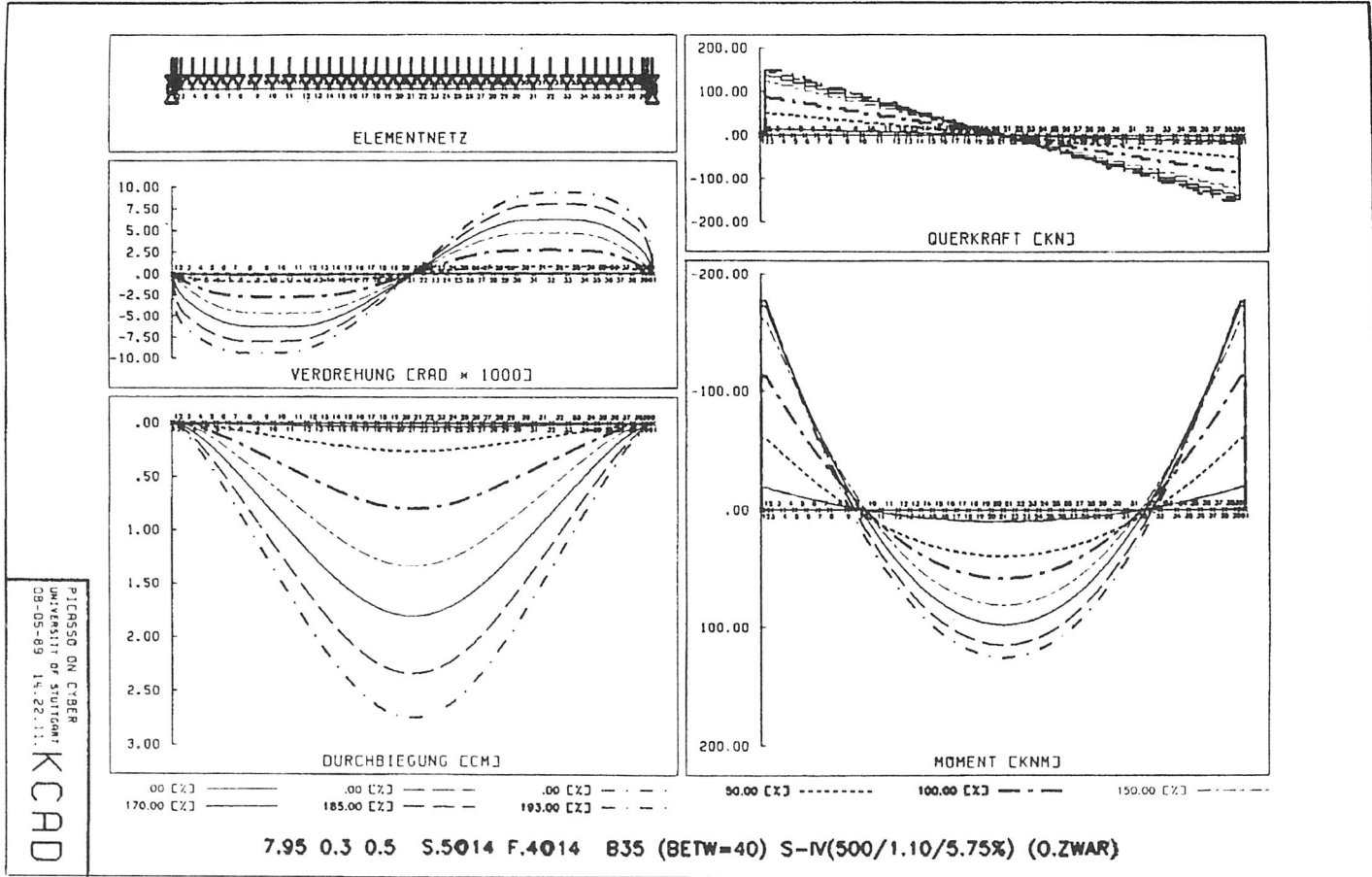
Jako przyczyny zmian sztywności belki żelbetowej Kuczyński podaje:

- zmienność modułu odkształcenia podłużnego betonu E_b ;
- zmienność momentu bezwładności J .

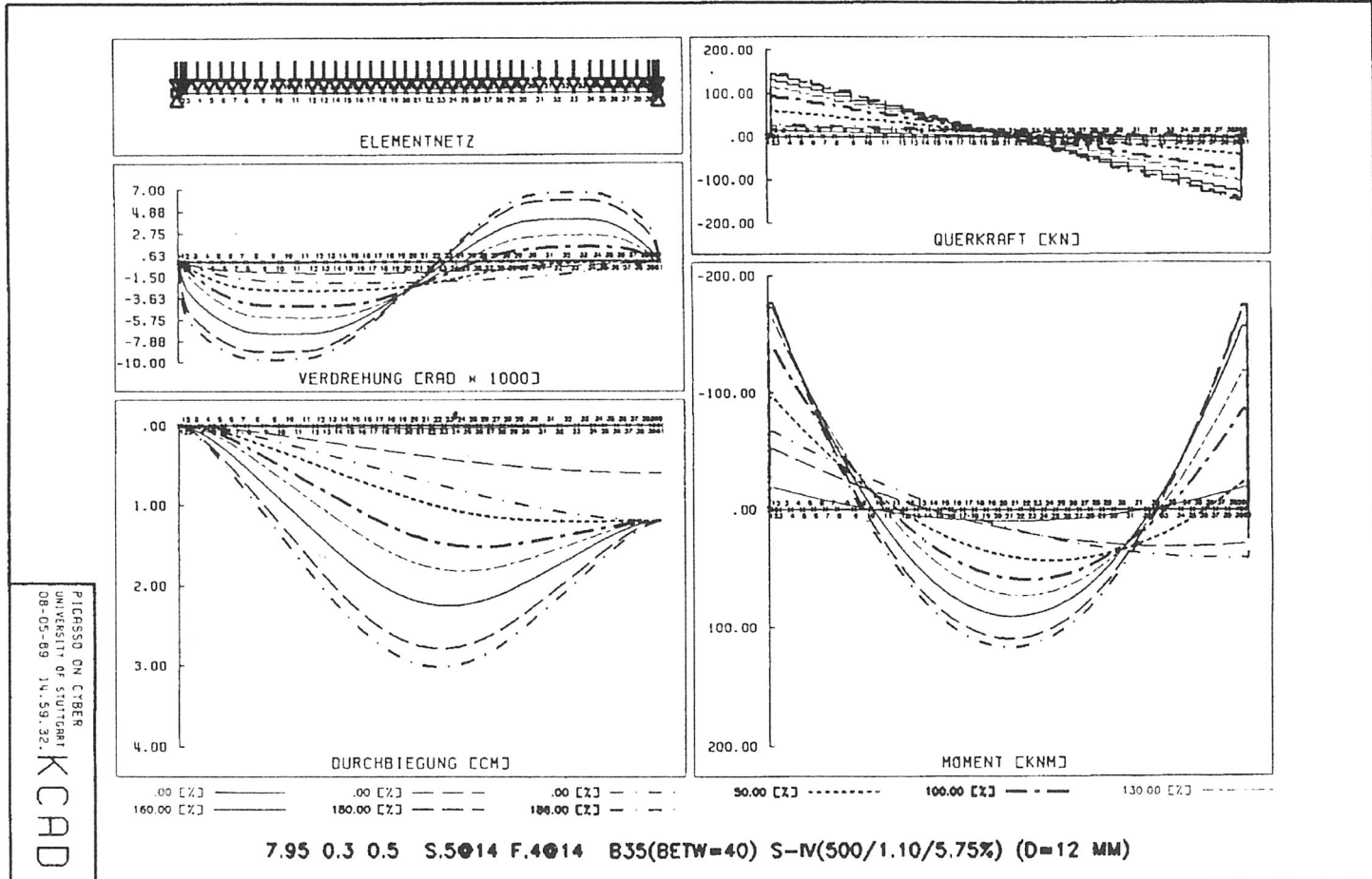
Autor niniejszej pracy proponuje nieco złagodzić rolę pierwszej z tych przyczyn, gdyż przy doświadczalnej realizacji cyklicznych, wolnozmiennych obciążeń badania wykonane na próbkach betonowych, w których cyklicznie wymuszano przemieszczenia, wykazały stosunkowo małą zmienność współczynnika sprężystości E_b . Małą zmienność E_b obserwowano również w stanach pokrywicznych (badania Tomczaka, Eissay i Ubysza).

Badania modelowe wykonano na przykładzie belki ciągłej o długości przęsła $l = 7,95$ m i wymiarach $h \times b = 0,50 \times 0,30$ m, wykonanej z betonu odpowiadającego w przybliżeniu klasie B-40. Obciążenie wzrastało na całej długości belki równomiernie. Analizowano moment podporowy przy różnej dystrybucji zbrojenia na podporze i w przęśle, przy czym sumaryczna ilość zbrojenia nie ulegała zmianie ($\mu^{\text{pod}} + \mu^{\text{prz}} = 0,924\%$). Zmieniało się również rodzaje stali, przyjmując materiał o różnej wydłużalności ($A_g = 3,25\%$; $4,75\%$; $5,75\%$; $7,50\%$) oraz o zmiennym stosunku wytrzymałości stali na rozciąganie do granicy plastyczności ($R_m:R_e = 1,05; 1,10; 1,15$). Otrzymane przez autora wartości uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych równomiernie obciążonej belki obustronnie utwierdzonej bez i z wymuszeniem przemieszczenia podpory przedstawiono na rys. 4.8 i 4.9.

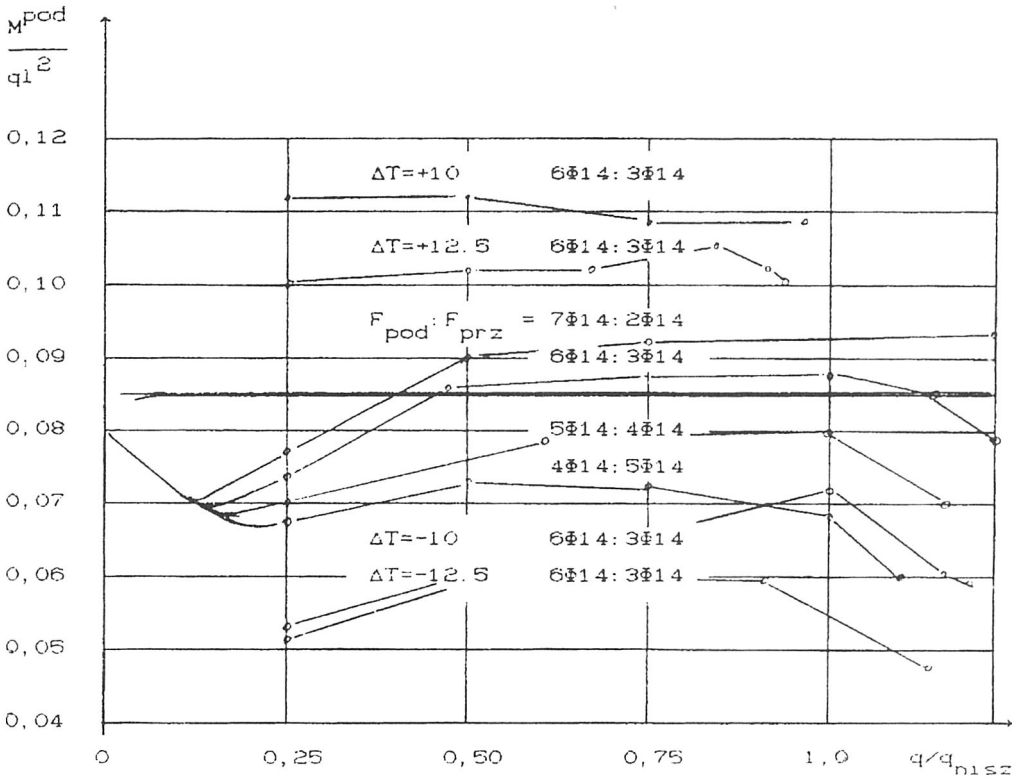
Również na podstawie badań własnych obliczono – korzystając z kontynualnego modelu zmian sztywności – wpływ stosunku rozkładu zbrojenia w przęśle i na podporze oraz wpływ siły wymuszającej na przegrupowanie sił wewnętrznych (momentów) w belkowym układzie statycznym (rys. 4.10). Pokazano również wpływ rozmieszczenia zbrojenia w przęśle i na podporze oraz wpływ parametrów odkształcalnościowych i wytrzymałościowych stali na jej nośność (rys. 4.11 i 4.12). Otrzymano dobrą zgodność z wynikami obliczeń metodą dyskretną [231].



Rys. 4.8. Wykresy uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych bez wymuszenia osiadania podpory
 Fig. 4.8. Diagram of generalized dislocations and internal forces without input function of settlement of support



Rys. 4.9. Wykresy uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych z wymuszeniem osiadania podpory $d = 12$ mm
 Fig. 4.9. Diagram of generalized dislocations and internal forces with input function of settlement of support $d = 12$ mm



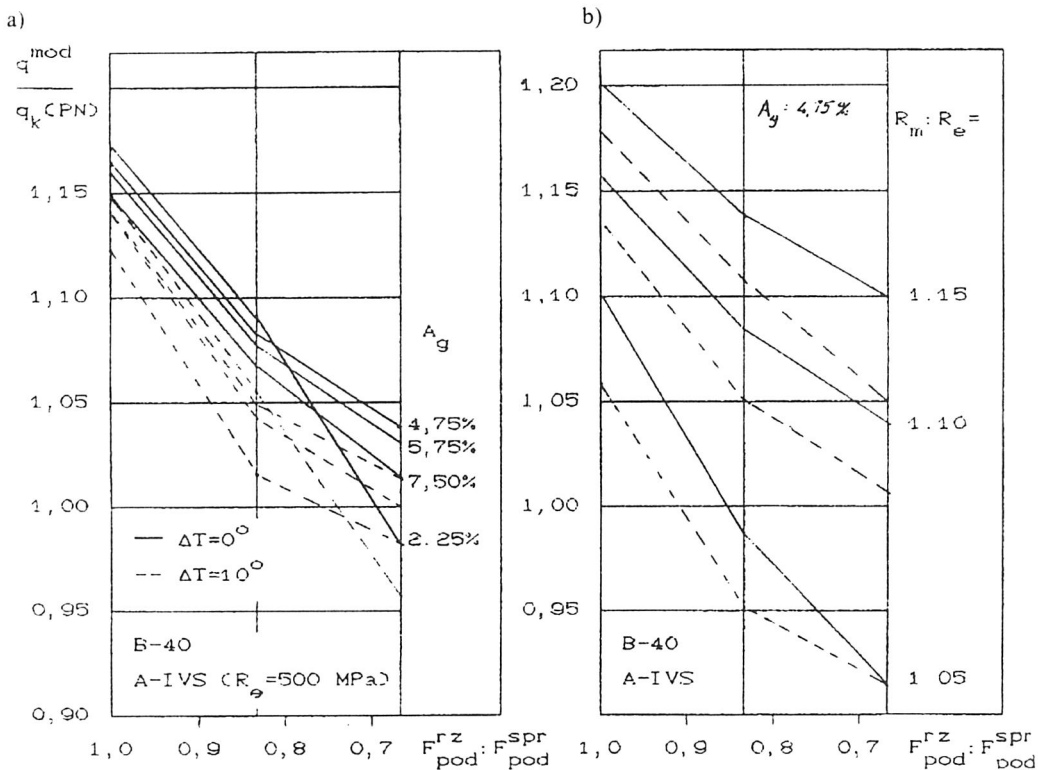
Rys. 4.10. Przegrupowanie momentów podporowych

Fig. 4.10. Redistribution of support moments

Najbardziej widoczne różnice występują w fazie przed zarysowaniem, gdyż model dyskretny zakłada na tym etapie sprężystą pracę konstrukcji, podczas gdy przedstawiony model kontynualny przyjmuje, że od początku obciążenia następuje przegrupowanie sił wewnętrznych. Zarysowanie pręśła powoduje wzrost względnej nośności podpory. Na rysunku 4.10 pokazano przegrupowanie momentów podporowych w zależności od poziomu obciążenia. Można zauważyć, że w przypadku zbrojenia sprężystozgodnego ($F_a^{pod}:F_a^{prz} = 6\phi 14:3\phi 14$) otrzymuje się nie tylko najmniejsze przegrupowanie momentów, ale również największą nośność belki. Na rysunku 4.11 pokazano także wpływ wymuszenia. Przedstawione wykresy pokazują przegrupowanie momentów w przypadku, gdy różnica temperatury na dolnej i górnej krawędzi belki wynosi $\Delta T = 10$ i $12,5^\circ$.

Na rysunku 4.11 przedstawiono wpływ rodzaju stali na nośność belki. Rysunek 4.11a pokazuje wpływ wydłużalności stali A_g , natomiast rysunek 4.11b – wpływ stosunku jej wytrzymałości do granicy plastyczności $R_m:R_e$.

Na rysunku 4.11a odmienny charakter wykresu w przypadku $A_g = 2,25\%$ wynika stąd, że przekrój ulega zniszczeniu wskutek wyczerpania nośności stali (w pozostałych przedstawionych przypadkach następuje zniszczenie betonu). Warto również zauważyć, że



Rys. 4.11. Wpływ rodzaju stali na nośność belki

Fig. 4.11. Influence of reinforced steel type on load capacity of beam

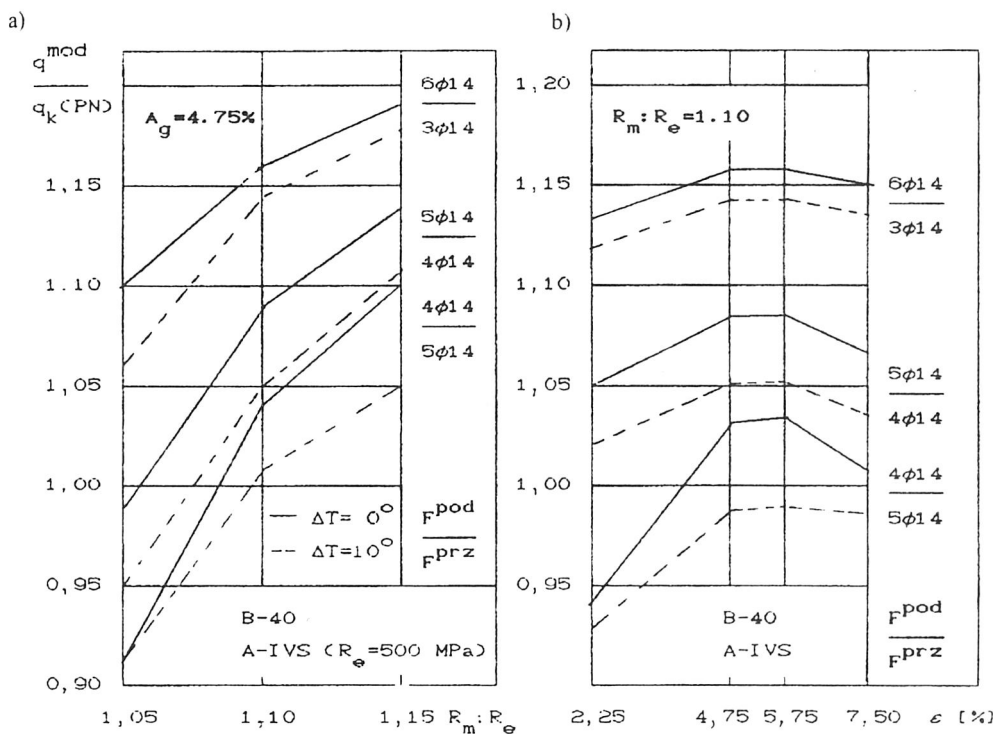
dla stosunku $R_m : R_e = 1,15$ (rys. 4.11b) nośność belki jest – mimo ponadtrzydziestoprocentowego przegrupowania zbrojenia – taka jak w przypadku stali dla $R_m : R_e = 1,05$ zbrojonej sprężystozgodnie.

Znając charakterystyki materiałowe, można za pomocą przedstawionego modelu stosunkowo dokładnie wyznaczyć przemieszczenia i nośność belek żelbetowych oraz określić rezerwę nośności w przypadku obciążeń wyjątkowych. Nośność konstrukcji jest tym większa, im bardziej wzrasta stosunek wytrzymałości stali na rozciąganie do granicy plastyczności $R_m : R_e$.

Mała wydłużalność stali A_g decyduje o zmniejszeniu nośności wówczas, gdy zniszczenie następuje przez zerwanie stali zbrojeniowej (na przykład przy niskim stopniu zbrojenia lub rozmieszczeniu zbrojenia znacznie odbiegającym od sprężystozgodnego). Największe rezerwy nośności występują przy sprężystozgodnym rozmieszczeniu zbrojenia w belce.

Podobne badania przeprowadzono dla jednoprzęsłowej belki obustronnie utwierdzonej, która reprezentuje dwuprzęsłową belkę ciągłą równomiernie obciążoną na całej dłu-

gości. Siła wymuszająca, realizowana przez osiadanie podpór, stymuluje różnice temperatur $\Delta T = 10^\circ$. W przedstawionym przykładzie zmieniano wytrzymałość i wydłużalność stali. Geometria, schemat statyczny i beton pozostawały niezmienione. Wyniki przedstawiono na rysunku 4.12.



Rys. 4.12. Zależność nośności od: a) wydłużalności stali A_g ;
b) stosunku wytrzymałości i granicy plastyczności $R_m:R_e$

Fig. 4.12. Dependence of load capacity from: a) elongation of reinforcing steel A_g ;
b) ratio of resistance of yield point $R_m:R_e$

Przedstawiają one zależność nośności od wydłużalności stali i od stosunku wytrzymałości stali do jej granicy plastyczności. Z wyników tych można wnioskować o rezerwach nośności w przypadkach różnego sposobu zbrojenia belek.

4.3.3. Uwagi uzupełniające

Znajomość efektu przegrupowania sił wewnętrznych jest, jak dotychczas, mało wykorzystana przy projektowaniu. Wynika to między innymi z dość pasywnego podejścia do takiego projektowania w normach technicznych. Przedstawione badania wykonał autor w ramach prac mających na celu przygotowanie projektu europejskiej normy projektowania konstrukcji żelbetowych.

Ich praktyczną konsekwencją jest lepsza znajomość rzeczywistego rozkładu sił wewnętrznych w pracujących konstrukcjach prętowych oraz dodatkowe informacje o rezerwie nośności konstrukcji przy obciążeniach wyjątkowych lub nieprojektowanych (na przykład nierównomierne osiadanie konstrukcji). Bardziej szczegółowymi dokonania-
mi są:

- określenie minimalnego stopnia zbrojenia z uwzględnieniem możliwości występowania obciążeń wyjątkowych;
- określenie optymalnych parametrów stali w tych warunkach (wytrzymałość na rozciąganie, granica plastyczności, wydłużalność);
- ograniczenie stopnia przegrupowania sił wewnętrznych w niektórych rodzajach konstrukcji.

4.4. Model dyskretny

4.4.1. Założenia i opis metody

Odmienne w założeniach jest modelowanie oparte na modelu dyskretnym, w którym zastosowano założenia Borcza [26], przedstawione obszerniej w rozdziale 1.3:

- W modelu dyskretnym zginanej belki żelbetowej przyjęto model betonu odpowiadający odkształceniu podczas wielokrotnych obciążeń. Związane jest to z potrzebą uwzględnienia rys w strefach rozciąganych betonu oraz z koniecznością uwzględnienia efektów pochodzących z niesprężystych cech betonu. Z dobrym przybliżeniem można wówczas przyjąć model jak dla materiału sprężystego, na który nakładają się odkształcenia niesprężyste. Deformacje całkowite są sumą deformacji sprężystych oraz resztkowych.

- Kolejnym założeniem jest to, iż współczynnik sprężystości betonu nie zależy od poziomu obciążenia, lecz od wieku betonu.

- Niesprężyste deformacje betonu opisuje się za pomocą współczynników związanych z zachowaniem się rysy.

- Nieliniowe, niesprężyste odkształcenia betonu wymuszają powstanie samonaprężeń pochodzących od nieliniowych deformacji niesprężystych spowodowanych obciążeniem, a także od skurczu betonu, deformacji temperaturowych i wilgotnościowych.

- Rysy w strefach rozciąganych mają wpływ na sztywność konstrukcji, dlatego następstwa pojawienia się ich w betonie zostały opisane w sposób dyskretny, z uwzględnieniem każdej rysy.

- Przekrój belki (pręta) między rysami jest traktowany obliczeniowo jak w fazie niezarysowanej.

Dyskretyzacja układu umożliwia znaczne uproszczenie modelowania żelbetowych konstrukcji prętowych, także w przypadku, gdy uwzględni się siłę osiową i efekty dynamiczne. Metoda obliczeń opiera się na wykorzystaniu znanej w mechanice budowli tak zwanej macierzy przeniesienia [199]. Macierz przeniesienia opracowano do obli-

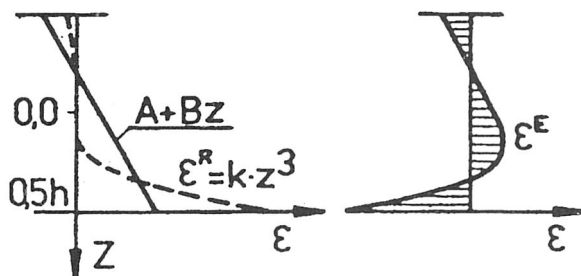
czania sił wewnętrznych w prętach jednorodnych o odcinkowo stałej sztywności. Przez wprowadzenie funkcji uogólnionych rozszerzono tutaj zakres metody na żelbetowe konstrukcje prętowe, tak aby uwzględniała ona najważniejsze elementy wyróżniające ten rodzaj konstrukcji (jak np. współpraca betonu i stali, możliwość wystąpienia rys).

4.4.2. Model przekroju betonowego i żelbetowego

Jak wspomniano w rozdziale 2.4, Borcz rozszerzył pojęcie samonaprężeń w betonie, w którym zrównoważone naprężenia wewnętrzne spowodowane czynnikami procesu wiązania i twardnienia betonu uzupełnił o samonaprężenia wywołane niesprężystymi deformacjami betonu. Z przyjętej w niniejszym modelu zależności σ - ϵ wynika, że ze wzrostem poziomu obciążenia wzrastają deformacje trwałe. Przy odciążeniu założone jest spełnienie warunku nierozdzielności:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (4.25)$$

Zakłada się, że w konstrukcjach obciążanych doraźnie współczynnik sprężystości przyjmuje w przekrojach niezarysowanych stałą wartość. Dlatego przy nieosiowym obciążaniu w przekrojach przeciążanych do wyższego poziomu nierównomiernemu wzrostowi naprężeń towarzyszy nierównomierny przyrost deformacji. Zjawisko to obserwuje się na przykład w słupach ściskanych mimośrodowo lub w zginanych belkach (rys. 4.13).



Rys. 4.13. Rozkład odkształceń w zginanym przekroju betonowym w zależności od liniowego rozkładu naprężeń [26]

Fig. 4.13. Distribution of strains in bent concrete-section as a function linear distribution of stresses [26]

Jeżeli w zależności (4.25) pominiemy się odkształcenia $\left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)$ i $\frac{\partial v}{\partial z}$ jako małe oraz dwukrotnie ją scałkuje, to wyrażony rozkład odkształceń na wysokości belki przyjmie zależność liniową

$$\epsilon^T = Bz + A = \epsilon^E + \epsilon^R, \quad (4.26)$$

gdzie: ε^T – całkowite odkształcenia betonu w przekroju;
 ε^E – sprężyste odkształcenia betonu w przekroju;
 ε^R – trwałe odkształcenia betonu w przekroju.

Jeżeli z (4.26) wyznaczy się odkształcenia sprężyste „uwięzione” w przekroju i zastosuje prawo Hooke’a, to otrzyma się wartość samonaprężeń w zależności od rzędnej wysokości przekroju

$$\sigma^R = E_b(Bz + A - \varepsilon^R) \quad (4.27)$$

Samonaprężenia stanowią układ samozrównoważony i z założenia spełniają warunki:

$$\int \sigma^R dF = 0 \quad (4.28)$$

$$\int \sigma^R z dF = 0 \quad (4.29)$$

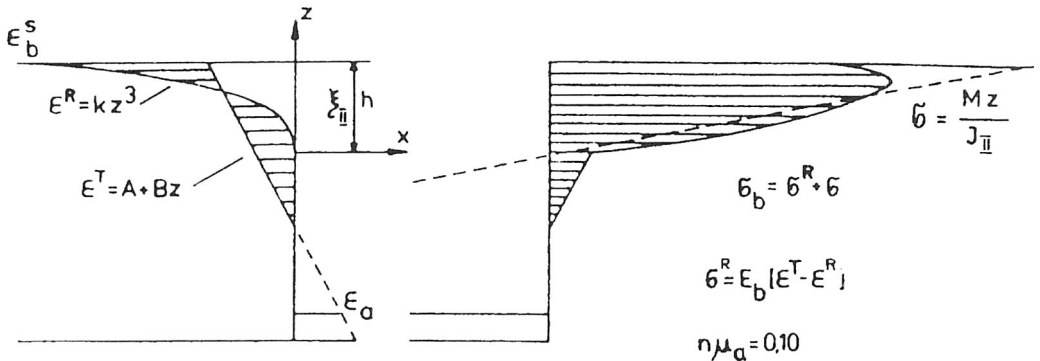
z których można wyznaczyć stałe A i B . Dla przekroju zarysowanego stałe te wynoszą:

$$A = \frac{\varepsilon^s \xi_{II}}{4(\xi_{II} + n\mu)}, \quad (4.30)$$

$$B = \frac{\varepsilon^s \xi_{II}}{5h_0 \left[\frac{\xi_{II}^3}{3} + n\mu(1 - \xi_{II})^2 \right]} \quad (4.31)$$

gdzie: ξ_{II} – bezwymiarowa wysokość strefy ściskanej zarysowanego przekroju,
 $\varepsilon^s = \varepsilon^R(\xi_{II}/\xi)^3$ – rozkład deformacji reszkowych w strefie ściskanej.

Rozkład samonaprężeń w przekroju zarysowanym przedstawia rysunek 4.14.



Rys. 4.14. Rozkład naprężeń w zarysowanym przekroju żelbetowym [26]

Fig. 4.14. Distribution of stresses in reinforced cracked concrete section [26]

Rysunek ten objaśnia między innymi jeden z wniosków teorii Borcza, że naprężenia ściskające w skrajnych włóknach są zredukowane o wartość samonaprężenia, natomiast naprężenia w zbrojeniu z tego samego powodu wzrastają.

4.4.3. Samonaprężenia w modelu dyskretnym*

4.4.3.1. Nieliniowy model betonu i stali

Jedną z metod numerycznego obliczania samonaprężeń w przekroju żelbetowym opracował Trochanowski [228]. Wychodząc z ogólnych zależności przedstawionych w rozdziale 3, zaproponował on model betonu, w którym całkowite odkształcenia resztkowe przedstawia zależność (rys. 4.15 – por. Biliszczuk [13]):

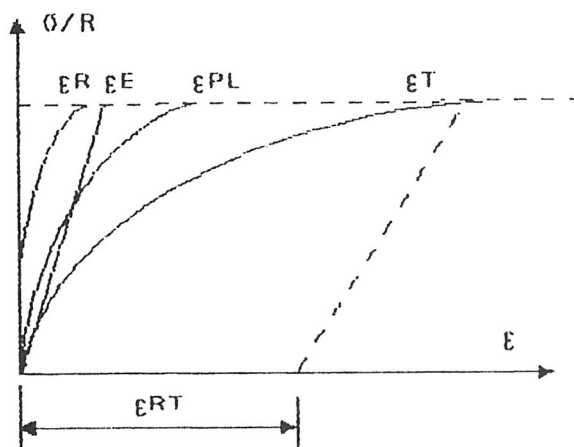
$$\varepsilon^T = \varepsilon^R + \varepsilon^{pl} + \varepsilon^{reo} \quad (4.32)$$

gdzie: ε^T – odkształcenia całkowite;

ε^R – odkształcenia resztkowe wywołujące samonaprężenia;

ε^{pl} – nieliniowe odkształcenia plastyczne;

ε^{reo} – pozostająca część odkształceń od pełzania.



Rys. 4.15. Zależność σ - ε dla betonu (por. [13])

Fig. 4.15. Dependence σ - ε for concrete (see [13])

W modelu w sposób zamierzony ograniczono się do stałego współczynnika pełzania:

$$\varepsilon^{reo} = 0,8\varepsilon^\varphi \quad (4.33)$$

gdzie: ε^φ – odkształcenia od pełzania.

*Materiał przedstawiony w p. 4.4.3 opracował Trochanowski [24, 228], posługując się modelami numerycznymi.

Odształcenia resztkowe łącznie z dodatkowymi odkształceniami sprężystymi mają liniowy rozkład:

$$A + Bz = \varepsilon^R + \varepsilon^E \quad (4.34)$$

i stąd wartość samonaprężeń oblicza się z zależności

$$s^R = E_b \varepsilon^E = E_b (A + Bz - \varepsilon^R) \quad (4.35)$$

Przyjęto, że rozkłady odkształceń resztkowych opisują równania

$$\varepsilon^R = kz^6 \quad (4.36)$$

$$\varepsilon^{pl} = k_1 z^6$$

w których: $z = \sigma/R_{bk}$ dla ściskania; $z = \sigma/R_{bzk}$ dla rozciągania.

Całkowite odkształcenia betonu wynoszą zatem:

$$\varepsilon^T = kz^6 + k_1 z^6 + \varepsilon^E = \varepsilon^\varphi \quad (4.37)$$

Zależność σ - ε dla stali przyjmuje Trochanowski jako model dwuliniowy (rys. 4.16).

4.4.3.2. Samonaprężenia w elemencie betonowym

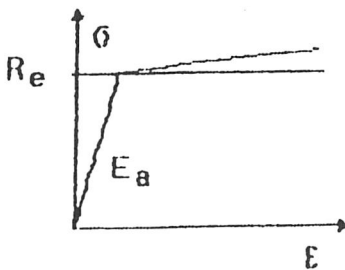
Dla zginanej belki betonowej otrzymuje się rozkład naprężeń jak na rysunku 4.17.

W przypadku ściskania w równaniu (4.36) $k = k_c$, natomiast w przypadku rozciągania $k = k_r$. Odkształcenia resztkowe można wyrazić za pomocą wysokości przekroju

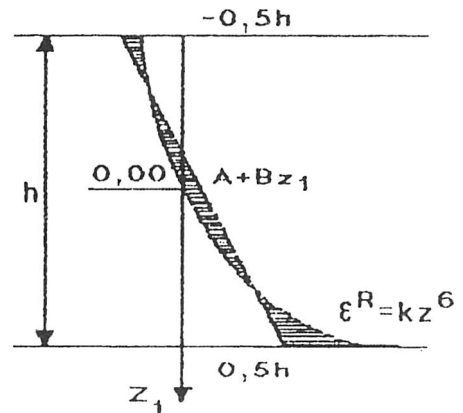
$$\varepsilon^R = k \frac{Mz_1}{J_b R_{bk}} \quad (4.38)$$

gdzie: $k = -k_c$, gdy $z_1 < 0$;

$k = k_r$, gdy $z_1 > 0$.



Rys. 4.16. Zależność σ - ε dla stali
Fig. 4.16. Dependence σ - ε for reinforced steel



Rys. 4.17. Samonaprężenia w belce betonowej
Fig. 4.17. Self-stressed in a concrete beam

Stałe A i B wyznacza się z warunków równowagi:

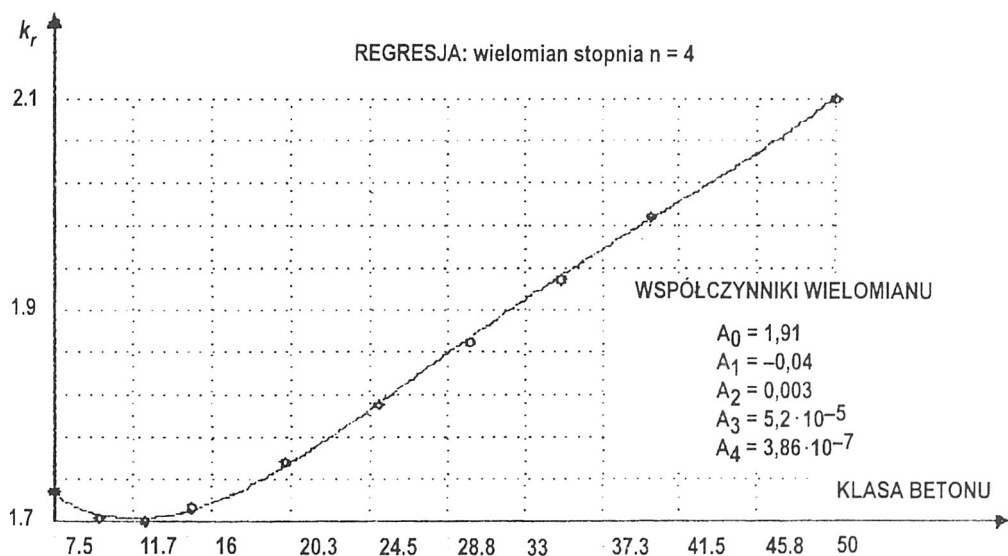
$$\int \sigma^R dF = E_b \int [A + Bz_1 - \varepsilon^R(z_1) b dz_1] = 0$$

$$\int \sigma^R z_1 dF = E_b \int [A + Bz_1 - \varepsilon^R(z_1) b z_1 dz_1] = 0 \quad (4.39)$$

Współczynniki k_c i k_r można wyznaczyć doświadczalnie. Z pomiaru momentu rysującego można wyznaczyć naprężenia sprężyste na rozciąganej krawędzi przekroju:

$$\sigma_E = \frac{Mz}{J_b} \quad (4.40)$$

Naprężenia całkowite są równe wytrzymałości betonu na rozciąganie. Przyjmując moment rysujący na podstawie normy [norma pn], aproksymowano zależność k_r od wytrzymałości betonu (rys. 4.18).



Rys. 4.18. Zależność współczynnika k_r od klasy betonu

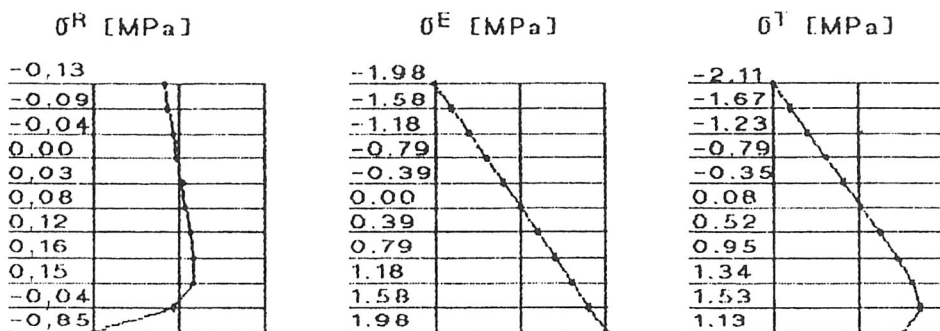
Fig. 4.18 Dependence of the coefficient k_r on the class of concrete

Naprężenia w przekroju betonowym zależne od klasy betonu przedstawiają rysunki 4.19–4.20.

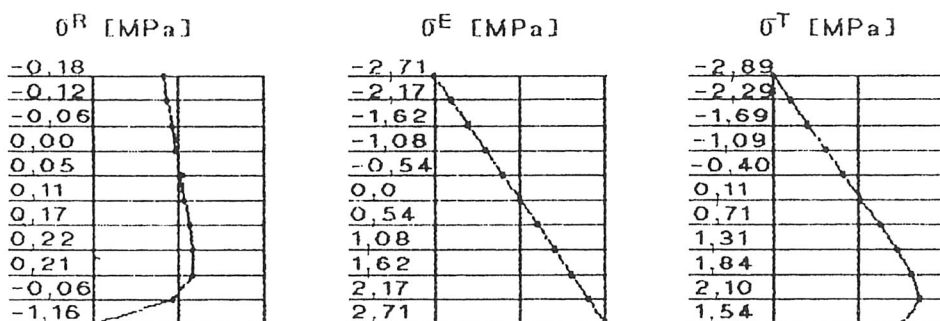
4.4.3.3. Samonaprężenia w elemencie żelbetowym

Rozkład samonaprężeń w belce żelbetowej przedstawia rysunek 4.21.

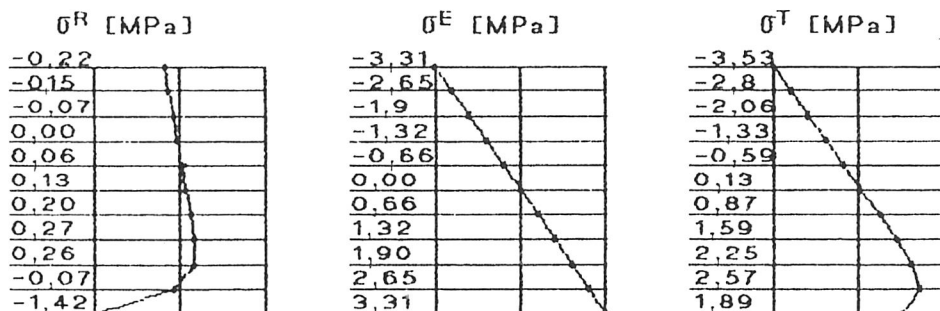
Przebieg odkształceń resztkowych przyjęto jak dla przekroju betonowego, rozpatrując tylko ścisną strefę przekroju. W warunkach równowagi uwzględnia się dodatkowo odkształcenia resztkowe stali ε_a^R .



Wyniki obliczeń samonapreżeń dla betonu B-15

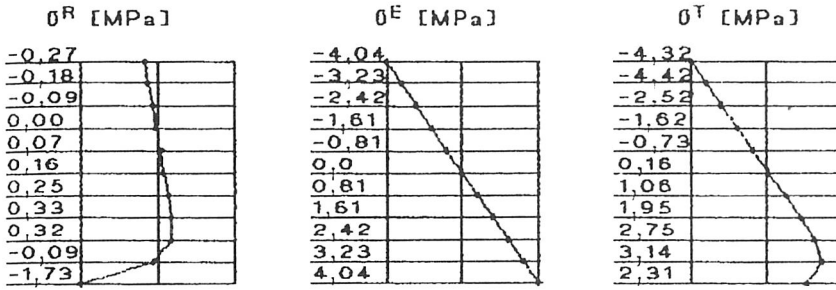


Wyniki obliczeń samonapreżeń dla betonu B-25

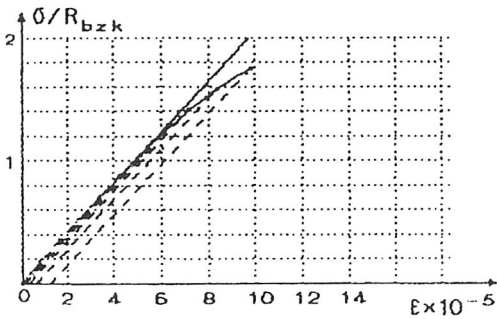
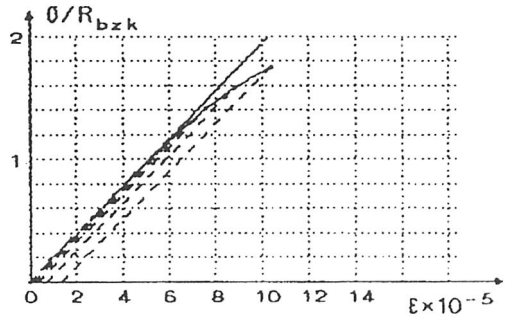
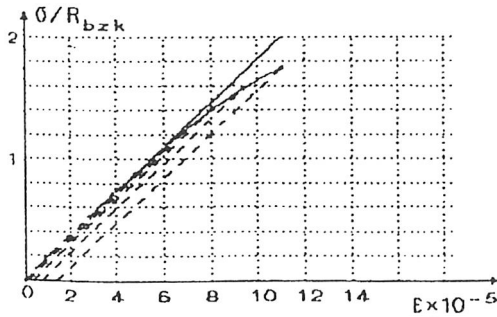
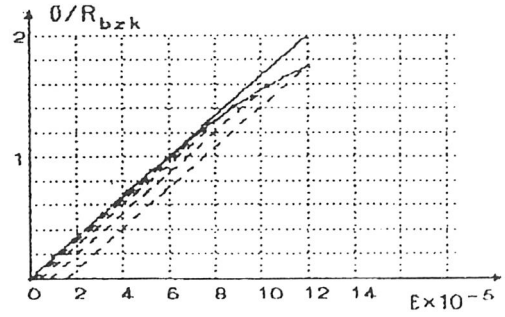


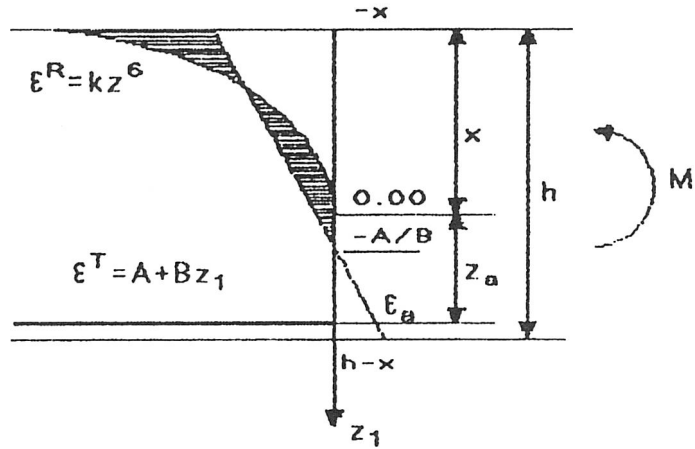
Wyniki obliczeń samonapreżeń dla betonu B-35

Rys. 4.19. Naprężenia w przekroju betonowym zależne od klasy betonu
 Fig. 4.19. Stresses in a concrete section dependent on the concrete class

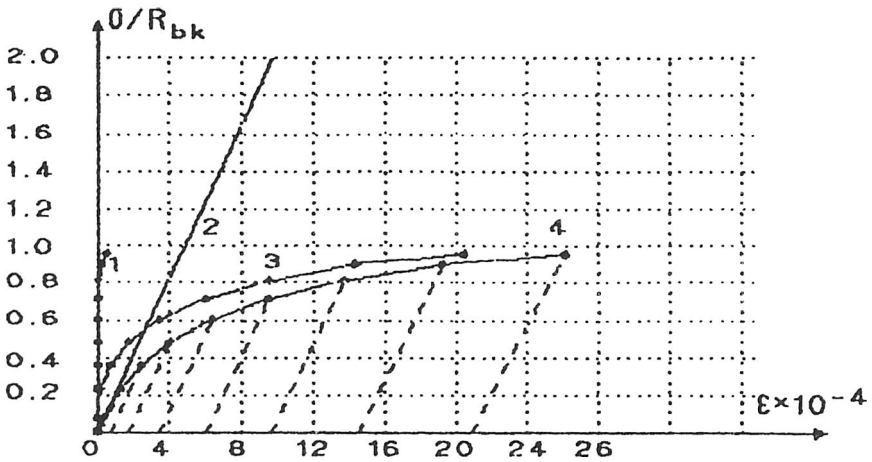


Wyniki obliczeń samonapreżeń dla betonu B-50

Zależność σ - ϵ dla
betonu B-15Zależność σ - ϵ dla
betonu B-25Zależność σ - ϵ dla
betonu B-35Zależność σ - ϵ dla
betonu B-50Rys. 4.20. Naprężenia w przekroju betonowym zależne od klasy betonu
Fig. 4.20. Stresses in a concrete section dependent on the concrete class



Rys. 4.21. Rozkład samonaprężeń w belce żelbetowej
Fig. 4.21. Self-stresses distribution in a reinforced concrete beam



Rys. 4.22. Przyjęty do obliczeń model betonu; 1 – odkształcenia resztkowe, 2 – odkształcenia sprężyste; 3 – odkształcenia plastyczne, 4 – odkształcenia całkowite
Fig. 4.22. Model of concrete assumed to calculations

$$\int \sigma^R dF = E_b \int [A + Bz_1 - \varepsilon^R(z_1)bdz_1] + E_a F_a (A + Bz_1 - \varepsilon_a^R) = 0$$

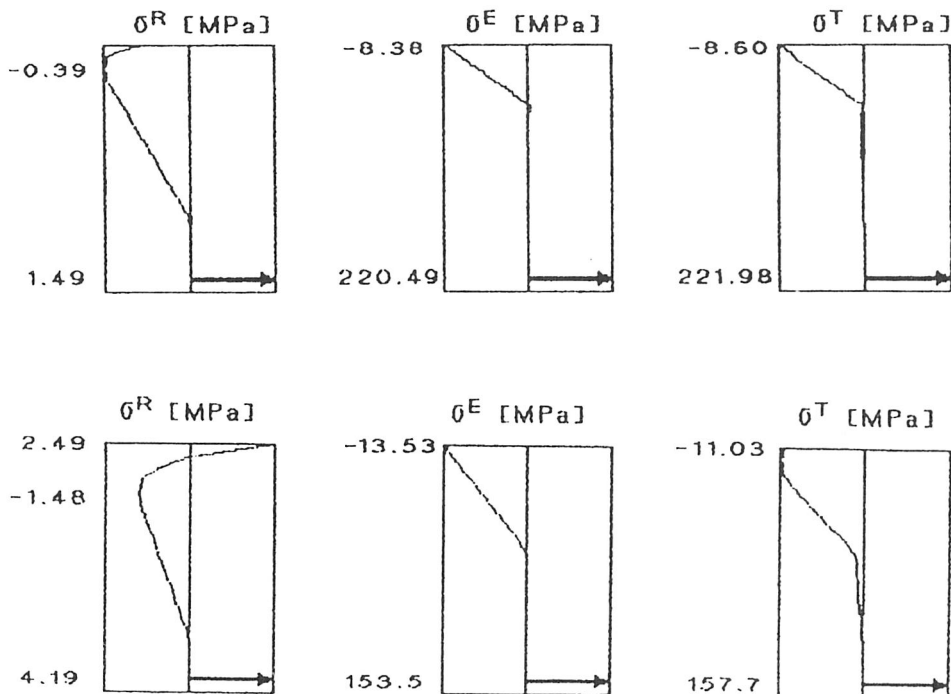
$$\int \sigma^R z_1 dF = E_b \int [A + Bz_1 - \varepsilon^R(z_1)bz_1 dz_1] + E_a F_a (A + Bz_1 - \varepsilon_a^R)z_a = 0 \quad (4.41)$$

gdzie: z_a – odległość od osi obojętnej do osi zbrojenia rozciąganego.

Dla modelu betonu jak na rysunku 4.22 otrzymuje się następujące wartości rozkładu naprężeń w przekroju pokazane na rys. 4.23.

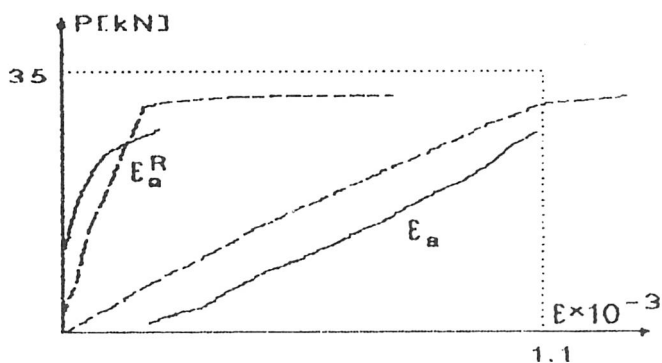
beton B-15, stal Rak = 220, dla

a) $\mu = 0.5\%$, $M = 29 \text{ kNm}$, b) $\mu = 2\%$, $M = 75 \text{ kNm}$



Rys. 4.23. Rozkład naprężeń w zarysowanym przekroju żelbetowym

Fig. 4.23. Distribution of stresses in a cracked RC section



Rys. 4.24. Zmierzone i obliczeniowe naprężenia w stali

Fig. 4.24. Measured and computed values of stresses in reinforced steel

Dokonano porównania obliczeniowych i zmierzonych wartości odkształceń całkowitych i reszkowych w prętach zbrojeniowych. Wyniki doświadczalne zaznaczono linią przerywaną (rys. 4.24).

4.4.4. Badania modelowe

Element zginany

Opis zjawisk zachodzących w obszarze poza sprężystym zakresem pracy belki wymaga wprowadzenia do równań z teorii sprężystości wielkości charakteryzujących deformacje trwałe. Borcz wprowadził do równania różniczkowego linii ugięcia operator opisujący defekty pochodzące od zarysowania.

$$Lv(\xi) = p(\xi) + D \quad (4.42)$$

gdzie: L – operator różniczkowy jak dla konstrukcji sprężystej,
 $p(\xi)$ – obciążenie konstrukcji,
 D – operator opisujący defekt pochodzący od zarysowania w klasie funkcji uogólnionych.

Defekty pochodzące od zarysowania opisywane przez operator D należy rozumieć dość szeroko. Operator D zawiera bowiem wszystkie efekty związane ze sprężystym rozwarciem rysy i deformacjami trwałymi, wprowadzone do modelu matematycznego dyskretnie w punkcie występowania rysy (rzeczywistym lub teoretycznym). Operator D w modelu zaproponowanym przez Borcza ma postać sumy funkcji dystrybucji:

$$D = D(M) + D(T) + D(M_0) \quad (4.43)$$

gdzie: $D(M)$ – uwzględnia rysy od momentów zginających:

$$D(M) = \sum r_i \delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i) \quad (4.44)$$

$D(T)$ – uwzględnia rysy od sił poprzecznych

$$D(T) = \sum t_k \delta_{,\xi\xi\xi}(\xi - \zeta_k) \quad (4.45)$$

$D(M_0)$ – uwzględnia redystrybucję momentów (wielkości hiperstatycznych)

$$D(M_0) = \sum m_{0j} \delta_{,\xi}(\xi - \zeta_j) \quad (4.46)$$

$\delta(\xi - \zeta_0)$ jest funkcją dystrybucji (delta Diraca – klasa funkcji uogólnionych) oraz r_i – współczynniki określające dyslokację kątową w punkcie zarysowania;

$$r_i = -r_{0i} + r_{1i} \nu_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) \quad (4.47)$$

t_k – współczynniki określające dyslokację liniową w punkcie zarysowania;

$$t_k = -r_{0k} + r_{1k} \nu_{,\xi\xi\xi}(\zeta_k^-) \quad (4.48)$$

r_{0i}, t_k – parametr charakteryzujący deformacje trwałe sprowadzone do punktu zarysowania;

r_{1i}, r_{1k} – współczynniki proporcjonalności pomiędzy dyslokacją kątową i liniową a uogólnionymi siłami wewnętrznymi $M(\xi - \zeta_i)$ oraz $T(\xi - \zeta_k)$.

Metoda zakłada możliwy podział pręta na dowolną liczbę odcinków o stałej sztywności. Odcinki te są połączone ze sobą warunkami zgodności przemieszczeń i sił. Punktem wyjścia jest równanie linii ugięcia zginanego pręta sprężystego, które przy założeniu stałej sztywności na poszczególnych odcinkach przyjmuje postać:

$$EJ(\xi) \frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} = p(\xi) \quad (4.49)$$

gdzie: ξ – bezwymiarowa współrzędna,

$EJ(\xi)$ – sztywność pręta,

$v(\xi)$ – ugięcie,

$p(\xi)$ – obciążenie zewnętrzne.

W przypadku konstrukcji żelbetowej pojawiają się niejednorodności wynikające zarówno ze struktury samego materiału, jak i z warunków pracy. Efekty te są traktowane globalnie jako dodatkowe obciążenie zewnętrzne i równanie (4.42) – wyrażone w klasie funkcji uogólnionych – przyjmuje postać:

$$EJ(\xi) \frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} = p(\xi) + \sum_i r \delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i) \quad (4.50)$$

gdzie: $r = r_0 + r_1 v_{,\xi\xi}(\xi_i)$

r_0 – współczynnik opisujący trwałe deformacje w pręcie,

r_1 – współczynnik opisujący sprężyste deformacje w pręcie,

ξ_i – rzeczywiste lub przewidywane miejsce wystąpienia niejednorodności,

i – rzeczywista lub teoretycznie obliczona, oczekiwana liczba niejednorodności.

Równanie to, prawdziwe dla każdego z odcinków, na który został podzielony pręt (belka), przyjmuje dla k -tego elementu postać:

$$EI(\xi) \frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} \Big|_k = p(\xi) + \sum_i r \delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i). \quad (4.51)$$

Rozwiązanie tego równania składa się z części opisującej ugięcie sprężyste belki i części opisującej nieciągłość (np. defekt pochodzący od rysy). We współczynniku r_i mogą być uwzględnione deformacje trwałe, reologiczne i sprężyste. Jeżeli odkształcenia trwałe i reologiczne rozpatruje się łącznie, a sprężyste w rysie prostopadłej uzależnia się – zgodnie z założeniem Borcza – od momentu zginającego działającego w zarysowanym przekroju, to deformacje w tym przekroju można opisać zależnością:

$$r' = -r'_0 - r'_1 M(\zeta_i) \quad (4.52)$$

Moment zginający jest wielkością ciągłą. Jeżeli jednak zostanie on wyrażony jako iloczyn krzywizny i sztywności:

$$M(\zeta_i) = -EJ(\zeta_i)v_{,\xi\xi}(\zeta_i) \quad (4.53)$$

to wyrażenie traci sens, gdyż krzywizna jest w tym miejscu nieoznaczona. Krzywiznę należy więc wyrazić za pomocą jej jednostronnej granicy:

$$r = -r_0 - r_1 v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) \quad (4.54)$$

gdzie: $v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) = \lim_{\xi \rightarrow \zeta_i^-} v_{,\xi\xi}(\xi)$.

Po czterokrotnym scałkowaniu równanie (4.51) przyjmie postać wielomianu, którego stałe wynikają z warunków brzegowych. W ten sposób można dla każdego z odcinków wyznaczyć uogólniony wektor przemieszczeń i sił na końcu elementu za pomocą wektora parametrów początkowych. Dla jednego elementu całkę ogólną otrzymuje się również w klasie funkcji uogólnionych:

$$v(\xi) = \frac{1}{L}\delta_0 + \xi\varphi_0 - \frac{\xi^2 L}{2EJ}M_0 - \frac{\xi^3 L^2}{6EJ}T_0 + \bar{v}(\xi) + \sum_i r_i(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \quad (4.55)$$

gdzie: $v(\zeta_i)$ – całka szczególna równania różniczkowego spełniająca zerowe warunki początkowe,

$h(\xi - \zeta_i)$ – funkcja Heaviside'a.

Wyrażenie na krzywiznę ma postać:

$$v_{,\xi\xi}(\xi) = -\frac{L}{EJ}M_0 - \frac{\xi L^2}{EJ}T_0 + \overline{v_{,\xi\xi}}(\xi) + \sum_i \{[-r_{0i} + r_{1i}v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-)]\delta(\xi - \zeta_i^-)\} \quad (4.56)$$

a po podstawieniu współrzędnych rysy otrzymujemy

$$v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) = -\frac{L}{EJ}M_0 - \frac{\xi L^2}{EJ}T_0 + \overline{v_{,\xi\xi}}(\zeta_i^-) \quad (4.57)$$

Po podstawieniu równania (4.57) do równania (4.54) otrzymuje się ostatecznie:

$$\begin{aligned} v(\xi) = & \frac{1}{L}\delta_0 + \xi\varphi_0 + \left[-\frac{\xi^2 L}{2EJ} - \sum_i r_{1i} \frac{L}{EJ}(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \right] M_0 \\ & + \left[-\frac{\xi^3 L^2}{6EJ} - \sum_i r_{1i} \zeta_i \frac{L^2}{EJ}(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \right] T_0 \\ & + \left[\bar{v}(\xi) + \sum_i r_{1i} \overline{v_{,\xi\xi}}(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) + \sum_i -r_{0i}(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \right] \end{aligned} \quad (4.58)$$

Różniczkując otrzymane przemieszczenie (4.58) względem ξ otrzymuje się wektor $\{\mathbf{u}(\xi)\}$. Rozwiązanie to można zapisać także w postaci macierzowej jako sumę rozwiązania dla modelu konstrukcji jednorodnej i zarysowanej:

$$\{\mathbf{u}(\xi)\} = [\mathbf{F}_E(\xi) + \mathbf{F}_{\text{res}}(\xi)] \{\mathbf{u}_0\} + \{\mathbf{u}'(\mathbf{x})\} \quad (4.59)$$

gdzie $\mathbf{F}_E(\xi)$ jest macierzą dla układu sprężystego

$$[\mathbf{F}_E(\xi)] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & \xi & \frac{-\xi^2 L}{2EJ} & \frac{-\xi^3 L^2}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{-\xi^2 L}{2EJ} & \frac{-\xi^2 L^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & L & \xi L^2 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

a $\mathbf{F}_{\text{res}}(\xi)$ dopełnieniem macierzy o deformacje niesprężyste

$$[\mathbf{F}_{\text{res}}(\xi)] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_i r_{1i}(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) & -\sum_i r_{1i}\zeta_i(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \\ 0 & 0 & -\sum_i r_{1i}h(\xi - \zeta_i) & -\sum_i r_{1i}\zeta_i h(\xi - \zeta_i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

$$[\mathbf{u}'(\xi)] = \begin{bmatrix} v_1(\xi) + \sum_i (-r_{0i} + r_{1i}v_{1,\xi\xi})(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \\ \varphi_1(\xi) + \sum_i (-r_{0i} + r_{1i}v_{1,\xi\xi})(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i) \\ M_1(\xi) \\ T_1(\xi) \end{bmatrix} \quad (4.62)$$

Macierz przeniesienia otrzymuje się z określenia wartości macierzy $[\mathbf{F}_E(\xi)]$; $[\mathbf{F}_{\text{res}}(\xi)]$ na końcu przedziału dla wartości $\xi = 1$:

• macierz przeniesienia dla układu sprężystego

$$[\mathbf{F}_E] = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 1 & \frac{-L}{2EJ} & \frac{-L^2}{6EJ} \\ 0 & 1 & \frac{-L}{2EJ} & \frac{-L^2}{2EJ} \\ 0 & 0 & L & L^2 \\ 0 & 0 & 0 & L^2 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

- dopełnienie macierzy przeniesienia o deformacje niesprężyste

$$[\mathbf{R}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\sum_i r_{1i}(1-\zeta_i) & -\sum_i r_{1i}\zeta_i(1-\zeta_i) \\ 0 & 0 & -\sum_i r_{1i} & -\sum_i r_{1i}\zeta_i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.64)$$

Jeżeli belka ma tylko jeden przedział ciągłości, to cztery warunki początkowe można obliczyć z układu równań (4.65):

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{F}\mathbf{v}_0 \quad (4.65)$$

gdzie: $\mathbf{v}_0 = \{v_0 \ F_0 \ M_0 \ T_0\}$ – parametry na początku odcinka;

$\mathbf{v}_k = \{v_k \ F_k \ M_k \ T_k\}$ – parametry na końcu odcinka;

\mathbf{F} jest macierzą przeniesienia, która w ogólnym przypadku jest sumą efektów otrzymanych z rozwiązania pręta sprężystego i efektów od trwałych odkształceń elementu:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_E + \mathbf{F}_{\text{res}} \quad (4.66)$$

Przy większej liczbie przedziałów należy spełnić warunki ciągłości. Warunek ciągłości między dwoma przedziałami wyraża się zależnością:

$$\{\mathbf{u}(\mathbf{0})\}^{n+1} = [\mathbf{H}] \{\mathbf{u}(\mathbf{1})\}^n \quad (4.67)$$

gdzie:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.68)$$

Jeżeli nie jest zachowana ciągłość na granicy przedziałów, to należy to uwzględnić w macierzy \mathbf{H} . Na przykład przy reakcji na podporze ΔT macierz ciągłości przyjmuje postać:

$$[\mathbf{H}] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.69)$$

Dla belki ciągłej układ równań powiększa się zatem o ilość wielkości hiperstatycznych. W dalszym etapie „łączy się” kolejne odcinki macierzami ciągłości i otrzymuje się w ten sposób tak zwaną globalną macierz przeniesienia w postaci:

$$\mathbf{v}_k = \mathbf{F}_n \mathbf{H}_{n-1} \mathbf{F}_{n-1} \mathbf{K} \mathbf{F}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{F}_1 \mathbf{v}_0 = \mathbf{F}_{\text{glob}} \mathbf{v}_0 \quad (4.70)$$

Algorytm ten sprowadza zadanie do rozwiązania układu równań. Warunki brzegowe, będące w rzeczywistości warunkami opisującymi końce pręta, mogą dotyczyć także często występującego w praktyce przypadku częściowego utwierdzenia. Jako rozwiązanie otrzymuje się wektor uogólnionych przemieszczeń i sił w dowolnym przekroju pręta:

$$\mathbf{w}(\xi) = \{\mathbf{v}(\xi); \mathbf{\Phi}(\xi); \mathbf{M}(\xi); \mathbf{T}(\xi)\} \quad (4.71)$$

Element ściskany

Zadanie to można również rozszerzyć na przypadek, gdy do konstrukcji jest wprowadzona siła osiowa (np. zbrojenie sprężające lub słup). Do równania osi ugiętej pręta (4.49) wprowadza się wówczas człon opisujący wpływ siły osiowej:

$$\frac{\partial^4 v(\xi)}{\partial \xi^4} + \frac{Nl^2}{EJ} \frac{\partial^2 v(\xi)}{\partial \xi^2} = \frac{1}{EJ} \sum_i r_N \delta_{,\xi\xi} (\xi - \zeta_i) \quad (4.72)$$

przy czym siła osiowa N może być w ogólnym przypadku przykładana bądź do końców pręta, bądź do końców dowolnie wybranych jego segmentów. Rozwiązanie ma wówczas postać wzorów rekurencyjnych [26, 107, 108]:

$$v_n(\xi) = R_N v_{n-1}(\xi) \quad (4.73)$$

gdzie: R_N – czynnik rekurencyjny równania (4.72).

Macierz przeniesienia otrzymuje się z przekształcenia rozwiązania ogólnego równania różniczkowego:

$$\begin{aligned} v(\xi) = & v(0) + \frac{1}{k} v_{,\xi}(0) + \left[\frac{1}{k^2} (1 - \cos k\xi) \right] v_{,\xi\xi}(0) \\ & + \left[\frac{1}{k^3} \left(\xi - \frac{\sin k\xi}{k} \right) \right] v_{,\xi\xi\xi}(0) \\ & + \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n \left[r_0 + r_1 v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) \right] [\sin k(\xi - \zeta_i)] h(\xi - \zeta_i) \end{aligned} \quad (4.74)$$

gdzie:

$$k = \sqrt{\frac{Nl^2}{EJ}} \quad (4.75)$$

Nieznana wartość $v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-)$ oblicza się ze wzoru rekurencyjnego:

$$v_{,\xi\xi}(\zeta_i^-) = |A_i|v_{,\xi\xi}(0) + |B_i|v_{,\xi\xi\xi}(0) - |C_i| \quad (4.76)$$

którego wyprowadzenie jest przedstawione szczegółowo w [107]. Macierze \mathbf{A}_i , \mathbf{B}_i , \mathbf{C}_i powstają przez zastąpienie i -tej kolumny macierzy \mathbf{A} wektorami $\{\mathbf{a}\}$, $\{\mathbf{b}\}$, $\{\mathbf{c}\}$. Macierz \mathbf{A} jest macierzą trójkątną.

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= [a_{ij}]_{i=1,\dots,n} \\ \{\mathbf{a}\} &= (a_j)_{j=1,\dots,n} \\ \{\mathbf{b}\} &= (b_j)_{j=1,\dots,n} \\ \{\mathbf{c}\} &= (c_j)_{j=1,\dots,n} \end{aligned}$$

gdzie:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = j \\ 0 & \text{dla } i < j \\ kr_{ij} \sin k(\zeta_i - \zeta_j) & \text{dla } i > j \end{cases}$$

$$a_j = \cos k\zeta_j$$

$$b_j = \sin k\zeta_j$$

$$c_j = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ kr_{0i} \sin k(\zeta_i - \zeta_j) & i > 1 \end{cases}$$

Można zatem wprowadzić następujące wzory rekurencyjne na wyznaczniki tych macierzy:

$$|A_i| = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} |A_{i-j}| a_{i,i-j} \quad (4.77)$$

$$|B_i| = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} |B_{i-j}| a_{i,i-j} \quad (4.78)$$

$$|C_i| = c_i - \sum_{j=1}^{i-1} |C_{i-j}| a_{i,i-j} \quad (4.79)$$

Za pomocą przedstawionych wzorów można sformułować algorytmy do obliczeń numerycznych. Kryteria podziału pręta przyjęto jak dla belki zginanej. W tej samej postaci pozostają macierze ciągłości łączące obliczeniowe przedziały pręta. Znajomość wzorów rekurencyjnych umożliwia zapisanie macierzy przeniesienia dla pręta w formie jawnej (4.81). Macierz przeniesienia całej konstrukcji wyrazi się zatem zależnością:

$$v_k = C_n H_{n-1} C_{n-1} K C_2 H_1 C_1 v_0 = C_{\text{glob}} v_0 \quad (4.80)$$

gdzie: C_i – macierz przeniesienia dla przęsła (4.81):

gdzie: $b = 1 / l'$,

$$a = EJ/EJ',$$

l', EJ' – dowolnie wybrane wielkości porównawcze.

Do rozwiązania układu równań (4.80) stosuje się znane warunki brzegowe na obu końcach układu. Oprócz niewiadomych wielkości statycznych występuje nieznaną parametrami k , nazywany dalej wartością krytyczną, natomiast odpowiadająca mu siła N – siłą krytyczną. Przykładowo dla jednoelementowego pręta o końcach przegubowych układ równań jest następujący:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\beta}{k} & -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2 \left[(1 - \cos k) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |A_i| \sin k(1 - \zeta_i) \right] \\ 0 & 1 & -\frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{k} \left[\sin k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |A_i| \cos k(1 - \zeta_i) \right] \\ 0 & 0 & \left[\cos k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |A_i| \sin k(1 - \zeta_i) \right] \\ 0 & 0 & \frac{k}{\beta} \left[-\sin k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |A_i| \cos k(1 - \zeta_i) \right] \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.81)$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k} \right)^3 \left[\left(1 - \frac{\sin k}{k} \right) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \sin k(1 - \zeta_i) \right] & \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n (r_0 - r_1 |C_i|) \sin k(1 - \zeta_i) \\ -\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2 \left[(1 - \cos k) - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \cos k(1 - \zeta_i) \right] & \sum_{i=1}^n (r_0 - r_1 |C_i|) \cos k(1 - \zeta_i) \\ \frac{\beta}{k} \left[\sin k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \sin k(1 - \zeta_i) \right] & \alpha k \sum_{i=1}^n (r_0 - r_1 |C_i|) \sin k(1 - \zeta_i) \\ \left[\cos k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \cos k(1 - \zeta_i) \right] & \alpha k^2 \sum_{i=1}^n (r_0 - r_1 |C_i|) \cos k(1 - \zeta_i) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$c_{12} \varphi_0 + c_{14} T_0 = c_{15} \quad (4.82)$$

$$c_{32} \varphi_0 + c_{34} T_0 = c_{35}$$

Siła krytyczna mówi o niestabilności konstrukcji. Stan ten będzie odpowiadał nieoznaczoności układu równań, co można wyrazić warunkiem:

$$\det \begin{bmatrix} c_{12}(k) & c_{14}(k) \\ c_{32}(k) & c_{34}(k) \end{bmatrix} = 0 \quad (4.83)$$

Równanie (4.48) jest przestępne i ma wiele rozwiązań ze względu na wartości krytyczne k_n , z których można następnie wyznaczyć odpowiadające im wartości sił krytycznych N_{kr} . Dla jednoelementowego pręta o przegubowych warunkach brzegowych równanie wiekowe ma postać:

$$\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \left[\sin k - \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \sin k(1 - \zeta_i) \right] - \frac{1}{\alpha} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \sin k(1 - \zeta_i) = 0 \quad (4.84)$$

Po przekształceniu otrzymujemy

$$\beta^2 \sin k = \left(\frac{\beta^2}{k} + \frac{1}{\alpha} \right) \sum_{i=1}^n r_{1i} |B_i| \sin k(1 - \zeta_i) \quad (4.85)$$

gdzie: $|B_i|$ – określone jest wzorem rekurencyjnym.

W przypadku jednego elementu równanie wiekowe ma postać analogiczną do otrzymanej w [107]. Dla pręta wieloelementowego macierz przeniesienia otrzymuje się zgodnie z układem równań (4.80) i na jego podstawie, po wykorzystaniu warunków brzegowych, równanie wiekowe.

W rozdziale 5 porównano wyniki otrzymane na drodze analitycznej z eksperymentem.

Element obciążony dynamicznie (zadanie drgań własnych)

Podobnie wyznacza się częstości drgań własnych pręta oraz uogólnione przemieszczenia i siły wewnętrzne. Otrzymuje się je z rozwiązania uogólnionego równania różniczkowego opisującego drgania pręta z dyslokacjami sprężystymi i trwałymi [26, 157, 158]:

$$\frac{\partial^4 v(\xi, t)}{\partial \xi^4} - \frac{ml^4}{EJ} \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} = \sum_i r_K \delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i) \quad (4.86)$$

Rozwiązanie otrzymuje się również w postaci wzorów rekurencyjnych o ogólnej postaci:

$$v_n(\xi, t) = R_K v_{n-1}(\xi, t) \quad (4.87)$$

gdzie: R_K – czynnik rekurencyjny równania (4.86).

Dla jednego elementu równanie jednorodne ma postać:

$$\frac{\partial^4 v(\xi, t)}{\partial \xi^4} - \frac{ml^4}{EJ} \frac{\partial^2 v(\xi, t)}{\partial t^2} \Big|_c = 0 \quad (4.88)$$

Dla drgań ustalonych rozwiązanie równania różniczkowego przewiduje się w postaci iloczynu (metoda rozdziału zmiennych)

$$v^e(\xi, t) = T(t) V^e(\xi) \quad (4.89)$$

natomiast dla drgań harmoniczych możemy przyjąć, że

$$T(t) = e^{i\omega t} \quad (4.90)$$

gdzie: ω – częstość kołowa drgań harmoniczych pręta.

Równanie bezczasowe można wówczas przedstawić następująco

$$V_{,\xi\xi\xi\xi} - k^4 V \Big|_e = 0 \quad (4.91)$$

gdzie:
$$k^4 = \omega^2 \frac{ml^2}{EJ} \quad (4.92)$$

Całka ogólna równania różniczkowego (4.91) ma postać:

$$V^e(\xi) = A \cos k\xi + B \sin k\xi + C \operatorname{ch} k\xi + D \operatorname{sh} k\xi \quad (4.93)$$

Na podstawie tego rozwiązania można zbudować funkcję, która również będzie rozwiązaniem równania różniczkowego (4.91). Rozwiązanie można otrzymać metodą przemieszczeń, metodą sił lub metodą mieszaną. W zadaniu statycznym przedstawiono całkę równania różniczkowego wyrażoną za pomocą parametrów początkowych, tutaj natomiast pokazano rozwiązanie metodą przemieszczeń. Stałe równania są wówczas kinematycznymi warunkami brzegowymi:

$$V^e(\xi) = \delta_i Z_1(k\xi) + \varphi_i Z_2(k\xi) + \delta_j Z_3(k\xi) + \varphi_j Z_4(k\xi) \quad (4.94)$$

gdzie: $\delta_i = V^e(0),$
 $\varphi_i = V_{,\xi}^e(0),$
 $\delta_j = V^e(1),$
 $\varphi_j = V_{,\xi}^e(1).$

Rozwiązanie równania amplitud wraz z pochodnymi można przedstawić macierzowo:

$$V^e(\xi) = \mathbf{Z}(k\xi) \delta^e \quad (4.95)$$

gdzie: $\mathbf{V}^e(\xi) = \{V(\xi); V_{,\xi}(\xi); M(\xi); T(\xi)\}^e$

$$\delta^e = [\{\delta_i, \varphi_i, \delta_j, \varphi_j\}^e]^T.$$

Macierz kształtu można przedstawić następująco

$$\mathbf{Z}(k\xi) = \begin{bmatrix} Z^1(k\xi) & Z^2(k\xi) & Z^3(k\xi) & Z^4(k\xi) \\ Z_{,\xi}^1(k\xi) & Z_{,\xi}^2(k\xi) & Z_{,\xi}^3(k\xi) & Z_{,\xi}^4(k\xi) \\ -EJZ_{,\xi\xi}^1(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi}^2(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi}^3(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi}^4(k\xi) \\ -EJZ_{,\xi\xi\xi}^1(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi\xi}^2(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi\xi}^3(k\xi) & -EJZ_{,\xi\xi\xi}^4(k\xi) \end{bmatrix} \quad (4.96)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 Z^1(k\xi) &= S(k\xi) + \frac{K^2 - SU}{U^2 - KT} U(k\xi) + \frac{KU - ST}{KT - U^2} K(k\xi) \\
 Z^2(k\xi) &= \frac{1}{k} T(k\xi) + \frac{SK - TU}{U^2 - KT} U(k\xi) + \frac{SU - T^2}{KT - U^2} K(k\xi) \\
 Z^3(k\xi) &= \frac{U}{U^2 - KT} U(k\xi) + \frac{T}{KT - U^2} K(k\xi) \\
 Z^4(k\xi) &= -\frac{K}{U^2 - KT} U(k\xi) + \frac{U}{KT - U^2} K(k\xi) \\
 Z^1_{,\xi}(k\xi) &= k \left[K(k\xi) + \frac{K^2 - SU}{U^2 - KT} T(k\xi) + \frac{KU - ST}{KT - U^2} U(k\xi) \right] \\
 Z^2_{,\xi}(k\xi) &= k \left[\frac{1}{k} S(k\xi) + \frac{SK - TU}{U^2 - KT} T(k\xi) + \frac{SU - T^2}{KT - U^2} U(k\xi) \right] \\
 \dots\dots\dots & \\
 \dots\dots\dots & \\
 Z^4_{,\xi\xi\xi}(k\xi) &= k^3 \left[-\frac{K}{U^2 - KT} K(k\xi) + \frac{U}{KT - U^2} S(k\xi) \right]
 \end{aligned} \tag{4.97}$$

natomiast funkcje Kryłowa:

$$\begin{aligned}
 K(k\xi) &= 0,5(\text{sh } k\xi - \sin k\xi), & K &= K(k) \\
 U(k\xi) &= 0,5(\text{ch } k\xi - \cos k\xi) & U &= U(k) \\
 T(k\xi) &= 0,5(\text{sh } k\xi + \sin k\xi), & T &= T(k) \\
 S(k\xi) &= 0,5(\text{ch } k\xi + \cos k\xi), & S &= S(k)
 \end{aligned} \tag{4.98}$$

są stabelaryzowane, ponadto mają one następujące właściwości:

$$\begin{aligned}
 K(0) &= U(0) = T(0) = 0 \\
 S(0) &= 1
 \end{aligned} \tag{4.99}$$

$$K_{,\xi\xi\xi\xi}(k\xi) = kK_{,\xi\xi\xi}(k\xi) = k^2T_{,\xi\xi}(k\xi) = k^3S_{,\xi}(k\xi) = k^4K(k\xi)$$

Macierz przeniesienia w zadaniu statycznym umożliwiła wyznaczenie deformacji i sił na końcu przedziału za pomocą parametrów początkowych, tutaj natomiast wielko-

ści statyczne w dowolnym punkcie przedziału są wyrażone za pomocą deformacji na jej końcach. Ażeby utrzymać jednolitą formę rozwiązania, należy wyznaczyć deformacje i siły uogólnione na końcach przedziału i znaleźć relację między nimi:

$$\mathbf{V}^e(\mathbf{0}) = \mathbf{Z}(\mathbf{0})\boldsymbol{\delta}^e \quad (4.100)$$

$$\mathbf{V}^e(\mathbf{1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{k})\boldsymbol{\delta}^e \quad (4.101)$$

Wyznaczając ze wzoru (4.100) wektor $\boldsymbol{\delta}^e$ i podstawiając do równania (4.101) otrzymuje się:

$$\boldsymbol{\delta}^e = \mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{0})\mathbf{V}^e(\mathbf{0}) \quad (4.102)$$

$$\mathbf{V}^e(\mathbf{1}) = \mathbf{Z}(\mathbf{k})\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{0})\mathbf{V}^e(\mathbf{0}) \quad (4.103)$$

Macierz przeniesienia wyraża się iloczynem:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Z}(\mathbf{k})\mathbf{Z}^{-1}(\mathbf{0}) \quad (4.104)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} S & \frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3 V \\ \frac{k}{\beta} & S & -\frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2 U \\ -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & -\alpha\frac{k}{\beta}V & S & \frac{\beta}{k}T \\ -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^3 T & -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2 U & \frac{k}{\beta}V & S \end{bmatrix} \quad (4.105)$$

gdzie: $\alpha = EJ^e/EJ'$,

$\beta = l^e/l'$,

EJ' , l' – sztywność i długość porównawcza.

Macierz ciągłości jest tak sformułowana jak w zadaniu statycznym, uzupełnionym o przypadki, w których występują człony bezwładnościowe. Dla przypadków bezwładności liniowej i obrotowej macierze te przyjmują postać:

$$\mathbf{H}^m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ c - m^2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}^l = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & C - I^2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.106)$$

Przy wyznaczaniu funkcji własnych należy następnie zbudować macierze przeniesienia dla konstrukcji i wyznaczyć częstość drgań własnych ω .

W układzie równań:

$$\mathbf{V}''(1) = \mathbf{G}\mathbf{V}^1(0) \quad (4.107)$$

wykorzystuje się w dwa zerowe warunki na początku układu, redukując w ten sposób liczbę niewiadomych do dwóch. Pozostałe dwie niewiadome wyznacza się wykorzystując warunki brzegowe na końcu układu. Prawe strony tych równań są równe zero. W przypadku belki (pręta) swobodnie podpartej układ równań przyjmuje postać:

$$g_{12}\varphi_0 + g_{14}T_0 = 0, \quad g_{32}\varphi_0 + g_{34}T_0 = 0 \quad (4.108)$$

Niezerowe rozwiązanie jednorodnego układu równań istnieje, gdy:

$$\det \mathbf{G}'[2 \times 2] = 0 \quad (4.109)$$

W wyznaczniku tym występuje nieznaną parametr k . Wartości tego parametru, dla którego jest spełnione równanie (4.109), są nazywane wartościami własnymi. Równanie to jest równaniem przestępnym i ma wiele rozwiązań. Na ich podstawie można wyznaczyć częstości własne ω_n i funkcje własne.

W zadaniach dynamicznych określenie częstości drgań własnych ma znaczenie praktyczne. Jest to jednak rozwiązanie pośrednie, które służy do określenia drgań wymuszonych, między innymi do oceny takiego zjawiska jak rezonans drgań.

Rozwiązanie zadania w przypadku drgań wymuszonych sprowadza się do zsumowania całki ogólnej równania (4.91) oraz całki szczególnej, pochodzącej od siły wymuszającej. Stałe całki szczególnej

$$V(\xi) = [A \cos k(\xi\eta) + B \sin k(\xi\eta) + C \cosh k(\xi\eta) + D \sinh k(\xi\eta)] h(\xi\eta) \quad (4.110)$$

są określone z warunków początkowych funkcji w miejscu przyłożenia siły:

$$\begin{aligned} V(\xi = \eta, t) = 0 \quad V_{,\xi\xi}(\xi = \eta, t) = 0 \\ V_{,\xi}(\xi = \eta, t) = 0 \quad V_{,\xi\xi\xi}(\xi = \eta, t) = -(\beta^3/\alpha)P(\eta, t) \end{aligned} \quad (4.111)$$

Jeżeli wymuszenie jest harmoniczne, to

$$P(\eta, t) = P_0 \sin pt \quad (4.112)$$

Wówczas drgania wymuszone ustalają się na poziomie częstości wymuszającej:

$$v(\xi, t) = V(\xi) \sin pt \quad (4.113)$$

Warunki (4.111) wyraża się w postaci:

Z równania (4.110) i warunków (4.114) wynikają zależności:

$$\begin{aligned} A + C = 0 \quad (-A + C)k^2 = 0 \\ (B + D)k = 0 \quad (-B + D)k^3 = -P_0/EJ \end{aligned} \quad (4.115)$$

skąd wyznacza się stałe A, B, C, D .

Ostatecznie równanie (4.110) wyraża się jako całka szczególna:

$$V(\xi) = PV[k(\xi - \eta)] h(\xi - \eta) \quad (4.116)$$

Całka szczególna przy wymuszeniu momentem

$$M(t) = M_0 \sin pt \quad (4.117)$$

przyjmie postać:

$$V(\xi) = MU[k(\xi - \eta)]h(\xi - \eta) \quad (4.118)$$

w równaniach (4.116) i (4.118):

$$P = \frac{P_0}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k} \right)^3, \quad M = \frac{M_0}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k} \right)^2$$

gdzie: V, U – funkcje Kryłowa.

Szczególnym przypadkiem obciążenia jest dyslokacja (por. 4.86). W tym przypadku całkę szczególną wyznacza się według analogicznego algorytmu jak w równaniu (4.86). W przypadku rysy dyslokacja jest uzależniona od sił wewnętrznych i wówczas całka szczególna przyjmuje postać:

$$V(\xi) = R^r Kr[k(\xi - \eta)]h(\xi - \eta) \quad (4.119)$$

gdzie: $R^r = \alpha \frac{k}{\beta} \sum_{i=1}^n (-r_0 - r_1 V_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i))(\xi - \zeta_i)h(\xi - \zeta_i)$, Kr – funkcje Kryłowa

Po wyznaczeniu całek szczególnych uwzględniających wymuszenie zewnętrzne i wyrażającej nieciągłości (rysy) w konstrukcji można równanie (4.107) zapisać w ogólnej postaci

$$\mathbf{V}^n(1) = (\mathbf{G} + \mathbf{R}) \mathbf{V}^1(0) \quad (4.120)$$

Sumaryczna macierz przeniesienia uwzględniająca wymuszenie zewnętrzne przedstawia równanie (4.121), natomiast dla zarysowanej belki (pręta) przyjmuje postać (4.122):

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}
 S & \frac{\beta}{k}T & -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2U \\
 \frac{k}{\beta} & S & -\frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}T \\
 -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2U & -\alpha\frac{k}{\beta}V & S \\
 -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^3T & -\alpha\left(\frac{k}{\beta}\right)^2U & \frac{k}{\beta}V \\
 0 & 0 & 0 \\
 -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3V & \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^3V(k(1-\eta))P_0 + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2U(k(1-\eta))M_0 \\
 -\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2U & \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\beta}{k}\right)^2U(k(1-\eta))P_0 + \frac{1}{\alpha}\frac{\beta}{k}T(k(1-\eta))M_0 \\
 \frac{\beta}{k}T & -\frac{\beta}{k}T(k(1-\eta))P_0 - S(k(1-\eta))M_0 \\
 S & -S(k(1-\eta))P_0 - \frac{k}{\beta}V(k(1-\eta))M_0 \\
 0 & 1
 \end{bmatrix} \quad (4.121)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix}
 S + \frac{1}{k} \sum_i r_i A(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)] & \frac{\beta}{k} \left[T + \frac{1}{\beta} \sum_i r_i B(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)] \right] \\
 \frac{k}{\beta} \left[V + \frac{1}{k} \sum_i r_i A(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)] \right] & S + \sum_i r_i B(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)] \\
 -\alpha \left(\frac{k}{\beta} \right)^2 \left[U + \frac{1}{k} \sum_i r_i A(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)] \right] & -\alpha \frac{k}{\beta} \left[V + \sum_i r_i B(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)] \right] \\
 -\alpha \left(\frac{k}{\beta} \right)^3 \left[T + \frac{1}{k} \sum_i r_i A(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)] \right] & -\alpha \left(\frac{k}{\beta} \right)^2 \left[U + \sum_i r_i B(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)] \right]
 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{l}
-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \left[U + k \sum_i r_i C(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)] \right] \\
-\frac{1}{\alpha} \frac{\beta}{k} \left[T + k \sum_i r_i C(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)] \right] \\
S + k \sum_i r_i C(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)] \\
\frac{k}{\beta} \left[V + k \sum_i r_i C(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)] \right] \\
\left. \begin{array}{l}
-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k}\right)^3 \left[V + k^2 \sum_i r_i D(\zeta_i) T[k(1-\zeta_i)] \right] \\
-\frac{1}{\alpha} \left(\frac{\beta}{k}\right)^2 \left[U + k^2 \sum_i r_i D(\zeta_i) S[k(1-\zeta_i)] \right] \\
\frac{\beta}{k} \left[T + k^2 \sum_i r_i D(\zeta_i) V[k(1-\zeta_i)] \right] \\
S + k^2 \sum_i r_i D(\zeta_i) U[k(1-\zeta_i)]
\end{array} \right]
\end{array}
\tag{4.122}$$

4.4.5. Uwagi uzupełniające

Algorytmizacja przedstawionej metody została opracowana w języku Fortran. Opisane bloki programowe są elementami jednego programu, a zakres obliczeń zależy wyłącznie od projektanta. Przejrzysty układ bloków pozwala stosunkowo łatwo wprowadzać korekty do dowolnego fragmentu programu oraz łączyć go z innymi programami przez przyłączenie kolejnych segmentów lub traktując program jako zbiór procedur. Umożliwia on także współpracę z programem graficznym, co pozwala otrzymać wyniki w postaci wykresów, a w przypadku badań – monitorować wybrane zależności. To rozwiązanie numeryczne wykorzystuje stosunkowo małe ilości jednostek pamięci komputera. Obliczenia można zatem wykonywać na stosunkowo prostych jednostkach oraz składować program na dyskach w postaci jawnej.

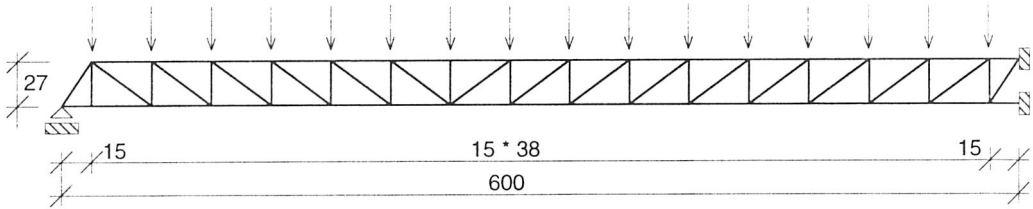
Przedstawiony sposób obliczania uogólnionych przemieszczeń i sił w prętach żelbetowych ma zastosowanie głównie praktyczne. Z tego powodu użyto prostych algorytmów umożliwiających kontrolę obliczeń na każdym etapie.

Zakres wykorzystania metody można rozszerzyć na inne klasy konstrukcji (tarcze, powłoki). W kolejnych rozdziałach przedstawiających wzajemne relacje modelowe między elementami prętowymi a tarczami zostanie pokazany model analogii prętowej w odniesieniu do elementów powierzchniowych.

4.5. Modele analogii prętowej

Szczególnym sposobem modelowania, coraz szerzej stosowanym w ostatnich latach, jest wykorzystanie analogii prętowej, którą można zastosować do modelowania zmiennych cech konstrukcji zarówno w sposób kwazyciągły, jak i dyskretny. Metoda analogii prętowej, przedstawiona od strony praktycznej w pracy [12], jest jedną z przybliżonych metod obliczeń zarysowanych konstrukcji żelbetowych, proponowaną m. in. przez normy: DIN 1045, DIN 4227 czy Eurocode 2 [57].

Rozkład naprężeń w konstrukcji pracującej liniowosprężysto jest podstawą (choć nie warunkiem koniecznym) do budowy modelu ustroju. Ustawienie prętów ściskanych (modelujących beton) i rozciąganych (modelujących zbrojenie) powinno odpowiadać w przybliżeniu przebiegowi trajektorii naprężeń głównych. Model analizowanej w pracy belki oparty na tej metodzie przedstawiono na rys. 4.25.



Rys. 4.25. Modelowanie belki według analogii prętowej

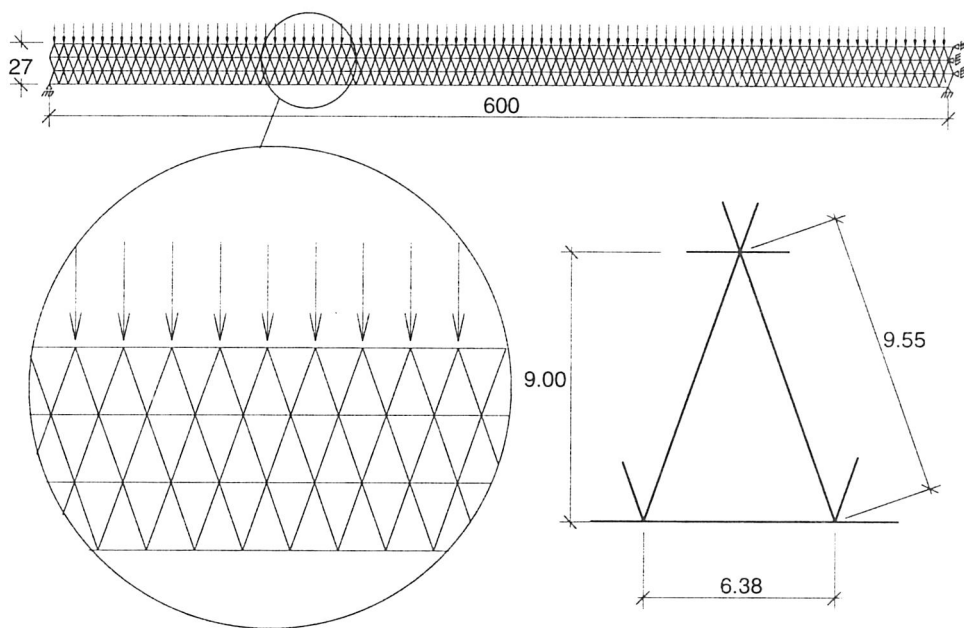
Fig. 4.25. Simulation of beams according to bar analogy

Stosunkowo prosto realizuje się modelowanie prostych konstrukcji żelbetowych (belki, ramy) za pomocą programów przeznaczonych w założeniu do obliczania konstrukcji prętowych, chociaż w niektórych powstają pewne nieścisłości w realizacji modelu, głównie jeśli uwzględni się zbrojenie w konstrukcji i jego współpracę z betonem.

Lepszym, choć bardziej pracochłonnym narzędziem jest program *Strains*, w którym szczególnym przypadkiem elementów są pręty o stałej sztywności, połączone w węzłach przegubami (kratownica). Podstawową zaletą programu *Strains* w porównaniu ze znaczną częścią programów obliczających konstrukcje liniowe jest możliwość znacznego zwiększenia dokładności podziału oraz łatwiejszego wprowadzania danych o charakterze powtarzalnym dzięki zastosowaniu problemowo zorientowanego języka wewnętrznego programu.

Przy tworzeniu mechanicznego modelu belki jako ustroju kratownicowego (rys. 4.26) dokonano dyskretyzacji modelu. Przyjęto stałą wartość współczynnika sprężystości E dla całej konstrukcji, a w miejscu pojawienia się rys dla betonu strefy rozciąganej wartość tę odpowiednio zmniejszono. Obciążenie równomiernie rozłożone belki zostało skupione w węzłach górnych kratownicy; układ prętów w modelu w pewnym przybliżeniu przedstawia przebieg trajektorii naprężeń głównych. Warstwy betonu stanowiące otuliny zbrojenia w modelu pominięto jako nie przenoszące obciążeń. Współpracę betonu i stali zrealizowano poprzez połączenie w węzłach kratownicy prętów betonowych ze stalowymi, co odbiega od rzeczywistej pracy konstrukcji. W modelu pominięto także zbrojenie strzemionami, wprowadzając jako dane tylko pręty główne dolne i górne, co również stanowi przybliżenie w porównaniu ze zbrojeniem badanej belki wykorzystanej do porównania wyników.

Wyniki przykładowych obliczeń wraz z porównaniem z wynikami badań laboratoryjnych przedstawiono w rozdziale 5.



Rys. 4.26. Geometria modelu
Fig. 4.26. Geometry of the model

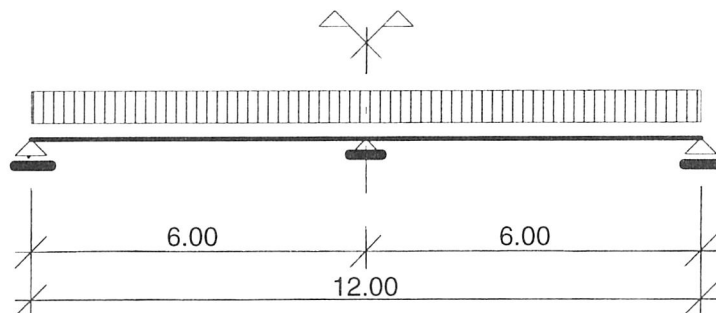
4.6. Modelowanie belki żelbetowej jako elementu tarczowego [227]

Przy analizie rozkładu naprężeń na wysokości przekroju celowe jest modelowanie belki jako elementu kwazitarczowego. Poniżej przedstawiono wybrane propozycje modeli obliczeniowych różniących się sposobem sformułowania zagadnienia oraz stopniem pracochłonności i dokładności wyników. Koncepcja obliczeń opiera się głównie na poprawnym sformułowaniu bazy danych, która decyduje o dokładności otrzymanych wyników.

W niniejszej pracy wyróżniono dwie metody modelowania. Pierwsza, polegająca na modelowaniu konstrukcji z elementów skończonych (np. prętów), w tym wypadku wymaga się, aby spełnione były warunki brzegowe. Jest to często metoda mało dokładna, ale łatwa w zastosowaniu i przy poprawnym opisie bazy danych daje wyniki zadowalające w wielu pracach projektowych.

Druga metoda polega na modelowaniu, najczęściej także za pomocą elementów skończonych, kontinuum materialnego, w którym są zachowane warunki nierozdzielności, i w którym można podejmować próby modelowania cech fizycznych materiału, współpracy betonu i stali oraz defektów (rys).

W pracy podjęto analizę dwuprzęsłowej belki żelbetowej, której schemat statyczny przedstawia rysunek 4.27. Ze względu na symetrię układu przeprowadzono analizę tylko jednego przęsła belki, zapewniając przy środkowej podporze odpowiednie, uniemożliwiające przesuw poziomy, warunki brzegowe. Symetria pozwala analizować konstrukcję za pomocą dwukrotnie mniejszej liczby elementów niż należałoby to zrobić w przypadku analizy całego układu. Wpływa to na znaczne skrócenie czasu obliczeń.



Rys. 4.27. Schemat statyczny belki

Fig. 4.27. Statical scheme of a beam

Ze względu na możliwość porównywania uzyskanych rozwiązań z wynikami badań doświadczalnych zastosowano – jak w przypadku modelu rzeczywistego – jednakowe zbrojenie na całej długości belki w postaci czterech prętów $\varnothing 5$ mm o całkowitym przekroju $0,78 \text{ cm}^2$.

4.6.1. Zastosowanie programu *Strains* do aproksymacji kratownicowej

System μ -*Strains* służy do przeprowadzania obliczeń statycznych płaskich i przestrzennych konstrukcji prętowych, powierzchniowych, masywnych i złożonych przy założeniu małych odkształceń i w warunkach liniowej zależności σ - ϵ . Program do analizy ustrojów prętowych opiera się na metodzie przemieszczeń. Pręty mogą być dowolnie łączone w węzłach, muszą być proste i o stałym przekroju między węzłami. Uwzględniony jest wpływ momentów zginających, skręcających oraz sił podłużnych na przemieszczenia ustroju.

Do obliczeń konstrukcji powierzchniowych (tarczowych, płytowych, powłokowych), trójosiowego stanu naprężenia oraz konstrukcji mieszanych stosuje się metodę elementów skończonych z możliwością podziału konstrukcji na elementy trójkątne, czworokątne, ośmiokątne oraz prętowe. Elementy powierzchniowe muszą mieć stałą grubość i być płaskie. Elementy trójosiowego stanu naprężenia to elementy sześciocienne, które nie mogą być wklęsłe. W elementach prętowych, które muszą mieć stały przekrój, nie dopuszcza się połączeń przegubowych.

Przy modelowaniu belki jako ustroju kratownicowego dokonano przybliżeń takich jak przy modelowaniu według analogii prętowej w rozdziale 4.5 (rys. 4.26).

4.6.2. Zastosowanie programu *Lusas* do aproksymacji elementami tarczowymi

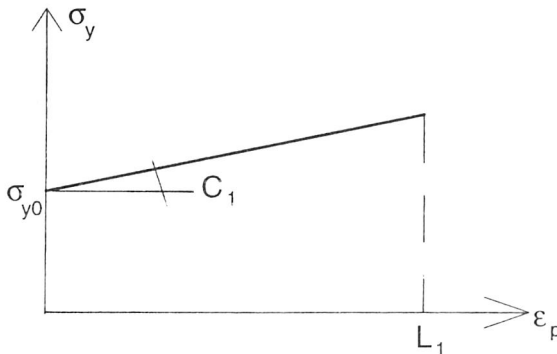
Program *Lusas* jest profesjonalnym systemem obliczeniowym, służącym do analizy konstrukcji metodą elementów skończonych umożliwiającym rozwiązywanie problemów z zakresu: statyki i dynamiki liniowej i nieliniowej, stateczności konstrukcji czy analizy innych złożonych zagadnień (np. termiczno-mechanicznych). System udostępnia użytkownikowi ponad 100 typów elementów pozwalających skutecznie modelować całą gamę konstrukcji inżynierskich: pręty, belki, płyty, powłoki, dwu- i trójwymiarowe ośrodki ciągłe, a także szereg modeli połączeń dających możliwość uwzględnienia specyfiki warunków brzegowych. Biblioteka systemu zawiera modele numeryczne materiałów najczęściej stosowanych przez inżyniera, które mogą być dodatkowo modyfikowane. Dostępными bezpośrednio modelami są: liniowo izo- i anizotropowe, elastoplastyczne (Druckera–Pragera, Mohra–Columba, von Misesa i inne), oraz model betonu pracujący w sposób nieliniowy.

Ze względu na to, że brak jest w systemie nieliniowego modelu betonu pracującego w złożonym stanie naprężenia, ograniczono się do przypadku 2D i płaskiego stanu naprężenia. W modelu wykorzystano dwa nieliniowe modele materiału. Są to sprężysto-plastyczny model von Misesa oraz nieliniowy model betonu.

Sprężysto-plastyczny model von Misesa

Model ten może być używany do przedstawiania plastycznego zachowania materiału charakteryzującego się wzmocnieniem po osiągnięciu granicy plastyczności (rys. 4.28). W praktyce warunek ten spełnia m.in. stal. Model opisuje dziesięć parametrów:

- E – moduł Younga,
- ν – współczynnik Poissona,
- γ – ciężar właściwy,
- α – współczynnik rozszerzalności cieplnej,
- a_r – współczynnik tłumienia,



Rys. 4.28. Krzywa wzmocnienia dla modelu von Misesa

Fig. 4.28. Curve of strengthening in the von Mises model

T – temperatura,

σ_{v0} – jednoosiowe naprężenie powodujące uplastycznienie,

C_1 – współczynnik kierunkowy prostej wzmocnienia materiału do osi odkształceń plastycznych,

L_1 – granica ważności prostej wzmocnienia materiału wyrażona w odkształceniach,

N – liczba odcinków aproksymujących krzywą wzmocnienia

Nieliniowy model betonu

W modelu tym uwzględniono:

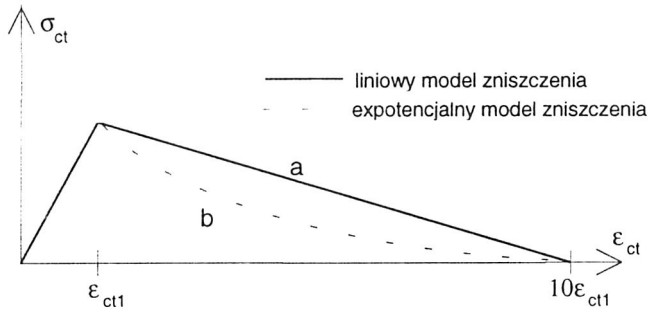
– nieliniowy związek konstytutywny $\sigma-\varepsilon$,

– możliwość przenoszenia naprężeń rozciągających przez zarysowaną część przekroju

(rys. 4.29)

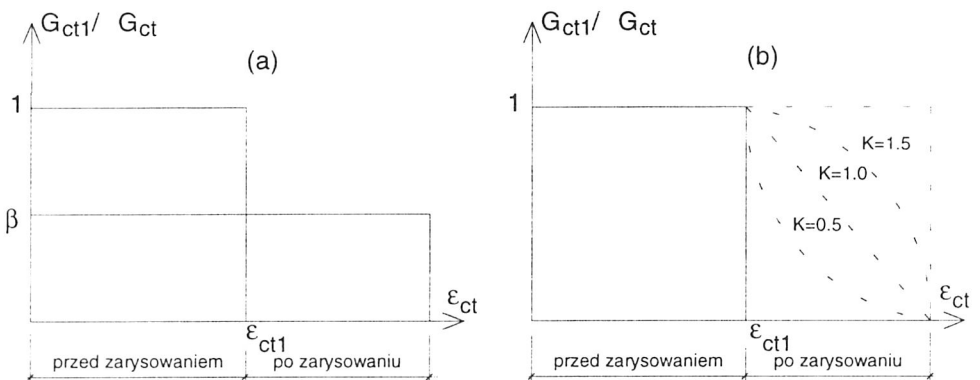
– możliwość przenoszenia naprężeń ścinających przez zarysowaną część przekroju

(rys. 4.30a, 4.30b).



Rys. 4.29. Zależność $\sigma-\varepsilon$ dla betonu rozciąganego: a) standardowa; b) opcjonalna

Fig. 4.29. Dependence $\sigma-\varepsilon$ for stretched concrete: a) standard; b) optional



Rys. 4.30. Sposoby przenoszenia sił tnących przez beton strefy rozciąganej przed i po zarysowaniu: a) standardowy, b) opcjonalny

Fig. 4.30. Methods of transfer of shearing forces through concrete in stretched zones before and after crack moment: a) standard; b) optional

Model ten jest opisany przez jedenaste parametrow, z których E , ν , γ , α , a_r , T przyjmuje się podobnie jak w przypadku modelu von Misesa oraz dodatkowo uwzględnia się:

f_c – wytrzymałość betonu na ściskanie,

β – współczynnik określający rozkład sił tnących w zarysowanej części przekroju (rys. 4.29a),

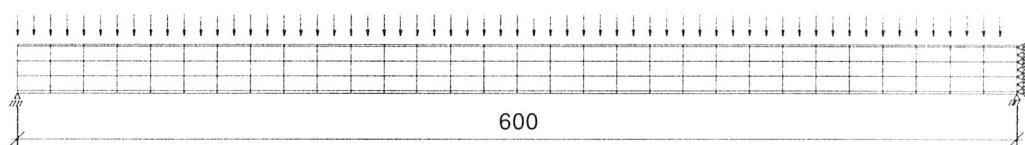
K – współczynnik określający rozkład sił tnących w zarysowanej części przekroju (opcjonalny, stosowany zamiennie z β) (rys. 4.30a),

f_t – wytrzymałość betonu na rozciąganie,

α_s – współczynnik zmiękczenia (wartość pomocnicza przyjmowana do modelowania).

Mimo że rysy w modelu traktowane są jako rozmyte, *MYSTRO* (program graficzny systemu służący m.in. do prezentacji graficznej wyników obliczeń) umożliwia przedstawienie ich rozkładu.

Modelowaną belkę podzielono na 210 elementów, 150 z nich to płaskie elementy QPM8 modelujące beton, pozostałe 60 to elementy prętowe BAR3, modelujące stal. Na rysunku 4.31 przedstawiono geometrię i podział na elementy.



Rys. 4.31. Geometria i podział na elementy
Fig. 4.31. Geometry and partition on elements

Rozmieszczenie elementów prętowych reprezentujących zbrojenie dokonano opierając się na tych samych węzłach co dla QPM8. Pociąga to za sobą zgodność odkształceń betonu i stali między konkretnymi węzłami. W rzeczywistości jednakże następuje poślizg pręta wyrywanego z betonu, dlatego założenie takie prowadzi do powstania niezgodności modelu z rzeczywistym zachowaniem belki.

4.7. Model dyskretny oparty na analogii tarczowej

Wprowadzenie rachunku dystrybucyjnego do opisu niejednorodności w konstrukcjach sprężystych umożliwia zastępowanie wyidealizowanych elementów prętowych modelem belki-ściany. Takie sformułowanie zadania umożliwia analizę płaskiego stanu na-prężień. Analiza oparta jest na układach równań równowagi:

$$\sigma_{\alpha\beta,\beta} = p_{\alpha} \quad (4.123)$$

gdzie: p_{α} – obciążenie działające stycznie do powierzchni środkowej.

Równania te spełnia funkcja $\Phi(x,y)$ wyrażona przez naprężenia:

$$\Phi_{,\alpha\alpha} + \sigma_{\beta\beta} + \int p_{\beta} d\beta = 0 \quad (4.124)$$

$$\Phi_{,\alpha\beta} - \sigma_{\alpha\beta} = 0 \quad (4.125)$$

Po przekształceniach i zdefiniowaniu prawej strony otrzymuje się zależność funkcji naprężeń i obciążenia zewnętrznego:

$$\Delta\Delta\Phi + \left(\int p_x dx \right)_{,yy} + \left(\int p_y dy \right)_{,xx} - p_{x,x} - \nu p_{y,y} = 0 \quad (4.126)$$

Rozwiązanie w postaci funkcji wpływowych przemieszczenia i naprężenia (Greena) do obliczania dyskretnie zarysowanej tarczy o dowolnym kształcie otrzymał Minch w [171]:

$$u_{\alpha}(T,s) = u_{\alpha}^p(T,s) + \int_m X(Q') u_{\alpha}^{(x)}(T,Q') dm(Q') + \int_m Y(Q') u_{\alpha}^{(y)}(T,Q') dm(Q') \quad (4.127)$$

$$\sigma_{\alpha\beta}(T,s) = \sigma_{\alpha\beta}^0(T,s) + \int_m X(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(x)}(T,Q') dm(Q') + \int_m Y(Q') \sigma_{\alpha\beta}^{(y)}(T,Q') dm(Q'). \quad (4.128)$$

W równaniach tych:

- $u(T,s), \sigma(T,s)$ – przemieszczenia i naprężenia;
- $X(Q), Y(Q)$ – siły poziome i pionowe na punktach brzegowych Q ;
- s, T – punkt przyłożenia siły i punkt przemieszczenia;
- m – linia konturu tarczy.

Numeryczne rozwiązanie tarczy otrzymali Maj i Trochanowski [160], dyskretyzując efekt zarysowania i deformacji trwałych. Rysę modelowali, zgodnie z modelem Borcza, według zależności:

$$r = -r_0 - r_1 \sigma_{mm}, \quad (4.129)$$

gdzie: σ_{mm} – naprężenia występujące w miejscu rysy.

Modelowanie dyskretnie belki jako elementu tarczowego z dyskretną lokalizacją rysy i obliczanie samonaprężeń nie jest rozwijane w dalszej części pracy. Prace doświadczalne pozwalające określić doświadczalne parametry nie zostały jeszcze rozpoczęte. Ponieważ jednak analityczne i numeryczne rozwiązania stanowią ważną pozycję w opisie teorii Borcza, więc przedstawiono tutaj to zagadnienie jako zadanie do przyszłej realizacji.

4.8. Podsumowanie

Najistotniejszą różnicą między modelami konstrukcji formułowanymi metodą kontynualną i dyskretną jest sposób przyjmowania sztywności. O ile pierwsza metoda do-

brze opisuje zmiany sztywności belki przy narastaniu obciążenia pierwotnego, o tyle druga charakteryzuje głównie belkę przy cyklicznym obciążaniu do określonego poziomu obciążenia. Obie metody posługują się doświadczalnymi parametrami, które relatywizują otrzymane z obliczeń wielkości statyczne względem układu sprężystego.

Odmienny jest również sposób formułowania równania różniczkowego osi odkształconej konstrukcji. Metody kontynuualne wprowadzają najczęściej parametry doświadczalne do członu (bloku) opisującego bezpośrednio sztywność. Niekiedy są to zależności funkcyjne, co w przypadku równań różniczkowych osi lub powierzchni odkształconej może prowadzić do równań uwikłanych. W metodzie dyskretnej przyjmuje się stałą sztywność, jak dla elementu sprężystego. Doświadczalne parametry związane z zarysowaniem lub innymi deformacjami trwałymi znajdują się w równaniu różniczkowym po stronie wektora obciążeń. Pozwala to na wykorzystanie rozwiązań równań jednorodnych z teorii sprężystości, wymaga jednak rozwiązania równania niejednorodnego w klasie funkcji uogólnionych. Wygodne do algorytmizacji zadania jest wykorzystanie funkcji Greena. Osobnym zadaniem w metodzie dyskretnej jest określenie wartości i rozkładu odkształceń rezydualnych.

Zadanie eksperymentalne realizowane przez autora, zmierzające do opisu zachowania belki pod obciążeniem cyklicznym, zdecydowało o modelowaniu konstrukcji metodą dyskretną. Eksperyment ustawiono pod kątem rozdzielania sprężystych i trwałych deformacji przy realizacji obciążeń pierwotnych i cyklicznych. Zadaniem wspomagającym było określenie wartości parametrów opisujących zmianę sztywności w konstrukcji (r_0, r_1).

5. Doświadczalna weryfikacja wybranych modeli prętowych konstrukcji żelbetowych

Obliczenia numeryczne sprawdzono za pomocą badań laboratoryjnych, których celem było potwierdzenie założeń przyjętych do modelu betonu, empiryczne wyznaczenie współczynników r_0 i r_1 oraz porównanie na przykładzie belki dwuprzęsłowej wpływu odkształceń plastycznych na redystrybucję sił wewnętrznych.

Wyniki badań własnych porównano z wynikami prac innych autorów.

5.1. Założenia dotyczące eksperymentu

Elementy próbne

- Beton klasyczny (cement, kruszywo, woda).
- Wiek betonu 28–360 dni.
- Wymiary elementów próbnych umożliwiają ominięcie analizy podobieństwa modelowego.

Realizacja pomiarów

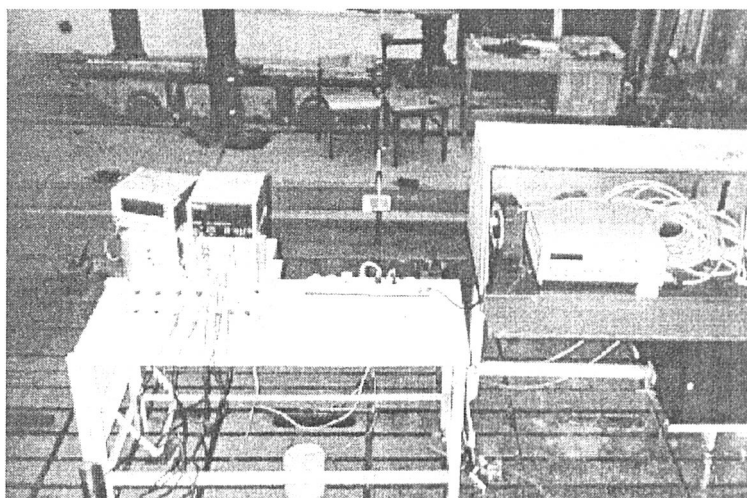
• W badaniach stanu odkształceń i naprężeń poza obciążeniem krytycznym zmienną niezależną eksperymentu powinno być odkształcenie. Deformacje są wymuszane ze stałą, określoną prędkością.

• Właściwości mechaniczne betonu określa się dla betonu niezbrojonego, natomiast badania elementów próbnych wykonywano dla betonu zbrojonego o stopniu zbrojenia $\mu < 0,01$.

5.2. Doświadczalne określenie parametrów modelu betonu

W eksperymentach, w których zakłada się jednokierunkowy stan naprężeń, istnieje problem osiowego przyłożenia siły. Wyznaczenie środka geometrycznego przekroju nie jest warunkiem wystarczającym. Należy uwzględnić prostopadłe przyłożenie siły do płaszczyzny docisku i równomierne rozłożenie cząstek struktury betonu w próbce.

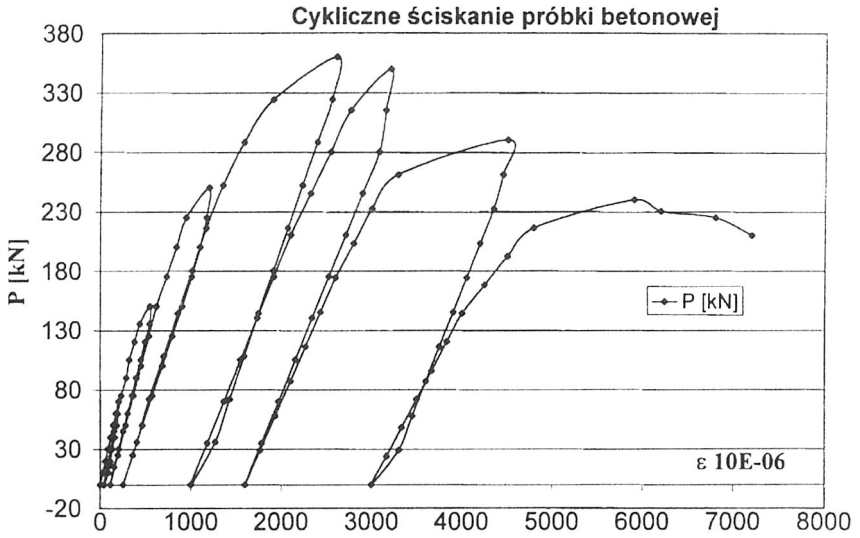
Zależności σ - ϵ określano dla próbek słupowych o średnicy 0,113 m i wysokości 0,35 m. Kształt próbek wynika z symulacji elementów belkowych. Odształcenia rejestrowano za pośrednictwem tensometrów typu RL 120/20 i 300/50 przyklejonych w połowie wysokości próbki. Aby wymusić stałą prędkość odształceń, skonstruowano układ elektroniczny, który porównuje napięcie wyjściowe na tensometrach z napięciem generowanych odształceń liniowych (rys. 5.1). Układ elektroniczny jest połączony z zaworem regulującym dopływ oleju do tłoka prasy hydraulicznej. Sterowanie przyrostu odształceń jest możliwe w kierunku obciążania i odciążania. Urządzenie umożliwia zadawanie kierunku wymuszanych odształceń, ich prędkości i dokładności komparacji.



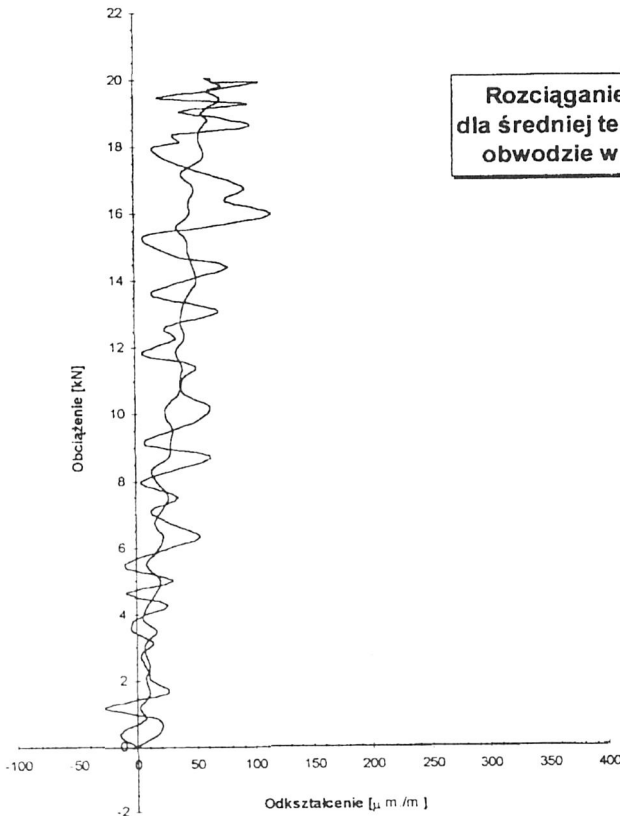
Rys. 5.1. Układ elektroniczny do generowania odształceń. Rejestrator Hottingera
Fig. 5.1. Electronic system for generating deformations. Hottinger's recorder

Wyniki zależności „naprężenia–odkształcenie” dla próbek ściskanych przy cyklicznym wymuszaniu odształceń pokazano na rysunku 5.2 (por. też rys. 5.12). Badano również przebieg zależności σ - ϵ dla próbek rozciąganych. Na rysunku 5.3 przedstawiono przebieg zależności P - ϵ dla uśrednionych wartości czterech tensometrów rozmieszczonych na obwodzie w przekroju połowy wysokości przekroju¹. Przy analizie wyników badań korzystano również z doświadczeń innych autorów, m.in. Ajdukiewicz [3], Bach [8], Diliger [43].

¹ Szczegółowy zestaw wszystkich wyników doświadczalnych był przedmiotem końcowego raportu z projektu badawczego nr 704299101 (grant KBN) sporządzonego w 1996 roku. Wyniki przedstawione w niniejszej pracy wybrano selektywnie, lecz, zdaniem autora, wybór ten jest wystarczający, aby potwierdzić wykonane analizy teoretyczne i numeryczne.



Rys. 5.2. Wyniki zależności „naprężenie–odkształcenie” dla próbek ściskanych
 Fig. 5.2. Dependence tension–deformation for compressed samples



Rys. 5.3. Przebieg zależności $P-\epsilon$ dla uśrednionych wartości czterech tensometrów rozmieszczonych po obwodzie w przekroju w połowie wysokości próbki

Fig. 5.3. Dependence $P-\epsilon$ for averaged values of four extensometers arranged at a circuit of a cross-section at a half of the height

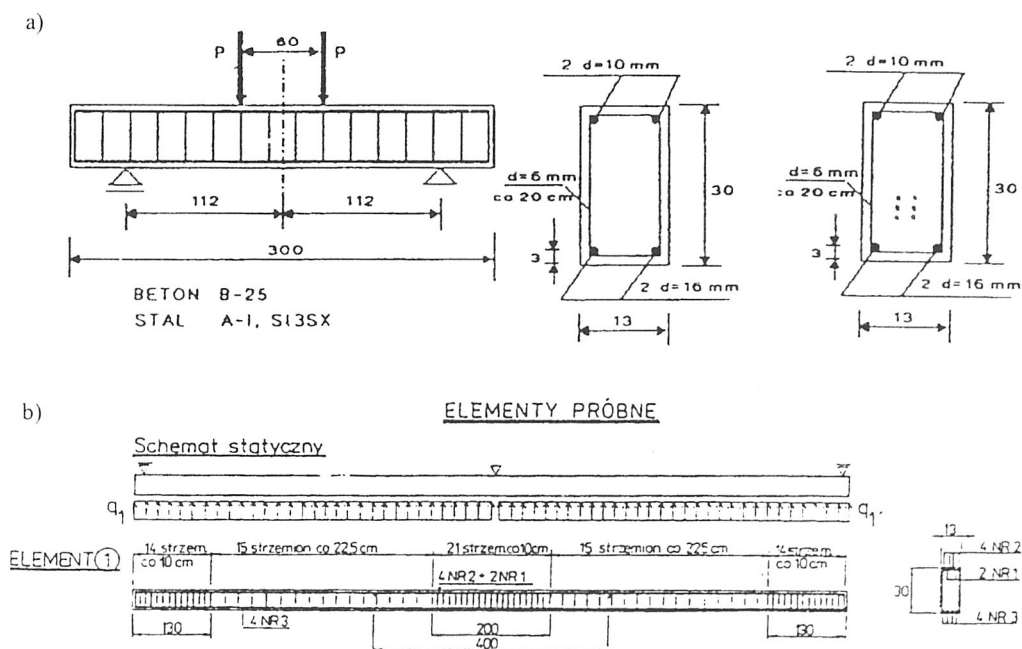
5.3. Stanowiska badawcze i elementy próbne

Badania prowadzono dla następujących schematów statycznych belek (rys. 5.4):

- belka żelbetowa, swobodnie podparta, długości 3 metrów, obciążona dwoma siłami skupionymi,
- belka żelbetowa dwuprzęsłowa, długości 12 metrów, obciążona równomiernie,
- belka sprężona, swobodnie podparta, długości 3 metrów obciążona dwoma siłami skupionymi.

Podobnie jak w przypadku obciążania próbek betonowych cykle pomiarowe realizowano przez wymuszanie odkształceń. W przypadku swobodnie podpartych belek 3-metrowych stałe odkształcenia były wymuszane układem mechanicznym z silnikiem elektrycznym, pozwalającym na określone ustawienie prędkości obrotów.

Belki oparte na dwóch podporach były obciążane pionowymi siłami skupionymi przyłożonymi od góry (rys. 5.4a). Odkształcenia betonu i stali zbrojeniowej mierzono tensometrycznie (typ RL 120/20), ugięcia zaś za pomocą czujników indukcyjnych.

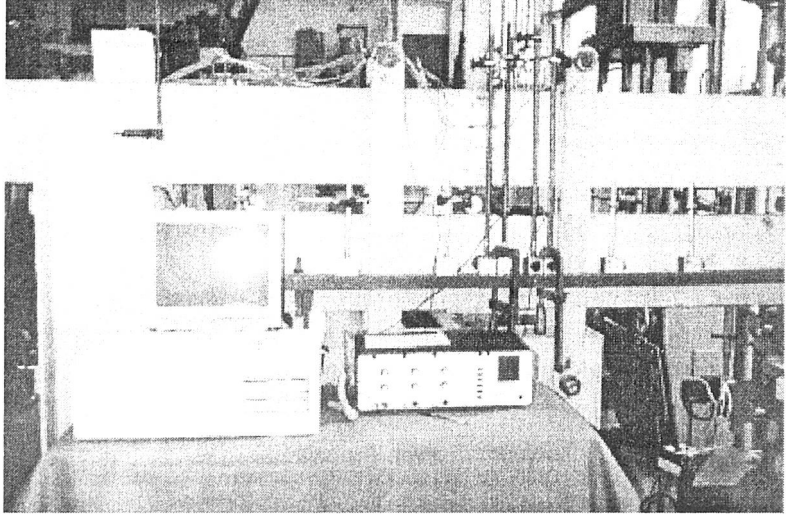


Rys. 5.4. Schematy statyczne belki swobodnie podpartej:

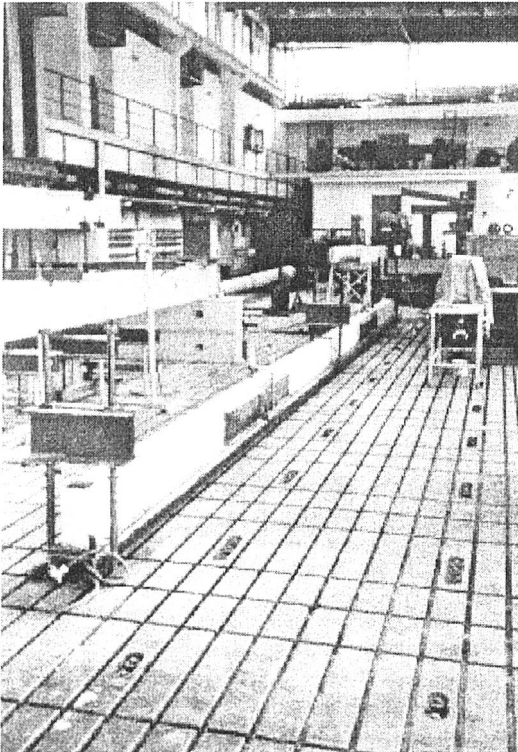
a) żelbetowej i sprężonej – 3-metrowej; b) żelbetowej – 12-metrowej

Fig. 5.4. Statistical schema of simple-supported beam:

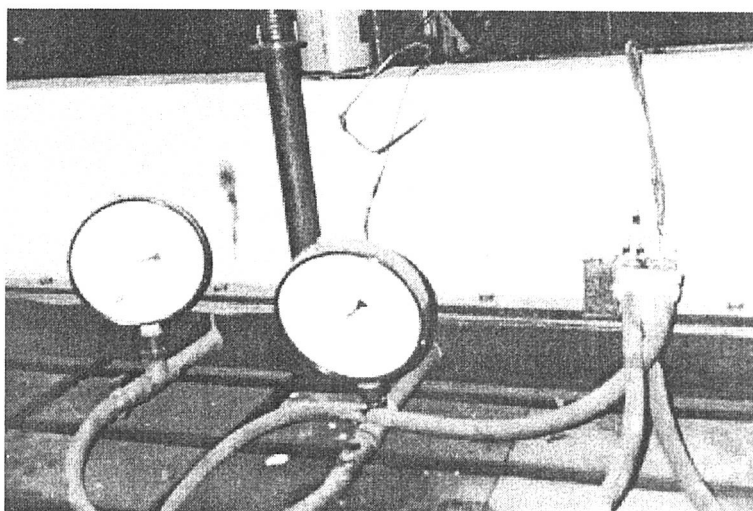
a) reinforced concrete compressed – 3-meters; b) reinforced concrete beam – 12-meter



Rys. 5.5. Belka żelbetowa na stanowisku do pomiarów
 belek żelbetowych i sprężonych belek 3-metrowych
 Fig. 5.5. Reinforced concrete beam on a test stand
 to measuring of RC and compressed – 3-meter beam

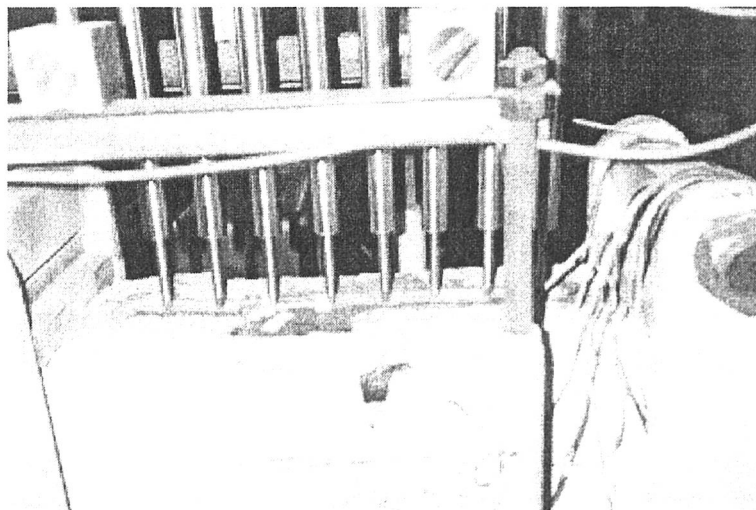


Rys. 5.6. Belka żelbetowa na stanowisku
 do pomiarów belek żelbetowych
 12-metrowych
 Fig. 5.6. Reinforced concrete beam
 on a test stand to measuring
 of RC 12-meter beam

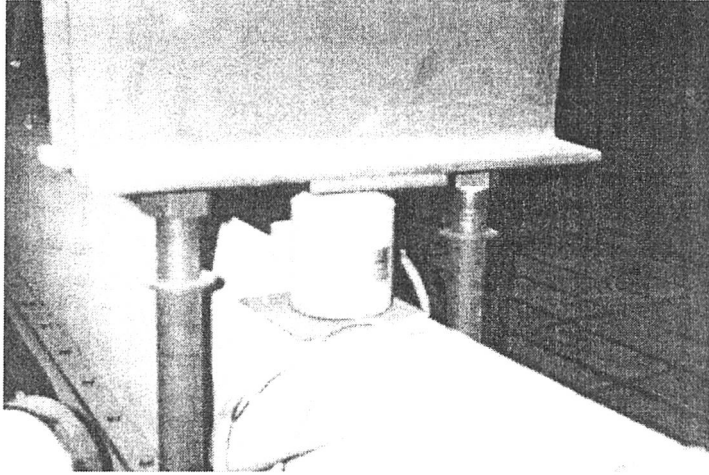


Rys. 5.7. Zawory doprowadzające wodę do poduszki wodnej obciążającej belkę
 Fig. 5.7. Valves supplying water to cushion pool loading beam

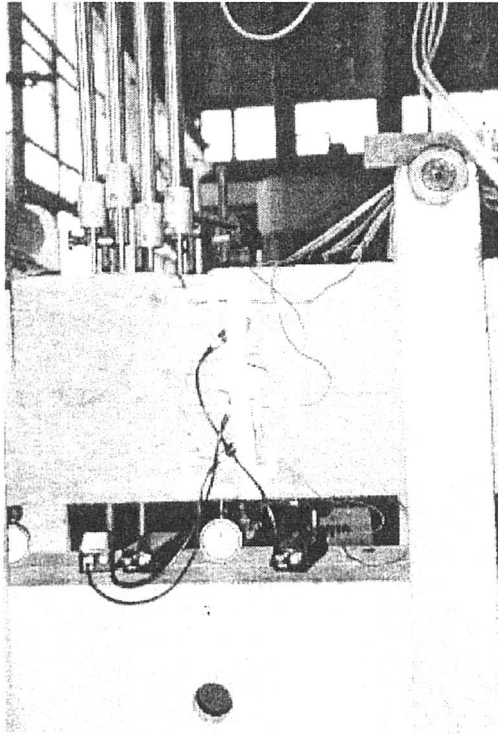
Na stanowisku, na którym badano belkę dwuprzęsłową, wykonano układ elektroniczny, który za pośrednictwem impulsu elektrycznego z czujnika indukcyjnego porównywał napięcia rzeczywiste z napięciami generatora odkształceń liniowych (rys. 5.1). Sterujący impuls elektryczny przekazywano na zawory doprowadzające wodę do poduszki wodnej obciążającej belkę (rys. 5.4b). Także i tutaj sterowaniu podlegał kierunek i prędkość wymuszania odkształceń.



Rys. 5.8. Czujniki indukcyjne do pomiaru ugięć
 Fig. 5.8. Inductive sensors to measuring of deflections



Rys. 5.9. Czujniki magnetoelastyczne do pomiaru reakcji na podporach
Fig. 5.9. Magnetoelastic sensors to measuring of reaction on supports



Rys. 5.10. Sondy do pomiaru metodą emisji akustycznej (Moczko)
Fig. 5.10. Sonic sounder to measuring with the method of acoustic emission (Moczko)

Obciążenia belki przykładano od dołu do belki, którą betonowano na stanowisku pomiarowym. Umożliwiło to wyeliminowanie naprężenia wstępnego spowodowanego transportem i obciążenie ciężarem własnym belki podczas realizowania cykli pomiarowych. W miejscach podpór umiejscowiono więź uniemożliwiająca przemieszczenia pionowe belki oraz założono czujniki magnetosprężyste do pomiarów reakcji. Schemat statyczny przedstawiono na rys. 5.4a.

Odształcenia stali zbrojeniowej mierzono tensometrycznie za pomocą czujników indukcyjnych ugięcia (rys. 5.8), za pomocą czujników magnetosprężystych zaś – reakcje na podporach (rys. 5.9).

Niektóre z cykli były także wspomagane pomiarami metodą emisji akustycznej realizowanymi we współpracy z A. Moczko (rys. 5.10).

5.4. Współpraca betonu i stali

W rozdziale 3 przedstawiono analityczne sformułowanie zagadnienia współpracy betonu i stali z wykorzystaniem różniczkowego równania równowagi:

$$\frac{E_a F_a}{\sum U_a} \varepsilon_{a,xx} - k \varepsilon_a = 0 \quad (5.1)$$

którego rozwiązanie otrzymuje się w postaci:

$$\varepsilon_a = \alpha_1 e^{-\sqrt{\frac{kU_a}{F_a E_a}} x} + \alpha_2 e^{\sqrt{\frac{kU_a}{F_a E_a}} x} \quad (5.2)$$

Zwrócono tam uwagę, że w rozwiązaniu tym zakłada się, że pręt jest gładki i brak poślizgu zbrojenia w betonie oraz że odrzucenie tych założeń i rozwiązanie zadania na przykład metodami statystycznymi znacznie komplikuje zadanie.

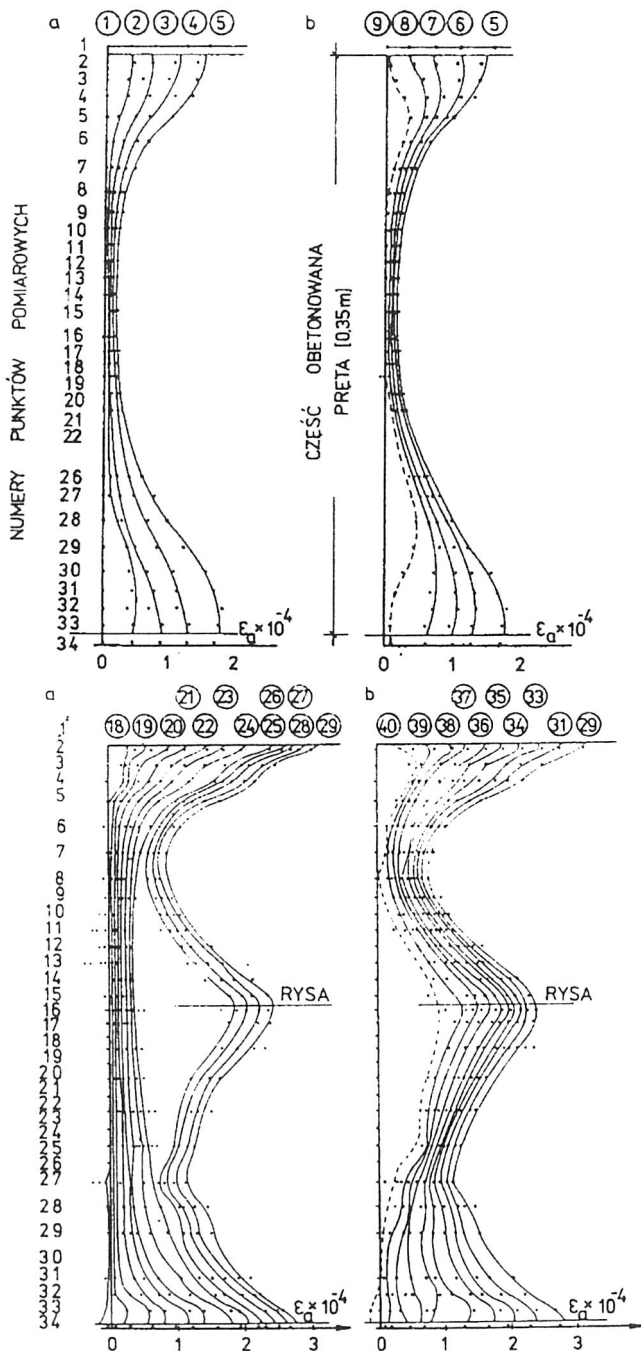
W praktyce Dyduch zaleca przyjęcie współczynnika uwzględniającego wpływ cykliczności obciążeń i wówczas równanie (5.1) przyjmuje postać

$$\frac{E_a F_a}{\sum U_a} \varepsilon_{a,xx} - k \varepsilon_a \left[\frac{s(x, n)}{1 - k_n} \right] = 0 \quad (5.3)$$

gdzie: $s(x, n)$ – poślizg zbrojenia,

$$k_n = (1 + n)^\alpha - 1 \quad (\alpha = 0, 10)$$

Jako rozwiązanie alternatywne Borcz przedstawia wyznaczenie doświadczalnych wartości naprężeń sprężystych i rezydualnych w zbrojeniu w fazach I i II i wykorzystanie ich do opisu współdziałania betonu ze zbrojeniem [26] (rys. 5.11). Z zależności doświadczalnych można określić wartość współczynnika Ψ_a dla pręta obciążonego i odciążonego. Opisując szerokość rozwarcia rysy zależnościami sprężystymi, otrzymuje się:



Rys. 5.11. Wybrane cykle obciążenia i odciążenia rozciąganej próbki żelbetonowej (Kozłowski [121])

Fig. 5.11. Selected cycles of charge and discharge of stretched, reinforced concrete samples (Kozłowski [121])

$$a^E = \frac{\Psi_a \sigma_a^E}{E_a} l_f = \frac{0,60 \sigma_a^E}{E_a} l_f \quad (5.4a)$$

$$a^{\text{res}} = \frac{\Psi_a^{\text{res}} \sigma_a^{\text{res}}}{E_a} l_f = \frac{0,20 \sigma_a^{\text{res}}}{E_a} l_f \quad (5.4b)$$

gdzie: a^E, a^{res} – sprężysta i resztkowa część rozwarcia rysy,
 $\Psi_a^E, \Psi_a^{\text{res}}$ – współczynnik Ψ_a dla sprężystej i resztkowej części rozwarcia rysy,
 $\sigma_a^E, \sigma_a^{\text{res}}$ – sprężyste i resztkowe naprężenia w zarysowanym przekroju,
 l_f – rozstaw rys.

Taki sposób postępowania umożliwia wyznaczenie całkowitego wydłużenia rysy:

$$a_f = a^E + a^{\text{res}} \quad (5.5)$$

Z przedstawionych wartości doświadczalnych można pośrednio wnioskować także o strefie naruszenia współpracy betonu ze stalą, ograniczono się tu jednak do objaśnienia mechanizmu powstawania samonaprężeń w żelbetowym przekroju.

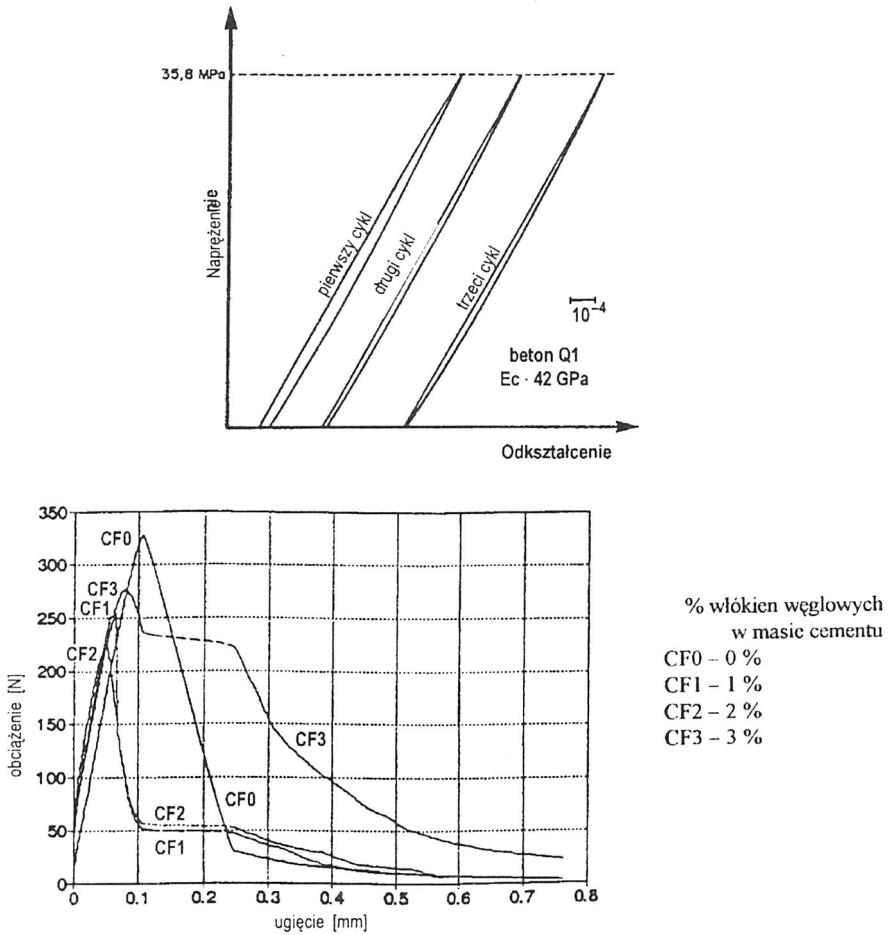
5.5. Samonaprężenia w przekroju żelbetowym

Jednym z założeń teorii Borcza jest przyjęcie liniowo sprężystej zależności σ - ε przy powtarzalnych cyklach obciążeń. Badania laboratoryjne potwierdzają teoretyczny model przedstawiony w rozdziale 2, zakładający liniowy rozkład naprężeń przy powtarzalnych obciążeniach. Obserwacja dotyczy również przedziału pokrytycznego, choć należy zwrócić uwagę na bardzo szybki przyrost odkształceń trwałych bezpośrednio przed zniszczeniem materiału. Dla betonów o dużej wytrzymałości Baalbaki i in. [4] podali w 1992 r. zależność spełnioną przy cyklicznych próbach obciążania i odciążania. Podobne spostrzeżenia wynikają również z badań Kucharskiej i Brandta [124, 125] oraz Kucharskiej i Logonia [126] nad betonami o zwiększonej wytrzymałości, także zbrojonymi włóknami węglowymi. Wyniki badań tych autorów przedstawiono na rys. 5.12. Obserwuje się tu tendencje do relatywnie małych zmian współczynnika sprężystości jako funkcji wielkości obciążenia.

Z zależności σ - ε wyznaczonej dla próbek betonowych określono charakterystyczne parametry betonu, z którego wykonano belki. Założono zależność naprężeń resztkowych od naprężeń w przekroju w postaci:

$$\varepsilon_R = k \left(\frac{\sigma}{\sigma_{\text{max}}} \right)^n \quad (5.6)$$

gdzie: $n = 3$ przy wolnym przyroście odkształceń w przekroju,
 $n = 6$ przy szybkim przyroście odkształceń w przekroju



Rys. 5.12. Zależność $\sigma-\varepsilon$ dla betonu: a) o dużej wytrzymałości ($\cong 100 \text{ MPa}$) (Baalbaki i in. [4]); b) o zwiększonej wytrzymałości, zbrojonego włóknami węglowymi (Kucharska i Brandt [124])

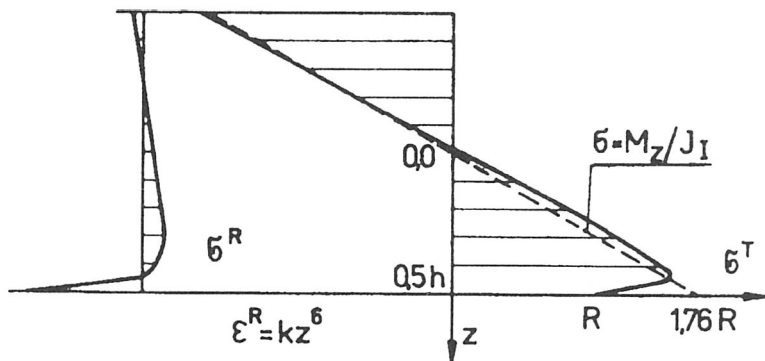
Fig. 5.12. Dependence $\sigma-\varepsilon$ for concrete: a) of high strength ($\cong 100 \text{ MPa}$) (Baalbaki, Aitcin and Ballivy [4]); b) of increased strength, reinforced with coal fibres (Kucharska and Brandt [124])

Do obliczeń przyjęto:

$$\varepsilon^R(z) = -k \left(\frac{Mz}{J_b R_{bk}} \right)^6 \quad (5.7)$$

$$\varepsilon^R(z) = k \left(\frac{Mz}{J_b R_{bzk}} \right)^6$$

Jeżeli naprężenia od obciążenia zewnętrznego nałożą się na samonaprężenia, to naprężenia sumaryczne przyjmą postać jak na rysunku 5.13.



Rys. 5.13. Sumaryczne naprężenie w belce przed zarysowaniem [26]

Fig. 5.13. Total tension in a beam before crack [26]

Naprężenia swobodne na skraju belki są większe od wytrzymałości betonu na rozciąganie. Efekt ten, znany uprzednio i uwzględniany również w polskich normach, jest przez A. Boreza inaczej interpretowany. Może on być wykorzystywany do obliczenia momentu rysującego:

$$M^{\text{rys}} = 1,76 R_{bzk} W \quad (5.8)$$

Samonaprężenia można wyznaczyć z równań (4.27) i (5.7). Doświadczalne wartości odkształceń w stali otrzymano doświadczalnie, mierząc tensometrycznie wartości odkształceń zbrojenia ściskanego i rozciąganego (rys. 5.14). Można przyjąć, że w strefie rozciąganej całkowite naprężenie rozciągające wynosi:

$$R_{bzk} = \sigma^{\text{rys}} + (-\sigma^R) \quad (5.9)$$

gdzie: σ^{rys} – naprężenie rysujące.

Wynika stąd, że

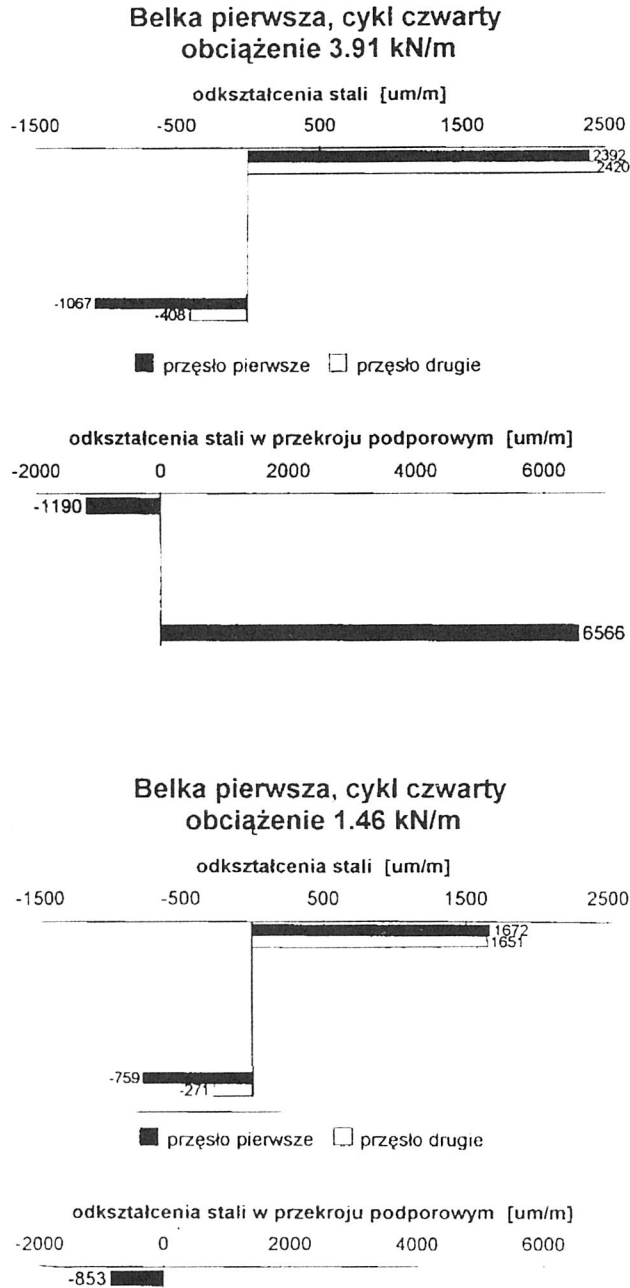
$$E_b \varepsilon^R = -R_{bzk} + \sigma^{\text{rys}} \quad (5.10)$$

dla $\sigma^{\text{rys}} = 1,76 R_{bzk}$ z (5.10) wynika:

$$\varepsilon_R = (1,76 - 1) \frac{R_{bzk}}{E_b} \quad (5.11)$$

Po podstawieniu (5.11) do (5.7) otrzymuje się doświadczalną wartość współczynnika k .

Z równań (4.28), (4.29) wyznacza się stałe A i B , a następnie równanie prostej $\varepsilon^T = A + Bz$. Z badań [52, 104] wynika, że beton ulega około 30% relaksacji, co można uwzględnić przy obliczeniu odkształceń resztkowych:



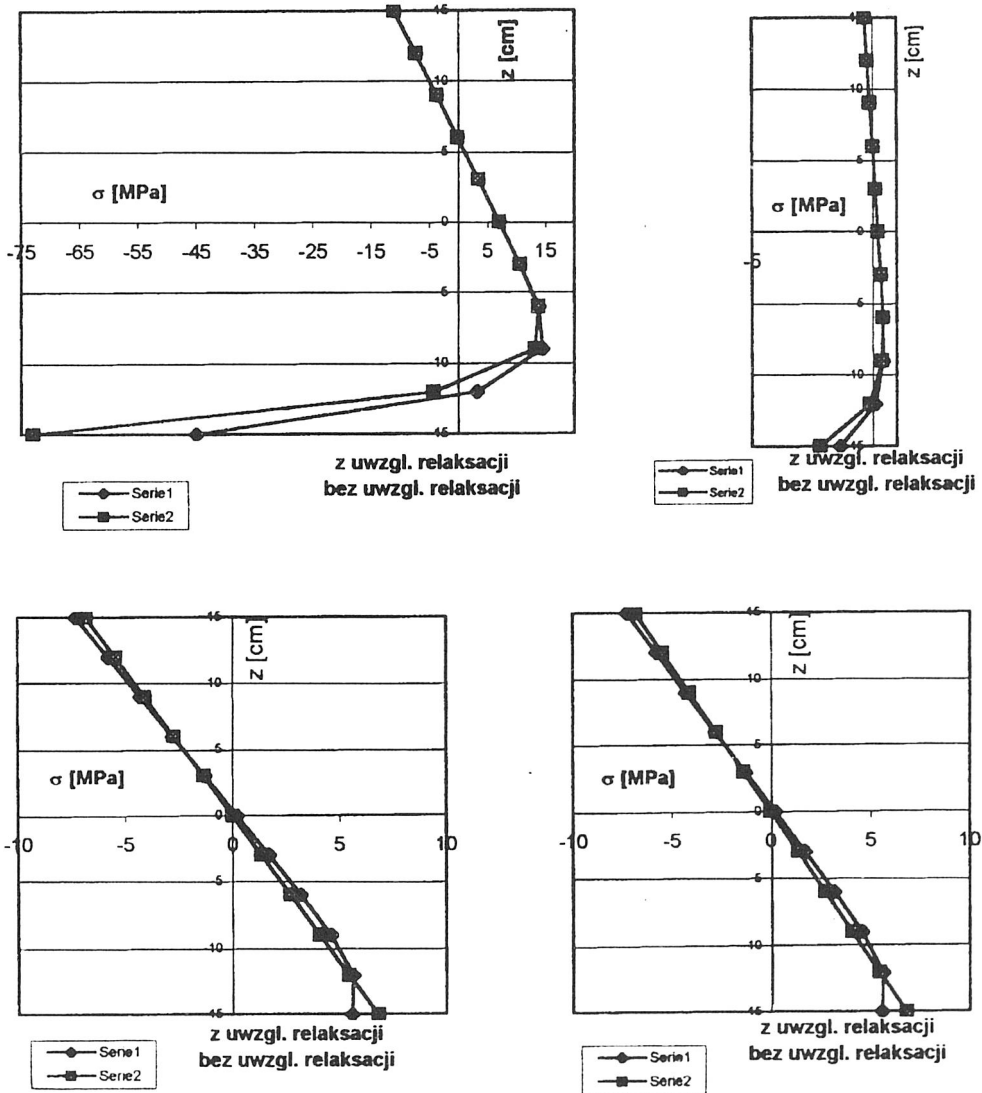
Rys. 5.14. Przykładowy wydruk z tensometrycznego pomiaru odkształceń w dwuprzęsłowej belce żelbetowej – przekrój podporowy

Fig. 5.14. Exemplary printout of measurement results of strains in a two-span, reinforced concrete beam – support section

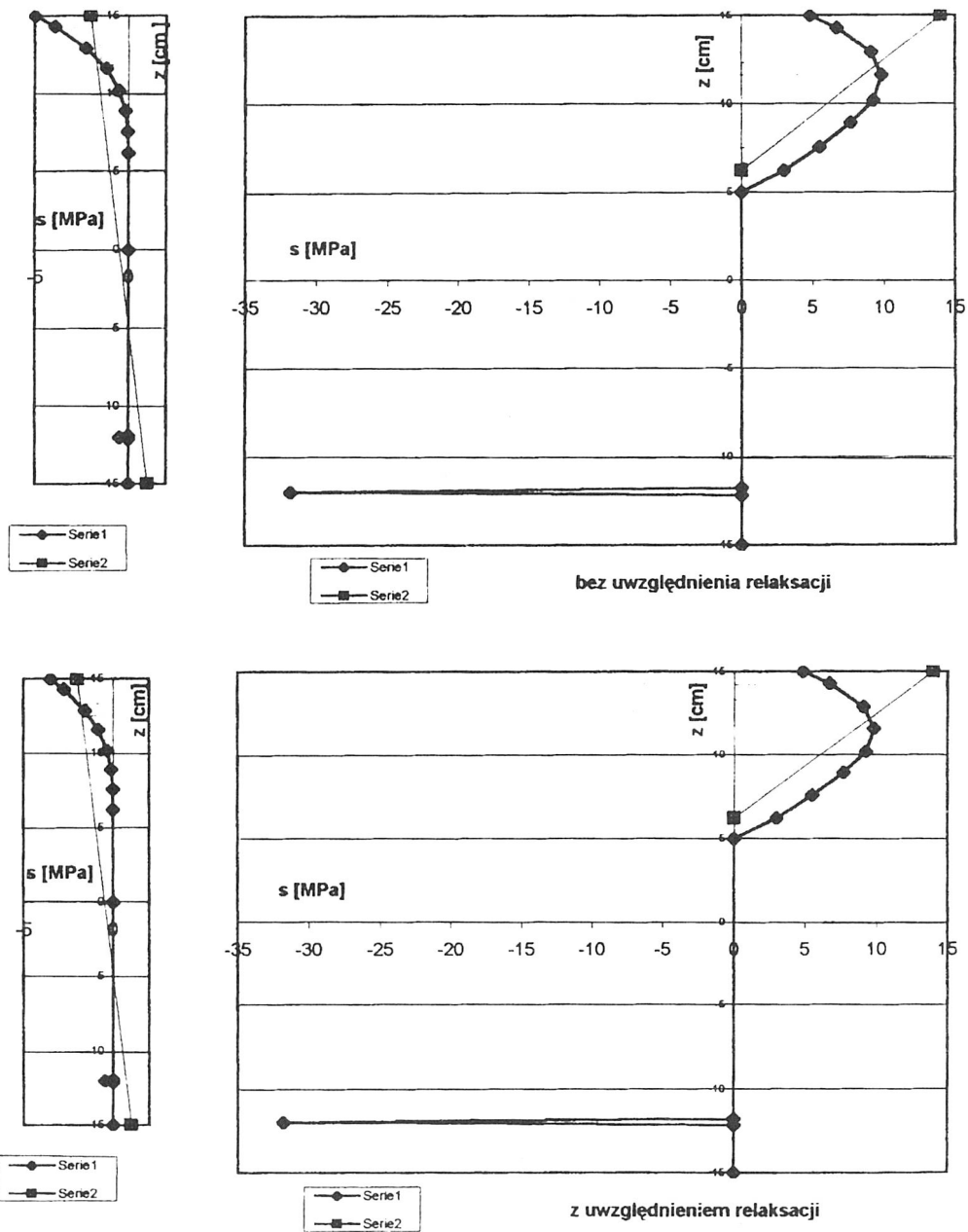
$$\varepsilon^R = \varepsilon^{TR} - \varepsilon^{pl} \quad (5.12)$$

gdzie: ε^R – odkształcenia resztkowe,
 ε^{pl} – odkształcenia plastyczne (od relaksacji),
 ε^{TR} – całkowite odkształcenia resztkowe.

Rozkład samonaprzeżeń i naprzeżeń sumarycznych (całkowitych) w obciążonym przekroju przedstawiono na rysunku 5.15.



Rys. 5.15. Rozkład samonaprzeżeń i naprzeżeń sumarycznych (całkowitych) w obciążonym przekroju
 Fig. 5.15. Distribution of self-stresses and of total stresses in a loaded section



Rys. 5.16. Rozkład samonaprężeń i naprężeń sumarycznych w obciążonym przekroju zarysowanym
 Fig. 5.16. Distribution of self-stresses and of total stresses in loaded section with crack

Według Borcza [26] na podstawie tego rysunku można wytłumaczyć obserwowane zjawisko, że podczas zginania otrzymuje się większe wartości wytrzymałości betonu na rozciąganie niż podczas osiowego rozciągania. Również aproksymacja prostokątnym rozkładem naprężeń w strefie rozciąganej betonu nie może być przyjęta do zrównoważenia obciążenia zewnętrznego, gdyż samonapężenia nie biorą udziału w równoważeniu tego obciążenia.

Po zarysowaniu nie można identyfikować deformacji w zbrojeniu z naprężeniami, gdyż po odciążeniu pozostają w zbrojeniu naprężenia spowodowane trwałymi odkształceniami. Naprężenia te są zrównoważone wymuszonymi naprężeniami w betonie (samonapężenia). Na podstawie podobnej analizy jak w przypadku przekroju niezarysowanego, jednak uwzględniając strefę ścisną dla przekroju zarysowanego (wyznaczenie stałych A i B z równań 4.30; 4.31) otrzymuje się zależności opisujące rozkład samonaprężeń i naprężeń sumarycznych (całkowitych) w obciążonym przekroju zarysowanym (rys. 5.16).

5.6. Samonapężenia w przekroju sprężonym

Opis zjawiska jest dla belek sprężonych bardziej złożony. Rozkładowi naprężeń w przekrojach sprężonych poświęcili wiele uwagi między innymi Ajdukiewicz [1, 2], Dyduch [51] i Grabiec [79]. Wpływ na to ma nie tylko dodanie do schematu statycznego belki siły osiowej, ale również – nierównomierny na wysokości przekroju – dodatkowy efekt relaksacji betonu. W belkach sprężonych, na których prowadzony był eksperyment, wpływ tej relaksacji występował od chwili zwolnienia strun w formie, to jest 28 dni od chwili zabetonowania. Efekt ten nie ma bezpośredniego wpływu na powstanie samonaprężeń, powoduje jednak trwałe deformacje w betonie (rys. 5.17). Deformacje trwałe powstałe w procesie obciążania belki nie są już deformacjami pierwotnymi, ale nakładają się na deformacje trwałe spowodowane siłą sprężającą przed przyłożeniem obciążenia użytkowego. Równania (4.26) i (5.11) powinny więc dodatkowo uwzględniać te deformacje trwałe

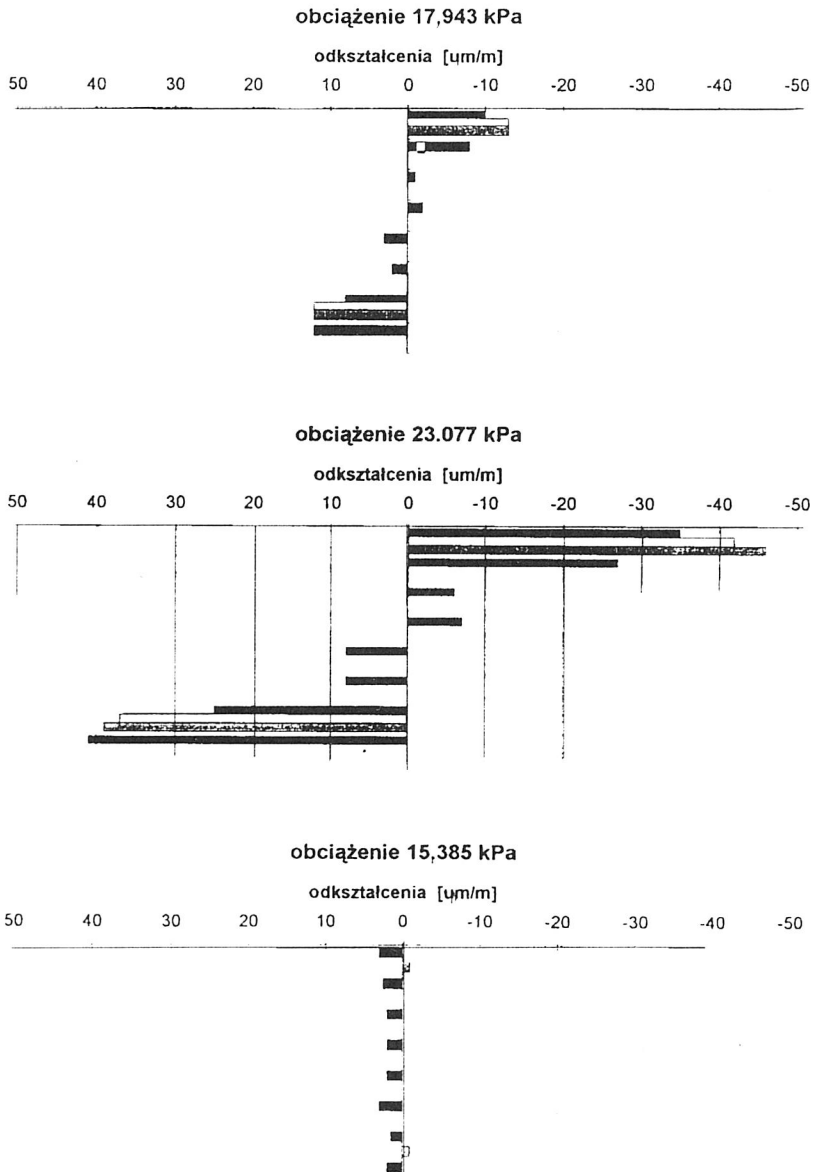
$$\varepsilon^T = \varepsilon^E + \varepsilon^{TR} \quad (5.13)$$

$$\varepsilon^{TR} = \varepsilon^R + \varepsilon^{pl(spr)} + \varepsilon^{pl} \quad (5.14)$$

gdzie: ε^T – odkształcenia całkowite,
 ε^E – odkształcenia sprężyste,
 ε^{TR} – całkowite odkształcenia resztkowe,
 ε^R – odkształcenia resztkowe (od doraźnego obciążenia),
 $\varepsilon^{pl(spr)}$ – odkształcenia plastyczne (od relaksacji w stanie bezużytkowym),
 ε^{pl} – odkształcenia plastyczne (od relaksacji w stanie użytkowym);

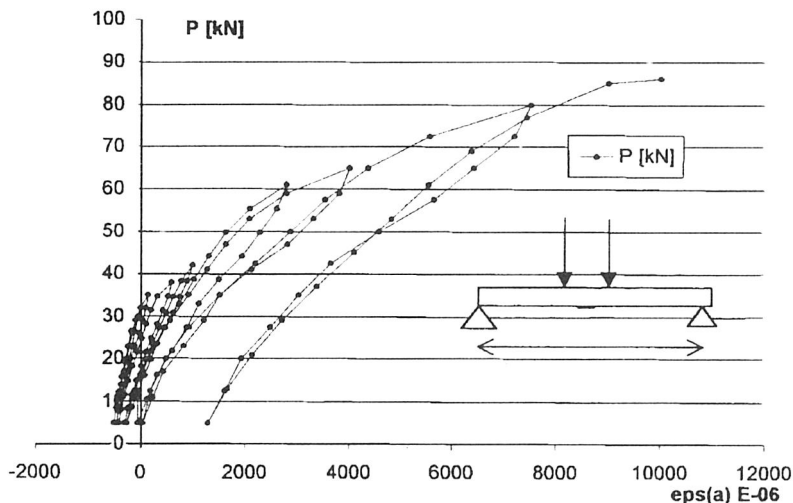
Deformacje trwałe spowodowane siłą sprężającą przed przyłożeniem obciążenia użytkowego odgrywają pewną rolę bezpośrednio na odcinku, na którym naprężenia ściska-

Belka druga cykl I – wykresy odkształceń przekrojów belki



Rys. 5.17. Przykładowy wydruk z tensometrycznego pomiaru odkształceń w belce sprężonej – przekrój środkowy

Fig. 5.17. Exemplary printout of measurement results of strains in a compressed beam



Rys. 5.18. Zależność siły P od odkształceń w pręcie zbrojeniowym w strefie rozciąganej [54, 103]

Fig. 5.18. Dependence of the force P on strains in reinforcing bar in a stretched zone [54, 103]

jące w strefie rozciąganej od wstępnego sprężenia przekroju są równoważone przez naprężenia od obciążenia zewnętrznego (rys. 5.18).

Daje to efekt pozornego zwiększenia sztywności przekroju do poziomu, gdy te wstępne naprężenia zostaną zrównoważone. Potwierdzają to wyniki badań doświadczalnych (rys. 5.12). Pozwala to hipotetycznie uzasadnić krzywoliniowy charakter wykresu na rysunku 5.12 w początkowej fazie realizowania obciążeń.

Wartość ε^R określa się jako:

$$\varepsilon^R = \varepsilon^{TR} - \varepsilon^{pl(spr)} - \varepsilon^{pl} \quad (5.15)$$

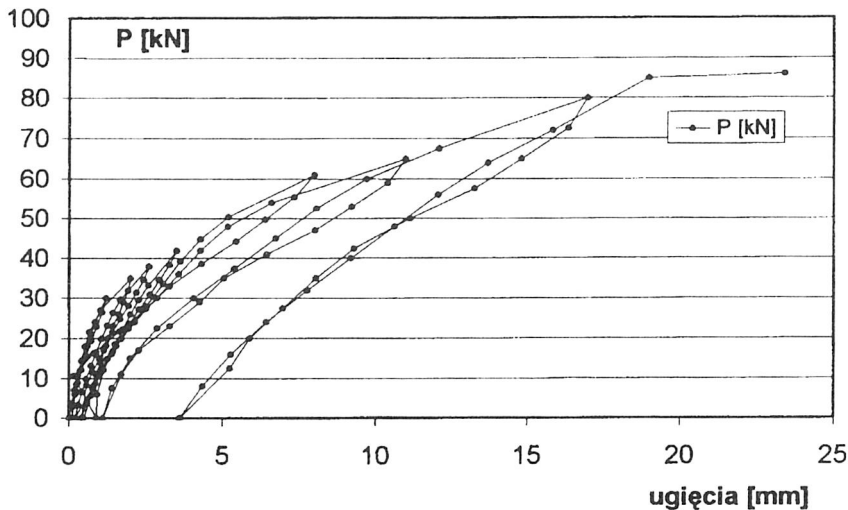
gdzie wartości $\varepsilon^{pl(spr)}$ i ε^{pl} dotyczące relaksacji przekroju należy określać się eksperymentalnie. Doświadczalne wartości rozkładu odkształceń resztkowych $\varepsilon_R(\zeta)$ i odkształceń sprężystych $\varepsilon^E = \varepsilon^T - \varepsilon^{TR}$ oraz obliczonych na ich podstawie samonaprzeżeń $\sigma^R = E_b \varepsilon^E$ przedstawia rysunek 5.20. Podobny rozkład naprzeżeń resztkowych otrzymał także wcześniej w swoich badaniach Biliszczuk [13].

Wyniki eksperymentu potwierdzają, że wskutek samonaprzeżeń naprężenia rozciągające wzrastają szybciej niż wynika to z analizy bez ich uwzględniania.

5.7. Deformacje sprężyste i trwałe w belce żelbetowej (współczynniki r_0 i r_1)

W przypadku belki swobodnie podpartej równanie (4.42) przyjmuje postać:

$$v_{,\xi\xi\xi\xi} = PL^3/EJ + \sum r_i \delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i) + \sum t_k \delta_{,\xi\xi\xi}(\xi - \zeta_k) \quad (5.16)$$



Rys. 5.19. Zależność poziomu obciążenia od ugięcia w belce sprężonej [54, 103]

Fig. 5.19. Dependence of load level on deflections in a compressed beam [54, 103]

- gdzie: $p = p(\xi)$ – obciążenie zewnętrzne;
 $\delta(\xi - \zeta_0)$ – funkcja delta Diraca;
 $r_i = -r_{0i} + r_{1i} \nu_{,\xi\xi\xi}(\zeta_l^-)$ – współczynniki określające dyslokację kątową w punkcie zarysowania;
 $t_k = -r_{0k} + r_{1k} \nu_{,\xi\xi\xi}(\zeta_k^-)$ – współczynniki określające dyslokację liniową w punkcie zarysowania;
 r_{0i}, t_k – parametr charakteryzujący deformacje trwałe sprowadzone do punktu zarysowania;
 r_{1i}, r_{1k} – współczynniki proporcjonalności dyslokacją kątową i liniową a uogólnionymi siłami wewnętrznymi $M(\xi - \zeta_j)$ oraz $T(\xi - \zeta_j)$.

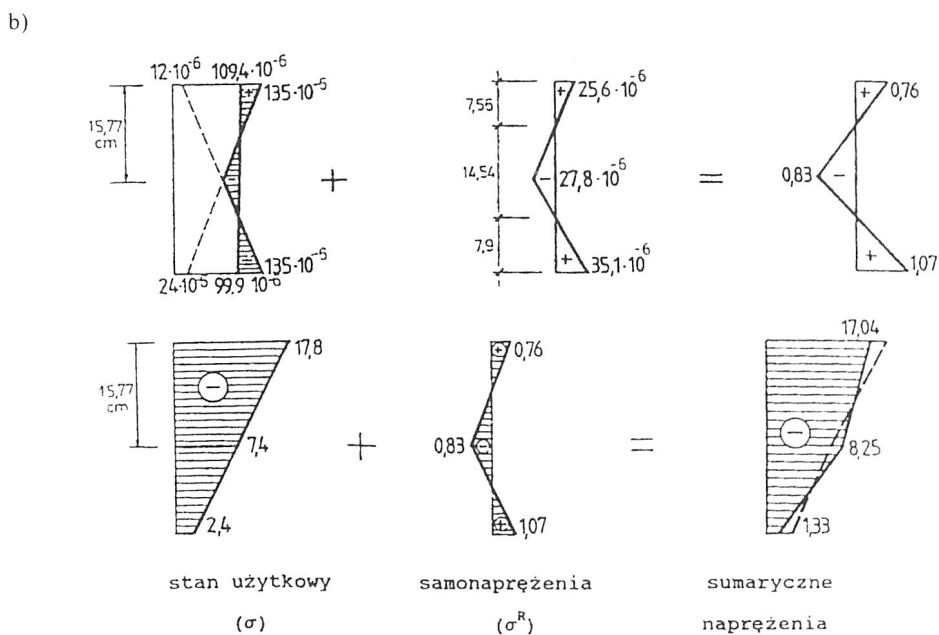
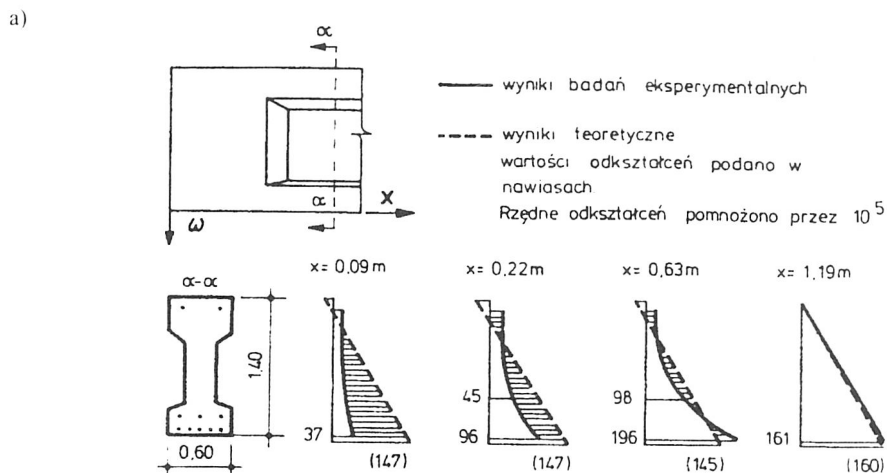
Z zależności geometrycznych można wartość współczynnika r_1 dla przekroju zginanego wyrazić wzorem:

$$r_1 = \frac{\Psi_a l_f}{E_a F_a h^2 \left(1 - \frac{\xi^{II}}{3} - \frac{a}{h}\right) \left(1 - \xi^{II} - \frac{a}{h}\right)} \quad (5.17)$$

lub

$$r_1 = \Psi_a r_1^* \quad (5.18)$$

Mając dane doświadczalne dotyczące ugięć belek przed i po obciążeniu, można z równania (5.17) wyznaczyć wartości r_1^* , natomiast z równania (5.16) wartości r_1 . Rów-



Rys. 5.20. Doświadczalne wartości rozkładu odkształceń trwałych $\varepsilon^R(z)$ i odkształceń sprężystych $\varepsilon^E = \varepsilon^T - \varepsilon^{TR}$ oraz obliczonych na ich podstawie samonaprężeń $\sigma^R = E_b \varepsilon^E$:

- a) odkształcenia w strefie przypodorowej mostu wg Iosilebskiego i Biliszczuka [13],
 b) według Eissa i Ubysza [54, 103]

Fig. 5.20. Experimental values of distribution of plastic strain $\varepsilon^R(z)$ and elastic deformations $\varepsilon^E = \varepsilon^T - \varepsilon^{TR}$ as well as the values of self-stresses $\sigma^R = E_b \varepsilon^E$: a) deformations in a support zone of a bridge according to Iosilebski and Biliszczuk [13]; b) according to Eiss and Ubysz [54, 103]

nanie (5.16) po scałkowaniu, przekształceniu i pozostawieniu członów opisujących sprężysty przyrost ugięć przyjmuje postać:

$$v(\xi) = [-\sum r_{1n}(-L/EJ)(\xi - \zeta_n)h(\xi - \zeta_n)]M_0 + [-\sum r_{1n}\zeta_n(-L^2/EJ)(\xi - \zeta_n)]T_0 + [\sum r_{1n}v_{,\xi\xi}(\zeta_n)(\xi - \zeta_n)h(\xi - \zeta_n)] \quad (5.19)$$

gdzie: n – liczba rys.

Współczynnik r_1 jest wyznaczony w taki sposób, aby uzyskać zgodność rozwiązania analitycznego z doświadczeniem. Liczba punktów, w których zmierzono ugięcia jest z reguły mniejsza od liczby rys, a więc ilość informacji jest mniejsza od liczby niewiadomych. Z warunku najmniejszego odchylenia kwadratowego można sformułować funkcjonal:

$$J = \sum_i \left(v_i^{\text{dosw}} - v_i^{\text{teor}} \right)^2 \quad (5.20)$$

gdzie: v^{dosw} – zmierzona wartość sprężystego ugięcia w i -tym punkcie;

v^{teor} – ugięcie sprężyste wyznaczone analitycznie w miejscu pomiaru deformacji.

Obliczając pochodną funkcjonału

$$\sum_i \frac{\partial J}{\partial r_{1i}} = 0 \quad (5.21)$$

otrzymuje się zgodną liczbę niewiadomych i równań.

Na podstawie podobnej analizy otrzymuje się wartości współczynnika r_0 . Równanie (5.16) po scałkowaniu, przekształceniu i pozostawieniu członów opisujących przyrost ugięć od deformacji trwałych przyjmuje postać:

$$v(\xi) = -\sum r_{0n}(\xi - \zeta_n)h(\xi - \zeta_n) \quad (5.22)$$

Następnie z warunku najmniejszego odchylenia kwadratowego:

$$J = \sum_i \left(v_i^{\text{dosw}} - v_i^{\text{teor}} \right)^2 \quad (5.23)$$

oraz obliczając pochodną funkcjonału

$$\sum_i \frac{\partial J}{\partial r_{0i}} = 0 \quad (5.24)$$

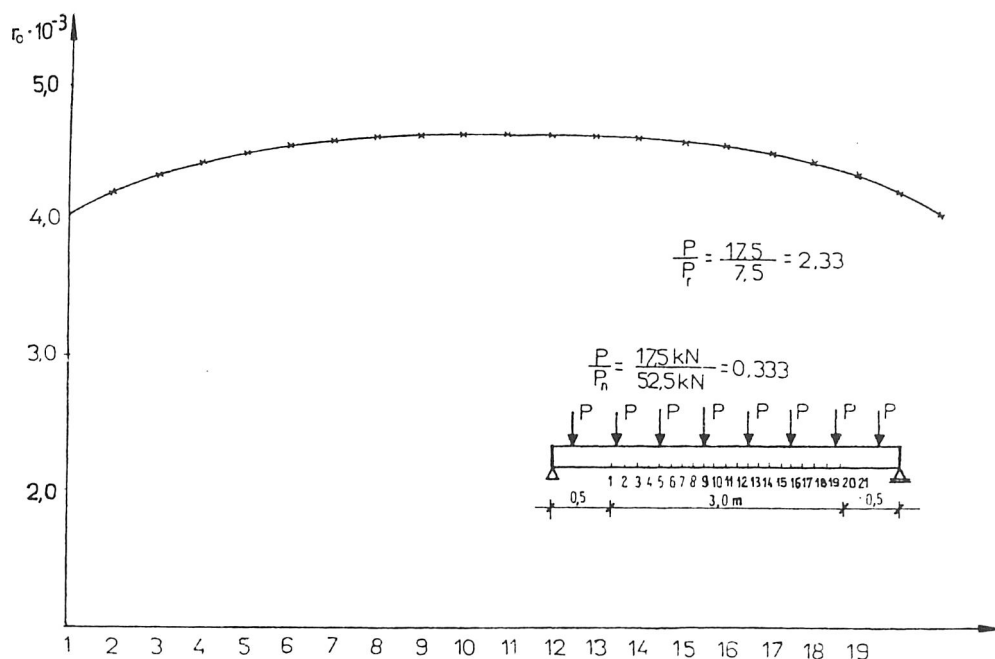
otrzymuje się układ równań ze zgodną liczbą niewiadomych i równań.

Analiza współczynników r_1 i r_0 przeprowadzona dla różnych belek (do analizy włączono także wyniki badań Bacha [8] i Ulickiego [240]) wykazała, że przy nie odbiegających od siebie zbytnio wartościach momentów zginających wartości współczynników

nie różnią się wiele od wartości uśrednionej. Również stosunek deformacji trwałych do sprężystych jest w przedziale użytkowym prawie stały, dlatego do obliczeń praktycznych można dla danej belki przy określonym poziomie obciążenia z dobrym przybliżeniem przyjąć, że wartości tych współczynników są stałe:

$$r_{11} = r_{12} = \dots = r_{1n}, \quad r_{01} = r_{02} = \dots = r_{0n} \quad (5.25)$$

Rysunki 5.21 i 5.22 ilustrują wartości współczynnika r_0 na długości belki dla określonego poziomu obciążenia oraz zależność r_0 od poziomu obciążenia.

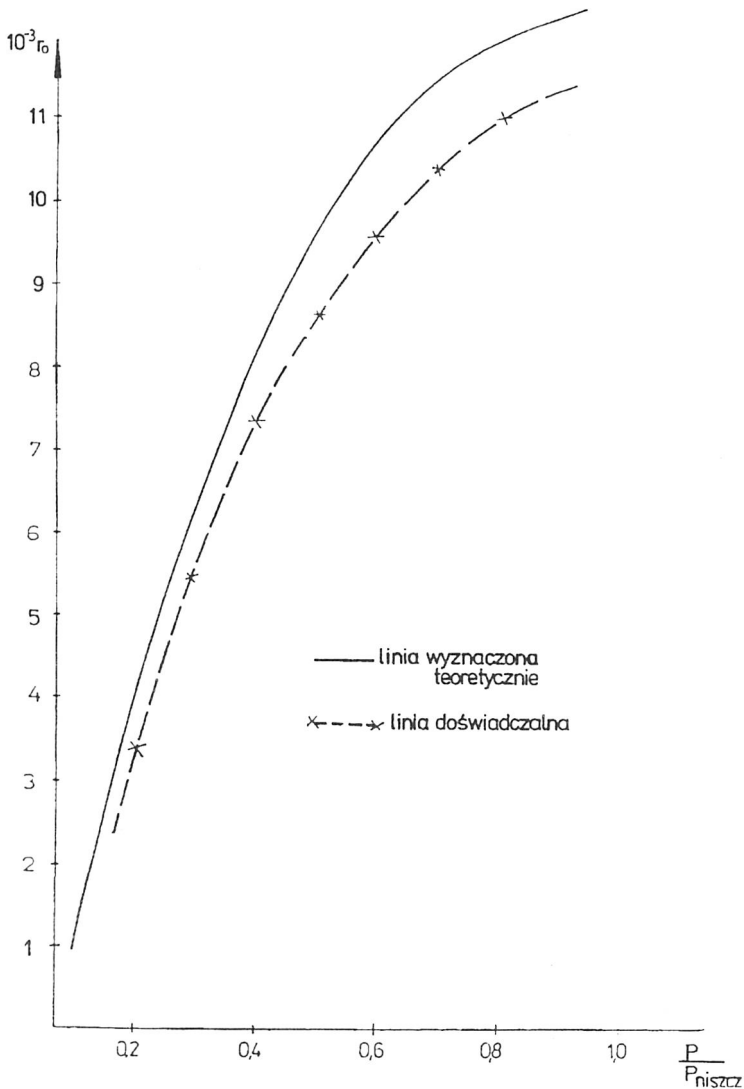


Rys. 5.21. Wartości współczynnika r_0 na długości belki
Fig. 5.21. Values of the coefficient r_0 on the length of a beam

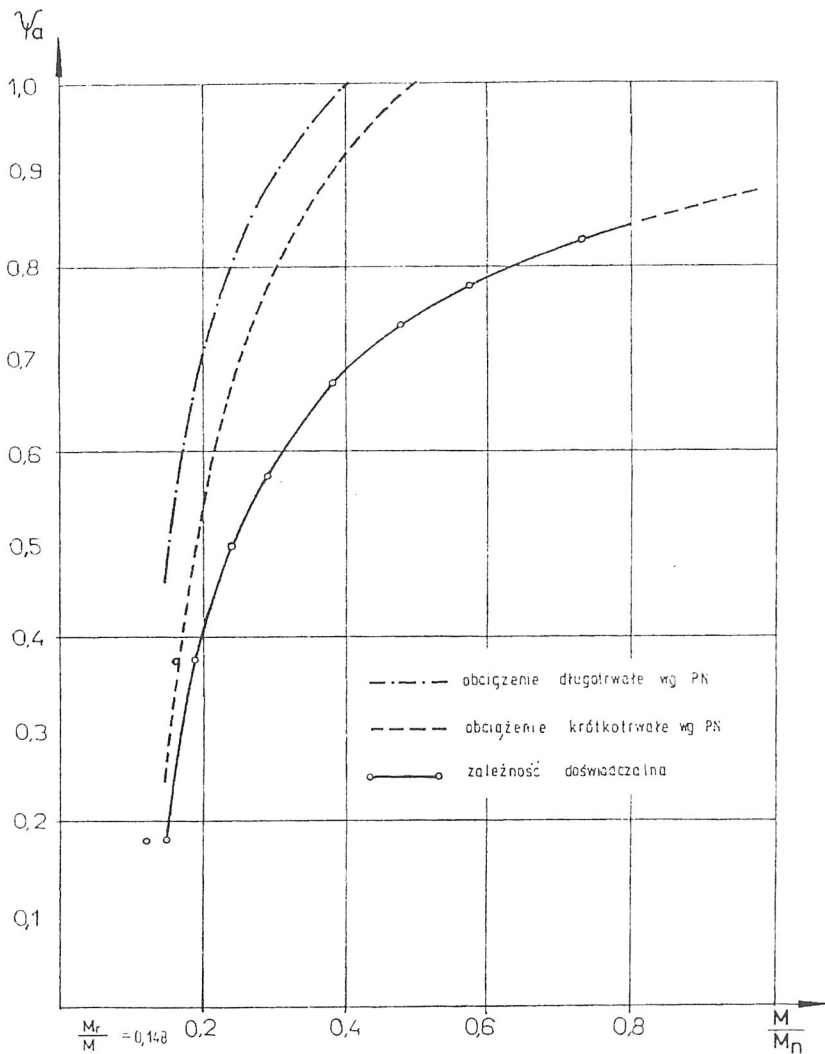
Mając dane doświadczalne dotyczące wartości r_1^* (z równania 5.17) i wartości r_1 (z równania 5.16) można wyznaczyć z (5.18) doświadczalne wartości współczynnika Ψ_a

$$\Psi_a = \frac{r_1^*}{r_1} \quad (5.26)$$

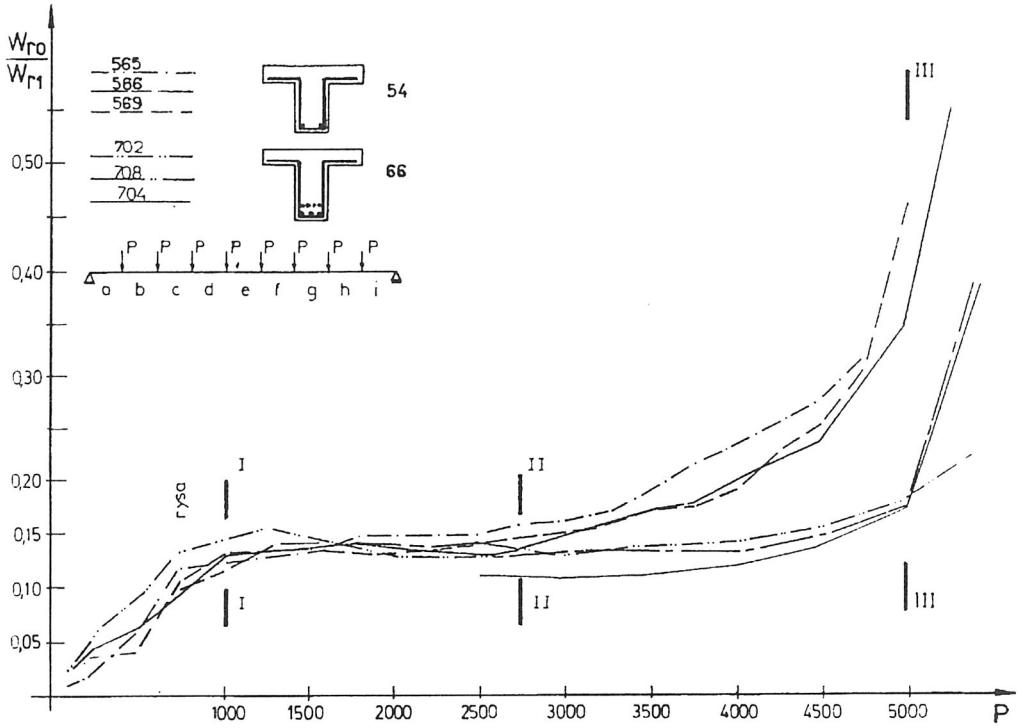
Na rysunku 5.23 porównano doświadczalne i normowe wartości współczynnika Ψ_a . Wartości tego współczynnika obliczane według – ustalonych także na podstawach empirycznych – wzorów normowych, różnią się od wartości doświadczalnych otrzymanych

Rys. 5.22. Zależność r_0 od poziomu obciążeniaFig. 5.22. Dependence r_0 on the level of load

przez autora. Przy obliczaniu r_1^* przyjęto bowiem wartości ξ^{II} wyznaczone z warunku równowagi dla przekroju zarysowanego, zakładając liniowy rozkład naprężeń. Różnica wynika zatem z pominięcia w obliczeniach występujących w rzeczywistości naprężeń resztkowych (samonaprężeń) pozostających po odciążeniu konstrukcji, które nakładają się na stan naprężeń sprężystych. Uwzględnienie wpływu naprężeń resztkowych zmniejsza rozbieżność tych funkcji do kilku procent.

Rys. 5.23. Zależność współczynnika Ψ_a od poziomu obciążeniaFig. 5.23. Dependence of the Ψ_a on the level of load

Badania wykazują, że istnieje pewna zależność między deformacjami trwałymi i sprężystymi. Najłatwiejsze do pomiaru są ugięcia. Wykonano analizę stosunku ugięć trwałych do sprężystych. Jako zmienną niezależną przyjęto poziom obciążenia $M:M^{rys}$ (rys. 5.24) oraz pomocniczo rzędną długości belki (rys. 5.25). Analizując stosunek ugięć trwałych do sprężystych jako funkcję obciążenia, można na przykładzie przekroju środkowego zaobserwować, że stosunek ten wzrasta do poziomu momentu rysującego proporcjonalnie. Po powstaniu rysy zależność ta ustala się na określonym poziomie $\nu^{res}; \nu^E = 0,13-0,15$. Prawdliwość obserwuje się w przedziale użytkowym belki ($M:M^{niszcz} < 0,5$). Przy dal-

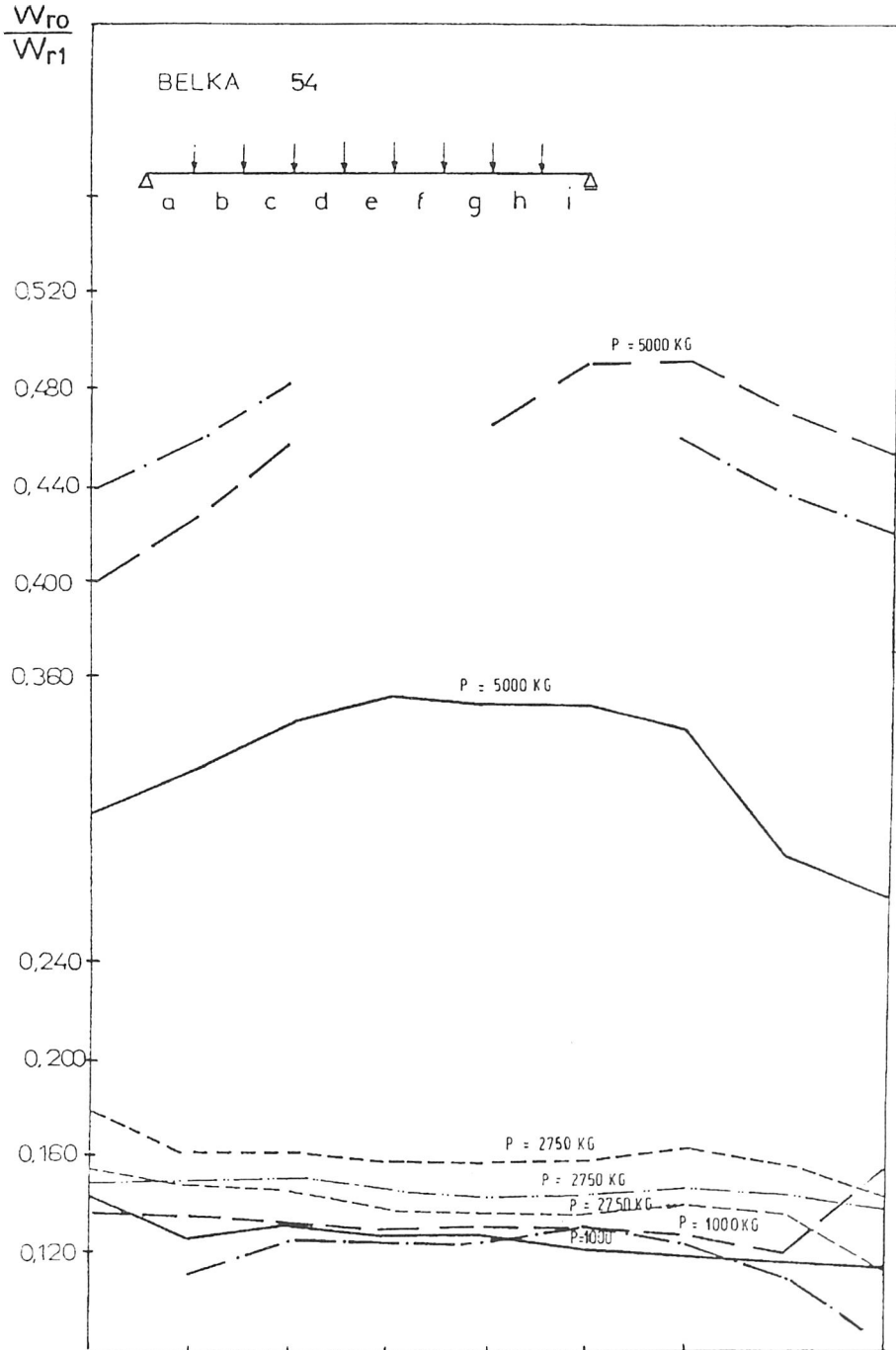


Rys. 5.24. Stosunek ugięć trwałych do sprężystych jako funkcja obciążenia
 Fig. 5.24. Ratio of plastic deflections to elastic one as a function of load

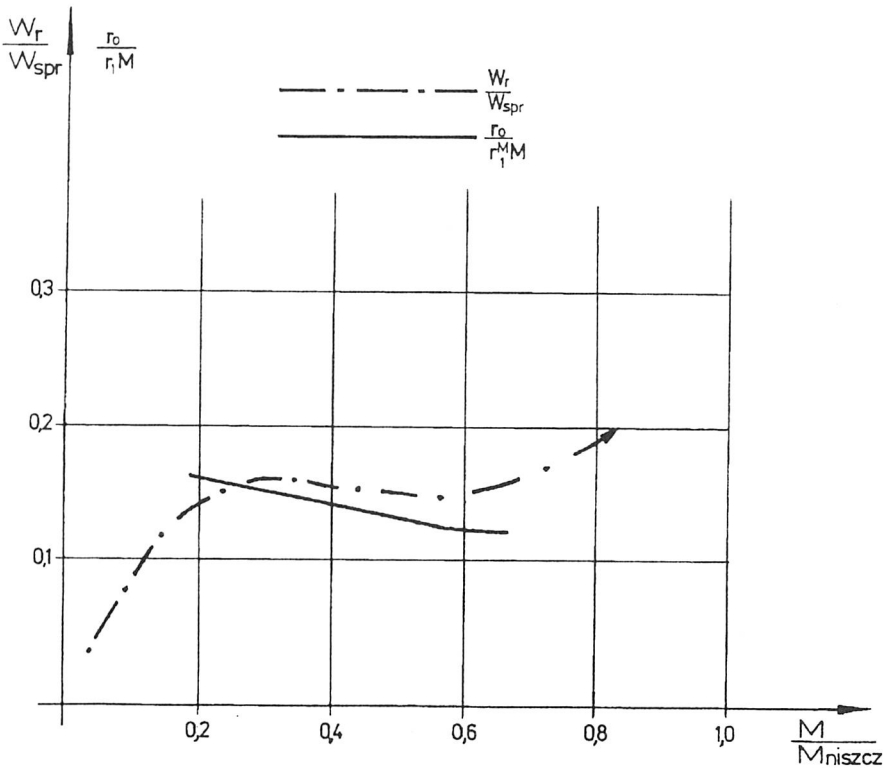
szym narastaniu obciążenia $M \rightarrow M^{\text{niszcz}}$ występuje coraz większa rozbieżność proporcji ugięć trwałych i sprężystych. Charakter tej zależności jest taki sam na całej długości belki.

Z braku danych nie jest możliwa analiza taka wprost z deformacji kątowych. Przeprowadzono ją pośrednio, wykorzystując wyznaczone wcześniej z doświadczenia współczynniki r_0 i r_1 . Przeanalizowano stosunek trwałych do sprężystych deformacji kątowych w rysie na różnych poziomach obciążenia. Otrzymane wartości stosunku deformacji kątowych odbiegają wprawdzie od stosunku ugięć, jednak charakter obu jest podobny (rys. 5.26). Większą zgodność można byłoby zapewnić, uściślając wartości odstępu między rysami l_j i współczynnika Ψ_a występujących we wzorze (5.17).

Wzory określające współczynniki r_0 i r_1 są weryfikowane na podstawie wyników badań doświadczalnych. Głównym celem weryfikacji jest ustalenie wzorów, które pozwoliłyby w miarę dokładnie określić wartości deformacji sprężystych i resztkowych w konstrukcjach belkowych, a w dalszym zamierzeniu tarczowych, płytowych i powłokowych.



Rys. 5.25. Stosunek ugięć trwałych do sprężystych na długości belki
 Fig. 5.25. Ratio of plastic deflections to elastic one on the length of a beam



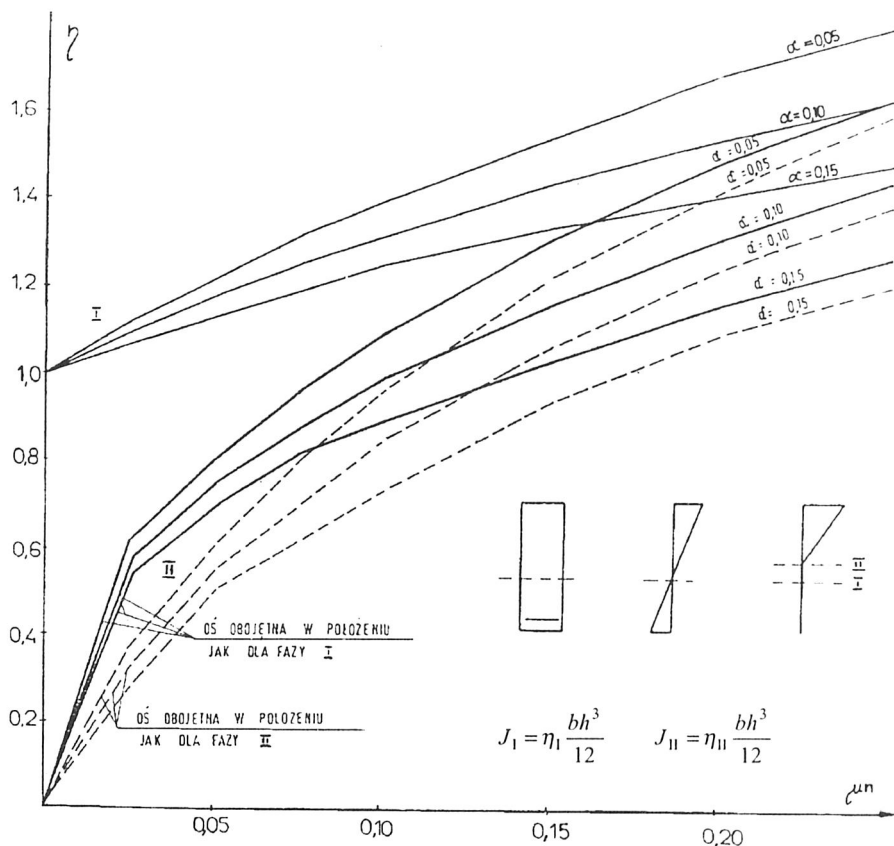
Rys. 5.26. Porównanie stosunku ugięć trwałych do sprężystych jako funkcji obciążenia i stosunku trwałych do sprężystych deformacji kątowych w rysie

Fig. 5.26. Comparison of the ratio of plastic deflections to elastic ones as a function of load and the ratio of plastic angle deformations to elastic ones in a crack

5.8. Ugięcia

Pomiar ugięć elementów żelbetowych umożliwia bezpośrednie eksperymentalne określenie jednego ze stanów użytkowych konstrukcji. Parametrem dobrze charakteryzującym deformacje konstrukcji jest sztywność. Zagadnienie sztywności wykracza poza geometrię i właściwości sprężyste betonu i stali. Ważnymi parametrami są tutaj jeszcze geometria rys, zagadnienie współpracy betonu i stali oraz efekty reologiczne.

Określenie rzeczywistej sztywności przekroju poważnie komplikuje obliczanie ugięć konstrukcji. Porównując tę samą belkę w przekrojach niezarysowanym i zarysowanym, stwierdza się znaczną różnicę sztywności. Ilustruje to rysunek 5.27, na podstawie którego można obliczyć moment bezwładności belki prostokątnej o momencie bezwładności $J = \eta b h^3 / 12$ i zbrojeniu $n\mu$ w fazie niezarysowanej i zarysowanej. Współczynnik η uwzględnia, oprócz fazy pracy belki, geometrię (ilość i rozkład) zbrojenia. Pokazano



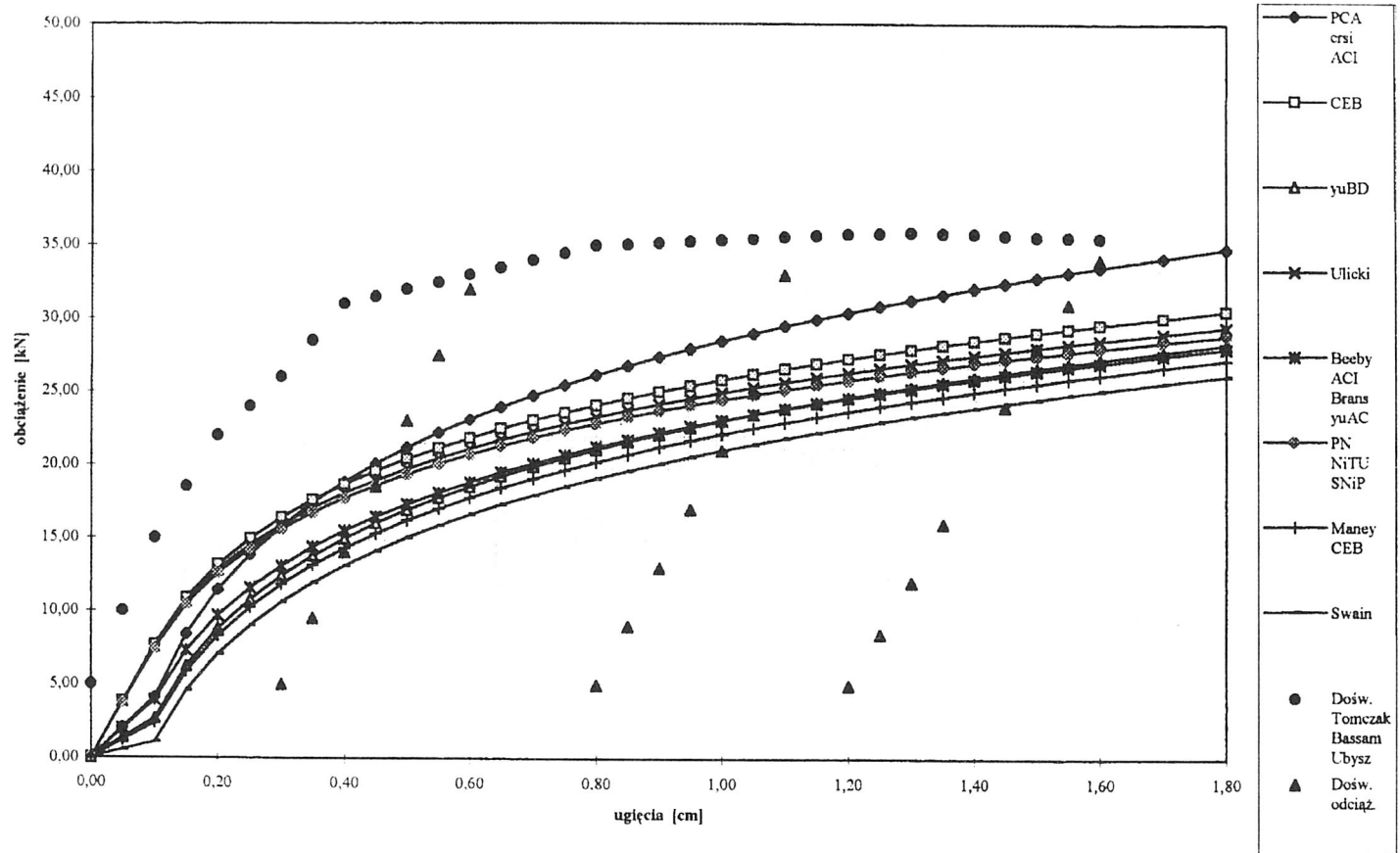
Rys. 5.27. Moment bezwładności belki w fazie I i II w zależności od ilości i rozmieszczenia zbrojenia
 Fig. 5.27. Moment of inertia in a beam in phase I and II vs. the quantity and distribution of reinforcing bar

również efekt uwzględniania przesunięcia osi obojętnej wskutek zarysowania przekrojów. Uwzględnienie tego efektu zaproponowali między innymi Muraszow [179] i Kuczyński [127]. Kontynuinalna teoria żelbetu umożliwia za pomocą doświadczalnie wyznaczonych funkcji φ i Ψ wyznaczenie efektywnej sztywności belki w fazie zarysowanej z uwzględnieniem sztywności w fazie I:

$$EJ(\xi) = EJ_1(\xi) \left[1 - \left(\frac{M}{M_n} \right)^\Psi \right] \quad (5.27)$$

gdzie: $EJ(\xi)$ – efektywna sztywność belki w fazie I,
 M, M_n – rzeczywisty i niszczący moment zginający w określonym przekroju;
 Ψ – współczynnik doświadczalny.

Wykresy ugięć według różnych autorów

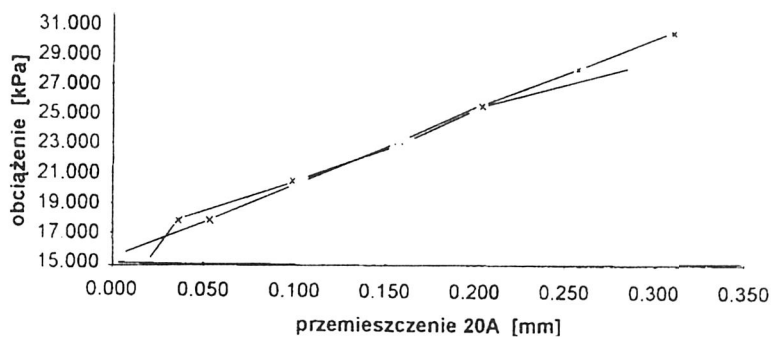


Rys. 5.28. Porównanie metod obliczania ugięć według różnych autorów (z wykorzystaniem programu i opracowań Szechińskiego)

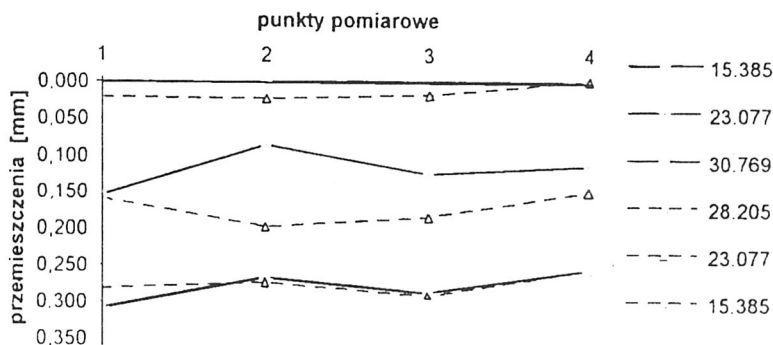
Fig. 5.28. Comparison of the methods of calculation of deflections according to different authors (basing on the Szechini's program and papers)

Belka druga cykl II

L.P.	odczyt obciąż.	obciąż.	przemieszczenia			
			20A	21A	22A	23A
-	[kG]	[kPa]	[mm]	[mm]	[mm]	[mm]
1	600	15.385	0.000	-0.001	-0.003	-0.001
2	700	17.949	0.053	-0.001	0.034	0.031
3	800	20.513	0.103	0.035	0.073	0.069
4	900	23.077	0.155	0.085	0.124	0.113
5	1000	25.641	0.200	0.140	0.180	0.160
6	1100	28.205	0.257	0.203	0.233	0.212
7	1200	30.769	0.309	0.266	0.286	0.256
8	1100	28.205	0.282	0.273	0.291	0.256
9	1000	25.641	0.203	0.239	0.224	0.187
10	900	23.077	0.159	0.197	0.183	0.149
11	800	20.513	0.099	0.142	0.131	0.099
12	700	17.949	0.036	0.080	0.073	0.047
13	600	15.385	0.021	0.022	0.016	-0.003

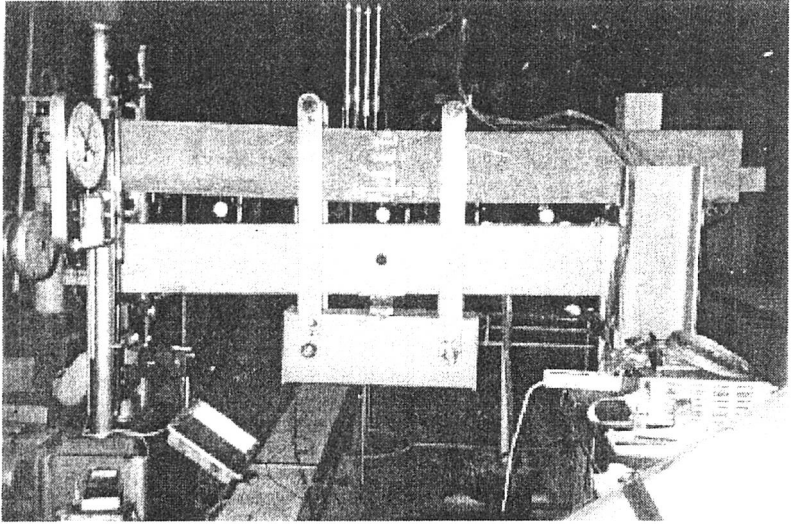


Przemieszczenia punktów pomiarowych



Rys. 5.29. Przykładowy wydruk wyników pomiaru ugięć belki żelbetowej

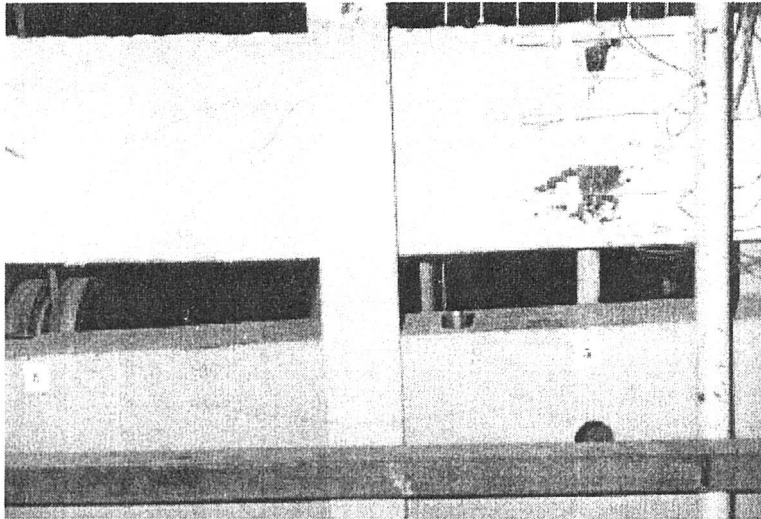
Fig. 5.29. Exemplary printout of the measurement results of deflections of reinforced concrete beam



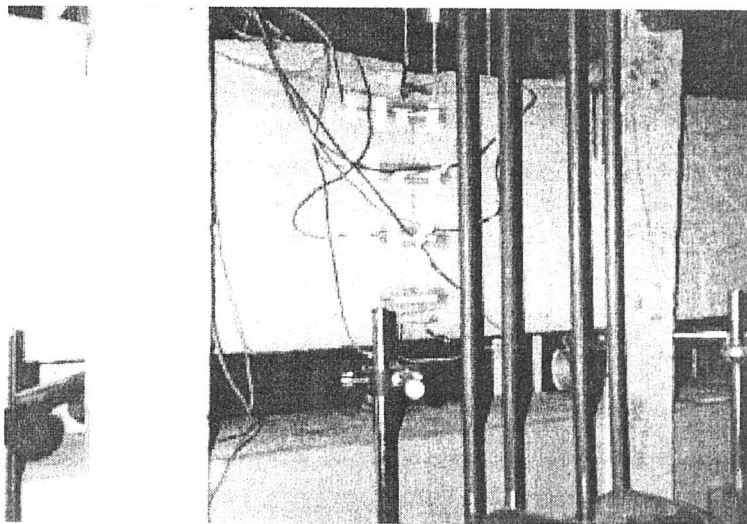
Rys. 5.30. Stan deformacji trwałych po odciążeniu
 Fig. 5.30. State of plastic deformation after discharge

Zagadnienie deformacji zginanych elementów żelbetowych obciążonych długotrwałe przedstawia obszernie Szechiński [221]. Wyniki otrzymane w drodze analiz numerycznych weryfikuje on z badaniami doświadczalnymi.

Rysunek 5.28 pokazuje zależność różnych metod obliczenia ugięć i porównuje ją z wynikami badań doświadczalnych. Zwracają uwagę znaczne rozbieżności wyników te-



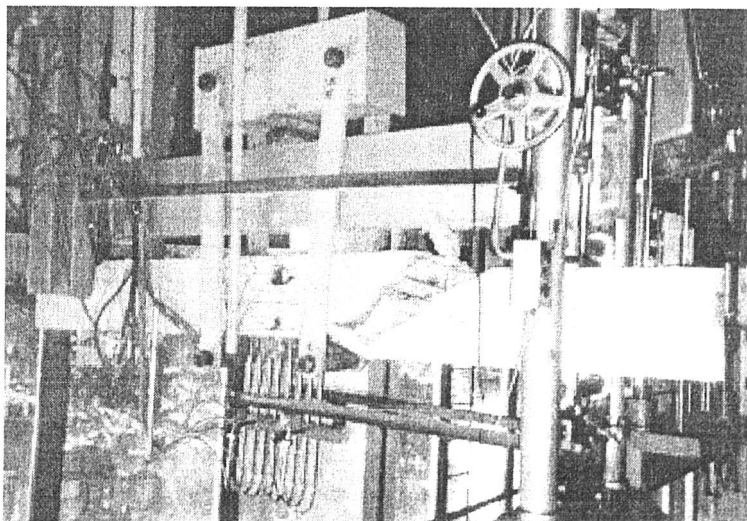
Rys. 5.31. Rysy ukośne w belce
 Fig. 5.31. Crack in a support zone in a beam



Rys. 5.32. Faza niszczenia strefy ściskanej betonu

Fig. 5.32. Phase of failure of compressed zone in concrete

oretycznych obliczanych jak dla obciążeń doraźnych. Różnice w wartościach wyników otrzymanych z obliczeń i eksperymentu wynikają z dużego odstępu czasowego między doświadczalnym wyznaczaniem cech fizycznych betonu na próbkach walcowych, a terminem badania ugięć belki. W miarę wzrostu obciążenia udział odkształceń sprężystych w betonie maleje, a wartości analityczne i doświadczalne przyjmują porównywalne wartości.



Rys. 5.33. Zniszczenie belki sprężonej

Fig. 5.33. Failure of a compressed beam

Analizę współpracy betonu ze zbrojeniem w elemencie wielokrotnie osiowo rozciąganym zrealizował Kozłowski [120] (rys. 5.11). Koncepcja badań była tak opracowana, aby otrzymywane wyniki można było wykorzystywać przy obliczaniu trwałych i sprężystych deformacji w przekroju zginanym. Wyniki tych badań były wykorzystywane przy numerycznych obliczeniach ugięć.

Na rysunkach 5.30–5.33 pokazano fazy obciążenia belki sprężonej. Widoczny jest stan deformacji trwałych po odciążeniu (rys. 5.30), powstawania rys ukośnych (rys. 5.31), niszczenie strefy ściskanej betonu (rys. 5.32) i fazę zniszczenia belki (rys. 5.33).

5.9. Redystrybucja sił w belce statycznie niewyznaczalnej

W przypadku belki dwuprzęsłowej równanie (4.42) przyjmuje postać:

$$v_{,\xi\xi\xi\xi\xi} = \frac{pL^3}{EJ} + m_0\delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_0) + \sum r_i\delta_{,\xi\xi}(\xi - \zeta_i) + \sum t_k\delta_{,\xi\xi\xi}(\xi - \zeta_k) \quad (5.28)$$

gdzie: m_0 – moment na środkowej podporze wyznaczony z warunku $v_{,\xi} = 0$;

Zakres badań dwuprzęsłowej belki żelbetowej obejmował między innymi pomiar reakcji podporowych w kolejnych cyklach pomiarowych. Podczas procesu obciążania w przekrojach belki występują deformacje trwałe, które zaburzają oczekiwany z analizy sprężystej rozkład naprężeń (rys. 5.34). Mierzalnym efektem tego zjawiska w konstrukcjach statycznie niewyznaczalnych jest tak zwane przegrupowanie sił wewnętrznych. Efekt ten można określić bezpośrednio, badając reakcje belki na podporach lub pośrednio, mierząc odkształcenia zbrojenia rozciąganego i ściskanego. Z relacji geometrycznych otrzymuje się wówczas zależność momentu od odkształceń stali zbrojeniowej:

$$M_g^{rz} = EJ \frac{\varepsilon^r + \varepsilon^s}{h(\varepsilon^r + 1)} \quad (5.29)$$

Określając moment teoretyczny na podporze jak dla belki sprężystej, można pokazać zależność pomiędzy momentem a krzywizną dla belki obciążonej i odciążonej (rys. 5.35).

Jeżeli przyjąć, że stosunek momentu do krzywizny charakteryzuje sztywność, to widać zmniejszanie się sztywności podczas obciążenia i ustalenie wartości w procesie odciążania.

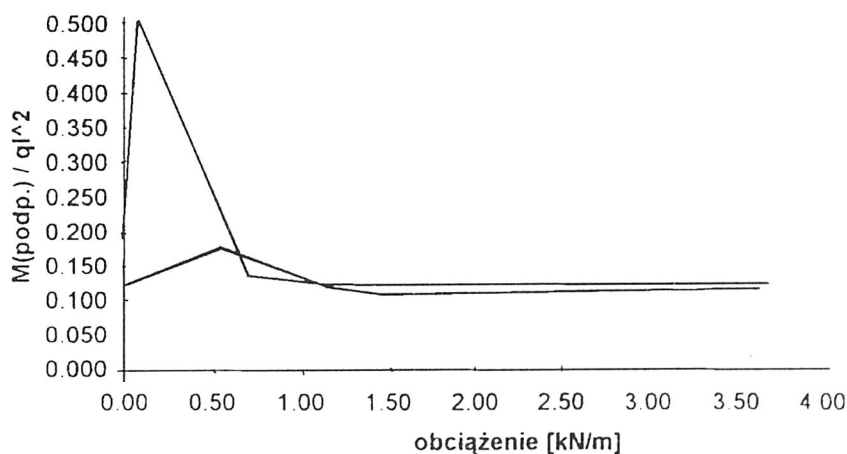
Rysunki 5.36–5.39 pokazują przegrupowanie momentów dla różnych belek obciążonych siłą skupioną: zbrojonych sprężystozgodnie, z niedozbrojoną oraz przezbrojoną podporą. Podobne porównania zrobiono dla belek obciążonych siłą równomiernie rozłożoną. Z porównań tych wynika kilka wniosków.

Na redystrybucję momentów wpływa w istotny sposób rozmieszczenie prętów zbrojeniowych na długości elementu. Redystrybucja jest tym mniejsza, im zbrojenie odpowiada bardziej sprężystozgodnemu.

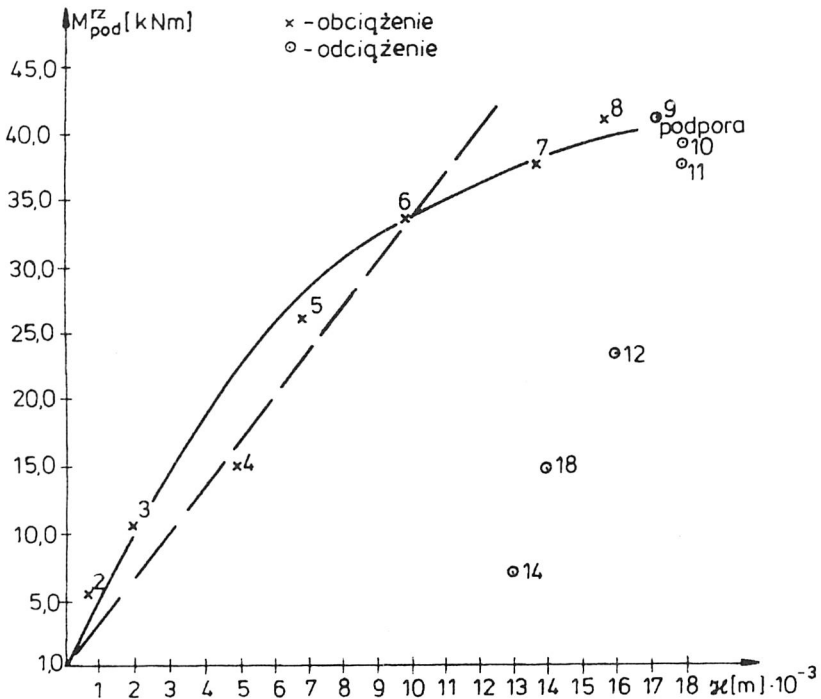
Belka pierwsza – cykl IV
Redystrybucja momentów zginających

momenty zginające			M(Ra)	M(Rpodp.)	Mśred
sprężysty	z Ra	z Rpodp.	ql ²	ql ²	ql ²
[kNm]	[kNm]	[kNm]	-	-	-
0.00	0.00	0.00	0.125	0.125	0.125
2.53	-3.65	-3.65	0.180	0.180	0.180
4.95	-5.03	-5.03	0.127	0.127	0.127
7.83	-7.86	-7.86	0.125	0.125	0.125
11.80	-12.29	-12.29	0.130	0.130	0.130
15.19	-15.29	-15.29	0.126	0.126	0.126
16.98	-16.88	-16.88	0.124	0.124	0.124
18.02	-17.19	-17.19	0.119	0.119	0.119
17.93	-16.98	-16.98	0.118	0.118	0.118
17.60	-17.12	-17.12	0.122	0.122	0.122
17.21	-16.64	-16.64	0.121	0.121	0.121
10.42	-9.51	-9.51	0.114	0.114	0.114
6.55	-5.91	-5.91	0.113	0.113	0.113
3.18	-3.59	-3.59	0.141	0.141	0.141
0.39	-1.55	-1.55	0.500	0.500	0.500
-0.85	-1.41	-1.41	-0.208	-0.208	-0.208
-1.51	-1.64	-1.64	-0.135	-0.135	-0.135
-1.74	-1.49	-1.49	-0.106	-0.106	-0.106
-1.89	-1.56	-1.56	-0.103	-0.103	-0.103
-1.97	-1.11	-1.11	-0.070	-0.070	-0.070
-2.04	-1.19	-1.19	-0.072	-0.072	-0.072

Przegrupowanie momentów podporowych



Rys. 5.34. Przykładowy wydruk wyników z pomiaru redystrybucji momentów belki żelbetowej
Fig. 5.34. Exemplary printout of the measurement results of the redistribution of moments
in a reinforced concrete beam



Rys. 5.35. Doświadczalna zależność moment–krzywizna dla podpory środkowej w belce dwuprzęsłowej

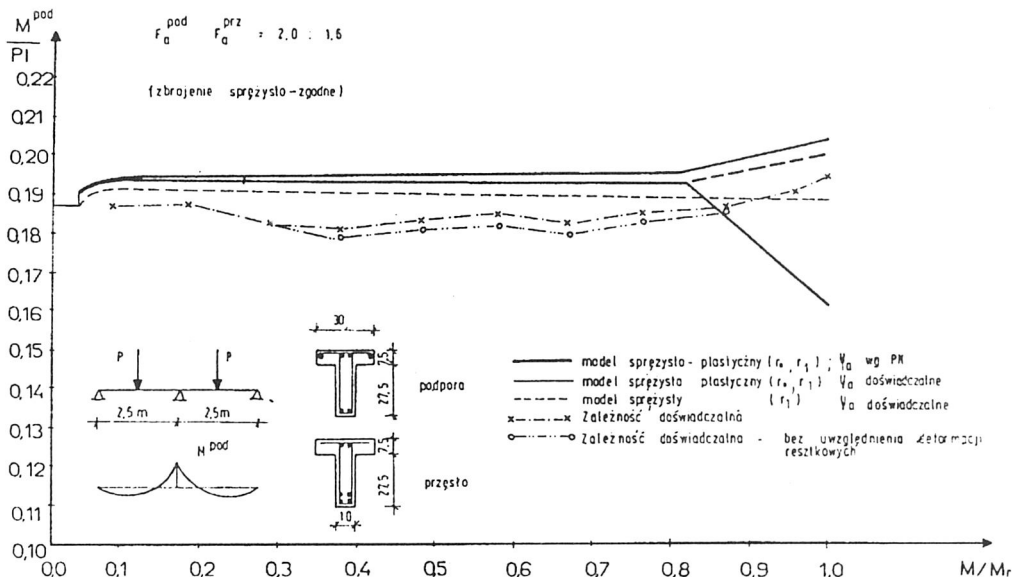
Fig. 5.35. Experimental dependence moment–curvature on a central support in a two-span beam

Model, w którym efekty związane z zarysowaniem są skupione w miejscu rysy, dają dość dobrą zgodność, jeżeli chodzi o charakter wykresu, jednak wyniki obliczone analitycznie są o kilka, a niekiedy nawet o kilkanaście procent większe od wartości doświadczalnych. Przyczyną rozbieżności może być nie uwzględnione w obliczeniach przegrupowanie sił wewnętrznych na wysokości przekroju oraz losowy charakter współczynnika Ψ_{α} .

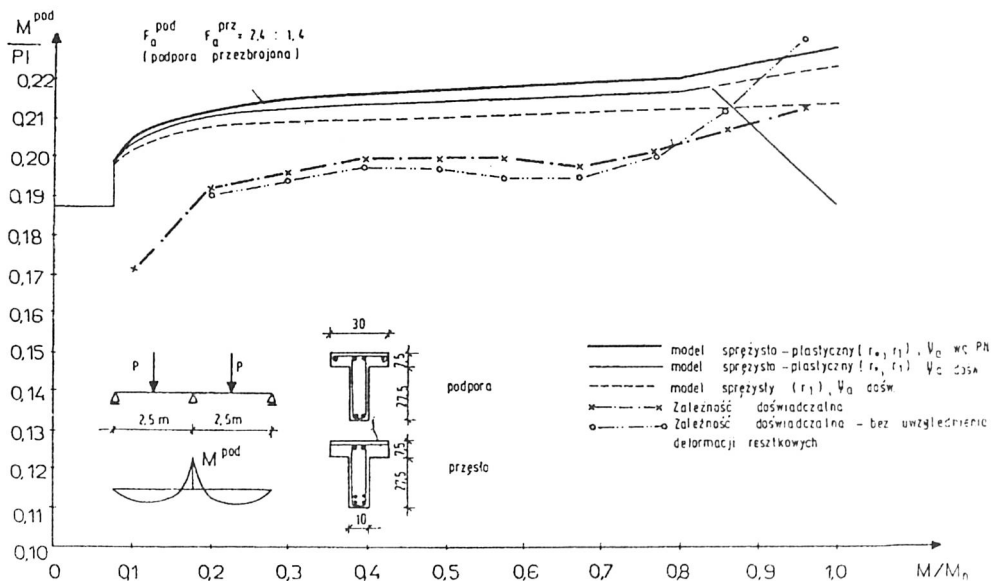
Przyjęty do obliczeń model opisujący odkształcenia resztkowe daje w przeanalizowanych przypadkach dobrą zgodność z doświadczeniem.

Odkształcenia spowodowane deformacjami resztkowymi w rysie nie wpływają istotnie zarówno w przypadku obliczeń, jak i w przypadku doświadczenia na redystrybucję momentów zginających.

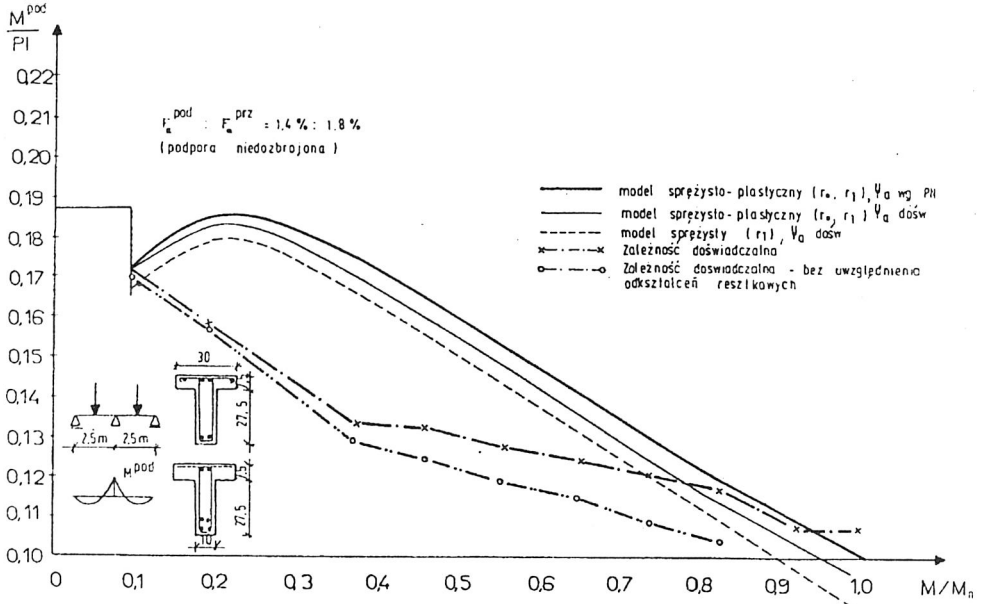
Na rysunkach 5.36–5.39 zaznaczono obciążenie, przy którym następuje zniszczenie na podporze. Metoda pozwala również na analizę stanów plastycznych. Płynięcie stali odpowiada lokalnemu zwiększeniu współczynnika r_0 . Po osiągnięciu granicy plastyczności w zbrojeniu na podporze, w miarę dalszego obciążania, następuje uplastycznienie zbrojenia w przęśle.



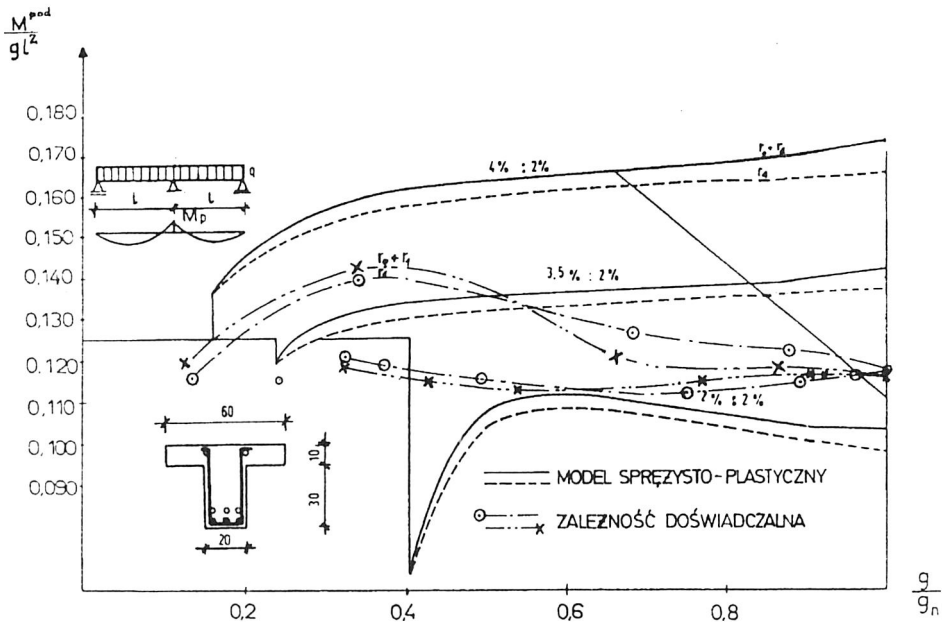
Rys. 5.36. Redystrybucja momentu podporowego – podpora zbrojona sprężystozgodnie
 Fig. 5.36. Redistribution of the support moment – concrete reinforcement according to moment diagram



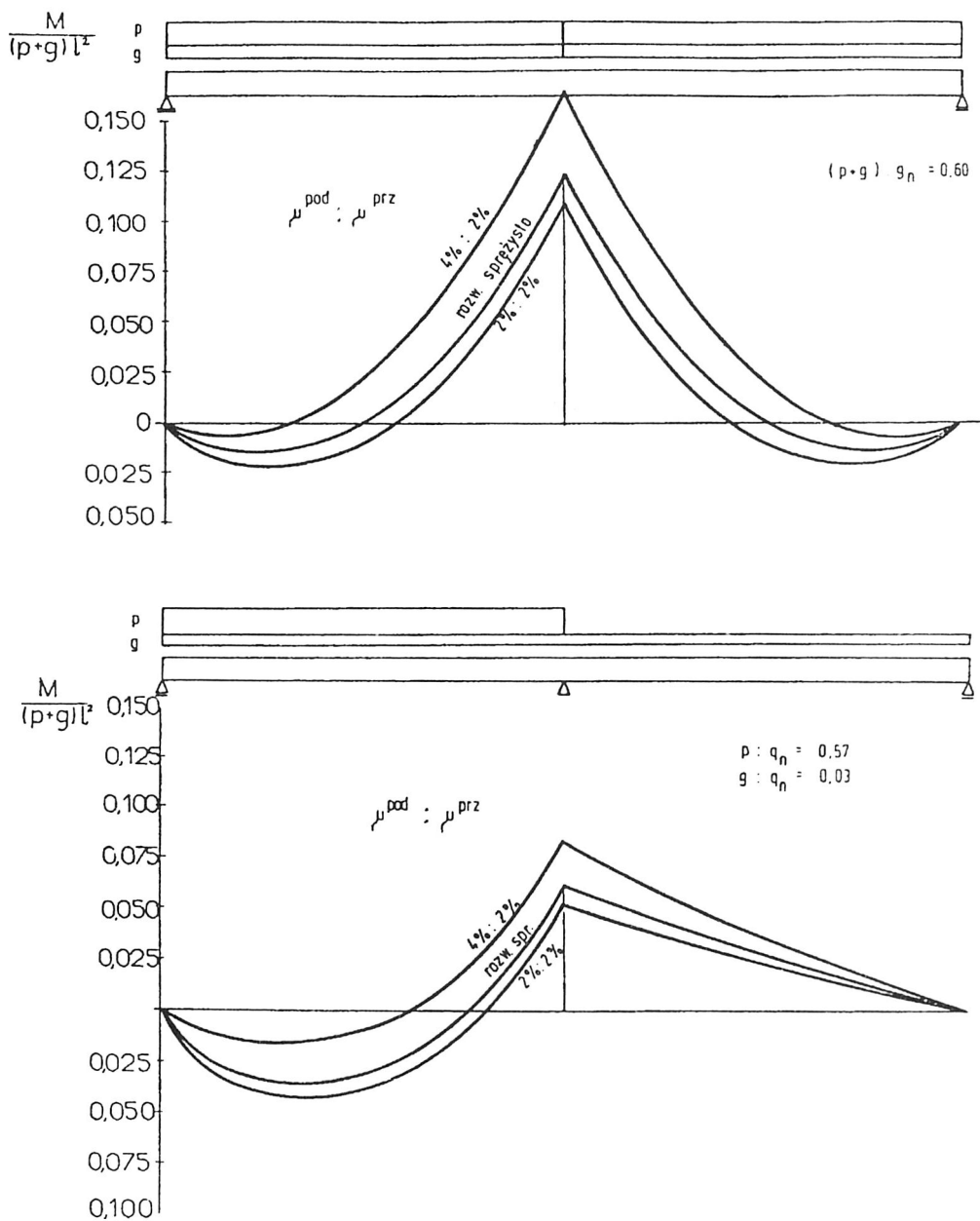
Rys. 5.37. Redystrybucja momentu podporowego – podpora przebrojona
 Fig. 5.37. Redistribution of the support moment – concrete is overreinforced for moment diagram



Rys. 5.38. Redystrybucja momentu podporowego – podpora niedozbrojona
 Fig. 5.38. Redistribution of the support moment – concrete is underreinforced



Rys. 5.39. Redystrybucja momentu podporowego – obciążenie równomiernie rozłożone
 Fig. 5.39. Redistribution of the support moment – uniformly distributed load



Rys. 5.40. Obwiednia momentów w zarysowanej belce dwuprzęsłowej;
 a) obciążenie symetryczne; b) obciążenie niesymetryczne

Fig. 5.40. Envelope of moments in a two-span beam with crack:
 a) symmetrical load; b) unsymmetrical load

Zwracają uwagę mało satysfakcjonujące wyniki w przypadku dwuprzęsłowej belki teowej, niedozbrojonej na podporze. Zbieżność wyników analitycznych i doświadczalnych otrzymuje się dopiero na poziomie obciążeń bliskich obciążeniom niszczącym. Świadczy to o niepoprawnym w tym przypadku przyjęciu założeń do obliczania sztywności w przekrojach podporowym i przęsłowym. Zdaniem autora błąd ten wynika z zaburzeń w rozkładzie naprężeń w przekroju teowym, a w konsekwencji z nierównomiernego (niecałkowitego) wykorzystania sztywności przekroju na zginanie.

Zagadnieniem, któremu nie poświęcano dotychczas większej uwagi, jest wyznaczenie obwiedni momentów jako funkcji rozmieszczenia zbrojenia w belkach wieloprzęsłowych. Momenty zginające można wyznaczyć jako superpozycję dwóch schematów statycznych, w których obciążenie jest w pierwszym przypadku równomiernie rozłożone, w drugim natomiast przeszła są tak obciążone, aby momenty przyjmowały wartości ekstremalne.

W przypadku konstrukcji niejednorodnej wyznaczanie sił wewnętrznych na zasadzie superpozycji nie będzie poprawne. Obszar zarysowania i kąt rozwarcia rysy zależą od poziomu obciążenia oraz od stosunku obciążenia stałego do zmiennego.

Na rysunku 5.40 przedstawiono przykład obwiedni momentów dla tej samej belki dwuprzęsłowej na poziomie obciążenia $(p + g)/q_{niszcz} = 0,6$. Wyniki porównano z rozwiązaniem sprężystym. Z analizy wynika, że można sporządzić obwiednię momentów zginających w belce, uwzględniając historię obciążenia.

Podobną analizę można przeprowadzić także i dla innych wielkości statycznych – ugięć, kątów obrotu i sił poprzecznych. Rozwiązanie wyglądałoby analogicznie, gdyby wielkością wymuszającą były deformacje (np. osiadanie podpór). W analizie tej pominięto odkształcenia długotrwałe, nie znaczy to jednak, że metoda nie pozwala na taką analizę. Brak wystarczających danych doświadczalnych uniemożliwił jednak wnikliwszą analizę współczynników r_0 , r_1 , charakteryzujących sprężyste i trwałe deformacje w rysie.

Wyniki niniejszej pracy skłaniają do przypuszczeń, że przyrost deformacji trwałych r_0 będzie miał wpływ na wartość przemieszczeń, będzie natomiast odgrywał niewielką rolę przy przegrupowaniu momentów. Można przypuszczać, że także w przypadku obciążeń długotrwałych zaobserwuje się wyraźne zmiany współczynnika Ψ_a . Należy jednak oczekiwać, że stosunek średnich naprężeń do naprężeń w rysie σ_{sr}/σ_{II} będzie się zmieniał w miarę upływu czasu. Przyczyn należałoby szukać w większym niż przy obciążeniach doraźnych uwidocznieniu się efektów reologicznych oraz w naruszaniu współpracy betonu i stali (wskutek „wyciągania się” zbrojenia z betonu), która wpływa na zmianę wartości naprężeń σ_{sr} . Szczegółowe przeanalizowanie tego zagadnienia byłoby istotnym uzupełnieniem metod wyznaczania trwałych deformacji kątowych w rysie.

6. Podsumowanie i wnioski końcowe

Uwagi ogólne

Do wniosków podsumowujących niniejszą pracę, a równocześnie cykl badań realizowanych w zespole pod kierownictwem autora, należy wykazanie, że istnieją podstawy, aby przyjąć, że konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone w przedziale użytkowym są wykonane z materiału liniowo sprężystego z uwzględnieniem dyskretnych nieciągłości.

Zadanie to zostało zainicjowane przez A. Borcza, który opracował podstawy teoretyczne i poparł je częściowo eksperymentem. Opierały się one z jednej strony na kryteriach negatywnych, wskazujących na sprzeczność między sposobem obliczania schematów statycznych z wykorzystaniem metod teorii sprężystości a wymiarowaniem przekrojów metodą stanów granicznych oraz z drugiej – na kryteriach pozytywnych wskazujących na wyniki eksperymentów i ich interpretacje. W niniejszej pracy podjęto próbę syntetycznej interpretacji sprężystych cech betonu. Jako podstawę do tego przyjęto następujące wnioski pośrednie:

- *Aktualny poziom wiedzy dotyczący budowy i właściwości fizykochemicznych betonu.* Występujące w betonie związki mają strukturę krystaliczną, choć w znacznym stopniu niejednorodną. Wiązania wewnątrz- i międzycząsteczkowe dążą do osiągnięcia ściśle ustalonego potencjału energetycznego w sposób odwracalny, co implikuje sprężyste cechy materiału. Liczba i rodzaj wiązań w znacznym stopniu warunkuje podstawowe cechy wytrzymałościowe (R_b^G , R_b^K) i sprężyste (E , ν) betonu. Na efekty sprężyste nakładają się trwałe deformacje doraźne, będące następstwem między innymi zrywania tych wiązań i opóźnione – wynikające z fizykochemicznych zjawisk przebiegających z upływem czasu (na przykład infiltracja wody, długotrwałe reakcje chemiczne). Te właśnie zjawiska umożliwiają między innymi interpretację efektów reologicznych. Zmiany struktury betonu są w znacznym stopniu przewidywalne, gdyż podlegają prawom termodynamiki. Stosowane modyfikacje betonu wpływają z reguły na idealizację cech sprężystych materiału.

- *Wyniki elementarnych badań na próbkach betonowych.* Opisują one najczęściej relacje między podstawowymi wielkościami fizycznymi. Opracowane statystycznie wielkości i zależności stanowią podstawę do ustalania normatywów projektowych

i realizacyjnych. W podstawowej próbie wytrzymałościowej określającej zależność σ - ϵ zwraca uwagę niejednoznaczność interpretacji. Na przykład krzywa funkcyjna – przedstawiana także w dokumentach normalizacyjnych (np. zależność Hognestadta i Rüscha) – może być interpretowana jako zależność nieliniowo sprężysta lub jako efekt sumaryczny zależności liniowo sprężystej i trwałych odkształceń plastycznych. Wyniki badań zamieszczone w niniejszej pracy zmierzają do uzasadnienia tej drugiej interpretacji zależności naprężenie–odkształcenie.

- *Badania autorskie których celem jest ukazanie cech sprężystych w betonu.* Koncepcja badań oraz oryginalne rozwiązania metrologiczne umożliwiły obserwację sprężystych cech betonu także w strefie obciążeń pokrytycznych. Badania zmierzały z jednej strony do przedstawienia w jawnej formie sprężystych i plastycznych wartości uogólnionych przemieszczeń i sił wewnętrznych w elementach próbnym, z drugiej zaś strony do wyznaczenia parametrów liczbowych stosowanych w matematycznym modelu opisującym zachowanie betonowych, żelbetowych i sprężonych konstrukcji prętowych (a częściowo także i powierzchniowych). Wyznaczenie tych parametrów było podstawą do realizacji niektórych cykli badawczych na modelach numerycznych.

Wyniki badań prowadzonych w ostatnich latach na belkach żelbetowych i sprężonych pokazują, że metoda naprężeń liniowych nie zdeaktualizowała się. Beton konstrukcyjny, będący w powszechnym zastosowaniu, ma bardzo różnorodne cechy mechaniczne, które w wielu przypadkach są oznaczane w sposób umowny, niekiedy z uwzględnieniem parametru czasu. Na przykład, wytrzymałość betonu w jednoosiowym ściskaniu zależy od kształtu i wymiaru próbek; jest ona zmienną losową na skutek niejednorodności wytrzymałościowej, zależy od prędkości wymuszania odkształceń. W miarę jak przybywa danych doświadczalnych, zmieniają się metody opisywania cech mechanicznych betonu. Zwraca uwagę fakt, że cechy sprężyste betonu są coraz bardziej widoczne w miarę wzrostu jego cech wytrzymałościowych.

Wnioski końcowe

Jak wynika z przedstawionej we wstępie koncepcji pracy, podjęto próbę oceny metod wymiarowania belek żelbetowych i częściowo sprężonych. Badania składały się z części obliczeniowej i eksperymentalnej. Zaplanowano je w ten sposób, aby wykorzystać dostępne metody obliczeń statycznych i wymiarowania z uwzględnianiem nieliniowej charakterystyki betonu i stali, ich współpracy oraz samonapężenia. Jednym z celów było doświadczalne potwierdzenie słuszności założeń umożliwiających opracowanie modelu betonu oraz opisanie efektów związanych z zarysowaniem i deformacjami reologicznymi. Otrzymane wyniki umożliwiły analizę na podstawie materiału doświadczalnego autora. Wnioski wynikające z tych badań są następujące:

- Z doświadczalnych zależności σ - ϵ wynika, że podczas obciążeń (i odciążen) debiutanckich i cyklicznych, doraźnych i długotrwałych odkształcenia całkowite można opisywać jako sumę odkształceń sprężystych i resztkowych.

- Podczas cykli wielokrotnego odciążenia i obciążenia konstrukcje żelbetowe i sprężone mają właściwości materiału liniowo sprężystego. Można je zatem wymiarować według metody naprężeń liniowych, uwzględniając jednak samonapężenia i efekty reologiczne. W ten sposób obliczenia statyczne konstrukcji wykonuje się konsekwentnie tak jak dla materiału sprężystego.

- Współczynnik sprężystości betonu zależy od wieku betonu, w małym stopniu natomiast od poziomu obciążenia. Z badań wykonanych na kilkudziesięciu próbkach wynika, że przy zachowaniu reżimu warunków wymuszania przemieszczeń (wolny przyrost przemieszczeń pozwalający uniknąć tak zwanych opóźnionych odkształceń sprężystych) zmiany współczynnika sprężystości w początkowych (kwazisprężystych) cyklach obciążeń i na poziomach obciążeń niszczących różnią się o około 5%.

- Przyjęcie parabolicznego albo prostokątnego rozkładu naprężeń w strefie ściskanej bądź rozciąganej betonu wynika z interpretacji wyników eksperymentu. Nieliniowości w rozkładzie naprężeń na wysokości przekroju można również wyjaśnić nakładaniem się samonapężeń na stan sprężysty.

- W belce, w której projektowano pełne sprężenie w procesie obciążenia, niespodziewanie wcześniej występują zarysowania u dołu belki, co oznacza, że otrzymaliśmy belkę częściowo sprężoną. Zarysowanie belki nastąpiło na skutek nałożenia się samonapężeń pochodzących od niesprężystych deformacji betonu.

- Samonapężenia te zmniejszają naprężenia w skrajnych włóknach betonu, natomiast zwiększają naprężenia w rozciąganym zbrojeniu. W praktyce oznacza to, że w betonie istnieje jeszcze rezerwa nośności w strefie ściskanej, natomiast rzeczywiste naprężenia w stali są większe od oczekiwanych. Z doświadczeń wynika, że dodatkowe wartości naprężeń rozciągających pochodzących od samonapężenia wynoszą w stali kilkanaście procent wartości wytrzymałości charakterystycznej.

- Całkowite ugięcie elementu może być również interpretowane jako suma ugięć reszkowych i sprężystych.

Przedstawione tutaj wnioski mają bardziej uniwersalny charakter. Interpretacja wyników badań doświadczalnych przeciwstawia się bowiem tendencjom rozwijania nieliniowej teorii betonu.

Uwagi końcowe

Praktyczną konsekwencją prowadzonych badań może być lepsze wykorzystanie materiałów konstrukcyjnych i określenie granicy bezpieczeństwa przy obciążeniach wyjątkowych. Wprawdzie obliczenia sił przekrojowych według teorii Borcza nie zmieniają istotnie danych stosowanych do wymiarowania (np. wartości sił wypadkowych, ramie sił wewnętrznych), to jednak – co było jednym z celów pracy – zwrócono uwagę, że jest możliwa dość istotna zmiana w podejściu do obowiązujących metod analizy i projektowania konstrukcji betonowych. Istnieją prace, które wyjaśniają na drodze teoretycznej i doświadczalnej procesy deformacji konstrukcji z betonu pod obciążeniem

statycznym i dynamicznym oraz opisują stan naprężeń i odkształceń w konstrukcjach żelbetowych jako superpozycję wielkości sprężystych i rezydualnych. Opracowano metody obliczeń słupów, belek, ram, płyt, tarcz i powłok zakładające liniowy model betonu z uwzględnieniem efektów reologicznych i zarysowania. Efekty te są rozpatrywane jako wprowadzone dyskretnie dystorsje i dyslokacje w ośrodku sprężystym. Algorytmy wymiarowania konstrukcji są tutaj oparte na znanej i stosowanej przez wiele lat metodzie naprężeń liniowych.

Podsumowaniem celu, a równocześnie wyników niniejszej pracy niech pozostaną słowa wielokrotnie cytowanego tutaj Profesora Augustyna Borcza: *Naszym zdaniem, obecny kierunek rozwijania teorii konstrukcji z betonu nie jest właściwy. Obecnie przyjęto nieliniowy model betonu oraz konstrukcji z betonu. Przewidujemy powrót do liniowej teorii konstrukcji z betonu. Powrót ten uwzględnić będzie obecne osiągnięcia w zakresie teorii rys oraz reologii betonu.*

Posłowie

Przedstawiona praca ma w założeniu charakter polemiczny. Opublikowana przez Borcza w 1981 roku teoria żelbetu sugeruje, począwszy od założeń, postrzeganie betonu jako materiału, a elementów żelbetowych jako konstrukcji liniowo sprężystych z dyskretnymi nieciągłościami. Interpretacja ta znacznie odbiega od stosowanych dzisiaj metod wymiarowania żelbetu i konstrukcji sprężonych. Spójność między metodami obliczeń statycznych i wymiarowania zachęca jednak do modernizowania zaniechanej dzisiaj metody naprężeń liniowych.

Część eksperymentalna stanowiła dla Borcza ważny element zarówno co do koncepcji badań, jak i technik pomiarowych, które były podstawą kilku nowatorskich rozwiązań (m.in. czujnik do pomiaru naprężeń, rozwiązanie generacji cyklicznych naprężeń, oryginalna konstrukcja czujnika magnetosprężystego). Wykonane badania nie przynoszą nowych wyników w sensie ilościowym, lecz w niektórych przypadkach zmieniają ich interpretację. Zjawiska takie jak deformacje trwałe i samonapężenia są znane, lecz celem badań eksperymentalnych jest określenie wartości liczbowych, służących do obliczeń inżynierskich. Potwierdzono umowność niektórych zjawisk, jak na przykład momentu rysującego. Niektóre wyniki pozostają polemiczne. Uznanie wartości współczynnika sprężystości betonu jako wielkości niezależnej od poziomu wyteżenia materiału wymaga spełnienia określonych warunków eksperymentu. Badania w innych ośrodkach naukowych potwierdzają tę prawidłowość, zwłaszcza dla betonów wyższych klas.

Od strony opisu matematycznego modelowanie wykracza poza klasę funkcji ciągłych. Stosowane narzędzia są jednak w kontekście teorii żelbetu zrozumiałe, a w zakresie potrzebnym dla projektantów nie wykraczają poza matematykę wykładaną na uczelniach technicznych. Zapis matematyczny jest konsekwentnie realizowany w konwencji stosowanej w teorii sprężystości, a w przypadku deformacji trwałych – w reologii.

Uwagi dotyczące opisu molekularnego i zjawisk fizykochemicznych nie są elementem opisywanej teorii. Wprowadzono je, aby opierając się na aktualnym stanie wiedzy dokonać próby wyjaśnienia niektórych zjawisk obserwowanych podczas wytwarzania, eksploatacji, a także niszczenia betonu. W niniejszej pracy mają one charakter pomocniczy i nie należy ich traktować jako części opisywanej teorii.

* * *

Założeniem pozamerytorycznym autora było upamiętnienie prac Profesora Augustyna Borcza i zapisanie tego, czego Profesor nie zdążył dokonać osobiście. Treści te przekazywał swoim wychowankom przez wiele wspólnie spędzanych wieczorów. Za to składam Jemu tutaj podziękowanie.

Literatura

- [1] Ajdukiewicz A., Mames J., *Konstrukcje sprężone*. Warszawa, PWN, 1974.
- [2] Ajdukiewicz A., Majewski S., Kliszczewicz A., Wandzik G., *Numerical and experimental analysis of models used at testing of concrete compressive strength*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Łódzkiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of concrete structures. Łódź 1996.
- [3] Ajdukiewicz A., Kliszczewicz A., *Wytrzymałość walcowa i odkształcalność betonu w konstrukcji i próbkach*. XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1994..
- [4] Ansys User Manual, Copiright Finite Element Analysis Ltd. 1989.
- [5] Arutunian N. Ch., *Nekotorye Voprosy Teorii Polzučesti*, Leningrad, Gostechlit, 1952.
- [6] Avak R., *Balkenbemessung nach Eurocode 2*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [7] Baalbaki W., Aictin P.C., Ballivy G. (1992), *On predicting Moduls of Elasticity in High-Strength Concrete*. ACI Materials Journal. September–Oktober 1992.
- [8] Bach C. (1912), *Versuche mit Eisenbetonbalken zur Ermittlung der Widerstandsfähigkeit*. Deutscher Aussschus für Beton und Stahlbeton. H. 20. Berlin 1912.
- [9] Baryła A., Sobocińska E., *Teoria płyt żelbetowych z rysami*. Warszawa, PWN, 1983.
- [10] Bazant Z.P., *Prediction of concrete creep effect using age-adjusted effective modulus method*. ACI Journal. 1972, Nr 69.
- [11] Beres L., *Relationship of deformational processes and structure changes in concrete*. Symposium in Southampton. London 1968.
- [12] Betonkaländer 1992–94.
- [13] Biliszczuk J., *Reologiczna redystrybucja stanu naprężeń w niejednorodnych izostatycznych konstrukcjach betonowych*. Warszawa, PWN, 1982.
- [14] Biliszczuk J., *Odkształceniowe prawo pękania betonu*. T. 2. s. 9–14. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1985.
- [15] Biliszczuk J., *Zjawisko starzenia się betonu w świetle teorii i badań doświadczalnych*. Pr. Nauk. Inst. Inż. Łąd. Polit. Wrocł. 26, Konferencje 8. Wrocław 1978, S.15–24.
- [16] Biliszczuk J., *Beton – tworzywo do budowy mostów*. Wydawnictwo Politechniki Wrocławskiej. Seria Monografie. Wrocław 1978.
- [17] Borcz A., *Obliczanie belek żelbetowych obciążonych wielokrotnie*. Pr. Nauk. Inst. Bud. PWr., Wrocław 1983.

- [18] Borcz A., *Grundlagen der Distributionmechanik von Stahlbeton*, Studium II, VII Intern. Kongres Über Anwendungen der Mathematic in der Ingenieur Wissenschaften, Weimar, Berlin, Veb Verlag Für Bauwessen. 1975, s. 40–44.
- [19] Borcz A., *Koncepcja ogólna mechaniki konstrukcji żelbetowych*, Wrocław, Wyd. PWR., 1980.
- [20] Borcz A., *Mechanics of Reinforced Concrete Structures*, Mat. XX Konf. Mechaniki Ciała Stałego, Porąbka–Kozubnik 1978.
- [21] Borcz A., *Mechanika konstrukcji żelbetowych w stanie zarysowania*, Wrocław, Wyd. PWR., 1978.
- [22] Borcz A., *Podstawy teorii zarysowanych płyt żelbetowych*, TNEB, Warszawa, 1963.
- [23] Borcz A., *W sprawie mechaniki konstrukcji betonowych*. Inżynieria i Budownictwo nr 4,5/1986.
- [24] Borcz A., (1983), *Mechanika konstrukcji żelbetowych*, sprawozdanie z prac naukowych. Praca zbiorowa. Wrocław 1983.
- [25] Borcz A., *Teoria konstrukcji żelbetowych, wybrane zagadnienia*, T. 1, Wyd. PWR., 1973.
- [26] Borcz A., *Teoria konstrukcji żelbetowych, wybrane badania wrocławskie*. T. 2. Wyd. PWR., Wrocław 1986
- [27] Borcz A., *Zastosowania funkcji uogólnionych do teorii obliczania konstrukcji żelbetowych z rysami*, Wrocław, Wyd. PWR., 1980.
- [28] Borcz A., *Dystrybucyjna mechanika konstrukcji żelbetowych*, Mat. Konf. Nauk. Inst. Bud. Pol. Gdańskiej, Gdańsk 1975.
- [29] Borcz A., Kozłowski J., *Doświadczalna analiza współdziałania betonu ze zbrojeniem w elemencie wielokrotnie osiowo rozciągany*, Archiwum Inżynierii Łądowej T. XXIX, Z. 1–2, Warszawa 1982.
- [30] Borcz A., Tomczak T., *Nośność zginanych elementów żelbetowych*. T. 2. s. 21–26. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1985.
- [31] Borcz A., Ubysz A., *Die Anwendung der Matrixmethode zur Berechnung der Deformationen von Balken aus Stahlbeton*. IKM Weimar 1984.
- [32] Borcz A., Ubysz A., *Redistribution of the internal forces in continuous reinforced concrete beams*, Wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [33] Borcz A., Wawrzyniak A., *Metoda obliczania tarcz żelbetowych z rysami i obszarami deformacji plastycznych*, Mat. XXXI Konf. Krynickiej, T. II, 1985, s. 27–33.
- [34] Brandtzaeg F., *Failure of material composed of nonisotropic elements*. Det Kongelige Norske Videnskabers Skrifter 2/1927.
- [35] Bukowski B., *Technologia betonu. Budownictwo betonowe*. T. 1, cz. 1, Warszawa, Arkady, 1964
- [36] Bukowski B., *Morfologia rys w konstrukcjach betonowych i żelbetowych*. Archiwum Inżynierii Łądowej 3–4/1957. Warszawa 1957.
- [37] Bulletin D'information No. 199. *Evaluation of the Time Dependent Behaviour of Concrete*. Ceb. Paris 1990.
- [38] Chen W.F., Yamaguchi E., *On constitutive modeling of concrete materials. Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures*. Proc. of Sem. May 21–24, s. 48–71. Tokyo 1985.
- [39] Czarnecki L., Broniewski T., Henning O., *Chemia w budownictwie*. Warszawa, Arkady, 1994.
- [40] Czkwaniec A., Kamińska M., *Constitutive laws for nonlinear analysis of one-dimensional reinforced concrete*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [41] Dąbrowski K., Stachurski W., Zieliński J.L., *Konstrukcje betonowe*. wyd. 2, Warszawa, Arkady, 1982.

- [42] Derski W., Ziemba S., *Analiza modeli reologicznych*. Warszawa, PWN, 1968.
- [43] Diliger W., *Veränderlichkeit der Biege- und Schubfestigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluß auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmter Lagerung*. Deutsche Ausschuss für Stahlbeton. H. 179/1966.
- [44] Dmochowski G., *Discrete model of crack in RC plates*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [45] Drucker D.C., Gibson R.E., Henkel D.J., *Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity*. Trans. ASCE 122, 1957.
- [46] Dubis J., *Cyfrowy model zarysowanych ram żelbetowych i jego zastosowania* (praca doktorska), Wrocław 1976.
- [47] Duncan J.M., Chang C.Y., *Nonlinear analysis of stress and strain in soils*. Journ.of Soil Mech. and Found. Div., ASCE Vol. 96, No SM5, September 1970.
- [48] Dyduch K., Destrebęq J-F., Szerszeń M., *Wpływ poziomu naprężenia na zachowanie się betonu obciążonego cyklicznie*. T. 3. s. 31–38. XXXIX Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1993.
- [49] Dyduch K., Szerszeń M., *Wysoko- i niskocykliczne obciążenia betonu*. T. 5, s. 29–36. XLI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1995.
- [50] Dyduch K., Szerszeń M., Destrebęq J-F., *Plain concrete under various cyclic loading conditions*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Łódzkiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of concrete structures. Łódź 1996.
- [51] Dyduch K., Szerszeń M., Destrebęq J-F., *Experimental investigation of the fatigue strength of plain concrete under high compressive loading*. Materials and Structures, Vol. 27/1994.
- [52] Dyduch K., Stankiewicz P., *Wpływ obciążeń zmiennych na przyczepność beton–stal w elementach żelbetowych*, XXXIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1987.
- [53] Dyduch K., Destrebęq J-F., *Rozwój rys i odkształceń w belkach żelbetowych przy obciążeniu długotrwałym*, XXXVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1994.
- [54] Eissa B.A., *Analiza deformacji belek z betonu pod wielokrotnym obciążeniem z uwzględnieniem samonaprężeń* (praca doktorska), Wrocław 1993.
- [55] Eligehausen R., Kreller H., *Einfluss der Stahlkennlinien auf den Grad der Schnittumlagerung – Mitteilungen*. IWB–Universität Stuttgart 1988.
- [56] Elwi A.A., Murray D.W., *A 3D hypoelastic concrete constitutive relationship*. J.Eng.Mech. Div. ASCE Proc. 105, nr EM 4, s. 623–641, 1979.
- [57] Eurocode 2. *Design of concrete structures*. Part 1, *General rules and rules for building*. 1992.
- [58] Europejski Komitet Betonu CEB, *Międzynarodowe zalecenia i wykonywania konstrukcji z betonu*, Warszawa, Arkady, 1973.
- [59] Flaga K., *The influence of the residual stresses on the stress destruction and the strength parameters of concrete*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [60] Flaga K., *Energetyczne podstawy wzrostu wytrzymałości betonu tężącego w warunkach obróbki termicznej*. Zeszyt Naukowy Politechniki Krakowskiej, Nr 40, Kraków 1971.
- [61] Flaga K., Piwowarczyk K., *Limit states of cracks and load capacity of reinforced elements made of SFRC*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Łódzkiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of concrete structures. Łódź 1996.

- [62] Flaga K., Furtak K., *Propagacja rys w belkach żelbetowych poddanych działaniu wzrastających obciążeń doraźnych*. Inż. i Bud. 1983.
- [63] Furtak K., *Wpływ warunków dojrzewania oraz parametrów cyklu obciążenia na stan zarysowania belek żelbetowych poddanych obciążeniom zmiennym*. T. 2. s. 85–90. XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1985.
- [64] Furtak K., *Ocena wpływu zmienności obciążeń na szerokość rozwarście rys w belkach żelbetowych*. Czasopismo techniczne – Budownictwo. Wydawnictwo Politechniki Krakowskiej, rok 92 zeszyt 6. Kraków 1995.
- [65] Giurani E., Rosati G., *An analytical model for the study of the crack propagation in plain concrete elements under bending*, Studi a Ricerche Vol. 9/1987. Politecnico di Milano.
- [66] Glücklich J., *The effect of microcracking on time - dependent deformations and the long-term strength of concrete*. Cement and Concr. Ass., London 1968.
- [67] Glücklich J., *Model reologiczny betonu*. Inżynieria i Budownictwa, Nr 4/1961.
- [68] Godycki-Ćwirko T., *Mechanika betonu*. Warszawa, Arkady, 1982.
- [69] Godycki-Ćwirko T., *Morfologia rys w konstrukcjach z betonu*. Rozprawy naukowe Nr 13. Wyd. Politechniki Białostockiej. Białystok 1992.
- [70] Godycki-Ćwirko T., *Przyczynki do morfologii rys w konstrukcjach z betonu*. T. 2. XXXIV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1989.
- [71] Godycki-Ćwirko T., *Wymiarowanie żelbetowych belek-ścian w fazie II na tle analizy naprężeń, powstawania rys oraz nośności*. Arch.Inż. Łąd. z. 3/1963.
- [72] Godycki-Ćwirko T., Korzeniowski P., *The influence of the eccentricity magnitude on the slenderness effects*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Łódzkiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of concrete structures. Łódź 1996.
- [73] Gomuliński A., Kacprzyk Z., *System analizy konstrukcji FEAS w praktyce inżynierskiej i kształceniu*, Inżynieria i Budownictwo Nr 12/92.
- [74] Gornov V. N., *Żestkost izgibaemych zelezobetonnych elementov*, Gosudarstvennaja Promyšlennost No 7, 1982.
- [75] Goszczyńska B., Goszczyński S., Mucha J., *Analiza pracy belek dwuprzęsłowych pod działaniem doraźnych obciążeń zmiennych*. T. 2, s. 91–96. XXXIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1987.
- [76] Goszczyński S., Ordon B., *O kryterium wyężenia lokalnego płyty*. T. 3. s. 69–76. XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1994.
- [77] Grabiec K., *Projektowanie przekrojów w konstrukcjach z betonu*. Warszawa, Arkady, 1991.
- [78] Grabiec K., *Modele betonu zbrojonego*. Sesja Naukowa z okazji jubileuszu Profesora Wiesława Stachurskiego. Wyd. PoliT. Warszawskiej. Warszawa 1996.
- [79] Grabiec K., *Konstrukcje betonowe. Obliczenia statyczne*. wyd. IV. Warszawa, PWN, 1995.
- [80] Grabiec K., *Lekki beton konstrukcyjny z porowatego kruszywa wapiennego*. Rozprawa, s. 140. PWN 1966.
- [81] Grabiec K., *Parametry technologiczne betonów lekkich z porowatych kruszyw wapiennych*. Rozprawa, str 134. Wydawnictwo Uczelniane Politechniki Poznańskiej 1966.
- [82] Grabiec K., *Laboratoryjne problemy pomiaru odkształceń próbek betonowych przy obciążeniach długotrwałych*. Przegląd Budowlany Nr 4/1970.
- [83] Grabiec K., Kampioni J., *Betonowe konstrukcje sprężone*. Warszawa, PWN, 1982.

- [84] Granosik T., Hlebowicz B., *Wpływ czynników losowych na wzrost ugięć belek żelbetonowych*, Inżynieria i Budownictwo Nr 12, 1980.
- [85] Granosik T., Hlebowicz B., *Algorytm rozwiązywania ciągłych belek żelbetonowych w ujęciu kontynuualnej teorii zginania żelbetu*, Mat. XXVII Konf. Krynickiej, T. II, 1981, s. 93–101.
- [86] Granosik T., *Statyczne badania ugięć i nośności zginanych belek żelbetonowych*, Archiwum Inżynierii Lądowej, Z. 1, 1979.
- [87] Granosik T., Granosik M., *Wpływ wytrzymałości betonu na ugięcia belek żelbetonowych*, Inżynieria i Budownictwo Nr 5, 1978.
- [88] Griffith, *The phenomena of rupture and flow in solids*. Philosophical Transaction. Vol. 221, Royal Soc. of London, 1920.
- [89] Gryszkiewicz M., *Mikro-Strains. Analiza statyczna konstrukcji prętowych i powierzchniowych*. Warszawa, Arkady, 1992
- [90] Gvozdev A. A., Aleksandrovski S. V., Bagrij E. Ja., *Polzučest betona pri naprjaženijach izmeniajuščichsja vo vremeni*, Beton i Żelezobeton, No. 7, 1965.
- [91] Gvozdev A. A., *O nekotorych novych issledovavijach polzučesti betona*, W: Vlijanie skorosti nagraženija, gibkosti i krutjaščich momentov na pročnost żelezobetonnych konstrukcij, Moskva, Strojizdat, 1970.
- [92] Gvozdev A. A., Jušin A. V., Galustov K. Z., *O nekotorych odstuplenijach ot principa naloženija v teorii polzučesti betona*, Beton i Żelezobeton No 8, 1967.
- [93] Gvozdev A. A., *Nekotorye mehaničeskije svojstva betona suščestvenno važnye dla stroitelnoj mehaniki Żelezobetonnych konstrukcij*, W: Teoria razčeta i konstruirovanija żelezobetonnych konstrukcij, Moskva, Gosstrojizdat, 1960.
- [94] Hogenestad E., *Yield-Line Theory for the Ultimate Flexural Strength of Reinforced Concrete Slabs*. ACI Journ. 3/1953.
- [95] Hull D., *Introduction to dislocation*. (tłum. pol.). Warszawa, PWN, 1982.
- [96] Jankowiak R., *Badania doświadczalne deformacji belek żelbetonowych*. ITB Warszawa. 1971.
- [97] Jasman S., *Teorie pełzania*, Mat. V Symp. Reologii, Wrocław 1972.
- [98] Jasman S., *Odształcalność betonu i sposoby jej badania*, Pr. Nauk. Inst. Bud. PWr., Wrocław 1972.
- [99] Jerga J., *Die Einwirkung von kleinzyklischen Überlastungen auf die Verformungseigenschaften der durch Biegung beanspruchten teilweise vorgespannten Betonelemente*. Bericht 5. IKM Weimar 1990.
- [100] Kąkol W., Łodygowski T., *ABAQUS. Wprowadzenie do programu*, Metody Komputerowe w Inżynierii Lądowej, T. 3, Nr 3–4, 1993.
- [101] Kamińska M., Czkwianiec A., *Redystrybucja sił wewnętrznych w żelbetonowych ramach o węzłach przesuwnych – badania doświadczalne*, T. 3. s. 77–84. XXXIX Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1993.
- [102] Kamińska M., Czkwianiec A., *Szywność zginania przy odciążaniu elementów żelbetonowych i częściowo sprężonych*, T. 2. s. 97–102. XXXIV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1988.
- [103] Kamiński M., Eissa B.A., Ubysz A., *Dehnungsanalyse der Spannbetonbalken unter Berücksichtigung der residualen Spannungen*. (Złoż. do druku w Beton u. Stahlb. /98)
- [104] Kamiński M., Wróblewski R., *Wyznaczanie efektów odształceń reologicznych betonu. Podstawy projektowania konstrukcji żelbetonowych według Eurokodu 2*. PWN, Warszawa–Wrocław 1996.
- [105] Kamiński M., Szechiński M., Ubysz A., *Teoretyczne i praktyczne podstawy obliczania ugięć elementów żelbetonowych*. Dolnośląskie Wydawnictwo Naukowe. Wrocław 1998.
- [106] Kiedroń K., *Stateczność zarysowanych słupów żelbetonowych*, (praca doktorska), Wrocław 1980.

- [107] Kiedroń K., *Sila krytyczna ściskanych słupów żelbetowych*. Archiwum Inżynierii Lądowej T. XXVII, z.3/1981, s. 221–231.
- [108] Kleiber M., *PLADEP – statyczna analiza dużych deformacji sprężysto-plastycznych w płaskim stanie naprężeń metodą elementów skończonych*. IPPT 48, Warszawa 1977.
- [109] Kłapoc M., *Niektóre zagadnienia nieliniowego pękania betonu*, (praca doktorska nie publ.), Bibl. Inst. Bud. PWr., Wrocław 1970.
- [110] Kmita A., *Właściwości mechaniczne materiałów. Podstawy projektowania konstrukcji według Eurokodu 2*. PWN, Warszawa–Wrocław 1996.
- [111] Kmita A., Łodo A., Persona M., *Badania skrzynkowych dźwigarów strunobetonowych o rozpiętości 18 m*. T. 2, s. 127–132, XXXI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1985.
- [112] Kmita A., Wróblewski., *Crack width evaluation in partially prestressed elements according to prediction methods*. Wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [113] Kmita J., *Mosty betonowe – podstawy wymiarowania*, cz. I. Wydawnictwo Komunikacji i Łączności. Warszawa 1984.
- [114] Kmita J., *Most drogowy sprężony kablami z lin*. Inż. i Bud. Nr 12/1960.
- [115] Kmita J., Biliszczuk J., *On the theoretical model of reinforced concrete*. Studia Geotechnica et Mechanica, nr 3/1981.
- [116] Kmita J., Maliszewicz P., *Problemy zmęczenia w betonowych konstrukcjach mostowych*. Drogownictwo Nr 9/1982.
- [117] Knauff M., Jędrzejczak M., *Effect of random variability of tensile strength on RC beams stiffness*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Łódzkiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of concrete structures. Łódź 1996.
- [118] Knauff M., Kowalski R., *Szerokość rys a efektywne pole w elementach rozciąganych*. T. 3, s. 97–104. XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1994.
- [119] Kubiak J., Stachurski W., *Konstrukcje żelbetowe I–IV*. Warszawa, Arkady, 1984.
- [120] Kobiela S., Malczewski Z., *Analiza naprężeń poprzecznych w cylindrycznym zakotwieniu przy czepnościowym dla cięgna sprężającego z włókna aramidowego*. T. 2, s. 119–126, XLV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB, Krynica 1999.
- [121] Kozłowski J., *Studium współpracy betonu ze zbrojeniem w elemencie wielokrotnie osiowo rozciągany*. (praca doktorska), Instytut Budownictwa Politechniki Wrocławskiej. Raport serii PRE 126/79.
- [122] Krzysztofiak M., *Strength and Deformability of Concrete under simultaneous Compression and tension*. Arch. Inż. Łąd. 1/1970.
- [123] Kubiak J., Łodo A., *Research on partially prestressed elements*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [124] Kucharska L., Brandt A. M., *High Performance Cement Mortars with and without Silica Fume Reinforced with Low Amount of Carbon Fibers*. 5th Canmet/ACI International Conference On Fly Ash, Silica Fume, Slag and Natural Pozzolans in concrete. Milwaukee 1995
- [125] Kucharska L., Brandt A. M., *Microstructure and Mechanical Properties of Cement Mortars Reinforced with pitch-based Carbon Fibers*. W: High performance concrete material properties and design. Aedificatio Verlag GmbH. Freiburg 1995.
- [126] Kucharska L., Logoń D., *The influence of fly ash on rheological and mechanical properties of cement mortars reinforced with pitch-based carbon fibres*. Proc. Int. Symp. “Brittle Matrix Composites 5”. A. M. Brandt, V. C. Li, I. H. Marshall eds. Warsaw 1997.
- [127] Kuczyński W., *Konstrukcje betonowe. Kontynuacja teorii żelbetu*. PWN. Warszawa 1971.

- [128] Kuczyński W., *Wpływ kruszywa grubego na wytrzymałość betonu*. Arch. Inż. Łąd. T. IV, Z. 12.
- [129] Kuczyński W., *Analiza pracy niektórych żelbetowych belek ciągłych w oparciu o teorię liniowych zmian ciąłości*. Arch. Inż. Łąd., T. VIII, z. 3/1961.
- [130] Kuczyński W., *Technologie betonu. Budownictwo betonowe*. T. 1, cz. 2. Arkady. Warszawa 1972.
- [131] Kuczyński W., *Z badań nad sztywnością belek żelbetowych*, Inż. i Bud. Nr 9, 1955.
- [132] Kuczyński W., *Podstawy hipotezy liniowych zmian sztywności belki żelbetowej podczas jej obciążania*. Archiwum Inżynierii Łądowej T. VIII, Z. 1, 1961.
- [133] Kuczyński W., *Obliczanie przemieszczeń belek żelbetowych z uwzględnieniem uplastycznienia i zarysowania betonu*, Inż. i Bud. Nr 11, 1962.
- [134] Kuczyński W., *Niektóre problemy wytrzymałościowe żelbetu w świetle zjawisk reologicznych*, Inż. i Bud. Nr 8, 1960.
- [135] Kuczyński W., *Nieliniowa statyka żelbetowych belek ciągłych w świetle zweryfikowanego przykładu*. Inż. i Bud. Nr 12, 1981.
- [136] Kuczyński W., *O praktycznych konsekwencjach ciąłości procesów zginania konstrukcji żelbetowych*, Mat. Konf. Nauk. Wydz. Inż. Łądowej Pol. Warsz., Warszawa 1977.
- [137] Kuczyński W., *Przemieszczenie Przekrojów Betonowych Belek Izostatycznych w Ujęciu Kontynuinalnym*. Inż. i Bud. Nr 7, 1981.
- [138] Kuczyński W., Godycki-Ćwirko T., *Wtyczne obliczania żelbetowych konstrukcji prętowych*, Wyd. PoliT. Łódzkiej, Łódź 1965.
- [139] Kuczyński W., Goszczyński S., *Studium nad aproksymacją funkcji przemieszczeń osi belki żelbetowej*. Arch. Inż. Łąd., Z. 4/1962.
- [140] Kuczyński W., Goszczyński S., *Analiza kontynualnej redystrybucji momentów ciągłych w belkach żelbetowych przy użyciu maszyny liczącej*. XI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1966.
- [141] Kuczyński W., Goszczyński S., *Obliczanie belek żelbetowych na zarysowanie*, Inż. i Bud. Nr 2, 1968.
- [142] Kuczyński W., Goszczyński S., *Propozycje normowego uproszczonego obliczania rys i ugięć elementów żelbetowych*, Mat. XVI Konf. Krynickiej, T. II, 1970
- [143] Kuczyński W., Goszczyński S., Kowalska H., *Ugięcia belek żelbetowych w świetle kontynualnej teorii zginania*, Mat. XXIV Konf. Krynickiej T. II, 1978, s. 175–187.
- [144] Kuczyński W., Goszczyński S., Kowalska H., *Wskaźnik podatności a ugięcia belek żelbetowych*, Inż. i Bud. Nr 8, 1978.
- [145] Kuczyński W., Goszczyński S., Walasek A., *Propozycje normowego uproszczonego obliczania ugięć i rys elementów żelbetowych*. Mat. XVI Konf. Krynickiej, T. I, 1970.
- [146] Kuczyński W., Kamińska M., Ułańska D., *Nowa metoda obliczania reologicznych ugięć belek żelbetowych*. Inż. i Bud., z. 11/1962.
- [147] Kuczyński W., Janowski Z., *Obliczanie ugięć zbrojonych belek żelbetowych z keramzytobetonu*. Inż. i Bud. Nr 7, 1968.
- [148] Kupfer H., *Das Verhalten des Betonsunter mehrachsiger Kurzzeitbelastung unter besonderer Berücksichtigung der zweiachsigen Beanspruchung*. Deutsch. Aus. f. Stb., H. 229, 1973.
- [149] Leonhardt F., *Vorlesungen über Massivbau – T. 4*. Springer Verlag 1977.
- [150] Lewicki B., Kubicki J., *Obliczanie ugięć konstrukcji żelbetowych pod obciążeniem długotrwałym metodą Ulickiego*. Inż. i Bud. 11/1962
- [151] Lewicki B., Derentowicz H., Kubicki J., *Metody obliczania belek żelbetowych pod obciążeniem długotrwałym w świetle weryfikacji doświadczalnej*. T. 2. XI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1965.

- [152] Lewicki B., *Problematyka obliczania ugięć elementów żelbetowych*. T. 2. XVIII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1972.
- [153] Ligęza W., *Odształcenia skurczowe w procesie wzmacniania elementów betonowych – badania doświadczalne*. T. 5. s. 125–132. XLI Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1995.
- [154] *The Lusas Theory Manual 10. 0*, Copyright Finite Element Analysis Ltd. 1990.
- [155] Łempicki J., *Teoria zginania belek żelbetowych statycznie niewyznaczalnych*. Warszawa, PWN, 1966.
- [156] Łempicki J., *Teoria zginania belki żelbetowej statycznie wyznaczalnej*. Arch. Inż. Łąd., Z. 3/1956.
- [157] Łuczak-Romanów R., *Metoda obliczania drgan prętów żelbetowych z rysami*, (praca doktorska), Wrocław 1980.
- [158] Łuczak-Romanów R., *Metoda obliczeń dynamicznych żelbetowych belek z rysami*. T. 2. s. 155–161. XXVII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1982.
- [159] Livšić J. D., *Rasčet Železobetonnych konstrukcij z učetom vlijanijausadki i polzučesti betona*, Kiev, Izd. Vysšaja Škola, 1971.
- [160] Maj M., Trochanowski A., *Metoda obliczania żelbetowych tarcz z rysami*. Pr. Nauk. Inst. Bud. PWr. Nr 40. Seria Konferencje Nr 9. Wrocław 1983.
- [161] Majewski S., *Sprężysto-plastyczny model betonu*. XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1994.
- [162] Majewski S., *Elasto-plastic double-cup-model for structure-subsoil interaction problem*. Arch. Inż. Łąd. Vol. XL, z. 3–4/1994, Warszawa, PWN, 1994.
- [163] Majewski S., Marszałek Z., *Iteracyjna metoda analizy żelbetowych belek i tarcz w zakresie fizycznym nieliniowym*, Arch. Inż. Łąd. Z. 3, 1985.
- [164] Marcinkowski Z., *Experimental verification of Bearing Capacity of Composity Truss Girdes*. W: Composite Construction – Convetional and Innovative. Int. Conf. Rep. IABSE. Innsbruck–Zurich 1997.
- [165] *Mechanika konstrukcji betonowych*, Pr. Nauk. Inst. Bud. PWr. Nr. 40, Wrocław 1983.
- [166] Mier J. G. M van, *Complete stress-strain behavior and damaging status of concrete under multiaxial conditions*. Vol. 1. Presses de l'Universite Paul Sabatier, Toulouse 1984.
- [167] Mier J. G. M van, *Strain-softening of concrete under multiaxial loading condition*. dissertation TH Eindhoven, 1984.
- [168] Minch M., *Distribution modeling of RC Cracked Slabs*, PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [169] Minch M., *Distribution plane stress modeling of RC Cracked Plates*, PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [170] Minch M., *Nonlinear boundary element analysis of RC planar structures*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [171] Minch M., *Metoda teoretycznego wyznaczania naprężeń w żelbetowych tarczach zarysowanych*. Rozprawy inżynierskie 1980, 28 s. 445–468.
- [172] Misztal S., Skowroński P., *Application of rigid finite element method to analysis reinforced concrete cracked beams under dynamic load*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [173] Mitzel A., Kłapoc M., *O superpozycji odształceń skurczu i pelzania*, Mat. III Symp. Reologii, Wrocław 1966.
- [174] Mitzel A., *Funkcje pelzania i skurczu betonu*, Mat. III Symp. Reologii, Wrocław 1966.

- [175] Mitzel A., Kłapóć M., *Nieliniowe pełzanie betonu*, Mat. III Symp. Reologii, Wrocław 1966.
- [176] Mitzel A., *Problemy pełzania betonu w złożonym stanie naprężeń*, Mat. I Symp. Reologii, Wrocław 1961.
- [177] Mitzel A., *Reologia betonu*, Warszawa, Arkady, 1972.
- [178] Moczko A., *Metoda pomiaru pęknięć betonu z wykorzystaniem emisji akustycznej*. Inż. i Bud. 9/96.
- [179] Murašov V. J., *Treščinoustojčivost, žestokst i pročnost železobetona*, Moskva, Mašstrojizdat, 1950.
- [180] Murašov V. J., Sigalov E. E., Bajkov V. V., *Železobetonnye konstrukcij*, Moskva, Strojizdat, 1962.
- [181] Nemirovski J. M., Nikitin N. V., *O koefficiente dla rasčeta žestkosti železobetonnych konstrukcij po proektu novych norm*, Beton I Železobeton No. 12, 1958.
- [182] Nemirovski J. M., *Žestkost železobetonnych konstrukcij pri dlitelnom zagruženii*. W: Teoria rasčeta i konstruirovaniya železobetonnych konstrukcij, Moskva, Gosstrojizdat, 1960.
- [183] Nilson A. H. (1968), *Nonlinear analysis of reinforced concrete by finite element method*. ACI Journal. Vol. 65.
- [184] NITU 12555, *Železobetonnye Konstrukcii*, 1955.
- [185] Nowacki W., *Teoria pełzania*. Warszawa, Arkady, 1963.
- [186] Owen D. R. J., Figueiras J. A., Damjanic F. (1983), *Finite element analysis of reinforced and pre-stressed concrete structures including thermal loading*. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 41, s. 323–366.
- [187] Parton V. Z., Morozov E. M., *Elastic–plastic fracture mechanics*. Mir Publishers. Moskwa 1978.
- [188] Pędziwiatr J., *A new model for bond slip and crack width calculation of tension members*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [189] Pędziwiatr J., *Design of flexural reinforced concrete sections according to Eurocode 2*. wyd. PAN o. Wrocław, Kom. Bud. i Mech., Wrocław 1996.
- [190] Piątek Z., Borjaniec W., *Obliczanie stanów granicznych użytkowania belek z betonów lekkich z uwzględnieniem odkształceń reologicznych*. Przegląd Budowlany 1979.
- [191] Piątek Z., Borjaniec W., *Stany graniczne belek wykonanych z betonu glinoporytowego*. Inż. i Bud. 1979.
- [192] PN–84/B-03264, *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne*. PKN 1984
- [193] PrPN/B-03264, *Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne*. PKN 1997
- [194] PN–ENV 206 1991. ITB, Warszawa 1992.
- [195] Prager W., *The stress-strain laws of the mathematical theory of plasticity – a survey of recent progress*. Journ. of Appl. Mech., Vol. 15/1948.
- [196] Probst E., *Vorlesungen über Eisenbetonbau*, Berlin, 1917.
- [197] Prokopovič J. E., *Vlijanie dlitelnych processov na naprjažennoe i deformirovannoe sostojanie sooruženij*, Moskva, Gosstrojizdat, 1963.
- [198] Rabotnov Ju. N., *Polzučest elementov konstrukcij*, Moskva, Izd. Nauka, 1966.
- [199] Rakowski G., *Zastosowanie macierzy do analizy statycznej i dynamicznej prętów prostych*, Bibl. Inż. i Bud., Warszawa 1968.
- [200] Rasch C., *Matematyczna postać liniowego pełzania betonu*. Inżynieria i Budownictwa, Nr 4/1961.
- [201] RILEM, *State of the art. Report on micro-cracking and lifetime of concrete*. Materiaux et Constructions. s. 3–8, Vol. 29, January–February 1996.

- [202] Rokač V. S., *Issledovanie deformacij železobetonných izgibaemych elementov*, W, Naučnye raboty aspirantov Lvovskogo PoliT. Instituta No 1, 1961.
- [203] Rüsç H., *Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone*. Deutsch. Aus. f. Stb., H. 120, 1955.
- [204] Rüsç H., Jungwirth D., *Skurcz i pelzanie w konstrukcjach betonowych*. Warszawa, Arkady, 1979.
- [205] Ryżyński A., Apanas L., *Obliczanie ugięć belek żelbetowych z uwzględnieniem skokowych zmian sztywności*. T. 3. s. 205–212. XXV Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1980.
- [206] Ryżyński A., Wołowicki W., *Propozycja obliczania ugięć belki żelbetowej z uwzględnieniem niegładkości jej odkształcanej*. Arch. Inż. Łąd. Z. 2/1968.
- [207] Ryżyński A., Wiatrak-Bogucka J., *Badania nad prowokowaniem rys przez strzemiona*, Zesz. Nauk. Pol. Pozn., Bud. Łąd. Nr 11, 1967.
- [208] Rżanicyn A. P., *Teorija polzučesti*, Moskwa, Strojizdat, 1968.
- [209] Saenz L. P., *Equation for the stress – strain curve of concrete*. ACI Journ. 9/1964.
- [210] Saliger R., *Der Eisenbeton*. A. Kroner. Leipzig. 1933.
- [211] Schickert G., Winkler H., *Versuchsergebnisse zur Festigkeit und Verformung bei mehraxialer Druckbeanspruchung*. Deutsch. Aus. f. Stb., H. 277, 1977.
- [212] Smith G., *Failure of concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses*. ACI Journ. 2/1953
- [213] Stachurski W., Syczewski M., *Wpływ przewężenia prętów zbrojenia na ich przyczepność do betonu*. Inż. i Bud., 9/1976, s. 340–346.
- [214] Stachurski W., Syczewski M., *Naprężenia w strefie zakotwienia pręta w betonie przy uwzględnieniu obciążeń prostopadłych do pręta*. Inż. i Bud., 7/1975, s. 297–302.
- [215] Starosolski W., Baczkowski J., Dzierżewicz Z., Zybura A., *The effort of load – bearing wall loaded with a floor – lintel element*. III International Symposium on Wall Structures, s. 361–368, CIB 1984.
- [216] Starosolski W., Kubica J., *Identyfikacja momentów zginających w żelbetowych przekrojach zginanych*. T. 2, s. 171–176, XXXII KN KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1986.
- [217] Starosolski W., Zybura A., Kubica J., *Zastosowanie prostego modelu numerycznego do analizy złożonego elementu żelbetowego*. T. 3, s. 185–192. XL Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1994.
- [218] Styś D., *Zastosowanie mechaniki pęknięcia do opisu procesu zniszczenia elementów betonowych*. T. 2, s. 47–52. XXXIII KN KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1987.
- [219] Styś D., *Size effect in concrete under uniaxial compression*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [220] Szcześniak J., *Deformability of disk-shaped concrete elements bi-axially long-term loaded*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1996.
- [221] Szechiński M., *Deformacja zginanych elementów żelbetowych obciążonych długotrwale*. Pr. Nauk. Instytutu Budownictwa PWr. Nr 67 Seria monografie nr 30. Wrocław 1996
- [222] Szechiński M., *Changes Of The Stress Graph's Shape In Reinforced Concrete Beams Loaded Over A Long Period*, *Materials And Structures*, Vol. 5., Paris 1982.
- [223] Szechiński M., *The Flexed Reinforced Concrete Beams Under the Sustained Loads*, Mat. Konf. Sekcji Betonów PAN, Zielona Góra 1988.
- [224] Szechiński M., *Naprężenia i odkształcenia w żelbetowych belkach o przekroju prostokątnym obciążonych długotrwale*, Archiwum Inżynierii Łądowej, T. XXXIV, Z. 1, 1988.
- [225] Szechiński M., *Budowa i badania komputerowego modelu belki żelbetowej*, Inż. i Bud., Nr 1–2, 1994.

- [226] Szulczyński Z., *Zależność między naprężeniami i odkształceniami betonu*. Arch. Inż. Łąd. 4/1974.
- [227] Tatko R., Ubysz A., *Numeryczne modelowanie żelbetowych konstrukcji prętowych*. Raport Instytutu Budownictwa PWr. 1997. Wrocław 1997.
- [228] Trochanowski A., Minch M., *The numerical model for reinforced concrete structures*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [229] Trost H., *Auswirkungen Der Superpositionsprinzips Auf Kriech und Relaxations Probleme bei Spannbeton*, Beton Und Stahlbetonbau Nr 10, 1967.
- [230] Ubysz A., *Anwendung der Übertragungsmatrix zur Berechnung der Stahlbetonbalken*. HAB Verlag. Weimar 1987.
- [231] Ubysz A., *Bericht von Untersuchung zum Thema, Nicht linearen Trag- und Verformungsverhalten von Stahlbetontragwerken unter Last- und Zwangwirkung*, wyd. Institut für Werkstoffe TU Stuttgart, Stuttgart 1990.
- [232] Ubysz A., *Nośność i redystrybucja sił wewnętrznych w ciągłej belce żelbetowej – numeryczne modele studialne*. T. 2. s. 133–138. XXXVII Konf. Nauk. KILiW PAN i KN PZITB. Krynica 1991.
- [233] Ubysz A., *Constitutive equation of elastic model of concrete*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1998.
- [234] Ubysz A., *The matrix analysis of flexural reinforced concrete beam with cracks*. wyd. PAN o. Wrocław, Komisja Budownictwa i Mechaniki, Wrocław 1998.
- [235] Ubysz A., *Method of matrix analysis of reinforced concrete beams in order to calculate bend elements taking into account cracks discretely* (Złożone do druku w Archiwum Inżynierii Łądowej 1998).
- [236] Ulicki J. J., *Praktičeskij Metod Rasčetnogo Opredelenija Deformacji Polzučesti I Usadki Betonov*, Beton i Železobeton No 8, 1960.
- [237] Ulicki J. J., Čžan-Čžun-Jao, *Eksperimentalnoe issledovanie polzučesti i relaksacji naprjaženij w betone s učetom dlitelnych processov*, Beton i Železobeton No 3, 1959.
- [238] Ulicki J. J., Čžan-Čžun-Jao, Golyšev A. B., *Rasčet železobetonnych konstrukcij s učetom dlitelnych processov*, Kiev, Gosstrojizdat, 1960.
- [239] Ulickij I.I., Meteliuk N.S., Reminieć G.M., *Žestkost izgibaemych želiezobetonnych elementow*. Gosudarstwienoe izdatelstwo. Kijów 1963
- [240] Ulicki J. J., Rusinov J. A., *Eksperimentalnye issledovanija deformacii Železobetonnych izgibaemych elementov pri dlitelnom ich nagruženii v rannem vozraste*, Beton i Železobeton No 12, 1956.
- [241] Young L.E., *Simplifying ultimate flexural theory by maximizing the moment of the stress block*. ACI Journ. 11/1960
- [242] Valanis K., *A probabilistic endochronic theory of fracture. Defects and fracture*. Martinus Nihoff Publishers. The Hague, Boston, London 1982.
- [243] Wesche K., *Baustoffe für tragende Bauteile*, Band 2, Beton Bauverlag GmbH, Berlin 1981.
- [244] Vilkov K. J., *Žestkost i treščinoustojčivost Železobetonnych izgibaemych elementov tavrovogo i dvutavrovogo sečenija*, Izv. Vuz, Stroiti i aArch., No. 2, 1960.
- [245] Wojewódzki W., Jemioło S., Lewiński P., Szwed A., *O relacjach konstytutywnych modmodelujących właściwości mechaniczne betonu*. Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej. Warszawa 1995.

- [246] Wołowicki W., *Checking of bending reinforced concrete sections under working loads*. Zeszyt Naukowy PAN i Politechniki Białostockiej pt. Analytical models and new concepts in mechanics of structural concrete. Białystok 1993.
- [247] Wołowicki W., Ratajczak G., *Ocena wpływu zdolności betonu do odkształceń na moment niszczący dla przekroju żelbetowego*. XXX Konf. Nauk. KILiW PAN, KN PZITB, Krynica 1984
- [248] Zerna W., Trost H., *Rheologische Beschreibungen Des Werkstoffes Beton*, Beton Und Stahlbetonbau Nr. 7, 1967.
- [249] Zhurov S.N., Sanfirova T.P., *A study of the time and temperature Dependences of mechanical strength*. Soviet Physics Solid State 2/1960 (wersja ang.), s. 933.

*concrete, physical features,
laboratory research, model
research, strain, stress*

Plastic strains and self-stresses in reinforced concrete, bar construction

The monograph is a continuation of the research of Prof. Augustyn Borcz. It presents an original proposal of concrete model and the theory of reinforced concrete construction in the first and the second phase of work. The essence of the problem is the assumption about the elastic work of construction at reproducible load and treatment of strains in concrete as the sum of elastic and plastic deformations.

Chapter 3 contains the review of models of concrete and presents the Borcz model in terms of existing ideas (chapter 2) and the characteristic of morphology of cracks in concrete (chapter 3).

Chapters 4 and 5 contain the most important results and the methods of their analysis based on over 10-year research of the author on numerical and laboratory models. These chapters present the methods of calculation and model examination of reinforced concrete bar constructions, which enable fashioning of crack effects and plastic strains in concrete in discreet method. The result of experimental investigations – on the ground of which is verified the Borcz theory – allow one to determine the values of experimental parameters leading to effective utilisation computational methods. On the basis of these results – verified by the results of other authors – mostly to fragment of the Borcz theory description of formation of affected plastic and elastic (self-stresses) deformation in section.

There are also presented the assumptions and the results of some numerical calculations based on the continuous models of Mier, Wechse and Eligenhausen. This part of the monograph shows the differences, both in assumptions and in the methodology of numerical and laboratory investigations on continuous and discrete modelling of reinforced concrete, bar constructions. There are also shown the examples of numerical analysis based on application of the Borcz theory in practice.

There is also assumed the method of calculation of reinforced concrete cracked construction in the class of generalized functions. The distributions functions describe in a discrete way all the effects connected with cracks and plastic deformations.

The author's target was to supplement the series of publications dealing with the methods of reinforced concrete bar construction with cracks. The method of analysis is however correct also at the analysis of any bar construction with local discontinuities (e.g. defects) and from computational point of view it used to solve such problems.

Spis treści

1. Wprowadzenie	4
1.1. Uwagi wstępne	4
1.2. Charakterystyka zagadnienia	5
1.3. Założenia	6
2. Wybrane zagadnienia dotyczące modelu betonu i betonu zbrojonego. Właściwości mechaniczne betonu	8
2.1. Modele konstytutywne	8
2.2. Doświadczalna zależność naprężenie–odkształcenie	16
2.3. Inne doświadczalne zależności fizyczne dla próbek betonowych	24
2.4. Model według Borcza	28
2.5. Energetyczny model betonu	30
2.6. Model betonu według Eurokodu 2	34
2.7. Funkcja czasu. Reologia betonu	36
2.8. Modele betonu zbrojonego [78]	46
2.9. Model współpracy betonu ze zbrojeniem	47
2.10. Podsumowanie	48
3. Morfologia mikrorrys i rys	49
3.1. Właściwości wiązania i rozwój mikrostruktury w betonie	49
3.2. Określenie, lokalizacja i parametry mikrorrys	53
3.3. Mikrorrysy w betonie spowodowane oddziaływaniem czynników środowiskowych	55
3.4. Wykrywanie i obserwacja mikrorrys w betonie	58
3.5. Właściwości fizykochemiczne betonu wynikające z jego struktury	59
3.6. Morfologia rys	63
3.7. Szacowanie wpływu obciążeń cyklicznych na szerokość rysy	72
3.8. Założenia probabilistycznego opisu odkształceń rezydualnych przekroju	74
4. Modele żelbetowych konstrukcji prętowych	76
Uwagi dotyczące metodologii modelowania	76
4.1. Sztywność żelbetowych elementów zginanych	77
4.2. Kontynuálny i dyskretny model konstrukcji żelbetowej	84
4.3. Model kontynuálny w metodzie elementów skończonych	85
4.4. Model dyskretny	96
4.5. Modele analogii prętowej [227]	123
4.6. Modelowanie belki żelbetowej jako elementu tarczowego	124
4.7. Model dyskretny oparty na analogii tarczowej	128
5. Doświadczalna weryfikacja wybranych modeli prętowych konstrukcji żelbetowych	130
6. Podsumowanie i wnioski końcowe	169
Posłowie	173

PRACE NAUKOWE INSTYTUTU BUDOWNICTWA
(wydane w latach 1991–1999)



- Nr 60, Monografie nr 25, E. Kubica, *Nośność graniczna i sztywność słupów stalowych o przekrojach skrzynekowych zamkniętych*, Wrocław 1991
- Nr 61, Studia i Materiały nr 16, A. Borcz, M. Maj, A. Trochanowski, *Wytyczne projektowania budowy i użytkowania silosów żelbetowych*, Wrocław 1991
- Nr 62, Monografie nr 26, A. Kapelko, *Aspekty techniczno-ekonomiczne modyfikacji tworzyw cementowych wybranymi domieszkami chemicznymi*, Wrocław 1991
- Nr 63, Monografie nr 27, S. Kobiela, *Application of pressure cells in civil engineering*, Wrocław 1991
- Nr 64, Konferencje nr 20, *Problemy technologii i badań materiałów budowlanych*, Wrocław 1991
- Nr 65, Monografie nr 28, *A building and its physical environment* (praca zbiorowa pod red. L. Śliwowskiego), Wrocław 1992
- Nr 66, Monografie nr 29, B. Gosowski, *Stateczność przestrzenna stężonych podłużnie i poprzecznie pełnościennych elementów konstrukcji metalowych*, Wrocław 1992
- Nr 67, Monografie nr 30, M. Szechiński, *Deformacje zginanych elementów żelbetowych obciążonych długotrwałe*, Wrocław 1996
- Nr 68, Konferencje nr 21, *Proceedings of the Third Interuniversity Research Conference*, Wrocław 1994
- Nr 69, Konferencje nr 22, *Materiały kompozytowe – właściwości, wytwarzanie, zastosowanie*. I Konferencja naukowo-techniczna, Wrocław 1997
- Nr 70, Konferencje nr 23, *Budownictwo betonowe w energetyce*. I Konferencja naukowo-techniczna, Wrocław 1998
- Nr 71, Konferencje nr 24, *Podstawy remontowe w budownictwie ogólnym*. VIII Konferencja naukowo-techniczna, Wrocław 1998
- Nr 72, Monografie nr 31, H. Nowak, *Oddziaływanie cieplnego promieniowania środowiska zewnętrznego na budynek*, Wrocław 1999
- Nr 74, Konferencje nr 25, *Problemy projektowania oraz optymalizacja rozwiązań materiałowych i technologii wykonywania obiektów w aspekcie trwałości i ochrony przed korozją*. XI Konferencja OKTRA '99, Wrocław 1999
- Nr 75, Konferencje nr 26, *Materiały kompozytowe – właściwości, wytwarzanie, zastosowanie*. II Konferencja naukowo-techniczna, Wrocław 1999

Wydawnictwa Politechniki Wrocławskiej
są do nabycia w następujących księgarniach:
„Politechnika”
Wybrzeże Wyspiańskiego 27, 50-370 Wrocław
budynek A-1 PWr., tel. (0-71) 320 25 34;
„Tech”
plac Grunwaldzki 13, 50-377 Wrocław
budynek D-1 PWr., tel. (0-71) 320 32 52
Prowadzimy sprzedaż wysyłkową

ISSN 0324-9875