

D E B I U T Y   S T U D E N C K I E

2 0 2 3

---

# **ZASTOSOWANIE METOD ILOŚCIOWYCH W EKONOMII I FINANSACH**

pod redakcją  
**Alicji Grześkowiak  
i Piotra Peterneka**



Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu  
Wrocław 2023

Recenzja

*Katarzyna Ostasiewicz*

Redakcja wydawnicza

*Elżbieta Żurawska-Łuczyńska*

Korekta

*Katarzyna Gwizda*

Skład i łamanie

*Beata Mazur*

Projekt okładki

*Beata Dębska*

Na okładce wykorzystano zdjęcia z zasobów 123 Royalty Free

Praca opublikowana na licencji Creative Commons Uznanie autorstwa

Na tych samych warunkach 4.0 Międzynarodowe (CC BY-SA 4.0).

Skrócona treść licencji na <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/deed.pl>



ISBN 978-83-67899-08-6 (wersja papierowa)

ISBN 978-83-67899-09-3 (wersja elektroniczna)

DOI: 10.15611/2023.09.3

Druk i oprawa: TOTEM

**Streszczenie:** Przedmiotem niniejszego opracowania jest zbadanie, jak zmieniały się w czasie parametry modelu płaszczyzny zmienności implikowanej dla opcji na indeks WIG20. Celem badania jest stwierdzenie, czy parametry te pozostają stałe w czasie. Na początku zajęto się doбором odpowiedniego przedziału czasowego tak, by niedostateczna liczba obserwacji nie zaburzała wyników. Na dalszym etapie omówiono sposób wyznaczania płaszczyzny zmienności implikowanej za pomocą różnych modeli regresji liniowej. Skupiono się również na tym, czy można wyeliminować obserwacje, które miałyby negatywny wpływ na kształt płaszczyzny przez analizę dopasowania regresji do wyznaczonych podzbiorów. Na końcu zweryfikowano, jak często parametry były istotne statystycznie oraz jak zmieniają się ich wartości w czasie. Okazało się, że parametry opcji na WIG20 dla modelu płaszczyzny zmienności implikowanej wykazują znaczne wahania, które mają wpływ na to, jak „uśmiech zmienności” i struktura terminowa zmieniają się w czasie.

**Słowa kluczowe:** zmienność implikowana, opcje na indeks giełdowy WIG20, stabilność parametrów modelu, płaszczyzna zmienności implikowanej

## 1. Wstęp

Opcje, jako jeden z instrumentów pochodnych, mogą być użytecznym narzędziem dla inwestorów, którzy chcą zarządzać ryzykiem, spekulować na ruchach rynkowych, generować dochód lub wykorzystywać dźwignię finansową swoich inwestycji. Jednakże wiążą się one również ze znacznym ryzykiem i powinny być wykorzystywane tylko przez inwestorów, którzy rozumieją jak działają i czują się komfortowo z ryzykiem z nimi związanym. W praktyce inwestorzy zazwyczaj operują na tak zwanych zmiennościach implikowanych, które wynikają z cen opcji obserwowanych na rynku. Inwestorzy często podają zmienność implikowaną opcji zamiast jej ceny. Wartość ta jest zazwyczaj wykorzystywana przez giełdy koordynujące obrót tymi instrumentami, a także instytucje prowadzące rozliczenia na rynku opcji do wyznaczania potencjalnej wartości opcji.

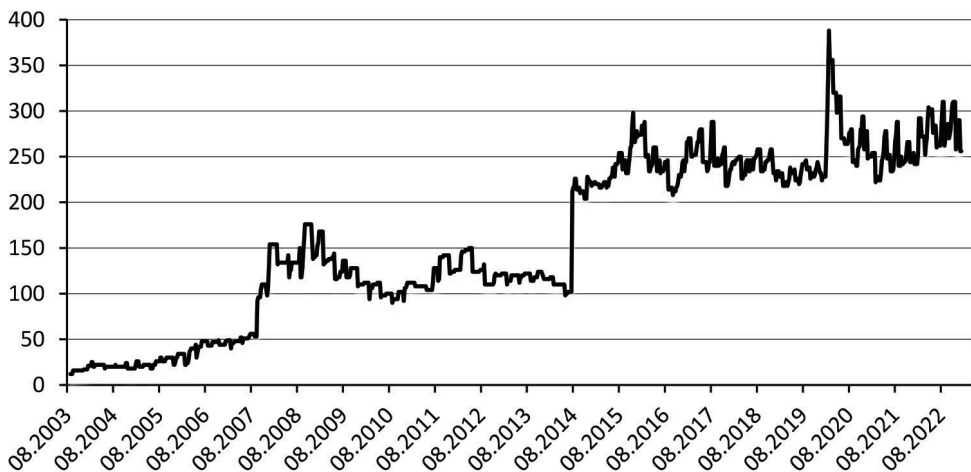
Badanie stabilności parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej dla opcji na WIG20 jest przedmiotem poniższej pracy. Rynek instrumentów pochodnych rozwija się, handel opcjami staje się coraz bardziej popularny, a inwestorzy wymagają coraz więcej zabezpieczeń. Z uwagi na to podjęcie tego tematu wydaje się niezbędnym uzupełnieniem badań nad rynkiem opcji.

Celem niniejszego opracowania jest określenie, czy wartości parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej dla opcji na polskim rynku instrumentów pochodnych są stabilne. Choć opcje są jeszcze stosunkowo mało popularnym instrumentem finansowym na polskim rynku, to obrót instrumentami pochodnymi rośnie w skali globalnej, dlatego i na tym rynku może to ulec zmianie. Indeks WIG20 służy jako instrument bazowy dla wszystkich opcji na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie. Hipotezą badawczą w niniejszej pracy jest brak stabilności parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej ze względu na dynamiczne wahania tego indeksu.

## 2. Analiza stabilności parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej

### 2.1. Dobór przedziału czasowego

Opcje na indeks WIG20 są notowane na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie od 22 września 2003 roku (Rudzki, 2012). Od tego czasu rynek instrumentów pochodnych na polskim rynku rozwinął się, a wraz z tym pojawiła się większa pula opcji do wyboru. Przez wzgląd na to, że ograniczona liczba obserwacji w modelowaniu regresji liniowej może mieć negatywny wpływ na interpretację wyników, policzono liczbę ofert różnych opcji z tygodniowym interwałem w środy od początku wprowadzenia kontraktów opcyjnych do 1 lutego 2023 roku. Na rysunku 1 został przedstawiony wykres szeregu czasowego, pokazujący liczebność dostępnych opcji na indeks WIG20.



Rysunek 1. Liczba dostępnych opcji na indeks WIG20

Źródło: opracowanie na podstawie badań własnych.

Jak można zaobserwować, w pierwszych latach dostępności tych instrumentów pochodnych na polskim rynku liczebność ofert była wyraźnie mniejsza niż jest teraz. Znaczący przełom nastąpił w roku 2014, kiedy to po raz pierwszy liczba kontraktów opcyjnych na WIG20 wzrosła do przeszło dwustu. Od tamtej chwili liczebność opcji jest porównywalna do obecnej, dlatego też za początek okresu analizy obrano 17 września 2014 roku, który był pierwszą środą z większym wachlarzem możliwości.

## 2.2. Estymacja zmienności implikowanej

Aby możliwe było modelowanie płaszczyzny zmienności implikowanej, oszacowano najpierw zmienność implikowaną dla każdej opcji w wyznaczonych terminach. Giełda Papierów Wartościowych w Warszawie co prawda udostępnia wartości zmienności implikowanej, jednak w przypadku pustego arkusza zleceń na daną sesję dla konkretnej opcji stosuje się przybliżenia na podstawie innych opcji o tym samym typie i terminie do wygaśnięcia, ale innym kursie wykonania. Gdy nie jest to możliwe przepisuje się wartość z innego typu opcji, a w ostateczności zmienność implikowaną z poprzedniej sesji giełdowej (Giełda Papierów Wartościowych, b.d.). Uznano, że dla prostoty i większej przejrzystości interpretacji zmienności implikowane opcji będą na każdy dzień estymowane metodą numeryczną Newtona–Ralphsona bez względu na to, czy jakaś transakcja w danym dniu miała miejsce. Rynek opcji w Polsce cechuje się niską płynnością, a więc przybliżenia stosowane przez GPW mogą zachodzić często.

Zmienności implikowane opcji wyznaczano za pomocą metody numerycznej Newtona–Ralphsona. Kolejne iteracje tego algorytmu miały za zadanie znaleźć odpowiednią wartość zmienności, która po podstawieniu do modelu Blacka–Scholesa zwróci cenę opcji równą rzeczywistej cenie na rynku. Do oszacowania zmienności implikowanej oprócz ceny rzeczywistej potrzebna była pochodna zmienności oznaczana przez współczynnik *vega*. Równanie pochodnej *vega*, zgodne z modelem Blacka–Scholesa, można zapisać następującym wzorem:

$$\frac{\partial c}{\partial \sigma_i} = S\sqrt{T}e^{qT}n(d_1),$$

gdzie:  $\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}$  – współczynnik *vega*,  $S$  – wartość instrumentu bazowego,  $T$  – czas do wygaśnięcia,  $q$  – stopa dywidendy,  $n(d_1)$  – czynnik, o który zdyskontowana wartość oczekiwana warunkowego otrzymania akcji przekracza bieżącą wartość akcji.

Istnieje wiele sposobów na uzyskanie zmienności implikowanej z cen rynkowych, a wśród nich metoda Newtona–Raphsona jest niewątpliwie jedną z najpopularniejszych stosowanych wśród handlujących opcjami (Turitto, 2018). Wzór iteracyjny ma postać:

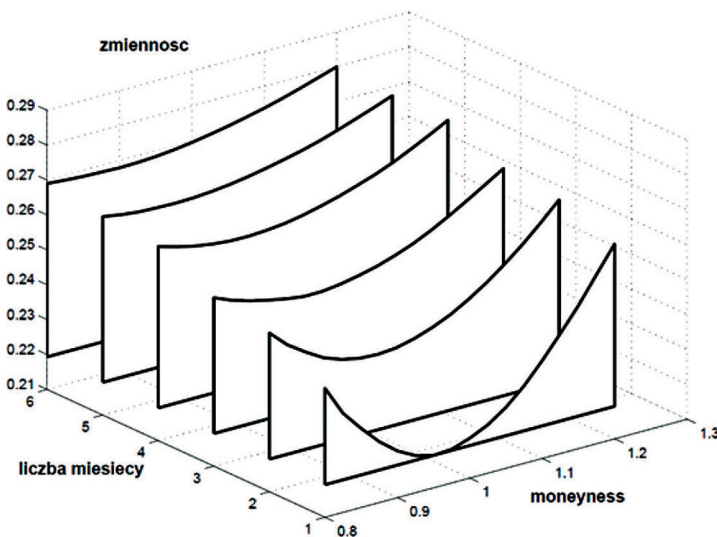
$$\sigma_{i+1} = \sigma_i - \frac{c(\sigma_i) - c_m}{\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}},$$

gdzie:  $(\sigma_i)$  – wartość zmienności w  $i$ -tej iteracji,  $c(\sigma_i)$  – cena opcji otrzymana z  $i$ -tej zmienności,  $c_m$  – wartość rynkowa opcji,  $\frac{\partial c}{\partial \sigma_i}$  – współczynnik *vega*.

Algorytm dostosowano w ten sposób, by znajdował zmienność implikowaną z dokładnością do czterech liczb po przecinku, a w przypadku, gdy znalezienie wartości spełniającej dany warunek nie jest osiągalne, podstawiał liczbę 0,0001. Obliczenia były wykonywane w samodzielnie napisanym skrypcie w języku programowania Python.

### 2.3. Współczynnik *moneyness*

Płaszczyznę zmienności implikowanej można zdefiniować jako trójwymiarowy wykres przedstawiający zmienności implikowane opcji w różnych cenach wykonania i terminach wygaśnięcia na ten sam instrument bazowy. Cena wykonania nie jest jednak najlepszym wyznacznikiem – znacznie dokładniej wewnętrzną wartość opcji pokazuje miara zwana współczynnikiem *moneyness*. Współczynnik ten mówi posiadaczom opcji, czy wykonanie opcji doprowadzi do zysku (Kenton, 2022).



Rysunek 2. Płaszczyzna zmienności implikowanej

Źródło: (Piontek, 2003).

Zarówno cena wykonania opcji, jak i czas pozostały do wygaśnięcia mają wpływ na jej wartość. Na przykład opcja *at-the-money*<sup>1</sup> często doświadcza zaniku czasu, ponieważ nie ma wartości wewnętrznej. Dlatego też wartość czasu stanowi większość premii za taką opcję. Czas staje się bardziej istotny, jeśli alternatywa nie jest opłacalna. Wynika to z malejącego prawdopodobieństwa, że opcja będzie „w pieniądzu” w miarę upływu czasu (Chen, 2021). Wskutek tego wykres zmienności implikowanej względem *moneyness* często kształtem przypomina parabolę, gdzie przy opcjach *at-the-money* są mniejsze wartości zmienności implikowanej niż przy opcjach *in-the-money* oraz *out-of-the-money*. Parabola ta znana jest również jako „uśmiech zmienności”. Natomiast struktura terminowa zmienności implikowanej, zależna od czasu do wygaśnięcia, może być nachylona w górę lub w dół w zależności od warunków rynkowych. Wykres na rysunku 2 przedstawia przykładową płaszczyzną zmienności implikowanej dla opcji europejskich.

Do obliczenia współczynnika *moneyness* potrzebna jest prognoza przyszłej wartości akcji lub indeksu. Między innymi z tego powodu konstrukcja ta wymaga założenia stopy dywidendy i stopy wolnej od ryzyka (Dumas, Fleming i Whaley, 1998). Cenę w przyszłości, przy założeniu stałej kapitalizacji, można określić za pomocą następującego wzoru:

$$F = S_0 e^{(r-q)T},$$

gdzie:  $S_0$  – obecna wartość instrumentu bazowego,  $r$  – stopa wolna od ryzyka,  $q$  – stopa dywidendy,  $T$  – czas do wygaśnięcia.

Na początku zasugerowano, że współczynnik *moneyness* należy określić poprzez podzielenie ceny wykonania przez koszt instrumentu bazowego. Ta strategia może być jednak zwodnicza, ponieważ zakłada niezależność czasową, podczas gdy opcje nie są zależne od czasu (Tompkins, 2001). Ostatecznie, do opisu wskaźnika zmodyfikowanego o czas do wygaśnięcia użyto następującego równania:

$$MN = \frac{1}{\sqrt{T}} \ln\left(\frac{F}{X}\right),$$

gdzie:  $T$  – czas do wygaśnięcia,  $F$  – wartość instrumentu bazowego w momencie wygaśnięcia opcji,  $X$  – cena wykonania opcji.

## 2.4. Eliminacja obserwacji w zbiorze

Biorąc pod uwagę, że zmienność implikowana wynikająca z wielu rodzajów czynników może osiągać wartości ekstremalne, rozpatrywano możliwość wykluczenia pewnych nietypowych obserwacji. Kryteriami, które wzięto pod uwagę do filtracji

<sup>1</sup> *In-the-money*, *at-the-money* i *out-of-the-money* to powszechnie używane terminy, które odnoszą się do stosunku ceny wykonania danego instrumentu pochodnego do ceny instrumentu bazowego, co pozwala na wgląd w wartość wewnętrzną tych instrumentów pochodnych.

zbioru danych były: czas do wygaśnięcia, współczynnik *moneyness* oraz wartości zmienności implikowanej.

Opcje, które są znacząco „poza pieniądzem” lub wręcz przeciwnie, mogą zostać wyeliminowane, zwłaszcza jeśli do wygaśnięcia wyboru pozostało niewiele czasu. Ze względu na skłonność modelu Blacka–Scholesa do przeszacowania wartości opcji o cenach wykonania znacznie odbiegających od wartości instrumentu bazowego należy rozważyć usunięcie takich obserwacji z badania (Schmalensee i Trippi, 1978). Współczynnik *moneyness* mierzy takie ekstrema, dlatego wybory można wykluczyć na podstawie dużych wartości bezwzględnych tego współczynnika. Z kolei ceny opcji krótkoterminowych mogą powodować znaczne zakłócenia związane z czasem, które mogą być wywołane przez zmiany w płynności. Opcje o długim terminie wykonania również doświadczają problemów z płynnością (Gonçalves i Guidolin, 2006). Dodatkowo niektóre wartości zmienności implikowanej nie mogły zostać znalezione, dlatego podstawiono za nie liczbę bliską zeru, która może w znacznym stopniu zaniżać współczynnik dopasowania, dlatego też ich usunięcie zostało także rozważone. W tabeli 1 zaprezentowano podział na podzbiory w zależności od wcześniej wspomnianych trzech kryteriów.

**Tabela 1.** Kryteria do podzbiorów do modelu regresji

Zbiór	Kryterium*		
	czas do wygaśnięcia	współczynnik <i>moneyness</i>	zmienność implikowana
1	–	–	–
2	+	–	–
3	–	+	–
4	–	–	+
5	+	+	–
6	+	–	+
7	–	+	+
8	+	+	+

\* Symbol „+” oznacza, że kryterium zostało zaaplikowane, natomiast symbol „–” oznacza jego pominięcie.

Źródło: opracowanie własne.

Łącznie zbiór danych przerobiono na osiem wersji. Za wartości nietypowe uznano opcje o terminie do wygaśnięcia krótszym niż tydzień bądź dłuższym niż rok. W przypadku współczynnika *moneyness* zdecydowano się na pozostawianie obserwacji, które znajdowały się w przedziale od pierwszego kwartyla minus półtora rozstępu ćwiartkowego do trzeciego kwartyla plus półtora rozstępu ćwiartkowego. Jeżeli chodzi o wartości zmienności implikowanej, rozważano jedynie eliminację tych, których wartość jest równa 0,0001.



## 2.5. Podział na modele

Ustalenie najlepszego modelu regresji, gdzie zmienną objaśnianą jest zmienność implikowana opcji, do konstrukcji płaszczyzny zmienności implikowanej nie jest trywialne. W polskich warunkach, gdzie rynek opcji jest relatywnie słabo rozwinięty, najlepszy model wybrany na podstawie analizy amerykańskich opcji może już tak dobrze nie odzwierciedlać sytuacji na polskim rynku. Pod uwagę wzięto osiem modeli, które mogłyby tworzyć płaszczyznę zmienności implikowanej. Tabela 2 prezentuje zmienne, spośród których zostanie wybrany najlepszy model.

**Tabela 2.** Zmienne objaśniające modeli zmienności implikowanej

Model	Zmienne*				
	$M^{**}$	$M^{\wedge 2}$	$T^{***}$	$MT$	$T^{\wedge 2}$
1	+	+	–	–	–
2	+	+	+	+	–
3	+	+	+	+	+
4	+	+	+	–	–
5	+	+	+	–	+
6	+	+	–	+	+
7	+	+	–	–	+
8	+	+	–	+	–

\*Symbol „+” oznacza, że zmienna została użyta, natomiast symbol „–” oznacza, że nie została użyta; \*\* $M$  – współczynnik *moneyness*; \*\*\* $T$  – czas do wygaśnięcia.

Źródło: opracowanie własne.

Wszystkie modele są kombinacją liniową wyrazów, a ich współczynniki były obliczane za pomocą metody najmniejszych kwadratów. Modele te mają ogólną postać:

$$Y = \beta_0 + x_1\beta_1 + x_2\beta_2 + \dots + x_n\beta_n + \epsilon,$$

Do wyboru najlepszego modelu zostały wykorzystane takie parametry, jak:

- współczynnik dopasowania R-kwadrat,
- kryterium informacyjne Akaikiego.

Współczynnik dopasowania pozwala ocenić, jaka część wariancji zmiennej endogenicznej objaśniana jest przez zmienności uwzględnionych w modelu zmiennych. Natomiast kryterium Akaikiego, umożliwiające porównanie jakości modeli między sobą, zajmuje się kompromisem między dobrym dopasowaniem modelu a prostotą modelu.

## 2.6. Wybór podzbioru

Do wyboru odpowiedniego podzbioru do analizy posłużono się dwoma czynnikami:

- współczynnikiem dopasowania,
- średnią stratą obserwacji.

W przypadku współczynnika R-kwadrat szukany był zbiór o jak największej jego wartości, albowiem oznacza on, że pozbyto się obserwacji zaburzających dopasowanie. Strata obserwacji jest także istotna, ponieważ posiadanie większej liczby danych podczas wykonywania regresji może poprawić dokładność i wiarygodność oszacowanych współczynników regresji i przewidywań. Przy większej wielkości próby szacunki współczynników regresji stają się bardziej precyzyjne, a błędy standardowe mniejsze. Oznacza to, że można być bardziej pewnym, że oszacowane współczynniki są zbliżone do prawdziwych współczynników całej próby, a przewidywane wartości są bardziej dokładne. Ponadto posiadanie liczniejszych prób pozwala na bardziej szczegółowe zbadanie związków między zmiennymi oraz na zbadanie bardziej złożonych modeli. Na przykład, mając większą próbę, można przetestować bardziej złożone modele z interakcjami i efektami nieliniowymi.

Wszystkie podzbiory były podstawione do ośmiu wcześniej wyznaczonych modeli. W badaniu zmierzono średni współczynnik dopasowania dla każdego podzbioru. Stratę obserwacji mierzono średnim odsetkiem wyeliminowanych obserwacji. Tabela 3 prezentuje wyniki porównawcze ich dopasowania.

**Tabela 3.** Dopasowanie podzbiorów do regresji

Zbiór/podzbiór	Średni współczynnik R-kwadrat (w %)	Średnia liczba obserwacji	Średnia strata obserwacji (w %)
1	54,77	250	0,00
2	50,27	228	8,69
3	52,59	233	6,64
4	75,90	210	15,94
5	49,99	222	11,01
6	74,04	193	22,74
7	73,39	197	20,95
8	73,08	189	24,42

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Jak można zauważyć, największym dopasowaniem odznaczają się podzbiory, z których wyeliminowano obserwacje ze zmiennością implikowaną bardzo bliską zeru. Warto także podkreślić, że eliminacja danych, gdzie wartości współczynnika *moneyness* albo terminu do wygaśnięcia są skrajne, współczynnik R-kwadrat jest

średnio niższy, co implikuje, że nie warto usuwać takich obserwacji. Najlepiej średnio wyjaśnianym podzbiorem okazał się więc podzbiór czwarty. Pomimo utraty w jego przypadku niemal 16% danych, wydaje się on najbardziej racjonalnym wyborem, dlatego też do dalszej analizy użyto wyników wyłącznie wynikających z podzbioru czwartego.

## 2.7. Analiza stabilność parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej

### 2.7.1. Wybór modelu

Wybór właściwego modelu jest ważny, ponieważ decyduje o dokładności i wiarygodności przewidywań dokonywanych za pomocą modelu. Jeśli model jest zbyt prosty, może nie uchwycić pełnej złożoności związku między predyktorem a zmienną odpowiedzi. W takim przypadku model nie jest wystarczająco elastyczny, aby uchwycić wzorce leżące u podstaw danych, a przewidywania będą niedokładne i nierzetelne. Jednak jeśli model jest zbyt złożony, to pomimo dokładniejszych przewidywań niektóre zmienne objaśniające mogą okazać się nieistotne, a sam model może być mniej czytelny.

Wybór właściwego modelu wymaga więc znalezienia równowagi między złożonością modelu a jego dokładnością. Można to osiągnąć poprzez weryfikację modeli z tabeli 2, gdzie wymienione zostały użyte zmienne objaśniające, za pomocą takich metryk, jak współczynnik dopasowania oraz kryterium Akaikego. Współczynniki regresji były liczone osobno dla każdego dnia, z którego pozyskane zostały dane. W badaniu wzięto pod uwagę średnią arytmetyczną współczynnika R-kwadrat oraz liczbę przypadków dla każdego z modeli, kiedy ich kryterium Akaikego było najniższe na obserwacjach z danego dnia. W tabeli 4, w której wiersze zostały posortowane względem kolumny związanej z kryterium Akaikego malejąco, zaprezentowano podsumowanie analizy.

**Tabela 4.** Dopasowanie modeli do danych

Numer modelu	Odsetek najniższych wartości kryterium Akaikego w punktach czasowych (w %)	Średni współczynnik R-kwadrat (w %)
3	43,40	77,24
5	34,20	76,59
2	8,02	76,49
4	5,90	75,84
8	5,66	75,16
1	1,65	74,55
6	0,71	75,99
7	0,47	75,35

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Najlepszym modelem okazał się model trzeci uwzględniający wszystkie z proponowanych zmiennych objaśniających. Każdy z modeli cechuje się podobnym wynikiem dopasowania do danych, jednak ten trzeci w ponad 43% przypadków miał najniższą wartość kryterium Akaikiego. Ostateczny model może zostać przedstawiony wzorem:

$$\sigma_{imp} = \beta_0 + \beta_1 M + \beta_2 M^2 + \beta_3 T + \beta_4 MT + \beta_5 T^2,$$

gdzie:  $\sigma_{imp}$  – zmienna implikowana,  $T$  – czas do wygaśnięcia,  $M$  – współczynnik *moneyness*.

Powyższy model uwzględnia zarówno wartości wewnętrzne opcji poprzez współczynnik *moneyness*, jak i czas do wygaśnięcia ilustrujący przewidywania inwestorów co do zmienności na rynku w przyszłości. Pozwala to na skonstruowanie płaszczyzny zmienności implikowanej w konkretnym punkcie w czasie po uprzednim obliczeniu współczynników regresji.

### 2.7.2. Analiza statystycznej istotności parametrów

Przed sprawdzeniem stabilności parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej należy ustalić, czy zmienne egzogeniczne były statystycznie istotne w wybranym modelu. Ze względu na to, że współczynniki regresji były obliczane dla każdego punktu w czasie z pozyskanych danych, policzony został odsetek wartości każdego z parametrów, które zostały uznane za istotne statystycznie, co przedstawia tabela 5.

**Tabela 5.** Istotność parametrów wybranego modelu zmienności implikowanej

Zmienna objaśniająca/stała	Odsetek punktów w czasie, w których parametr był istotny (w %)
Stała	100,00
$M$	93,63
$M^2$	99,76
$T$	75,47
$MT$	42,45
$T^2$	59,91

Źródło: opracowanie własne na podstawie badań własnych.

Za poziom istotności przyjęto wartość 0,05. Pożądane były więc wyniki prawdopodobieństwa testowego niższe niż 0,05. Na podstawie wyników można wyciągnąć następujące wnioski:

- Najczęściej statystycznie istotnym parametrem w modelowaniu płaszczyzny zmienności implikowanej jest parametr związany ze współczynnikiem *money-ness* do kwadratu.
- Najrzadziej statystycznie istotny jest parametr związany z iloczynem współczynnika *money-ness* i czasu.
- Parametry związane ze współczynnikiem *money-ness* częściej wykazywały się istotnością statystyczną od parametrów związanych z czasem do wygaśnięcia. Nie wszystkie parametry mogły być istotne statystycznie z następujących powodów:
  - niedostateczna liczba opcji na określony czas do wygaśnięcia,
  - dysproporcja liczby opcji w zależności od czasu do wygaśnięcia.

Tabela 6 obrazuje liczebność opcji na podstawie przedziału dni do wygaśnięcia, na której to podstawie można stwierdzić, czy powyższe przypuszczenia mają swoje uzasadnienie.

**Tabela 6.** Liczba obserwacji opcji w zależności od dni do wygaśnięcia w czasie

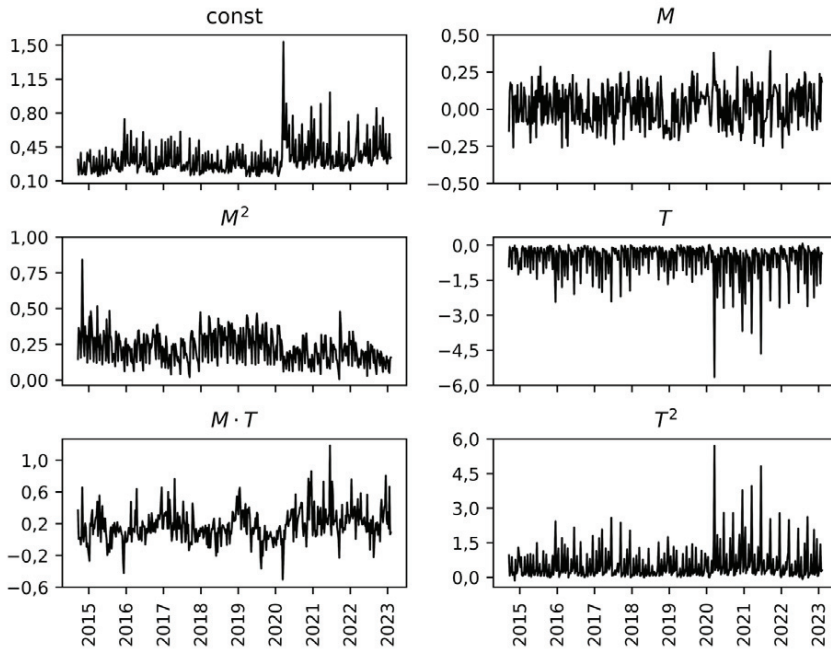
Rok	Dni do wygaśnięcia			
	<30	[30, 90]	[90, 180]	>180
2014	57	67	18	38
2015	63	73	22	40
2016	63	77	23	40
2017	68	79	23	41
2018	65	76	21	41
2019	61	73	22	41
2020	77	85	26	42
2021	66	79	24	41
2022	76	87	27	45
2023	74	82	25	47

Źródło: opracowanie na podstawie badań własnych.

W każdym analizowanym roku występuje stosunkowo duży odsetek opcji o terminie wygaśnięcia krótszym niż 30 dni, które mają tendencje zaburzać kształt płaszczyzny zmienności implikowanej poprzez swoje wysokie wartości, co może wpływać na nieistotność parametru związanego z czasem do wygaśnięcia. Dodatkowo jest także więcej opcji wygasających za ponad 180 dni niż tych w przedziale od 90 do 180 dni, co także może mieć negatywny wpływ na wyniki regresji, ponieważ opcje o długim terminie wygaśnięcia są rzadkie w obrocie, więc wartość zmienności implikowanej dla takich obserwacji zależy bardziej od obecnej ceny instrumentu bazowego niż oczekiwań inwestorów co do zmienności jego ceny w przyszłości.

### 2.7.3. Dynamika wartości parametrów regresji w czasie

W celu zbadania stabilności parametrów modelu zmienności implikowanej sporządzono wykres szeregu czasowego wartości każdego współczynnika, co zostało pokazane na rysunku 3.



Rysunek 3. Zmiany wartości parametrów regresji w czasie

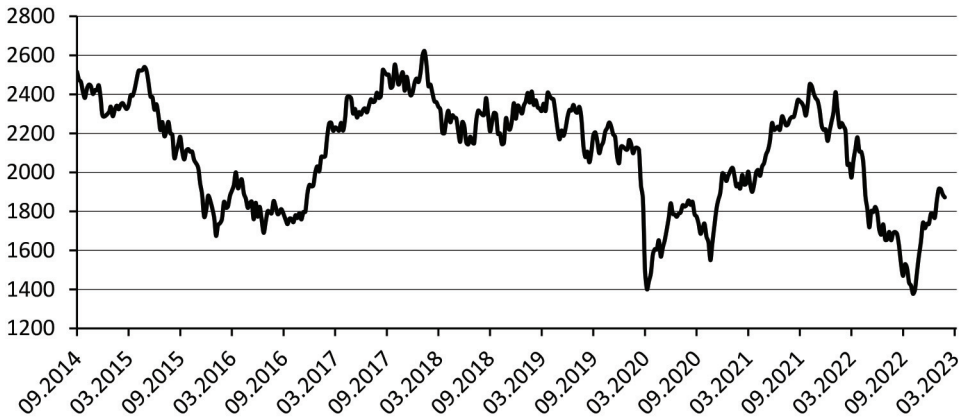
Źródło: opracowanie na podstawie badań własnych.

Zarówno w wymiarze współczynnika *moneyness*, jak i czasu do wygaśnięcia wartości parametrów widocznie się zmieniają. Na podstawie wykresów można wysnuć następujące wnioski:

- parametr związany ze współczynnikiem *moneyness* wykazuje się podobną zmiennością przez cały okres badania,
- parametr związany ze współczynnikiem *moneyness* do kwadratu miał okresy zarówno z większą i mniejszą zmiennością, dodatkowo miał wysokie wartości na początku okresu badania,
- parametry związane z terminem do wygaśnięcia od roku 2020 wykazywały się bardzo dużą zmiennością,
- parametr związany z iloczynem współczynnika *moneyness* i terminem do wygaśnięcia odznaczał się częstymi gwałtownymi zmianami,
- inwestorzy w okresie pandemii mogli w dużej mierze patrzeć na oczekiwaną zmienność instrumentu bazowego w przyszłości, co tłumaczyłoby wysoką wa-

riancję parametrów związanych z terminem do wygaśnięcia kontraktów opcyjnych w tamtym okresie.

Jedną ze zmiennych używanych do wyliczenia współczynnika *moneyness* była wartość instrumentu bazowego, w przypadku tego badania – indeksu WIG20. W przypadku opcji o niskim obrocie mogła mieć ona duży wpływ na wartości wyliczanej zmienności implikowanej. Wykres na rysunku 4 przedstawia szereg czasowy wartości tego indeksu giełdowego.



**Rysunek 4.** Zmiany wartości indeksu WIG20 w czasie

Źródło: opracowanie na podstawie badań własnych.

Na przedstawionym wykresie widać, że wartości instrumentu bazowego dynamicznie zmieniają się w czasie, co zwłaszcza dla opcji o niskiej płynności mogło mieć znaczący wpływ na wartości zmiennej objaśnianej. Nagłe spadki wartości, takie jak w roku 2015 czy 2020, spowodowały prawdopodobnie gwałtowny obrót opcjami krótkoterminowymi, ponieważ wartości oczekiwane ich wypłaty także musiały ulec raptownej zmianie, co ostatecznie zaburzyło kształt płaszczyzny zmienności implikowanej.

### 3. Zakończenie

Celem badania było sprawdzenie hipotezy o niestabilności parametrów modelu płaszczyzny zmienności implikowanej dla opcji na WIG20. Osoby inwestujące w opcje mogą uznać ten temat za szczególnie interesujący. Różne współczynniki modelu mają odmienny wpływ na kształtowanie się płaszczyzny zmienności implikowanej. Położenie początku paraboli w odniesieniu do opcji *at-the-money* określa pierwszy współczynnik, który jest sprzężony ze współczynnikiem *moneyness*. Kolejny współczynnik określa, jak szeroki jest „uśmiech zmienności”. Struktura terminowa,

czyli prognozy inwestorów dotyczące przyszłej zmienności instrumentu bazowego, określana jest przez współczynniki związane z parametrami czasu. Ostatni współczynnik obrazuje wzajemnie oddziaływanie współczynnika *moneyness* i czasu wykonania. Każda z wymienionych zmiennych powinna być istotna dla inwestorów, ponieważ prezentuje najważniejsze informacje o zmienności implikowanej – wymiar czasowy i cenę wykonania.

Hipoteza badawcza została potwierdzona przez analizę, która wykazała, że parametry modelu płaszczyzny zmienności implikowanej nie są stabilne i każdy z nich zmienia się znacząco w czasie. Może to być spowodowane brakiem płynności opcji na polskim rynku oraz gwałtownymi wahaniami wartości indeksu WIG20, zwłaszcza w okresie pandemii COVID-19. Wykorzystane narzędzia nie zawsze dokładnie odzwierciedlały stabilność płaszczyzny. Ze względu na niejednokrotnie występującą dysproporcję liczby opcji krótkoterminowych i długoterminowych, lub też brak ofert średnioterminowych, regresja liniowa nie odpowiadała ściśle danym empirycznym. Wybrany model mógł ewentualnie nie odpowiadać obserwacjom, ponieważ był zwykle stosowany do szerszego zakresu danych, które były również znacznie bardziej płynne na danym rynku. Ponadto konieczne było pominięcie niektórych danych, ponieważ zmienność implikowana nie zawsze była wykrywalna, co zwiększyło trudność analizy poprzez obniżenie liczby obserwacji.

W świetle powyższego można stwierdzić, że parametry modelu płaszczyzny zmienności implikowanej nie są stałe, co powoduje konieczność okresowego korygowania ich wartości. Model ten nie jest jednak ściśle dopasowany do danych, dlatego możliwe jest znalezienie takiego, który by im odpowiadał. W związku z tym praca nie jest w pełni wyczerpująca. Zastosowanie znacznie dłuższego okresu próby lub uwzględnienie innego interwału również byłoby możliwe jednak biorąc pod uwagę niską płynność i małą popularność opcji w Polsce, być może należałoby poczekać, aż instrumenty te będą bardziej rozpowszechnione wśród polskich inwestorów.

## Literatura

- Chen, J. (2021, 19 sierpnia). *What is Time Decay? How it Works, Impact, and Example*. Pobrane z <https://www.investopedia.com/terms/t/timedecay.asp>
- Dumas, B., Fleming, J. i Whaley, R. E. (1998). Implied Volatility Functions: Empirical Tests. *The Journal of Finance*, 53(6), 2059-2106.
- Giełda Papierów Wartościowych. (b.d.). *Główny rynek GPW – Wskaźniki dla opcji*. Pobrane z [https://www.gpw.pl/pub/GPW/files/metodologia\\_wskazniki\\_opcje.pdf](https://www.gpw.pl/pub/GPW/files/metodologia_wskazniki_opcje.pdf)
- Gonçalves, S. i Guidolin, M. (2006). Predictable Dynamics in the S&P 500 index Options Implied Volatility Surface. *The Journal of Finance*, 79(3), 1591-1635.
- Kenton, W. (2022). *Moneyness Definition and Intrinsic Value of Options*. Pobrano z lokalizacji Investopedia: <https://www.investopedia.com/terms/m/moneyness.asp>
- Piontek, K. (2003). Wycena opcji w modelu uwzględniającym efekt AR-GARCH. *Prace Naukowe AE we Wrocławiu*, (990), 331-336.



- Rudzki, R. (2012). *WIV20 – indeks zmienności implikowanej dla opcji na WIG20*. Pobrane z <http://artim.waw.pl/wiv20/wiv20.pdf>
- Schmalensee, R. i Trippi, R. (1978). Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia. *The Journal of Finance*, 33(1), 129-147.
- Tompkins, R. (2001). Implied Volatility Surfaces: Uncovering Regularities for Options on Financial Futures. *The European Journal of Finance*, 7(3), 198-230.
- Turitto, V. (2018, 28 marca). *Extracting Implied Volatility: Newton-Raphson, Secant and Bisection Approaches*. Pobrane z <https://medium.com/hypervolatility/extracting-implied-volatility-newton-raphson-secant-and-bisection-approaches-fae83c779e56>

## Analysis of the Stability of the WIG20 Option's Implied Volatility Surface Model Parameters

**Abstract:** The focus of this study is to determine how the WIG20 index options' implied volatility surface model's parameters change over time. Finding out whether these parameters stay the same over time is the study's key purpose. First, the selection of an appropriate time interval was handled so that the small number of observations does not distort the results. In a further step, it was discussed how to determine the implied volatility surface using different models of the linear regression. The analysis of the fit of the regression to the chosen subsets also centred on the question of whether observations that would negatively affect the shape of the surface might be removed. Finally, it was verified how often the parameters were statistically significant and how their values change over time. It turned out that the parameters of the WIG20 options for the implied volatility surface model show significant fluctuations that affect how the volatility smile and term structure change over time.

**Keywords:** implied volatility, WIG20 stock index options, stability of model parameters, implied volatility surface