PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 7 (1207) 2008

TAKSONOMIA 15
Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania

Paweł Rokita

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PORÓWNANIE KONCEPCJI ZALEŻNOŚCI EKSTREMALNEJ I WARUNKOWO ZMIENNEJ KOWARIANCJI W MODELOWANIU RYZYKA PORTFELA

1. Wstęp

Klasyczne metody dywersyfikacji portfela nie uwzględniają zależności między ekstremalnymi stopami zwrotu. Wyniki badań empirycznych publikowane w literaturze wielokrotnie wskazywały jednak na współwystępowanie nietypowych stóp zwrotu, a zwłaszcza ekstremalnych strat. Jeżeli takie zjawisko jest statystycznie istotne, może w znacznym stopniu wpływać na ryzyko portfela. Jednakże z punktu widzenia zarządzającego ryzykiem podobne efekty, obserwowane jako współwystępowanie nietypowo wysokich strat, mogą być powodowane przez kilka różnych własności finansowych szeregów czasowych. Wymienić można co najmniej pięć następujących:

- zależność ekstremalna w bezwarunkowym rozkładzie wielowymiarowego procesu stóp zwrotu,
- ekstremalna zależność w rozkładach warunkowych,
- zmienna warunkowa kowariancja (przy klasycznej liniowej zależności mierzonej kowariancją),
- zmieniająca się długoterminowa bezwarunkowa kowariancja (również przy klasycznej liniowej zależności mierzonej kowariancją),
- efekt zarażania rynków (*market contagion*).

Ponadto może występować jednocześnie więcej niż jedna taka własność (np. warunkowo zmienna zależność nieliniowa bądź też warunkowo zmienna kowariancja przy sporadycznych zmianach bezwarunkowej kowariancji). Modelowanie różnych tych efektów wymaga odmiennych podejść, w tym estymacji mniejszej lub większej liczby parametrów. Wydaje się więc zasadne, aby podjąć próbę oceny, czy rozróżnianie tych efektów ma duże znaczenie dla szacowania ryzyka portfela. Jeżeli tak, ważne byłoby prawidłowe zidentyfikowanie efektu odpowiedzialnego za współwystępowanie wysokich strat i dobranie właściwego modelu. Jeżeli nie – najodpowiedniejszym rozwiązaniem byłby po prostu wybór modelu najmniej kłopotliwego w zastosowaniu.

Niniejszy artykuł poświęcony jest porównaniu wpływu na ryzyko portfela dwóch z wymienionych wyżej własności: zależności ekstremalnej (w rozkładzie bezwarunkowym) oraz warunkowo zmiennej kowariancji.

2. Porównywane modele

2.1. Zależność ekstremalna

Przez pojęcie zależności ekstremalnej będzie tutaj rozumiana zależność między ekstremalnymi stopami zwrotu (stratami[1]). Zastosowane zostało podejście Colesa, Heffernana i Tawna z 1999 r. [Coles i in. 1999, s. 348]. Wykorzystuje ono test niezależności w ogonie, oparty na koncepcji asymptotycznej zależności.

Asymptotyczna zależność w sensie definicji Sibuya i Joe'a, zaproponowanej następnie na potrzeby analizy danych finansowych przez Frahma, Junkera i Smitha [Frahm i in. 2005, s. 2], zachodzi, gdy w granicy istnieje i jest większe od zera następujące prawdopodobieństwo warunkowe:

Definicja 1. Zależność asymptotyczna

$$\lambda_u = \lim_{p_u \to 1^-} P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u) \middle| X_2 > F_2^{-1}(p_u)\right) > 0, \tag{1}$$

wielkość λ_u jest nazywana współczynnikiem zależności w ogonie (*tail dependence coefficient* – TDC).

Ponieważ asymptotyczna zależność w ogonie jest warunkiem silniejszym niż zależność w ogonie[2], weryfikacja hipotezy o braku zależności w ogonie nie może się ograniczać do testowania zerowości współczynnika TDC. Dlatego Coles, Heffernan i Tawn wprowadzili uzupełniającą miarę zależności:

$$\bar{\lambda}_u = \lim_{p_u \to 1^-} \frac{2\log\left(P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u)\right)\right)}{\log P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u), X_2 > F_2^{-1}(p_u)\right)} - 1,\ -1 < \bar{\lambda}_u \le 1. \tag{2}$$

[1] Stopami zwrotu przemnożonymi przez –1.

[2] Asymptotyczna niezależność nie implikuje niezależności w ogonie:
– niezależność w ogonie:
$P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u), X_2 > F_2^{-1}(p_u)\right) = P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u)\right) \cdot P\left(X_2 > F_2^{-1}(p_u)\right)$,
– asymptotyczna niezależność:
$\lambda_u = \lim_{p_u \to 1^-} P\left(X_1 > F_1^{-1}(p_u) \middle| X_2 > F_2^{-1}(p_u)\right) = 0.$
Zmienne, które są asymptotycznie niezależne, mogą być w różnym stopniu zależne w ogonie.

Sposób łącznego interpretowania parametrów λ_u i $\bar{\lambda}_u$ można przedstawić następująco[3] (tab. 1):

Tabela 1. Łączne rozpatrywanie parametrów λ i $\bar{\lambda}$

Siła i kierunek zależności*)	$\bar{\lambda}_u$	λ_u	Zależność asymptotyczna
Niezależność	0	0	brak
Dodatnia zależność	$0<\bar{\lambda}_u<1$	$0\le\lambda_u<1$	może występować, nie musi
Ujemna zależność	$-1<\bar{\lambda}_u<0$	$0\le\lambda_u<1$	może występować, nie musi
Pełna zależność (dodatnia lub ujemna)	-1 albo 1	$0<\lambda_u\le1$	występuje

* Dotyczy wartości przekraczających kwantyle progowe

Źródło: opracowanie własne.

Test niezależności w ogonie polega w rzeczywistości na weryfikacji hipotezy[4] $H_0':\bar{\lambda}_u=1$, a nie hipotezy $H_0:\lambda_u=0$.

Z kolei do generowania danych pseudolosowych wykazujących efekt zależności ekstremalnej zastosowano archimedesowskie funkcje połączeń[5] (f. powiązań, *copula functions*) [Nelsen 2005, s. 2]. Niektóre z nich wykazują interesującą nas tu własność zależności ekstremalnej[6]. Na potrzeby symulacji wykorzystane tu zostały funkcje połączeń numer: 4 (tzw. funkcja połączeń Gumela), 12 i 14 według klasyfikacji Nelsena.

2.2. Zmienna warunkowa kowariancja

Ogólnie przez model ze zmienną warunkową kowariancją będziemy rozumieli wielowymiarowy model GARCH. Zakładamy przy tym, że stopy zwrotu podlegają procesowi, który może być opisany następująco:

---

[3] Przy tym para (λ, $\bar{\lambda}$) informuje w szczególnych dwóch przypadkach o: a) asymptotycznej zależności, gdy: ($\lambda_u > 0$, $\bar{\lambda}_u = 0$) – wówczas miara λ_u informuje o sile zależności, a miara $\bar{\lambda}_u$ nie wnosi żadnej dodatkowej informacji; b) asymptotycznej niezależności, gdy: ($\lambda_u = 0$, $\bar{\lambda}_u < 0$) – wówczas miara $\bar{\lambda}_u$ informuje o sile zależności, a miara λ_u nie wnosi już żadnej dodatkowej informacji.

[4] Tak więc, gdy nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy H_0', nie ma też podstaw do odrzucenia hipotezy o zależności asymptotycznej. Natomiast gdy odrzucamy hipotezę $H_0':\bar{\lambda}_u=1$ na rzecz hipotezy alternatywnej $H_1':\bar{\lambda}_u\neq1$, to przyjmujemy tym samym, że zależność asymptotyczna nie musi występować (choć nie oznacza to automatycznego przyjęcia hipotezy $H_0:\lambda_u=0$ o braku asymptotycznej zależności).

[5] Wybór rodziny archimedesowskich funkcji połączeń został podyktowany m.in. ich prostotą. W przeciwieństwie do wielu innych rodzin funkcji połączeń, na przykład eliptycznych, dają się one w pełni wyrazić za pomocą funkcji algebraicznych. Oprócz posiadania jawnej postaci analitycznej ważna jest również mała liczba parametrów. Większość z nich zależy od tylko jednego parametru (zwykle oznaczanego symbolem θ). Ponadto pozwalają na modelowanie nieliniowej struktury zależności.

[6] Można łatwo pokazać, że funkcje połączeń o numerach 2, 4, 6, 12, 14, 15, 21 i 18 według klasyfikacje Nelsena (por. [Armstrong 2003]) wykazują asymptotyczną zależność w górnym ogonie, zaś funkcje o numerach 1 (przy $\theta \geq 0$), 12, 16, 14, 19 i 20 posiadają własność zależności asymptotycznej w dolnym ogonie [Nelsen 2005, s. 59].

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \tag{3}$$

$$\varepsilon_t = H_t^{1/2} z_t, \text{ gdzie } H_t^{1/2} \text{ jest pewną macierzą o wymiarach } N \times N, \tag{4}$$

z_t są niezależnymi zmiennymi losowymi o identycznych rozkładach, przy czym:

$$E(z_t) = 0, \ V(z_t) = \mathbf{I}_N, \tag{5}$$

$$\mu_t = E(r_t | \zeta_{t-1}) = E_{t-1}(r_t), \tag{6}$$

$$H_t = H_t^{1/2} \left(H_t^{1/2}\right)^T = V(r_t | \zeta_{t-1}) = V_{t-1}(r_t), \tag{7}$$

gdzie ζ_{t-1} jest informacją dostępną w chwili t – 1, obejmującą co najmniej: $\{\ldots, r_{t-2}, r_{t-1}\}$.

Natomiast macierz wariancji i kowariancji:

$$H_t = (h_{ijt}) \tag{8}$$

jest opisywana wielowymiarowym modelem GARCH.

Ze względu na trudności związane ze stosowaniem pełnej wersji wielowymiarowego modelu GARCH (VEC-GARCH [Bollerslev i in. 1998]) tutaj wykorzystywany jest model BEKK ([Engel, Kroner 1995], por. też [Silvennoinen, Teräsvirta 2007, s. 4]). Będzie to model BEKK(1,1,1), który w przypadku dwuwymiarowym przedstawia się następująco:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} h_{11t} & h_{21t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & 0 \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{21} \\ 0 & c_{22} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,t-1}^2 & \varepsilon_{1,t-1}\varepsilon_{2,t-1} \\ \varepsilon_{2,t-1}\varepsilon_{1,t-1} & \varepsilon_{2,t-1}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} h_{11,t-1} & h_{21,t-1} \\ h_{21,t-1} & h_{22,t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{9}$$

3. Przeprowadzone badania

Wygenerowano dwuwymiarowe próby pseudolosowe z modeli:

1) statycznych, ze stałym rozkładem wykazującym zależność ekstremalną, przy wykorzystaniu archimedesowskich funkcji powiązań numer 4, 12 i 14 według klasyfikacji Nelsena.

2) ze zmienną warunkową kowariancją, przy zastosowaniu modelu BEKK(1,1,1).

W obu przypadkach wykorzystano zarówno parametry narzucone sztucznie, jak i oszacowania parametrów uzyskane wcześniej metodą największej wiarygodności na podstawie danych rzeczywistych. Jako próby do estymacji parametrów obu modeli posłużyły szeregi czasowe stóp zwrotu dla następujących par indeksów rynku akcji:
WIG20, S&P500; WIG20, DAX30; WIG20, FTSE100; WIG20, NIKKEI.

Następnie przeprowadzono weryfikację hipotezy o asymptotycznej niezależności dla danych z modelu BEKK. Próby wykrycia efektu M-GARCH w próbie generowanej z modeli statycznych nie podejmowano, gdyż nie występuje on tam z racji samej konstrukcji tych modeli (wszystkie kolejne obserwacje są niezależnymi zmiennymi losowymi o tych samych rozkładach)[7].

W dalszej kolejności, na podstawie prób pseudolosowych wygenerowanych z obu grup modeli, szacowano jednodniową wartość zagrożoną dla portfeli dwuskładnikowych o równych udziałach. Przeprowadzono testy wsteczne VaR i porównano ich wyniki. Do weryfikacji modelu VaR zastosowano testy liczby i niezależności przekroczeń Kupca i Christoffersena.

4. Wyniki badań

Trajektoria M-GARCH traktowana jest jako próba prosta:

Tabela 2. Asymptotyczna zależność w rozkładzie bezwarunkowym dla trajektorii M-GARCH(1,1)

Para: BEKK (1,1,1), losowanie 1 Prawd. progowe: 0,99							
Czy odrz. hipotezę o zależności asympt.	ξ_T	γ_T	próg r	odch. stand. ξ	Poziom istotności testu	Wartości krytyczne	$\xi_T \equiv \overline{\lambda_u}$
Nie	1,6732	6,086067	47,67019	1,5461	5%	(-1,55 ; 3,54)	
Para: BEKK (1,1,1), losowanie 2 Prawd. progowe: 0,99							
Czy odrz. hipotezę o zależności asympt.	ξ_T	γ_T	próg r	odch. stand. ξ	Poziom istotności testu	Wartości krytyczne	$\xi_T \equiv \overline{\lambda_u}$
Nie	2,3962	3,091184	50,26533	1,6630	5%	(-1,74 ; 3,73)	
Para: BEKK (1,1,1), losowanie 3 Prawd. progowe: 0,99							
Czy odrz. hipotezę o zależności asympt.	ξ_T	γ_T	próg r	odch. stand. ξ	Poziom istotności testu	Wartości krytyczne	$\xi_T \equiv \overline{\lambda_u}$
Nie	1,7802	2,296026	56,75828	1,3499	5%	(-1,23 ; 3,22)	

Źródło: obliczenia własne.

Dwuwymiarowe trajektorie procesu M-GARCH(1,1) zostały potraktowane jako próby proste i poddano je testowi na występowanie ekstremalnej zależności. W żadnym z badanych przypadków nie odrzucono hipotezy o zależności asymptotycznej w górnym ogonie. Oznacza to, że bezwarunkowy rozkład procesu

[7] Celem tego artykułu nie jest wykazanie, że dane wygenerowane z tych dwóch typów modeli mają podobne właściwości w ogóle, a jedynie sprawdzenie, czy ich rozróżnianie ma duże, czy też małe znaczenie z punktu widzenia ryzyka portfela.

Tabela 3. Przykład 1) wyniki testów wstecznych – dane pseudolosowe, model VaR z funkcją połączeń Gumbela (numer 4 według Nelsena)

Model wykorzystany przy szacowaniu VaR: funkcja połączeń nr **4 (Gumbela)**
Poziom istotności testu: 5% Poziom tolerancji VaR: 1% Długość próby testowej: 1000

Dane generowane z modelu: **BEKK**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	4,705965	3,841459	**1**	4	0,004
LR_ind	15,72114	9,487729	**1**		
LR_mix	20,4271	11,0705	**1**		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	4,705965	3,841459	**1**	4	0,004
LR_ind	6,83324	3,841459	**1**		
LR_mix	11,5392	5,991465	**1**		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **14**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,10452	3,841459	**0**	9	0,009
LR_ind	11,93462	16,91898	**0**		
LR_mix	12,03914	18,30704	**0**		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,10452	3,841459	**0**	9	0,009
LR_ind	0,163648	3,841459	**0**		
LR_mix	0,268168	5,991465	**0**		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **12**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,433741	3,841459	**0**	8	0,008
LR_ind	12,54071	15,50731	**0**		
LR_mix	12,97445	16,91898	**0**		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,433741	3,841459	**0**	8	0,008
LR_ind	0,129172	3,841459	**0**		
LR_mix	0,562913	5,991465	**0**		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **4**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,433741	3,841459	**0**	8	0,008
LR_ind	9,867755	15,50731	**0**		
LR_mix	10,3015	16,91898	**0**		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,433741	3,841459	**0**	8	0,008
LR_ind	0,129172	3,841459	**0**		
LR_mix	0,562913	5,991465	**0**		

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 4. Przykład 2) wyniki testów wstecznych – dane pseudolosowe, model VaR z M-GARCH(1,1)

Model wykorzystany przy szacowaniu VaR: BEKK(1,1,1)
Poziom istotności testu: 5% Poziom tolerancji VaR: 1% Długość próby testowej: 250

Dane generowane z modelu: **BEKK**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,09494	3,841459	0	3	0,012
LR_ind	6,913986	7,814728	0		
LR_mix	7,008926	9,487729	0		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,09494	3,841459	0	3	0,012
LR_ind	0,073221	3,841459	0		
LR_mix	0,168161	5,991465	0		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **14**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,108435	3,841459	0	2	0,008
LR_ind	0,897434	5,991465	0		
LR_mix	1,005869	7,814728	0		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,108435	3,841459	0	2	0,008
LR_ind	0,032421	3,841459	0		
LR_mix	0,140857	5,991465	0		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **12**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	1,176491	3,841459	0	1	0,004
LR_ind	-	3,841459	-		
LR_mix	-	5,991465	-		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	1,176491	3,841459	0	1	0,004
LR_ind	0,008081	3,841459	0		
LR_mix	1,184572	5,991465	0		

Dane generowane z modelu: funkcja połączeń nr **4**

Wyniki mieszanego testu Kupca

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,108435	3,841459	0	2	0,008
LR_ind	0,667149	5,991465	0		
LR_mix	0,775584	7,814728	0		

Wyniki mieszanego testu Christoffersena

	LR	CV	Czy odrz.	l.przekr.	cz.przekr.
LR_uc	0,108435	3,841459	0	2	0,008
LR_ind	0,032421	3,841459	0		
LR_mix	0,140857	5,991465	0		

Źródło: obliczenia własne.

M-GARCH(1,1) może wykazywać nie tylko zależność w ogonie, ale i zależność asymptotyczną w sensie def. 1. Jednak model M-GARCH(1,1) jest bardziej kłopotliwy w zastosowaniu (ma więcej parametrów[8]) niż modele statyczne z funkcjami połączeń wykazującymi własność zależności ekstremalnej. Istotą zaś prowadzonych tutaj badań jest poszukiwanie możliwości zastąpienia modeli o większej liczbie parametrów modelami prostszymi, przy tym głównym kryterium akceptacji modelu jest jakość prognoz ryzyka portfeli.

Ze względu na wspomniany cel bardziej interesujące niż badanie własności statystycznych danych pochodzących z różnych modeli wydaje się szacowanie na ich podstawie ryzyka, przy założeniu różnych modeli wartości zagrożonej. Na szczególną uwagę zasługują przypadki, gdy zakładany teoretyczny model wartości zagrożonej jest prostszy (zwłaszcza zależny od mniejszej liczby parametrów) niż model, z którego pochodzi próba pseudolosowa.

Testy wsteczne modelu wartości zagrożonej dla danych symulowanych.

1. Dane symulowane z różnych modeli, oszacowania VaR przy założeniu modelu ze stałym rozkładem i zależnością ekstremalną.
2. Dane symulowane z różnych modeli, oszacowania VaR przy założeniu modelu M-GARCH(1,1).

Model wartości zagrożonej, zakładający niezależne jednakowe rozkłady dwuwymiarowe z zależnością ekstremalną, został odrzucony, gdy dane pochodziły faktycznie z modelu M-GARCH(1,1). Tylko dla danych generowanych z modeli o podobnych własnościach co model wartości zagrożonej – modele statyczne z funkcjami połączeń 4, 12 i 14 według klasyfikacji Nelsena – testy liczby i niezależności przekroczeń nie dały podstaw do odrzucenia modelu. Natomiast gdy teoretyczny model wartości zagrożonej wykorzystywał proces M-GARCH (1,1), nie był on odrzucany zarówno dla danych generowanych z tego samego modelu, jak i dla danych pochodzących z modeli statycznych z funkcjami powiązań wykazującymi własność zależności ekstremalnej.

5. Podsumowanie

Stwierdzono, że wielowymiarowy proces GARCH może być przydatny w modelowaniu ryzyka portfeli nawet wówczas, gdy w danych nie występuje wielowymiarowy efekt GARCH, a stopy zwrotu (straty) pochodzą z niezmiennego w czasie rozkładu wielowymiarowego wykazującego zależność w ogonach, w tym nawet zależność asymptotyczną.

Z kolei rozpatrywane modele zakładające niezmienny w czasie wielowymiarowy rozkład z zależnością ekstremalną okazywały się użyteczne tylko do modelowania ryzyka portfeli, których składniki podlegają podobnym (niekoniecznie identycznym) modelom z zależnością w ogonach rozkładu. Natomiast były odrzu-

[8] W wersji BEKK(1,1,1), dla przypadku dwuwymiarowego jest 11 parametrów. W wersji VEC-GARCH(1,1) byłoby ich aż 21.

cane jako modele wartości zagrożonej, gdy dane wykazywały efekt warunkowo zmiennej kowariancji.

Przeprowadzone testy nie pozwalają oczywiście wykazać, że wielowymiarowy model GARCH zawsze dobrze nadaje się do modelowania zarówno ryzyka portfeli z efektem warunkowo zmiennej kowariancji, jak i z zależnością ekstremalną w rozkładzie bezwarunkowym. Można natomiast jednoznacznie stwierdzić, że nie udało się wykazać, iż model bezwarunkowej zależności ekstremalnej pozwala szacować ryzyko portfela nie gorzej niż model dynamiczny zakładający wielowymiarowy efekt GARCH. Oznacza to, że postulowana metoda uproszczenia modelu wartości zagrożonej poprzez wprowadzenie ekstremalnej zależności w rozkładzie bezwarunkowym zamiast warunkowo zmiennej kowariancji nie jest możliwa do zastosowania. Jeżeli zatem w danych występuje zmienna warunkowa kowariancja, to właściwość ta nie może być ignorowana przy tworzeniu modelu wartości zagrożonej.

W dalszych badaniach należałoby przeprowadzić podobne testy dla danych rzeczywistych. Wskazane jest też porównanie (z punktu widzenia pomiaru ryzyka) innych własności finansowych szeregów czasowych, które mogą dawać efekt współwystępowania wysokich strat podobny do wynikającego z zależności ekstremalnej w rozkładzie bezwarunkowym. Są to przede wszystkim: ekstremalna zależność w rozkładach warunkowych, zmienna warunkowa kowariancja (tutaj analizowana), zmienna długoterminowa (bezwarunkowa) kowariancja oraz zjawisko zarażania rynków.

Literatura

Armstrong M. (2003), *Copula Catalogue. Part 1: Bivariate Archimedean Copulas*, maszynopis CERNA, Paryż, http:/www.cerna.ensmp.fr.

Bollerslev T., Engle R.F., Wooldridge J.M. (1998), *A Capital Asset Pricing Model with Time-varying Covariances*, „The Journal of Political Economy" nr 96, s. 116-131.

Coles S., Heffernan J., Tawn J. (1999), *Dependence Measures for Extreme Value Analyses*, „Extremes" nr 2:4, s. 339-365.

Engle R.F., Kroner K.F. (1995), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, „Econometric Theory", nr 11, s. 122-150.

Frahm G., Junker M., Schmidt R. (2005), *Estimating the Tail-dependence Coefficient: Properties and Pitfalls*, „Insurance: Mathematics and Economics", vol. 37, nr 1, s. 80-100.

Joe H. (1997), *Multivariate Models and Dependence Concepts*, Chapman and Hall, Londyn.

Nelsen R.B. (2005), *Dependence modeling with Archimedean copulas*, „Proceedings of the Second Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance", red. N. Kolev, P. Morettin. Institute of Mathematics and Statistics, University of São Paulo, s 45-54.

Sibuya M. (1960), *Bivariate Extreme Statistics*, „Annals of the Institute of Statistical Mathematics" nr 11, s. 195-210.

Silvennoinen A., Teräsvirta T. (2007), *Multivariate GARCH Models*, SSE/EFI Working Paper Series In Economics and Finance nr 669.

COMPARING EXTREME DEPENDENCE AND VARYING CONDITIONAL COVARIANCE CONCEPT FOR PORTFOLIO RISK MODELING

Summary

This paper considers the risk of portfolios which components show concurrence of untypically high losses. Two kinds of models for Value at Risk estimation are discussed: static models with extreme dependence and stochastic process with varying conditional covariance (M-GARCH). The aim of the investigation is to compare these models and determine whether unconditional extreme dependence may be sufficient for risk measurement purposes even if the true cause of fat tails in the multivariate unconditional distribution is the presence of M-GARCH effect in data.