

**Marek Karwański**

SAS Institute, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**Wiesław Szczesny**

Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

**ANALIZA RYZYKA MODELU SZACOWANIA  
REZERW IBNR W ZAKŁADZIE UBEZPIECZENIOWYM.  
MODELE STOCHASTYCZNE DLA DANYCH  
ZAGREGOWANYCH I INDYWIDUALNYCH**

**1. Wstęp**

Jedną z podstawowych funkcji aktuariatu w zakładzie ubezpieczeniowym jest szacowanie rezerw. Część z tych rezerw – rezerwy na szkody zaistniałe, lecz niezgłoszone do dnia, na który tworzona jest rezerwa – nosi nazwę IBNR. Ich szacowanie ma charakter prognozy przyszłych wypłat i jest obliczane za pomocą modeli stochastycznych. W praktyce stosowane są głównie metody analizy na danych zagregowanych w tzw. trójkąty szkodowe. Modele szacowania rezerwy IBNR są intensywnie rozwijane i testowane. Jest to szczególnie istotne, ponieważ okres inkubacji szkód dla wielu produktów ubezpieczeniowych jest bardzo długi, a co za tym idzie – kwoty uzyskiwane w tych modelach mogą się znacznie różnić. Wybór najlepszej metody ma więc duże znaczenie praktyczne. Mimo stosowania zaawansowanych modeli, uzyskiwane wyniki obarczone są stosunkowo dużym błędem. Szczególnie duże różnice występują przy szacowaniu rezerw dla szkód ostatnio zaistniałych – a są one najbardziej „ciekawe” z punktu widzenia zakładu ubezpieczeniowego (por. [Woźniak 2006]).

Rezerwy powinny być budowane na podstawie wartości przyszłych strat. Modele szkodowe można uzyskiwać na podstawie danych indywidualnych wyciąganych z rejestrów bądź danych zagregowanych. Podczas procesu przygotowania danych do normalnej praktyki należy modyfikacja i korekta danych w celu usunięcia zdarzeń nietypowych bądź uzupełnienia braków danych. Omówienie tych problemów wykracza poza zakres niniejszej pracy. Pomijamy tu również rozważania

dotyczące tego, czy dane powinny być oparte na wartościach szkód netto, czy też należy dodać dodatkowe składniki kosztów. Nie uwzględniamy także takich czynników, jak inflacja oraz procentowe stopy rynkowe związane z dyskontowaniem przepływów pieniężnych.

W literaturze pojawiają się próby wprowadzenia do praktyki modeli dla danych indywidualnych. Są one oparte na modelach dla danych obciętych. Jednakże poważną przeszkodą w stosowaniu tych metod jest koszt pozyskania danych indywidualnych oraz konieczność stosowania bardzo wyrafinowanych metod analitycznych (zob. [Taylor i in. 2006]).

## 2. Cel i metoda badawcza

Celem niniejszej pracy jest porównanie wyników szacowania rezerw typu IBNR metodami tradycyjnymi, opartymi na danych zagregowanych (por. [England, Verral 2002]) oraz proponowanymi ostatnio metodami opartymi na zaawansowanych modelach statystycznych wykorzystujących dane indywidualne. Porównano następujące metody: klasyczny model Chain Ladder, model Macka, dwa modele GLM: pierwszy z szacowaniem zmienności metodą analityczną delta i drugi wykorzystujący technikę bootstrap, metodę Bayesa MCMC oraz metodę analizy regresji dla danych obciętych, na indywidualnych rejestrach.

Analizy przeprowadzono dla dwóch zestawów danych:

- danych rzeczywistych jednej z dużych amerykańskich firm ubezpieczeniowych (z uwagi na poufność zostały one nieznacznie zniekształcone),
- danych pseudolosowych wygenerowanych sztucznie z rozkładów Poissona, które uwzględniały segmentację klientów w zakresie zróżnicowania pod względem „potencjalnej szkodowości”.

Wyniki uzyskane na podstawie poszczególnych modeli zostały porównane z rzeczywistą realizacją zjawiska. Do obliczeń wykorzystano procedury systemu SAS (zob. <http://www.sas.com/software/index.html>).

## 3. Dane wejściowe

Na dane wejściowe do modelowania rezerw IBNR składają się wartości szkód. Do pierwszego zestawu użyto danych rzeczywistych. Do budowy modeli wybrano kwartalne dane historyczne (64 tys. obserwacji) wybranej linii produktowej z grupy ubezpieczeń komunikacyjnych jednego z dużych zakładów ubezpieczeniowych w USA, obejmujące lata 2000-2006. Obserwacje od marca 2000 r. do czerwca 2003 r. zostały użyte do estymacji parametrów modeli, natomiast obserwacje od czerwca 2003 r. do września 2006 r. wykorzystano do oceny jakości uzyskanych prognoz.

Do drugiego zestawu użyto danych wygenerowanych sztucznie z mieszaniny rozkładów Poissona – dane składają się z czterech warstw różniących się wartościami średnimi szkód. Jako parametrów dla generatora liczb pseudolosowych o

rozkładzie Poissona użyto odpowiednich wartości średnich uzyskanych z danych rzeczywistych. Czas zgłoszenia szkody został użyty jako dodatkowy parametr pozwalający modelować zmianę wartości średniej jako funkcji okresu inkubacji szkody.

Dane indywidualne uzyskane z rejestrów zawierały następujące zmienne:

- czas zajścia szkody – data zajścia zdarzenia (w kwartałach),
- czas inkubacji szkody – czas opisujący opóźnienie między zajściem szkody a pojawieniem się informacji o tym w systemie rejestrującym zakładu ubezpieczeniowego (w kwartałach),
- wartość szkody – wielkość, w stosunku do której ustala się rezerwy,
- zmienne opisujące klienta i polisę – dodatkowe parametry opisujące klientów i pozwalające na identyfikację segmentu z punktu widzenia częstości występowania i wielkości szkody.

Szacowanie rezerw metodami tradycyjnymi odbywało się na podstawie zagregowanych historycznych danych o szkodach. Dane o szkodach ułożone zostały w tabelę, gdzie „boczek” (oś pionowa) związany jest z datą zdarzenia i nosi nazwę czasu zajścia szkody, a „główka” (oś pozioma) związana jest z różnicą między datą zgłoszenia a datą zajścia szkody – nosi ona nazwę czasu rozwoju szkody (okres inkubacji). Dane rzeczywiste zostały zaprezentowane na rys. 1. Przedstawia on tabelę z zaciemnionym trójkątem danych historycznych, nazywanym trójkątem szkodowym, który został użyty do estymacji modeli, oraz dolnym trójkątem reprezentującym przyszłość, który jest wypełniony danymi użytymi do oceny modeli (por. [Hoedemakers 2005]).

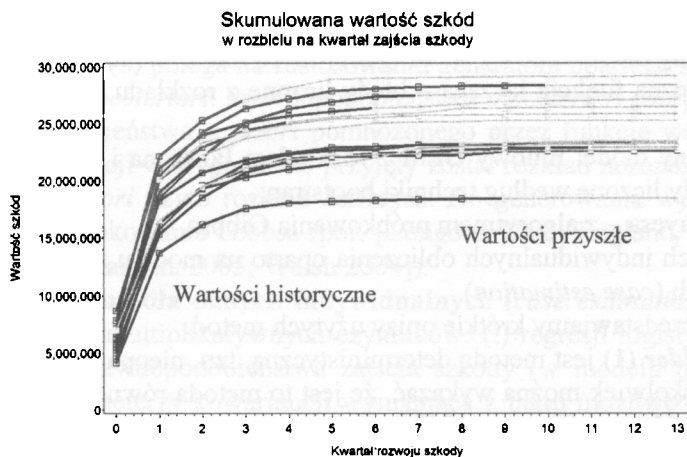
		okres inkubacji szkody w kwartałach													szkody znane i przyszłe		
		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	szkody znane	szkody znane i przyszłe
czas zajścia szkody (w kwartałach)	0	5 369	9 988	3 161	2 196	987	386	86	29	24	367	25	6	14	7	22 644	22 644
	1	6 829	11 457	2 426	1 092	628	500	83	110	29	64	70	10	85	41	23 383	23 424
	2	4 526	11 700	3 376	1 388	954	186	256	149	170	135	35	30	14	7	22 905	22 926
	3	5 801	14 612	3 859	2 059	871	703	191	146	83	39	20	6	10	48	28 384	28 448
	4	4 193	9 542	2 447	1 389	462	161	95	80	33	11	18	6	5	6	18 411	18 446
	5	5 035	10 756	3 569	2 102	905	275	117	391	60	89	124	18	15	14	23 210	23 470
	6	6 205	12 279	3 589	3 037	1 205	599	477	88	145	74	54	19	3	25	27 478	27 799
	7	8 722	12 394	2 891	1 082	610	396	308	91	269	202	36	30	86	4	26 402	27 122
	8	6 251	11 035	3 016	1 006	698	483	506	831	198	17	178	1	36	1	21 488	23 256
	9	6 433	13 678	2 872	1 452	747	414	211	141	380	64	45	11	10	10	25 182	26 468
	10	7 864	14 498	3 143	1 838	1 037	759	77	40	73	28	9	12	4	21	27 143	29 203
	11	7 194	11 811	3 231	1 432	659	270	446	96	30	74	8	12	9	36	22 266	25 339
	12	5 561	14 568	3 248	886	707	438	155	181	42	31	22	4	7	15	20 130	25 886
	13	7 053	9 523	2 895	1 671	737	308	124	104	32	192	47	24	27	7	7 053	22 714
																316 079	347 122

Rys. 1. Dane rzeczywiste o szkodach zagregowane w postaci trójkąta szkodowego w tys. USD  
Źródło: obliczenia własne.

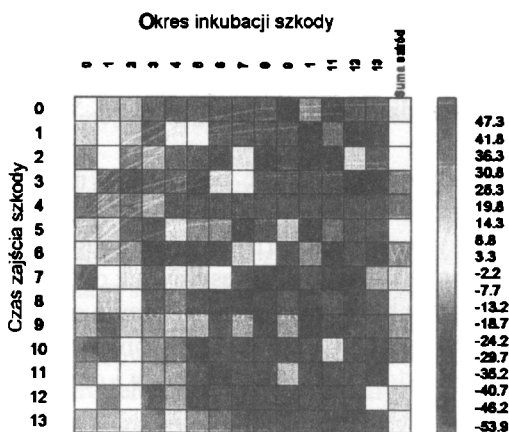
Suma wartości szkód w poziomych wierszach nosi nazwę szkód ostatecznych (*ultimate claims*), natomiast suma wartości szkód poniżej przekątnej to szkody jeszcze niezgłoszone i nazywa się je szkodami resztowymi (*rest claims*). Do porównań zostały użyte szkody ostateczne zamieszczone w ostatniej kolumnie z rys. 1, które obejmują zarówno szkody znane (ciemny trójkąt), jak i szkody przyszłe (jasny trójkąt).

Szkody komunikacyjne charakteryzują się stosunkowo krótkim okresem inkubacji. Z literatury wynika, że dla takich krajów, jak Australia czy USA wystarczy wziąć pod uwagę okres 4-letni (por. [APRA 2005; American Academy... 2002]). Z doświadczeń polskich wynika, że okres ten powinien być dłuższy – nawet do 7-8 lat. Przed wykonaniem analiz przeprowadzono kontrolę tego założenia.

„Struktura szkodowości” przedstawiona została w formie graficznej na rys. 2a. Poszczególne linie wykresu – wiązki – odpowiadają skumulowanym wartościom szkód dla różnych kwartałów zajścia zdarzeń. Widać, że w okresie obserwacji następuje wysycenie, co oznacza, że długość okresu jest wystarczająca do oszacowania szkód ostatecznych.



Rys. 2a. Skumulowane wartości szkód pochodzących z danego kwartału zajścia szkody w funkcji czasu rozwoju szkody



Rys. 2b. Różnice względne (wyrażone w %) szkód rzeczywistych i symulowanych dla danych zagregowanych

Źródło: obliczenia własne.

Do wygenerowanych danych symulacyjnych (64 tys. obserwacji) została zbudowana analogiczna tabela jak na rys. 1, a jej porównanie z danymi rzeczywistymi zaprezentowane zostało w postaci mapy różnic procentowych na rys. 2b.

#### 4. Modele analityczne szacowania rezerw

W niniejszej pracy omówione zostały dwie klasy modeli. Pierwsza z nich dotyczyła modelowania na danych zagregowanych, a druga na danych indywidualnych. Obliczenia przeprowadzono w następujących modelach:

- 1) model deterministyczny *chain ladder* (CL) – w wersji klasycznej,
- 2) model CL z rozkładem normalnym błędu, zaproponowanym przez T. Macka,
- 3) uogólniony model liniowy GLM (*generalized linear model*) z rozkładem Poissona i kanoniczną funkcją łączącą – błędy liczone z rozkładu normalnego metodą delta,
- 4) uogólniony model liniowy GLM z rozkładem Poissona i kanoniczną funkcją łączącą – błędy liczone według techniki bootstrap,
- 5) model Bayesa – z algorytmem próbkowania Gibbsa,
- 6) dla danych indywidualnych obliczenia oparto na modelu regresyjnym dla danych obciętych (*case estimation*).

Poniżej przedstawiamy krótkie opisy użytych metod.

**Chain ladder (1)** jest metodą deterministyczną, tzn. nieopartą na modelu statystycznym, aczkolwiek można wykazać, że jest to metoda równoważna pewnej klasie modeli GLM (por. [Kramer 1982]). Polega ona na bezpośrednim liczeniu tzw. stałych współczynników rozwoju szkód, a następnie oszacowaniu brakujących wartości w (kwadratowej) tabeli szkodowej poprzez iteracyjne wyznaczanie wartości szacowanych i współczynników rozwoju dla kolejnych okresów inkubacji (szczegóły w [England, Verral 2002; Hoedemakers 2005]).

**Metoda Macka (2)** jest odmianą metody *chain ladder* z pewnymi elementami losowymi opartymi na rozkładzie normalnym i pozwalającymi na obliczenie błędu w kategoriach odchylenia standardowego (zob. [England, Verral 2002; Hoedemakers 2005]).

**Metoda GLM (3, 4)** – aby zdefiniować uogólniony model liniowy, musimy zadać trzy składowe: (i) rozkład modelowanej zmiennej (powinien on pochodzić z jednoparametrycznej rodziny rozkładów), (ii) równanie regresyjne oraz (iii) funkcję łączącą wartość uzyskaną w równaniu regresyjnym z odpowiednim parametrem rozkładu. W naszym przypadku przyjęte zostały założenia najczęściej spotykane w praktyce aktuarialnej, a mianowicie: (i) rozkład Poissona, (ii) równanie regresyjne, gdzie jako zmienne zależne użyto czasu zajścia szkody i okresu inkubacji, oraz (ii) funkcję łączącą w formie:  $\text{LOG}()$ .

W pierwszej wersji (model 3) błąd oszacowania szkód ostatecznych, które są sumami odpowiednich wartości szkód, wyliczono na podstawie błędów oszacowa-

nia tych wartości oraz korelacji pomiędzy nimi – tzw. metoda delta (por. [Dobson 2002; England, Verral 2002; Halekoh 2004]).

W drugiej wersji (model 4) posłużono się techniką bootstrap polegającą na losowaniu ze zwracaniem wartości resztowych. W ten sposób uzyskiwane pseudo-próbki są podstawą, na której estymuje się kolejne modele. Za pomocą każdego modelu obliczana jest prognoza wartości przyszłych szkód. Na koniec wylicza się wartość średnią i odchylenie standardowe z tak uzyskanej wiązki prognoz.

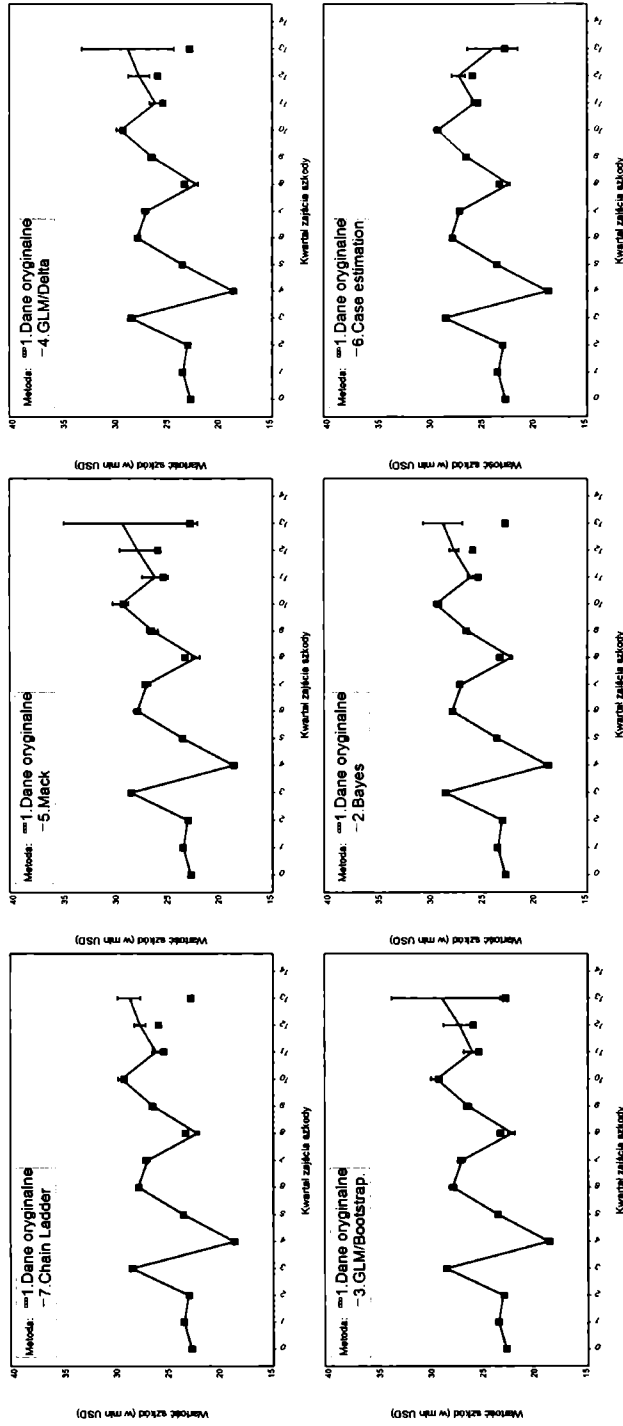
Metoda ta często prowadziła do uzyskiwania ujemnych wartości, co pociągnęło za sobą konieczność szacowania parametrów za pomocą optymalizacji funkcji quasi-wiarogodności (por. [Dobson 2002; England, Verral 2002; Halekoh 2004; Hoedemakers 2005; Pinheiro i in. 2003]).

**Metoda Bayesa (5)** polega na zastosowaniu generatora opartego na tzw. prawdopodobieństwie *a posteriori*. Prawdopodobieństwo *a posteriori* jest proporcjonalne do prawdopodobieństwa *a priori* pomnożonego przez funkcję wiarygodności. Jako model dla funkcji wiarygodności przyjęty został rozkład normalny, natomiast jako rozkładu *a priori* użyto rozkład Jeffreysa. Do generowania wyników użyty został algorytm próbkowania Gibbsa (por. [Congdon 2003; England, Verral 2002; Kass 1998; Mandrekar i in. 2005; Walsh 2004]).

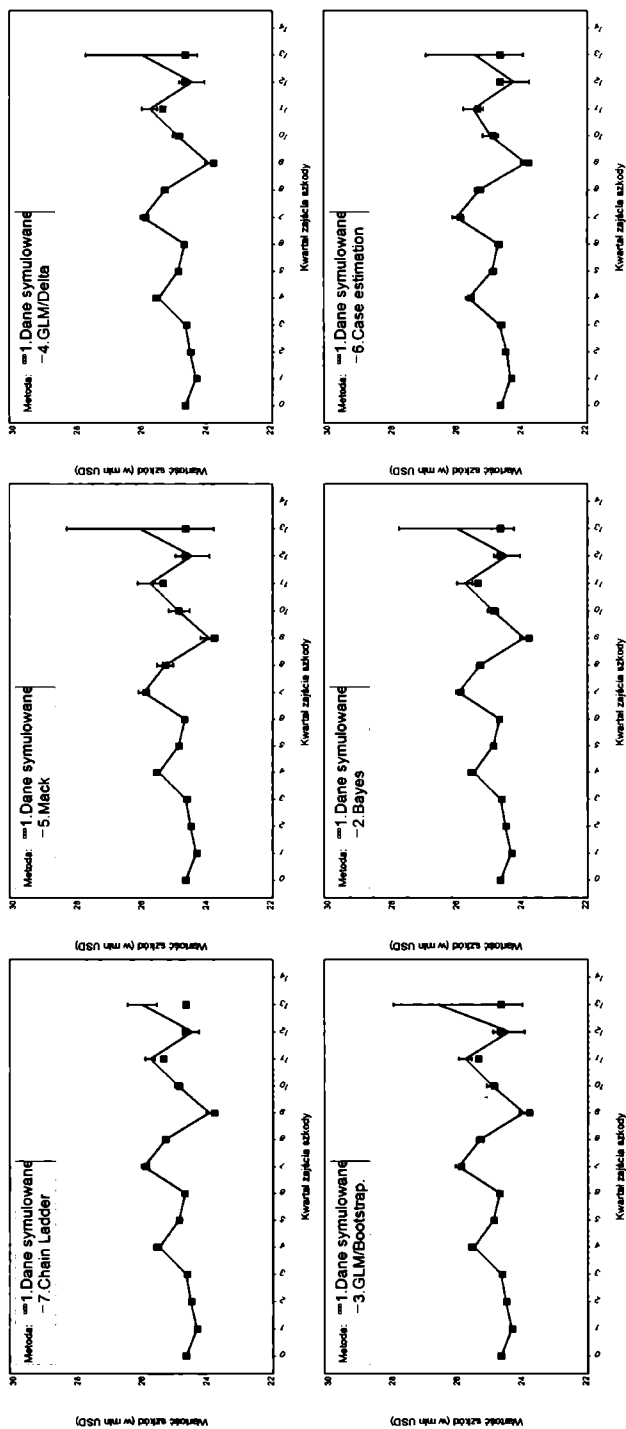
**Model regresyjny dla danych indywidualnych (*case estimation*) (6)** składa się z następujących multiplikatywnych czynników: (i) regresji logistycznej użytej do modelowania prawdopodobieństwa zajścia szkody (w modelu uwzględniono złożoną strukturę macierzy kowariancji wynikającą z faktu możliwości wystawienia kilku polis na tego samego klienta), (ii) regresji Coxa (z uwzględnieniem faktu występowania kilku polis u jednego klienta) do modelowania prawdopodobieństw zajścia szkody jako funkcji czasu inkubacji, (iii) uogólnionego mieszanego modelu liniowego GLMM (*generalized linear mixed model*) użytego do oszacowania warunkowej średniej wartości szkody (por. [Taylor i in. 2006]). Dodatkowe zmienne objaśniające (*covariates*) zostały wybrane na podstawie drzewa decyzyjnego. Były to: „status materialny”, „wiek kierowcy”, „rok pierwszej rejestracji pojazdu”, „wskaźnik: samochód prywatny/służbowy”.

## 5. Wyniki badań

Wyniki porównań „skuteczności” rozpatrywanych modeli zostały przedstawione w formie graficznej na rys. 3-6 (dla danych symulowanych i dla danych oryginalnych). Zgodnie z oczekiwaniami prognozy szkód całkowitych, uzyskane na danych sztucznie wygenerowanych dla wszystkich rozpatrywanych modeli, są podobne (por. rys. 4). Model zbudowany dla danych indywidualnych jest najlepszy, aczkolwiek nie widać zdecydowanej przewagi nad modelami tradycyjnymi. Przyjmując jako wartość rezerwy IBNR 95-centyl, zyskujemy nadwyżkę od 1 do 6% w stosunku do kwoty rzeczywistej. Szerokości przedziałów ufności różnią się stosunkowo niewiele (por. rys. 5b).



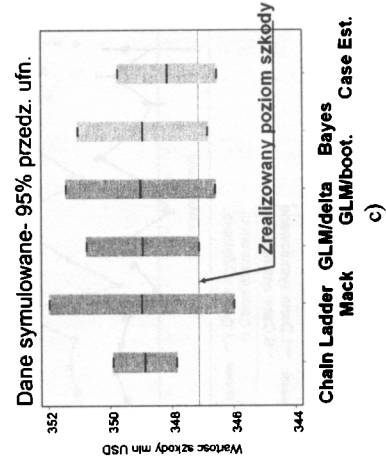
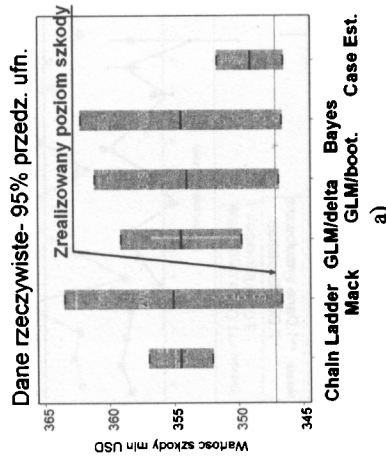
Rys. 3. Wartości całkowite szkód (wartości średnie i błędy estymacji) w funkcji daty zajścia szkody dla różnych metod – dla danych rzeczywistych  
 Źródło: obliczenia własne.



Rys. 4. Wartości całkowite szkód (wartości średnie i błędy estymacji) w funkcji daty zajścia szkody dla różnych metod – dla danych sztucznie wygenerowanych

Źródło: obliczenia własne.



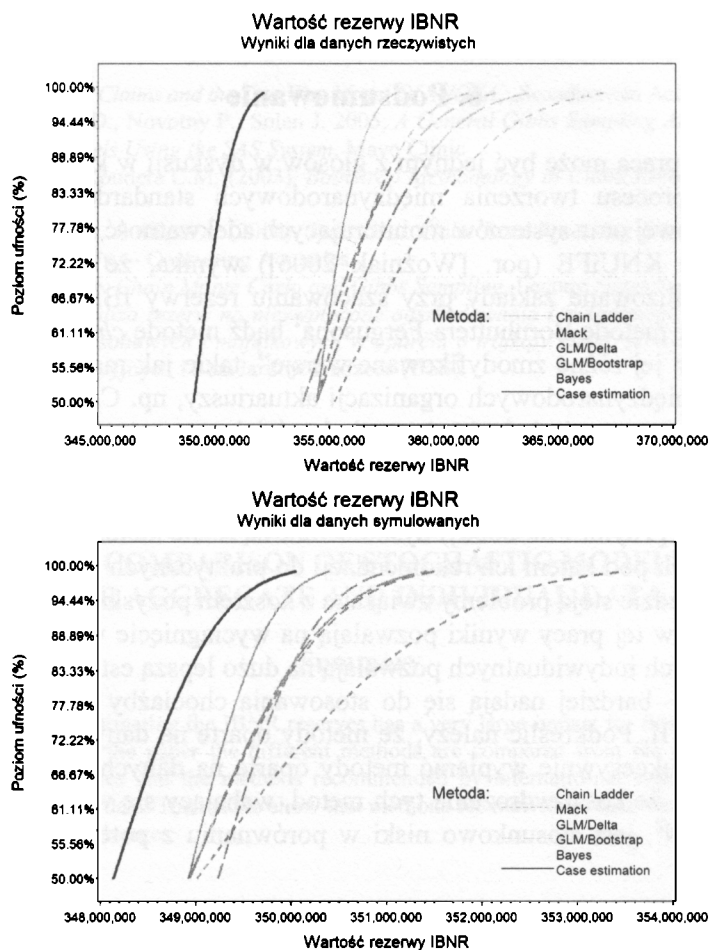


Nachwytka prognozowanych rezerw ponad szkodę rzeczywistą

Model	Dane rzeczywiste		Dane symulowane	
	W tys. USD	W %	W tys. USD	W %
Chain Ladder	9 830	31,6%	2 775	8,3%
Mack	16 376	52,7%	4 843	14,5%
GLM/delta	11 994	38,6%	3 821	10,8%
GLM/bootstrap	14 040	45,2%	4 290	12,8%
Bayes	12 203	39,3%	3 902	11,7%
Case Estimation	4 343	13,9%	2 553	7,6%

Rys. 5. Wartości przedziałów ufności (5%, 95%) dla różnych metod na tle zrealizowanego poziomu szkód IBNR: a) dla danych rzeczywistych, c) dla danych symulowanych, b) różnice między 95-centylem estymatora wartości szkód całkowitych a wartościami rzeczywistymi

Źródło: obliczenia własne.



Rys. 6. Wartości rezerw IBNR w funkcji przedziału ufności oszacowania wartości strat  
Źródło: obliczenia własne.

Dla danych rzeczywistych różnice między modelami są znaczne (por. rys. 3). Co więcej, aż trzy modele dają oszacowania przedziałowe (na poziomie 90%) niezawierające rzeczywistej wartości rezerw, co nie miało miejsca dla danych sztucznie wygenerowanych. Należy podkreślić, że dla danych rzeczywistych poszczególne modele dają rezultaty różniące się znacznie (por. rys. 4 i 5a). Z punktu widzenia praktycznego modele oparte na danych indywidualnych zdecydowanie lepiej szacują wartość rezerw – różnica sięga nawet 25%, co mogłoby się przełożyć na wynik biznesowy firmy (por. rys. 5b).

W praktyce aktuarialnej rezerwy są budowane często w oparciu o 70-centyl rozkładu szkód. Na tym poziomie przedziału ufności również istotnie najlepszy jest

model oparty na danych indywidualnych. Rysunek 6 pozwala ocenić zysk stosowania tej metody na różnych poziomach przedziałów ufności.

## 6. Podsumowanie

Niniejsza praca może być jednym z głosów w dyskusji w kontekście trwającego obecnie procesu tworzenia międzynarodowych standardów rachunkowości ubezpieczeniowej oraz systemów monitorujących adekwatność rezerw.

Z raportu KNUiFE (por. [Woźniak 2006]) wynika, że w Polsce „prawie wszystkie analizowane zakłady przy szacowaniu rezerwy IBNR stosują jedną z dwóch metod: metodę Bornhuttera-Ferguson<sup>1</sup> bądź metodę *chain ladder* w wersji klasycznej lub jej różne zmodyfikowane wersje”, takie jak metoda Macka. Natomiast wiele międzynarodowych organizacji aktuariuszy, np. CAS (Causalty Actuarial Society), propaguje jednak używanie bardziej zaawansowanych metod opartych na statystycznych (w nomenklaturze aktuarialnej stochastycznych) modelach: GLM, Bayes (zob. [England, Verral 2002; Hoedemakers 2005]). Ostatnio na forum CAS (zob. np. [Taylor i in. 2006]) dyskutowane są różne metody oparte na danych indywidualnych pod kątem ich rekomendacji do praktycznych zastosowań. Niestety, na przeszkodzie stoją problemy związane z kosztem pozyskania danych.

Uzyskane w tej pracy wyniki pozwalają na wyciągnięcie wniosku, że metody oparte na danych indywidualnych pozwalają na dużo lepszą estymację rezerw, a co za tym idzie – bardziej nadają się do stosowania chociażby w ramach projektu Wypłacalność II. Podkreślić należy, że metody oparte na danych indywidualnych mają szanse sukcesywnie wypierać metody oparte na danych zagregowanych ze względu na to, że koszt wdrożenia tych metod, wahający się w granicach 400 tys. do 3 mln PLN<sup>2</sup>, jest stosunkowo niski w porównaniu z potencjalnymi efektami biznesowymi.

## Literatura

- American Academy of Actuaries (2002), *Principles and Methods*, Public Policy Monographs.  
APRA, General Insurance (2005), *Risk Industry Report*, October.  
Congdon P. (2003), *Applied Bayesian Modelling*, Series in Prob., Wiley.  
Dobson A.J. (2002), *An Introduction to Generalized Linear Models*, Chapman&Hall,  
England P.D., Verral R.J. (2002), *Stochastic Claims Reserving In General Insurance*, Institute of Actuaries.

---

<sup>1</sup> Metoda B-F jest bayesowską odmianą metody *chain ladder* i opiera się na zastosowaniu współczynników rozwoju szkody (analogicznie jak w CL) stosowanego do modelowania stosunku wartości szkód i składek tzw. wskaźnika szkodowości.

<sup>2</sup> Szacunki firmy zewnętrznej, widełki zależnie od liczby polis.

- Halekoh U. (2004), *ST112. Generalized Linear Models*, MoAS.
- Hoedemakers T. (2005), *Modern Reserving Techniques For the Insurance Business*, Leuven.
- Kass E. (1998), *Markov Chain Monte Carlo in Practice: A Round Table Discussion*, Amer. Statist. Association.
- Kramer E. (1982), *IBNR Claims and the Two Way Model Of ANOVA*, „Scandinavian Actuarial Journal”.
- Mandrekar J., Sargent D., Novotny P., Solan J. 2005, *A General Gibbs Sampling Algorithm for Analysing Linear Models Using the SAS System*, Mayo Clinic
- Pinheiro P., Silva A., Louders C.M. (2003), *Bootstrap Methodology in Claim Reserving*, Tech. University of Lisbon.
- Taylor G., McGuire G., Sullivan J. (2006), *Individual Claim Loss Reserving Conditioned by Case Estimates*, Taylor Fry – Consulting Actuaries.
- Walsh B. (2004) *Markov Chain Monte Carlo and Gibbs Sampling*, Lecture Notes for EEB 581.
- Woźniak I. (2006), *Analiza rezerw na niewypłacone odszkodowania i świadczenia z tytułu ubezpieczeń pozostałych osobowych i majątkowych w oparciu o trójkąt szkód*, KNUiFE, Departament Systemów Informacyjnych i Standardów Nadzoru (DSS).

**ANALYSIS OF RISK OF IBNR RESERVES ESTIMATING MODEL  
IN PROPERTY-CASUALTY INSURANCE.  
THE COMPARISON OF STOCHASTIC MODELS  
FOR AGGREGATE AND INDIVIDUAL DATA**

**Summary**

The accuracy of estimating the IBNR reserves has a very large impact for financial results of an insurance company. In the paper the different methods are compared from the industry standards usually used by actuaries and the methods recommended by international supervisors to models estimated on individual data. The results show that methods for individual data are the best for fitting reserves due to market changes.