

Inwestycje finansowe i ubezpieczenia
– tendencje światowe a polski rynek

Monika Papież

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

WYKORZYSTANIE STOCHASTYCZNYCH MODELI UMIERALNOŚCI DO BUDOWY DYNAMICZNYCH TABLIC TRWANIA ŻYCIA

1. Wstęp

W 2009 r. w wyniku wprowadzonej reformy systemu emerytalno-rentowego powinny powstać pierwsze w Polsce zakłady emerytalne. Ich głównym produktem będą emerytury dożywotnie. Jednym z różnych rodzajów ryzyka związanych z tym produktem jest ryzyko demograficzne. Częściowej redukcji tego ryzyka można dokonać, zwiększając liczbę polis w portfelu. Jednak całkowita jego redukcja jest niemożliwa, gdyż niezależnie od liczby polis udział ryzyka długowieczności jest stały. Zatem redukcja ryzyka demograficznego jest możliwa, jeżeli nastąpi zmniejszenie ryzyka długowieczności [Papież (a)]. Oznacza to, że należy podjąć prace dotyczące oceny tego ryzyka i zarządzania nim.

W tym celu JPMorgan zaproponował zestaw narzędzi do mierzenia i zarządzania ryzykiem długowieczności nazwany *LifeMetrics* (zob. [*LifeMetrics: A Toolkit...* 2007])¹. W projekcie tym zaproponowano stosowanie stochastycznych modeli umieralności do analizy i prognozowania oczekiwanej długości trwania życia, którą z kolei można wykorzystać do budowy dynamicznych tablic trwania życia [Papież – złożone do druku (b)]. Tablice te odgrywają dużą rolę przy wycenie emerytury dożywotniej, gdyż uwzględniają postępujący proces starzenia się populacji i wydłużania długości trwania życia. Przedstawione stochastyczne modele umieralności są wykorzystywane do prognozowania umieralności w krajach Europy Zachodniej. Jednak analiza dynamiki przeciętnej długości trwania życia w latach 1955-2005 w krajach Europy Zachodniej oraz Europy Środkowej wskazuje na jej duże zróżnicowanie. W wypadku krajów Europy Zachodniej tempo wzrostu przeciętnej długości trwania życia jest dużo szybsze niż w krajach Europy Środkowej.

¹ Szerzej *LifeMetrics* autorka przedstawiła w pracy [Papież (c)].

Odmienność dynamiki zmian przeciętnej długości trwania życia skłania do podjęcia tematu dotyczącego możliwości wykorzystania stochastycznych modeli umieralności do modelowania i prognozowania umieralności w krajach Europy Środkowej. W pracy zostanie zweryfikowana możliwość użycia dwóch stochastycznych modeli (Lee-Cartera oraz Cairnsa, Blake'a, Dowda) do prognozowania przeciętnej długości trwania życia osób w wieku 60 lat i więcej dla krajów Europy Środkowej.

2. Modele stochastyczne umieralności

Wśród obecnie zaproponowanych przez JPMorgan stochastycznych modeli umieralności są następujące: model Lee-Cartera (1992)² [Lee, Carter 1992], model Renshaw-Habermana (2006) [Haberman, Renshaw 2006], model Currie Age-Period-Cohort (2006) [Currie], model Cairnsa, Blake'a, Dowda (2006) [Cairns, Blake, Dowd 2006], rozszerzenie modelu Cairnsa, Blake'a, Dowda (2007) [Cairns i in. 2007]. Modele te można opisać dwoma ogólnymi wzorami [Cairns i in. 2007, s. 12]:

$$\log m_{x,t} = \sum_i \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} \gamma_{t-x}^{(i)}, \quad (1)$$

$$\text{logit } q_{x,t} = \sum_i \beta_x^{(i)} \kappa_t^{(i)} \gamma_{t-x}^{(i)}, \quad (2)$$

gdzie: $\beta_x^{(i)}$ – parametr odzwierciedlający skutki zmiany natężenia umieralności spowodowane wiekiem; przedstawia on względną szybkość zmian umieralności w wieku x w czasie t ,

$\kappa_t^{(i)}$ – parametr opisujący ogólną tendencję zmian umieralności w czasie t ,

$\gamma_{t-x}^{(i)}$ – parametr prezentujący skutki zmiany natężenia umieralności spowodowane kohortą.

W pracy zostanie zweryfikowana możliwość wykorzystania tylko dwóch modeli do prognozowania umieralności i budowy dynamicznych tablic trwania życia dla wybranych krajów Europy Środkowej.

a) **Model Lee-Cartera** jest następującej postaci:

$$\log m_{x,t} = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}, \quad (3)$$

$m_{x,t}$ – centralny współczynnik zgonów w wieku x w roku kalendarzowym t .

Ponadto w modelu zakłada się, że: $\sum_{t=t_1}^{t_2} \kappa_t^{(2)} = 0$ oraz $\sum_x \beta_x^{(2)} = 1$.

b) **Model Cairnsa, Blake'a i Dowda** jest następującej postaci:

$$\text{logit } q_{x,t} = \beta_x^{(1)} \kappa_t^{(1)} + \beta_x^{(2)} \kappa_t^{(2)}. \quad (4)$$

² Wykorzystanie modelu do prognozowania umieralności autorka przedstawiła w pracach [Papież 2007; Papież (b)].

W celu uproszczenia modelu autorzy [Cairns i in. 2007] założyli: $\beta_x^{(1)} = 1$ oraz $\beta_x^{(2)} = (x - \bar{x})$, gdzie $\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_i x_i$ jest średnią z próby, wówczas model CBD jest postaci:

$$\text{logit } q_{x,t} = \kappa_t^{(1)} + \kappa_t^{(2)} (x - \bar{x}), \quad (5)$$

$q_{x,t}$ – prawdopodobieństwo zgonów w wieku x w roku kalendarzowym t .

Metody estymacji parametrów dla obu modeli przedstawiono np. w pracach [Cairns, Blake, Dowd 2006; Lee, Carter 1992].

3. Możliwość wykorzystania modelu Lee-Cartera oraz Cairnsa, Blake'a, Dowda do prognozowania przeciętnej długości trwania życia w wieku 60 lat i więcej dla krajów Europy Środkowej – wyniki badań³

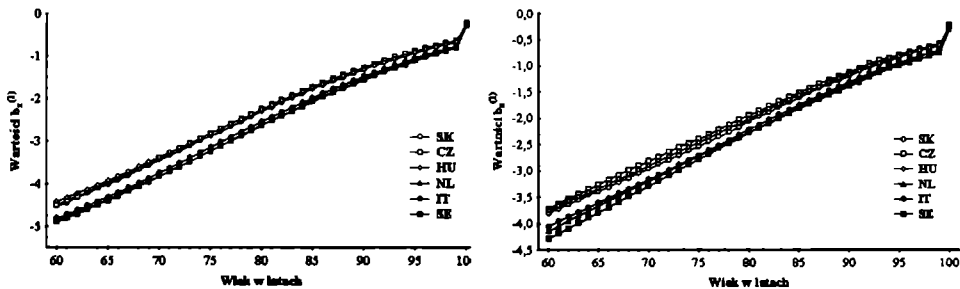
Do badania możliwości wykorzystania obu modeli do prognozowania przeciętnej długości trwania życia osób w wieku 60 lat i więcej w krajach Europy Środkowej wybrano trzy kraje: Słowację, Czechy i Węgry. Ponieważ dynamika zmian przeciętnej długości trwania życia w Polsce jest podobna do dynamiki wybranych krajów Europy Środkowej i nie ma możliwości uzyskania pełnych tablic trwania życia dla Polski w latach 1955-2005, wnioski wynikające z badań można odnieść również do Polski. W celach porównawczych wybrano również trzy kraje Europy Zachodniej: Holandię, Włochy i Szwecję. Okres badań obejmował lata 1955-2005. Estymację parametrów przeprowadzono dla kobiet i mężczyzn na podstawie pełnych tablic trwania życia dla wieku 60-100 lat (osoby w wieku emerytalnym) w latach 1955-1995. Natomiast okres 1996-2005 posłużył do weryfikacji modeli. W tym celu na podstawie wartości oszacowanego parametru $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ (dla modelu Lee-Cartera) oraz parametrów $\hat{\kappa}_t^{(1)}$ i $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ (dla modelu CBD) dla okresu 1955-1995 sporządzono prognozy na lata 1996-2005. W celu sprawdzenia modelu obliczono mierniki dokładności predykcji *ex post* umożliwiające badanie dopuszczalności prognoz.

3.1. Estymacja parametrów modeli dla wybranych krajów Europy

a) Model Lee-Cartera

Oszacowane wartości parametrów w modelu Lee-Cartera w populacji kobiet i mężczyzn w wybranych krajach w latach 1955-1995 na podstawie pełnych tablic trwania życia zaprezentowano na rys. 1-3.

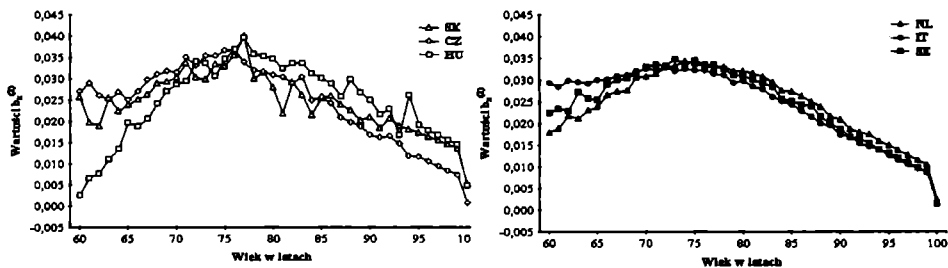
³ Szersze badania dla obu modeli autorka przedstawiła w pracach [Papież (b); Papież (c)].



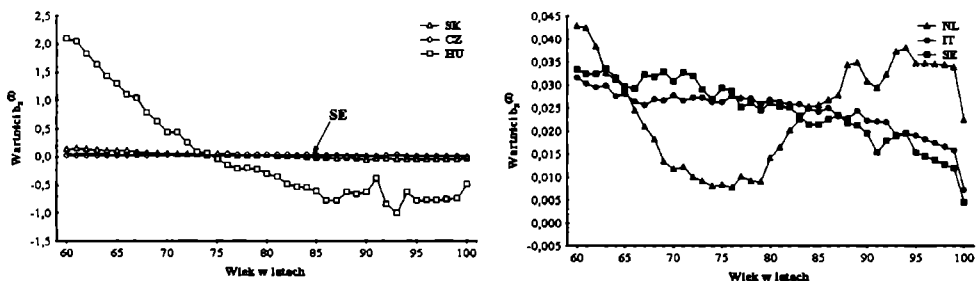
Rys. 1. Wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(1)}$ w modelu Lee-Cartera w wybranych krajach w latach 1955-1995
 a) dla kobiet
 b) dla mężczyzn
 Źródło: obliczenia własne na podstawie danych [*Human Mortality Database...*].

Analiza wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(1)}$ wskazuje, że w krajach Europy Środkowej i Zachodniej podobny jest kształt krzywej opisującej uśrednione dla lat 1955-1995 wartości logarytmu współczynnika zgonów dla każdego wieku (por. rys. 1a i b). Uśrednione wartości logarytmów współczynników zgonu dla krajów Europy Środkowej są nieznacznie niższe niż dla krajów Europy Zachodniej, co oznacza, że w tych krajach wyższe są prawdopodobieństwa zgonów dla danego wieku x .

Rysunki 2a i b, 3a i b przedstawiają wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(2)}$. Analiza ich wskazuje, że względne zmiany umieralności dla mężczyzn w wybranych krajach Europy Środkowej w latach 1955-1995 były bardzo duże. Ponadto $\beta_x^{(2)}$ przyjmuje wartości ujemne, co oznacza, że umieralność dla danego wieku x wzrastała w ciągu badanego okresu. Analiza wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(2)}$ dla kobiet wskazuje, że w wybranych krajach Europy względna szybkość zmian umieralności w wieku x jest nieduża.



Rys. 2. Wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(2)}$ w modelu Lee-Cartera w populacji kobiet w latach 1955-1995
 a) Słowacja, Czechy i Węgry
 b) Holandia, Włochy i Szwecja
 Źródło: jak na rys. 1.



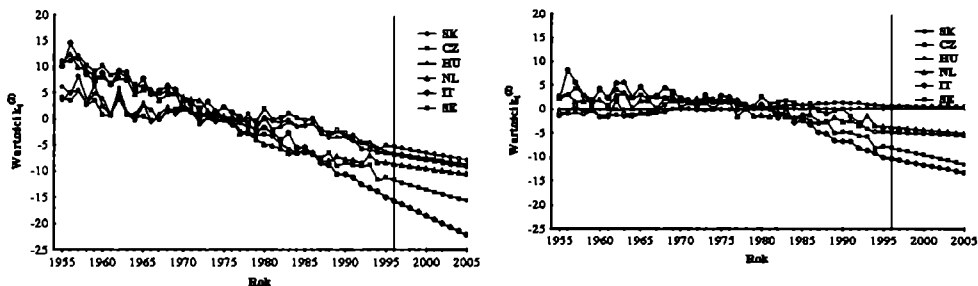
Rys. 3. Wartości oszacowanego parametru $\beta_x^{(2)}$ w modelu Lee-Cartera w populacji mężczyzn w latach 1955-1995

a) Słowacja, Czechy i Węgry

b) Holandia, Włochy i Szwecja

Źródło: jak na rys. 1.

Na rys. 4a i b przedstawiono wartości oszacowanego parametru $\kappa_t^{(2)}$ w modelu Lee-Cartera. Analiza wartości wskazuje, że w wypadku kobiet dużo szybciej malała umieralność niż w wypadku mężczyzn. Ponadto spadek umieralności mężczyzn w ciągu 40 lat w Europie Zachodniej był dużo szybszy niż w Europie Środkowej.



Rys. 4. Wartości oszacowanego parametru $\kappa_t^{(2)}$ w modelu Lee-Cartera w wybranych krajach w latach 1955-1995 wraz z prognozami na lata 1996-2005

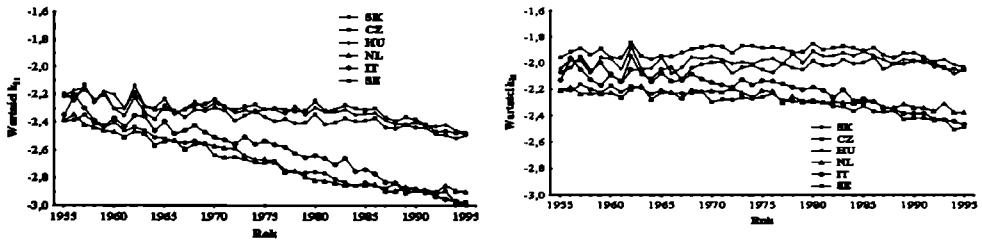
a) dla kobiet

b) dla mężczyzn

Źródło: jak na rys. 1.

b) Model Cairnsa, Blake'a, Dowda

Oszacowane wartości parametrów $\hat{\kappa}_t^{(1)}$ i $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ w modelu Cairnsa, Blake'a, Dowda w populacji kobiet i mężczyzn w wybranych krajach w latach 1955-1995 na podstawie pełnych tablic trwania życia prezentują rys. 5 i 6. Malejące wartości $\hat{\kappa}_t^{(1)}$ odzwierciedlają zmniejszenie się współczynnika zgonów dla każdego wieku w całym analizowanym okresie badań (por. rys. 5). Natomiast wzrastające wartości $\hat{\kappa}_t^{(2)}$ oznaczają, że współczynnik zgonów zmniejsza się najszybciej dla osób w młodszym wieku.

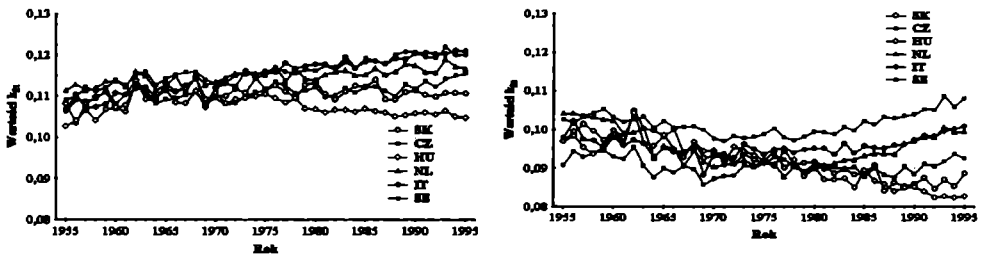


Rys. 5. Wartości oszacowanego parametru $\kappa_i^{(1)}$ w modelu Cairnsa, Blake'a i Dowda w wybranych krajach w latach 1955-1995

a) dla kobiet

b) dla mężczyzn

Źródło: jak na rys. 1.



Rys. 6. Wartości oszacowanego parametru $\kappa_i^{(2)}$ w modelu Cairnsa, Blake'a i Dowda w wybranych krajach w latach 1955-1995

a) dla kobiet

b) dla mężczyzn

Źródło: jak na rys. 1.

3.2. Prognozowanie wartości parametru $\kappa_i^{(i)}$

Na podstawie wyestymowanych wartości parametrów $\kappa_i^{(i)}$ dla obu modeli postawiono prognozy na lata 1996-2005. Do analizy szeregów czasowych, a tym samym do prognozowania rozważono modele: *ARIMA* (0,1,0); *ARIMA* (0,1,1) oraz *AR*(1)⁴.

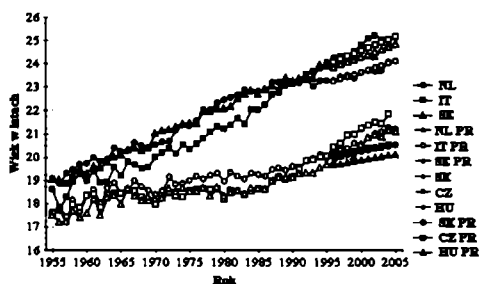
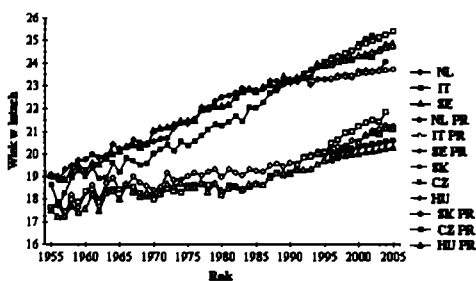
Na podstawie prognoz parametru $\hat{\kappa}_i^{(i)}$ wyznaczono prognozy wartości centralnego współczynnika zgonów, które następnie zostały wykorzystane do obliczenia prognozowanej wartości przeciętnego dalszego trwania życia. Prognozowane wartości przeciętnego dalszego trwania życia dla danego wieku x porównano z wartościami rzeczywistymi przy wykorzystaniu mierników dokładności predykcji *ex post*. Mierniki policzono dla wybranych modeli dla prognoz w latach 1996-2005 i dla poszczególnych grup wieku $x = 60, 61, \dots, 100$.

Rysunki 7 i 9 prezentują przeciętną długość trwania życia kobiet i mężczyzn w wieku 60 lat dla wybranych krajów w latach 1955-2005 oraz odpowiadające jej

⁴ Wybór modeli podyktowany był tym, że w literaturze są one wykorzystywane do prognozowania tego parametru, np. w pracach [Cairns, Blake, Dowd 2006; Lee, Carter 1992].

prognozy wygasał przeciętnej długości trwania życia w latach 1996-2005 odpowiednio dla modelu Lee-Cartera oraz Cairnsa, Blake'a, Dowda. Wartości względnego błędu predykcji *ex post* dla poszczególnych grup wieku zostały przedstawione na rys. 8 i 10.

Analiza rys. 7 i 9 wskazuje na większą dynamikę zmian rzeczywistej przeciętnej długości trwania życia kobiet na Słowacji, w Czechach i na Węgrzech w latach 1996-2005 niż prognozowanej oczekiwanej długości trwania życia niezależnie od wybranego modelu. Dla kobiet w krajach Europy Środkowej wartości względnego błędu predykcji *ex post* dla wieku 60 lat dla obu modeli wynoszą ok. 3-4%, a w krajach Europy Zachodniej poniżej 1% (por. rys. 8).

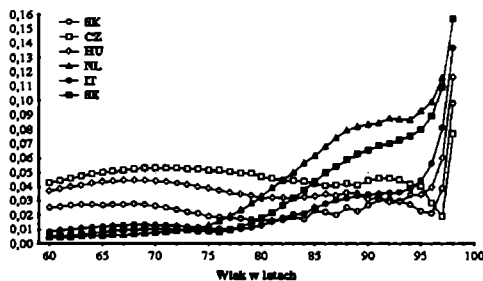
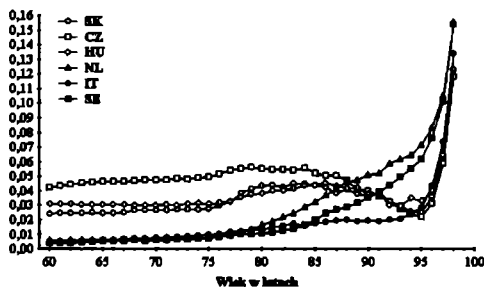


Rys. 7. Przeciętna długość trwania życia kobiet w wieku 60 lat w latach 1955-2005 oraz prognozy w latach 1996-2005

a) model Lee-Cartera

b) model Cairnsa, Blake'a i Dowda

Źródło: jak na rys. 1.



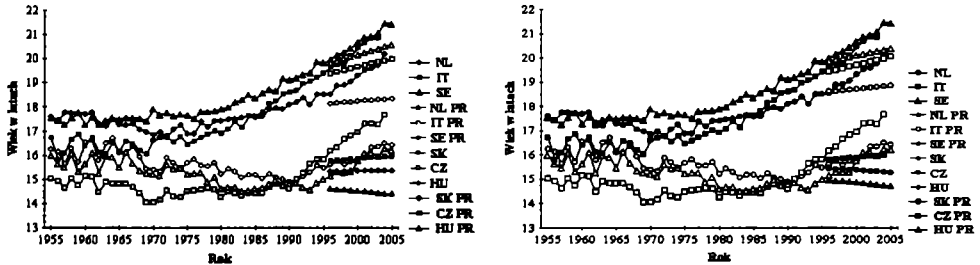
Rys. 8. Względny błąd predykcji *ex post* prognoz przeciętnej długości trwania życia kobiet w latach 1996-2005

a) model Lee-Cartera

b) model Cairnsa, Blake'a i Dowda

Źródło: jak na rys. 1.

Natomiast istnieje znaczna różnica między rzeczywistą przeciętną długością trwania życia mężczyzn w krajach Europy Środkowej a prognozami dla obu modeli. Wartości względnego błędu predykcji *ex post* dla wieku 60 lat wahają się od ok. 5 do 10%. Wraz ze wzrostem wieku do ok. 80-85 roku życia wzrastają wartości względnego błędu predykcji *ex post* dla krajów Europy Środkowej.

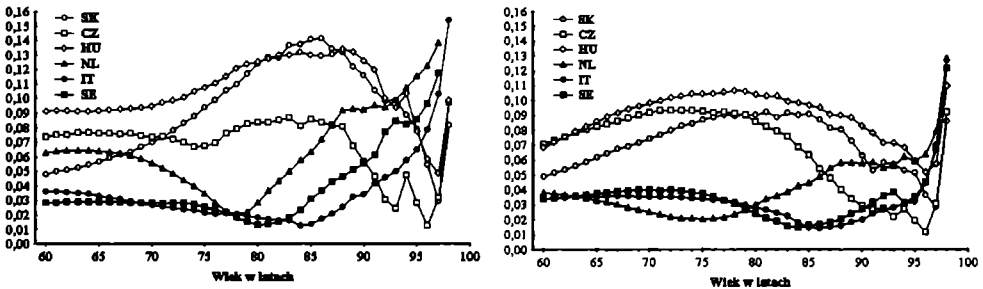


Rys. 9. Przepiętna dłuęość trwania życia męczyzn w wieku 60 lat w latach 1955-2005 oraz prognozy w latach 1996-2005

a) model Lee-Cartera

b) model Cairnsa, Blake'a i Dowda

Źródło: jak na rys. 1.



Rys. 10. Względny błąd predykcji *ex post* prognoz przepiętnej dłuęości trwania życia męczyzn w latach 1996-2005

a) model Lee-Cartera

b) model Cairnsa, Blake'a i Dowda

Źródło: jak na rys. 1.

4. Wnioski

Wyniki badań wskazały, że zaproponowane modele można wykorzystać do prognozowania wartości do dynamicznych tablic trwania życia dla krajów Europy Zachodniej lub krajów, które przez długi okres charakteryzowały się stabilnym wzrostem oczekiwanej dłuęości trwania życia. W wypadku krajów Europy Środkowej w latach 1996-2005 wystąpiły duże różnice pomiędzy wartościami rzeczywistymi a prognozami przepiętnej dłuęości trwania życia dla męczyzn (w mniejszym stopniu dla kobiet). Niezależnie od wieku i płci wartości rzeczywiste wzrastają dużo szybciej niż te prognozowane. Na podstawie wyników badań wydaje się, że oba modele można wykorzystać do prognozowania wartości, które później będą użyte do budowy dynamicznych tablic trwania życia dla populacji kobiet w krajach Europy Środkowej. Natomiast w wypadku populacji męczyzn w krajach Europy Środkowej do wyznaczonych prognoz należy podchodzić bardziej ostrożnie.

Literatura

- Cairns, A., Blake, D., Dowd, K., Coughlan, G.D., Epstein, D., Ong, A., Balevich, I., (2007), *A Quantitative Comparison of Stochastic Mortality Models Using Data from England and Wales and the United States*, <http://cms.jpmorgan.com/lifemetrics>.
- Cairns, A., Blake, D., Dowd, K., *A Two-factor Model for Stochastic Mortality with Parameter Uncertainty: Theory and Calibration*, „Journal of Risk and Insurance” 2006, 73(4).
- Currie, I.D., *Smoothing and Forecasting Mortality Rates with p-splines*, Institute of Actuaries, 2006, <http://www.ma.hw.ac.uk/~iain/research/talks.html>.
- Haberman S, A E Renshaw, *A Cohort-based Extension to the Lee-Carter Model for Mortality Reduction Factors*, Insurance: M&E, 2006, 38 (3).
- Human Mortality Database*, University of California, Berkeley (USA), and Max Planck Institute for Demographic Research (Germany): www.mortality.org.
- Lee, R.D., Carter, L., *Modelling and Forecasting US Mortality*, „Journal of the American Statistical Association” 1992, vol. 87(419).
- LifeMetrics: A Toolkit for Measuring and Managing Longevity and Mortality Risks Technical Document*, Pension Advisory Group, JPMorgan Chase Bank, N.A., 2007, <http://www.jpmorgan.com/pages/jpmorgan/investbk/solutions/lifemetrics/library>.
- Papież M, *Wpływ procesu starzenia się ludności na ryzyko w ubezpieczeniach na życie*, [w:] *Inwestycje finansowe a ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski*, red. K. Jajuga, W. Ronka-Chmielowiec, Prace Naukowe AE we Wrocławiu nr 1176, AE, Wrocław 2007.
- Papież M.(a), *Ryzyko długowieczności dla portfela ubezpieczeń na życie i zakładów emerytalnych*, referat na konferencję „Ubezpieczenia w XXI wieku”, Rydzyna 21-23.05. 2007, złożone do druku.
- Papież M.(b), *Możliwość wykorzystania modelu Lee-Cartera do szacowania wartości w dynamicznych tablicach trwania życia*, referat na konferencję „Wpływ procesów demograficznych na kształtowanie stanu i struktury zasobów ludzkich – stan aktualny i perspektywy”, Niedzica 26-28.09. 2007 r., złożone do druku.
- Papież M.(c), *Zastosowanie stochastycznego modelu Cairnsa, Blake’a, Dowda do prognozowania oczekiwanej długości trwania życia*, Zeszyty Naukowe UEK w Krakowie, złożone do druku.

THE APPLICATION OF STOCHASTIC MORTALITY MODELS FOR BUILDING OF PROJECTED MORTALITY TABLES

Summary

The paper examines the usefulness of stochastic mortality models in estimating the values in the dynamic mortality tables which take into account rising life expectancy. Because parameter estimation is done on the basis of historical data, and it is not possible to obtain complete projected mortality tables for Poland from the period 1955-2005, that is why the analysis will be carried out for Slovakia, Czech Republic and Hungary. And because Poland is characterised by similar dynamics of changes to the above mentioned Central European countries, it will be justifiable to draw conclusions regarding also this country. Forecasts are made for selected countries on the basis of estimated values of the parameter in the period 1955-1995. For modelling and forecasting time series/mortality trends the ARIMA models will be used.