PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 27 2008
Ekonometria 22

Agnieszka Przybylska-Mazur

ROZSTRZYGNIĘCIA TEORII GIER W MODELOWANIU UBEZPIECZENIA OD SKUTKÓW BEZROBOCIA

1. Wstęp

Bezrobocie jest jednym z rodzajów ryzyka społecznego. Ubezpieczenie bezrobocia ma ważne konsekwencje dla działań gospodarczych i dla opieki społecznej. Dlatego ubezpieczenie od skutków bezrobocia jest ubezpieczeniem znanym i stosowanym w wielu krajach.

Duża skala bezrobocia w Polsce zainspirowała niektóre towarzystwa do przygotowania specjalnych produktów. Towarzystwo Ubezpieczeń Generali w połowie 2004 r. wprowadziło do swojej oferty ubezpieczenie od utraty pracy dla osób posiadających kredyty bankowe. Kolejnym towarzystwem, które w lipcu 2004 r. wystąpiło z ofertą ochrony kredytobiorców, było TU Europa. W Towarzystwie Ubezpieczeń COMPENSA SA przedmiotem ubezpieczenia może być utrata stałego źródła dochodu na skutek zaistniałej w okresie ubezpieczenia utraty pracy przez ubezpieczonego. Podobnie w towarzystwie ubezpieczeń CIGNA STU SA – prywatne ubezpieczenia społeczne obejmują ochroną różne rodzaje ryzyka, m.in. bezrobocie. W tym towarzystwie już przed rokiem 2004 zaczęto wdrażać ubezpieczenie kredytobiorców od ryzyka utraty stałego źródła dochodu wskutek utraty pracy.

W opinii specjalistów ten rodzaj ubezpieczenia, jakim jest ubezpieczenie kredytobiorców od utraty stałego źródła dochodów, będzie się rozwijał. Mimo że nie jest to jeszcze klasyczne ubezpieczenie bezrobocia, takie jak w krajach zachodnich, to stanowi przyczynek do pojawienia się na polskim rynku nieznanych dotąd produktów ubezpieczeniowych kompensujących materialne skutki utraty pracy [5].

Zagadnienie ubezpieczenia od skutków bezrobocia jest mało zbadane w polskich realiach. W związku z tym w pracy zaprezentowano jeden z modeli ubezpieczenia bezrobocia. Stosując teorię gier, przedstawiono cele i strategie bezrobotnego

– poszukującego pracy, jak również cele i strategie towarzystwa ubezpieczeń. Przedstawiony model stanowi modyfikację modelu ubezpieczenia bezrobocia zaprezentowaną przez Zuckermana [7] w 1985 r. W założeniach modelu ujęto również dochody bezrobotnego z Funduszu Pracy lub z pomocy społecznej. W prezentowanym przykładzie zmieniono rozkład wynagrodzeń związanych z najlepszą ofertą pracy w danym okresie, dostosowując go do polskich realiów, a na podstawie podanych przykładów numerycznych wysunięto wniosek płynący z wyznaczonych na podstawie tego rozkładu strategii optymalnych.

W prezentowanym modelu zakłada się, że ubezpieczenie bezrobocia ma dwa podstawowe cele:

1) daje zabezpieczenie ekonomiczne ludziom, którzy tymczasowo są bezrobotni i poszukują pracy,

2) stymuluje szukanie pracy, ponieważ intensywne poszukiwanie ofert umożliwia jednostkom bezrobotnym znalezienie zatrudnienia dającego większe wynagrodzenie i dzięki temu większą produktywność.

2. Założenia modelu ubezpieczenia bezrobocia

W tej części pracy zaprezentowano założenia modelu ubezpieczenia bezrobocia.

Zakładamy, że liczba ofert otrzymanych przez poszukującego pracy w ciągu jednego okresu oraz oferowana płaca są wielkościami losowymi. W modelu jako jeden okres został przyjęty miesiąc. Na końcu każdego okresu bezrobotny dokonuje wyboru najlepszej oferty pracy otrzymanej w ciągu ostatniego miesiąca lub kontynuuje poszukiwania w kolejnym okresie. Oferty otrzymane w poprzednich miesiącach, które nie były zaakceptowane przez poszukującego pracy, tracą swoją ważność.

Z poszukiwaniem najlepszej oferty pracy wiążą się pewne koszty. Oznaczmy przez $F_c(n)$ dystrybuantę rozkładu obecnej wartości wynagrodzenia łączonego z najlepszą ofertą pracy otrzymaną w okresie n, przy założeniu, że c jednostek pieniężnych jest przeznaczonych na poszukiwanie zatrudnienia przez bezrobotnego w danym okresie. Ponadto zakładamy, że $F_c(n)$ jest znana dla poszukującego pracy.

Mechanizm ubezpieczenia bezrobocia w omawianym modelu jest następujący: poszukujący pracy zna korzyści z ubezpieczenia na wypadek bezrobocia w przedziale czasu N okresów.

Zakładamy, że świadczenie na wypadek bezrobocia składa się z dwóch składników [7]:

1) W jednostek pieniężnych na miesiąc na pokrycie podstawowych kosztów utrzymania bezrobotnego. W ubezpieczeniu bezrobocia ta kwota jest egzogenicznie określona i jest wypłacana osobie ubezpieczonej tak długo, jak długo pozostaje ona bezrobotna, nawet dłużej niż okres ubezpieczenia;

z najlepszą ofertą pracy otrzymaną w okresie n, przy założeniu, że bezrobotny używa politykę **C** kosztów poszukiwania pracy.

Funkcja celu towarzystwa ubezpieczeniowego jest następująca [7]:

$$\psi_{(\mathbf{C},T)}(\mathbf{U}) = E\left[X_{\mathbf{C}}(T) - \sum_{n=1}^{T}(u_n - c_n)\right]. \tag{2}$$

Celem towarzystwa jest wybranie optymalnej polityki **U**, która maksymalizuje funkcję celu określoną wzorem (2). Przyjmuje się, że towarzystwo zna funkcję odpowiedzi $(\mathbf{C}(\mathbf{U}), T(\mathbf{U}))$ poszukującego pracy.

Na podstawie warunków ubezpieczenia bezrobocia, czyli na podstawie ogłoszonej przez towarzystwo strategii **U** poszukujący pracy wybiera swoją strategię $\left(\mathbf{C}^*(\mathbf{U}), T^*(\mathbf{U})\right)$. Następnie na podstawie optymalnej strategii bezrobotnego towarzystwo wybiera optymalną strategię $\mathbf{U}^*$.

Maksymalny dochód $V_{n-1}(x)$ jednostki w okresie $n-1$ określa następujący związek rekurencyjny:

$$V_{n-1}(x) = \max\left\{x, \max_{c_n \le u_n}\left\{(W + u_n - c_n) + \int_0^{\infty} V_n(y)dF_{c_n}(y)\right\}\right\} \tag{3}$$

dla $n = 2, 3, \ldots, N$, przy czym $V_N(x) = x$.

Minimalną do zaakceptowania ofertę (najniższą płacę) ξ_{n-1} w okresie $n-1$ określamy następująco:

$$\xi_{n-1} = \max_{c_n \le u_n}\left\{(W + u_n - c_n) + \int_0^{\infty} V_n(y)dF_{c_n}(y)\right\} \tag{4}$$

dla $n = 2, 3, \ldots, N$.

Ponadto, ponieważ $T \le N$, przyjmujemy

$$\xi_N = 0. \tag{5}$$

Na podstawie równań (3) – (5) otrzymujemy następujący związek

$$V_n(x) = \max\{x, \xi_n\} \text{ dla } n = 1, 2, \ldots, N. \tag{6}$$

W celu określenia strategii poszukującego pracy zostanie określona funkcja $G_{c_n}(\xi_n)$ mierząca oczekiwany zysk z c_n jednostek pieniężnych, które są przeznaczone na poszukiwania w okresie n, gdy najniższa płaca w tym okresie wynosi ξ_n:

$$G_{c_n}(\xi_n) = \int_{\xi_n}^{\infty}(x-\xi_n)dF_{c_n}(x). \tag{7}$$

Wykorzystując równania (4) – (6), otrzymujemy następujący związek dla $n = 2, 3, \dots, N$

$$\begin{aligned} \xi_{n-1} &= \max_{c_n \le u_n}\left\{(W + u_n - c_n) + \int_0^{\infty}\max(x, \xi_n)dF_{c_n}(x)\right\} = \\ &= \max_{c_n \le u_n}\left\{W + u_n - c_n + \xi_n + G_{c_n}(\xi_n)\right\}. \end{aligned} \tag{8}$$

Funkcja (8) osiąga maksimum w punkcie $c_n^*(\mathbf{U})$ określonym następująco [1]:

$$c_n^*(\mathrm{U}) = \begin{cases} u_n & \text{gdy } \tilde{c}_n > u_n \\ \tilde{c}_n & \text{gdy } \tilde{c}_n \le u_n \end{cases}, \tag{9}$$

gdzie $\tilde{c}_n$ jest rozwiązaniem następującego równania

$$\frac{\partial G_{c_n}(\xi_n)}{\partial c_n} = 1. \tag{10}$$

Optymalna strategia $\mathbf{C}^*(\mathrm{U})$ poszukującego pracy i minimalna do zaakceptowania płaca ξ_n^* dla $n = 1, 2, \dots, N$ są opisane rekurencyjnie przy użyciu wstecznej procedury dynamicznej w następujący sposób:

1) $\xi_N^* = 0$.

2) Optymalną politykę wydatków stosowaną przez bezrobotnego $c_N^*(\mathbf{U})$ obliczamy ze wzoru (9), w którym $\tilde{c}_N$ jest rozwiązaniem następującego równania

$$\frac{\partial G_{c_n}(0)}{\partial c_n} = 1.$$

3) Dla $n = N-1, N-2, \dots, 1$ optymalne strategie poszukującego pracy $c_N^*(\mathbf{U})$ obliczamy ze wzorów (9) i (10).

A zatem optymalna polityka wydatków stosowana przez bezrobotnego jest następująca: jeżeli strategia towarzystwa u_n jest mniejsza lub równa $\tilde{c}_n$, to całkowita kwota zasiłku u_n będzie użyta na cele poszukiwań pracy, w przeciwnym wypadku kwota ponad $\tilde{c}_n$ będzie użyta na cele konsumpcji.

Znając strategię optymalną ubezpieczonego, towarzystwo wyznacza swoją strategię optymalną $\mathbf{U}^* = \left[u_1^* \; u_2^* \; \dots \; u_N^*\right]$, gdzie $u_n^* = \tilde{c}_n$; tak więc optymalne kwoty zasiłku – dodatku do kwoty W powinny być równe kwocie wydatków przeznaczonych przez jednostkę bezrobotną na poszukiwania pracy.

Natomiast optymalną najniższą akceptowalną płacę ξ_n^* dla $n = N-1, N-2, \ldots, 1$ wyznaczamy ze wzoru

$$\xi_n^* = W + \xi_{n+1}^* + G_{c_{n+1}^*(\mathbf{U})}\left(\xi_{n+1}^*\right). \tag{11}$$

Optymalną strategię stopującą – optymalny moment zakończenia poszukiwań pracy przez bezrobotnego określamy jako

$$T^*(\mathbf{U}) = \inf_{1 \le n \prec N}\left\{n, X_{\mathbf{C}^*(\mathbf{U})}(n) \ge \xi_n\right\}. \tag{12}$$

4. Przykład numeryczny

Zakładamy, że:

1. Rozkład wynagrodzeń związanych z najlepszą ofertą pracy w danym okresie, w którym $c_n > 0$ jednostek pieniężnych jest przeznaczonych na poszukiwania pracy, jest jednostajny w przedziale $\left[100, 150 - 50e^{-c_n}\right]$ (przyjmuje się, że wynagrodzenie możliwe do zaakceptowania należy do przedziału od 1000 do 1500 zł). Zatem

$$dF_{c_n}(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{50\left(1 - e^{-c_n}\right)} & \text{dla } 100 \le x \le 150 - 50e^{-c_n}, \\ 0 & \text{dla pozostałych } x. \end{cases}$$

2. $W = 5$.

Na podstawie wzorów podanych wcześniej dla arbitralnie przyjętej wartości startowej $N = 6$ obliczamy $\mathbf{C}^*\left(\mathbf{U}_6^*\right) = \mathbf{U}_6^* = \left[\tilde{c}_1\ \tilde{c}_2\ \tilde{c}_3\ \tilde{c}_4\ \tilde{c}_5\ \tilde{c}_6\right]$ oraz ξ_n^* dla $n = 1, 2, \ldots, 6$.

Przyjmujemy $\xi_6^* = 0$.

Wielkość $\tilde{c}_6$ wyznaczamy jako rozwiązanie równania $\dfrac{\partial G_{c_6}(0)}{\partial c_6} = 1$. Ponieważ

$$G_{c_6}(0) = \int_0^{\infty} x\,dF_{c_6}(x) = \int_{100}^{150-50e^{-c_6}} x\,dF_{c_6}(x) = \frac{1}{50\left(1 - e^{c_6}\right)} \int_{100}^{150-50e^{-c_6}} x\,dx = \frac{250 - 50e^{-c_6}}{2},$$

zatem $\dfrac{\partial G_{c_6}(0)}{\partial c_6} = 25e^{-c_6}$.

$$\frac{\partial G_{c_6}(0)}{\partial c_6} = 1 \Leftrightarrow 25e^{-c_6} = 1 \Leftrightarrow c_6 = \ln 25 = 3{,}22, \text{ a wówczas } \tilde{c}_6 = 3{,}22.$$

Na podstawie wzoru (11) obliczamy optymalną najniższą akceptowalną płacę w okresie 5

$$\xi_5^* = W + \xi_6^* + G_{c_6^*(\mathrm{U})}(\xi_6^*) = 129.$$

Obecnie zostanie obliczona funkcja $G_{c_n}(\xi_n)$.

$$G_{c_n}(\xi_n) = \int_{\xi_n}^{\infty}(x-\xi_n)dF_{c_n}(x) = \int_{\xi_n}^{150-50e^{-c_n}}(x-\xi_n)dF_{c_n}(x) =$$

$$= \frac{1}{50(1-e^{c_n})} \cdot \int_{\xi_n}^{150-50e^{-c_n}}(x-\xi_n)dx = \frac{\left(150-50e^{-c_n}-\xi_n\right)^2}{100(1-e^{c_n})}$$

oraz pochodna

$$\frac{\partial G_{c_n}(\xi_n)}{\partial c_n} = \frac{e^{-c_n}\left(150-50e^{-c}-\xi_n\right)\left(-50-50e^{-c_n}+\xi_n\right)}{100\left(1-e^{-c_n}\right)}.$$

Przyjmujemy $\xi_5^* = 129$, natomiast $\tilde{c}_5$ wyznaczamy jako rozwiązanie równania $\frac{\partial G_{c_5}(\xi_5^*)}{\partial c_5} = 1$, otrzymując $\tilde{c}_5 = 2{,}73$.

Obliczamy optymalną najniższą akceptowalną płacę w okresie 4

$$\xi_4^* = W + \xi_5^* + G_{c_5^*(\mathrm{U})}(\xi_5^*) = 136{,}37.$$

Powtarzając tę procedurę, otrzymujemy optymalne koszty związane z poszukiwaniem pracy i najniższe możliwe do zaakceptowania płace w kolejnych okresach, które zestawiono w tab. 1.

Tabela 1. Optymalne koszty związane z poszukiwaniem pracy i najniższe możliwe do zaakceptowania płace

Okres	1	2	3	4	5	6
$\tilde{c}_n$	–	–	–0,61	1,9	2,73	3,22
ξ_n^*	–	–	141,81	136,37	129	0

Źródło: obliczenia własne.

Ponieważ koszty poszukiwań pracy są nieujemne, zatem $N^* = 3$, więc optymalne koszty poszukiwań pracy przez bezrobotnego w kolejnych okresach wynoszą $\mathbf{C}^*(\mathbf{U}^*) = \mathbf{U}^* = [1{,}9 \;\; 2{,}73 \;\; 3{,}22]$.

Przyjmując tę samą gęstość rozkładu wynagrodzeń związanych z najlepszą ofertą pracy w danym okresie, ale wyższą stałą kwotę $W = 10$, otrzymujemy krótszy możliwy okres poszukiwań pracy $N^* = 2$ oraz $\mathbf{C}^*(\mathbf{U}^*) = \mathbf{U}^* = [2{,}41 \;\; 3{,}22]$. Ponadto $\xi_6^* = 0$, $\xi_5^* = 134$, $\xi_4^* = 145{,}45$.

Tak więc przyjmując tę samą gęstość rozkładu wynagrodzeń związanych z najlepszą ofertą pracy, można wyciągnąć wniosek, że im wyższa jest kwota przeznaczana przez towarzystwo ubezpieczeń na pokrycie podstawowych kosztów utrzymania jednostki, tym bardziej optymalny okres poszukiwań pracy ulega skróceniu, natomiast najniższa możliwa do zaakceptowania płaca jest wyższa.

5. Zakończenie

Ubezpieczenie bezrobocia ma istotne konsekwencje dla działania gospodarki oraz dla dobrobytu społeczeństwa.

Ubezpieczenie bezrobocia jest ważnym produktem ubezpieczeniowym. Wypłaty z tytułu ubezpieczenia bezrobocia pozwalają zrekompensować skutki materialne utraty pracy, a także pokrywają koszty związane z poszukiwaniem nowej, najkorzystniejszej dla bezrobotnego oferty pracy.

Wykorzystując teorię gier, w pracy przedstawiono teoretyczny model ubezpieczenia bezrobocia.

Literatura

[1] Fichtenholz G.M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1995.
[2] de Groot M., *Optymalne decyzje statystyczne*, PWN, Warszawa 1981.
[3] Luce B.D., Raiffa H., *Gry i decyzje*, PWN, Warszawa 1964.
[4] Owen G., *Teoria gier*, PWN, Warszawa 1975.
[5] Raport Roczny 2002 Towarzystwa CIGNA STU SA.
[6] Stackelberg V.H., *The Theory of Market Economy*, Oxford University Press, Oxford 1952.
[7] Zuckerman D., *Optimal Unemployment Insurance Policy*, „Operations Research", vol. 33, no. 2, March-April 1985.

SETTLEMENT OF GAME THEORY IN THE MODELLING OF UNEMPLOYMENT EFFECTS INSURANCE

Summary

Unemployment is one of types of social risk. The insurance of unemployment has the important effect for economy and for the public assistance of society. Therefore the unemployment insurance is well-known in many countries. In last years insurance products which compensate for financial effects of job loss have been introduced also in the Polish market.

In this paper the author presents the model of unemployment insurance. Using techniques and the concepts of game theory she investigates the objectives and the optimal strategy of an unemployed that seeks the job as well as the objectives and the optimal strategy of an insurer.

Agnieszka Przybylska-Mazur – dr, pracownik Katedry Metod Statystyczno-Matematycznych w Ekonomii Akademii Ekonomicznej w Katowicach.