PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Stanisław Wieteska

Uniwersytet Łódzki

RENTY ŻYCIOWE PŁATNE RZADZIEJ, NIŻ OPROCENTOWANIE JEST SKŁADANE

1. Wstęp

W dotychczasowej teorii i praktyce spotykamy się z rentami życiowymi płatnymi częściej, niż oprocentowanie jest składane. Wynika to z tego, że wiele składek na życie wpłacanych jest w ratach kilka razy w roku, a banki (czy lokaty) stosują oprocentowanie roczne. Jednakże w teorii procentu spotykamy renty pewne, które są płatne rzadziej, niż oprocentowanie składane [1]. W praktyce ubezpieczeń na życie spotykamy klauzule, które mówią np. o konieczności (dokonywania badań medycznych) ponoszenia kosztów co kilka lat. Zatem w celu wkalkulowania tych kosztów, a także kompletności rachunków zachodzi potrzeba obliczenia rent życiowych płatnych rzadziej, niż oprocentowanie jest składane. Podstawowa literatura matematyki aktuarialnej pomija tę kwestię. Celem tego artykułu jest uzupełnienie luki w tym zakresie.

2. Renty pewne płatne rzadziej niż oprocentowanie składane

Rozważać będziemy renty o płatnościach 1 zł co k lat, $k \in N$. Zakładamy przy tym, że dla rent n-letnich $\frac{n}{k}$ jest liczbą całkowitą. Renty obliczane są przy rocznej stopie procentowej i.

- Dla rent płatnych z dołu (n-letnich) obecną wartość obliczymy za pomocą wzoru:

$$v^k + v^{2k} + \ldots + v^{\frac{n}{k}\cdot k} = \frac{v^k - v^{n+k}}{1 - v^k} = \frac{1 - v^n}{(1+i)^k - 1} = \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}},$$

gdzie: $a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$, $v = \frac{1}{1+i}$, $s_{\overline{k}|} = \frac{(1+i)^k - 1}{i}$.

• Dla rent płatnych z góry n-letnich obecną wartość obliczamy za pomocą wyrażenia:

$$1 + v^k + v^{2k} + \ldots + v^{n-k} = \frac{1 - v^n}{1 - v^k} = \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

Skumulowaną wartość rent płatnych 1 zł co k lat można obliczyć następująco:

• Dla rent płatnych z dołu:

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^k - 1} = \frac{s_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}}.$$

• Dla rent płatnych z góry:

$$\frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}(1+i)^n = \frac{1 - v^n}{1 - v^k}(1+i)^n = \frac{(1+i)^n - 1}{1 - v^k} = \frac{s_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}}.$$

▶ Przypadek gdy renty są płatne rzadziej, niż oprocentowanie jest składane, lecz w okresie bezterminowym (nieskończonym).
Obecną wartość można obliczyć, przechodząc do granicy gdy $n \to \infty$.

• Dla rent płatnych z dołu mamy:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\overline{n}|}}{s_{\overline{k}|}} = \frac{a_{\overline{\infty}|}}{s_{\overline{k}|}} = \frac{\frac{1}{i}}{\frac{(1+i)^k - 1}{i}} = \frac{1}{(1+i)^k - 1}.$$

• Dla rent płatnych z góry:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{\overline{n}|}}{a_{\overline{k}|}} = \frac{a_{\overline{\infty}|}}{a_{\overline{k}|}} = \frac{\frac{1}{i}}{\frac{1 - v^k}{i}} = \frac{1}{1 - v^k}.$$

3. Renty życiowe płatne rzadziej, niż oprocentowanie składane

Definicja

Rentą życiową nazywać będziemy skończony lub nieskończony ciąg płatności dokonywany przez osobę w wieku x.

W odróżnieniu od rent pewnych renty życiowe zawierają ryzyko przeżycia osoby w wieku x mierzone prawdopodobieństwem. Prawdopodobieństwo to można obliczyć z tablic wymieralności ludności. Wykorzystujemy tutaj znane wzory postaci:

$$ {}_k p_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}, \quad p_x = \frac{l_{x+1}}{l_x} $$

gdzie: l_x – liczba ludności w wieku x, l_{x+k} – liczba ludności w wieku $x + k$, ${}_k p_x$ – prawdopodobieństwo że osoba w wieku x przeżyje k lat, p_x – prawdopodobieństwo że osoba w wieku x przeżyje 1 rok.

Rozważmy rentę bezterminową o płatności 1 zł co k lat z dołu przy oprocentowaniu rocznym i.

- Obecną wartość takiej renty można przedstawić w postaci:

$$ v^k {}_k p_x + v^{2k} {}_{2k} p_x + v^{3k} {}_{3k} p_x + \ldots = \sum_{r=1}^{\infty} v^{rk} {}_{rk} p_x . \qquad (1) $$

- Obecną wartość renty płatnej z góry możemy przedstawić w postaci:

$$ 1 + v^k {}_k p_x + v^{2k} {}_{2k} p_x + v^{3k} {}_{3k} p_x + \ldots = \sum_{r=0}^{\infty} v^{rk} {}_{rk} p_x . \qquad (2) $$

Maksymalny wiek życia człowieka możemy ustalić w wysokości ω. Wiek maksymalny (ω) jest wielkością umowną.

Na potrzeby naszych dalszych rozważań przyjmijmy, że $\frac{\varpi}{k}$ jest liczbą naturalną. Przyjmijmy następujące założenia potrzebne do następnych przekształceń:

$$ v^x l_x = D_x, \quad v^{x+k} l_{x+k} = D_{x+k}, $$

stąd:

$$ v^k {}_k p_x = \frac{v^k l_{x+k}}{l_x} = \frac{v^x v^k l_{x+k}}{v^x l_x} = \frac{D_{x+k}}{D_x} . $$

Wykorzystamy symbole komutacyjne – zmodyfikowane

$$\sum_{r=1}^{\varpi} D_{x+rk} = {}^{(k)}N_{x+1}$$

W związku z tym wzór (1) na obecną wartość renty płatnej z dołu bezterminowej możemy zapisać następująco:

$${}^{(k)}a_x = \sum_{r=1}^{\varpi} v^{rk}{}_{rk}p_x = \sum_{r=1}^{\varpi} \frac{D_{x+rk}}{D_x} = \frac{{}^{(k)}N_{x+1}}{D_x}. \qquad (3)$$

Dla renty bezterminowej płatnej z góry wzór (2) przybierze postać:

$${}^{(k)}\ddot{a}_x = \sum_{r=0}^{\varpi-k} v^{rk}{}_{rk}p_x = \sum_{r=0}^{\varpi/k-1} \frac{D_{x+rk}}{D_x} = \frac{{}^{(k)}N_x}{D_x}. \qquad (4)$$

Rozważmy obliczenie renty płatnej okresowo. Obecną wartość renty n-letniej dla osoby w wieku x w której $\frac{n}{k}$ – całkowite, o płatnościach co k lat z dołu 1 zł możemy zdefiniować następująco:

$${}^{(k)}a_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=1}^{n} v^{rk}{}_{rk}p_x = \sum_{r=1}^{n} \frac{D_{x+rk}}{D_x} = \frac{{}^{(k)}N_{x+1} - {}^{(k)}N_{x+n+1}}{D_x}, \qquad (5)$$

dla renty płatnej z góry możemy jej obecną wartość zdefiniować następująco:

$${}^{(k)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=0}^{n-k} v^{rk}{}_{rk}p_x = \sum_{r=0}^{n-k} \frac{D_{x+rk}}{D_x} = \frac{{}^{(k)}N_x - {}^{(k)}N_{x+n}}{D_x}. \qquad (6)$$

Na potrzeby praktyki ubezpieczeniowej konieczne jest obliczenie skumulowanej wartości renty okresowej. W tym celu możemy wykorzystać czynnik akumulujący w rentach życiowych postaci:

$$\frac{1}{{}_nE_x} = \frac{D_x}{D_{x+n}}.$$

Zatem skumulowaną wartość renty życiowej płatnej co k lat 1 zł możemy obliczyć następująco:

- dla renty płatnej z dołu:

$${}^{(k)}a_{x:\overline{n}|} \cdot \frac{1}{{}_nE_x} = {}^{(k)}s_{x:\overline{n}|} = \frac{{}^{(k)}N_{x+1} - {}^{(k)}N_{x+n+1}}{D_{x+n}}, \qquad (7)$$

- dla renty płatnej z góry:

$$ {}^{(k)}\ddot{s}_{x:\overline{n}|} = \frac{{}^{(k)}\ddot{a}_{x:\overline{n}|}}{{}_nE_x} = \frac{{}^{(k)}N_x - {}^{(k)}N_{x+n}}{D_{x+n}}. \tag{8} $$

Bardzo często, zwłaszcza w ubezpieczeniach emerytalnych, spotykamy się z koniecznością obliczenia obecnej wartości renty życiowej opóźnionej np. m lat bezterminowej o płatnościach co k lat 1 zł

- dla renty płatnej z dołu:

$$ {}_{m|}^{(k)}a_x = \sum_{r=m+1}^{\varpi} \frac{D_{x+rk}}{D_x}, $$

- dla renty płatnej z góry:

$$ {}_{m|}^{(k)}\ddot{a}_x = \sum_{r=m}^{\varpi} \frac{D_{x+rk}}{D_x}. $$

Zastosowanie

Przykład

Masz daną rentę życiową dla mężczyzny lat 25, okresową 20-letnią, o płatnościach po 500 zł co 4 lata z góry. Oblicz obecną i skumulowaną wartość tej renty, wykorzystując tablice trwania życia z 2005 r. dla mężczyzn i stosując roczną stopę procentową w wysokości 3%.

Rozwiązanie

Graficzne przedstawienie obecnej wartości takiej renty jest postaci:

500	500	500	500	500	500
0	4	8	12	16	20

$x = 25$

$$ 500\,{}^{(4)}\ddot{a}_{25:\overline{20}|} = 500v^0\,{}_0p_{25} + 500v^4\,{}_4p_{25} + 500v^8\,{}_8p_{25} + 500v^{12}\,{}_{12}p_{25} + 500v^{16}\,{}_{16}p_{25} = $$

$$ = 500\left[1 + \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^4 \frac{l_{29}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^8 \frac{l_{33}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^{12} \frac{l_{37}}{l_{25}} + \left(\frac{1}{0{,}03}\right)^{16} \frac{l_{41}}{l_{25}}\right] = $$

$$ = 500\left[1 + 0{,}8884\,1\frac{97639}{98121} + 0{,}7894\frac{97061}{98121} + 0{,}7013\frac{96250}{98121} + 0{,}6231\frac{95064}{98121}\right] = $$

$$ = 500[1 + 0{,}8741 + 0{,}7808 + 0{,}6879 + 0{,}6036] = 1978{,}2. $$

Skumulowaną wartość tej renty możemy obliczyć następująco:

$$500^{(4)}\ddot{s}_{25:\overline{20}|} = 500^{(4)}\ddot{a}_{25:\overline{20}|} \cdot \frac{1}{{}_{20}E_{25}} = 1978{,}2 \cdot \frac{1}{v^{20}\, {}_{20}p_{25}} = \frac{1978{,}2}{\left(\frac{1}{1{,}03}\right)^{20} \cdot \frac{93339}{98121}} =$$

$$= 3756{,}41 \text{ zł}.$$

Analogicznie możemy obliczyć każdą wartość rent tego typu.

4. Wnioski

Przedstawiony rodzaj rent jest możliwy do obliczenia i zastosowania w praktyce aktuarialnej. Prezentowane rozwiązania uzupełniają dział rent w matematyce aktuarialnej. Z przeprowadzonych rozważań widzimy, że jest możliwe wprowadzenie w matematyce aktuarialnej renty życiowej płatnej rzadziej niż oprocentowanie jest składane. Okazuje się, że tego typu renty są przydatne do celów obliczenia płatności dokonywanych w ubezpieczeniach na życie co kilka lat. Takim przykładem płatności mogą być koszty badań lekarskich ponoszone okresowo w związku z ubezpieczeniami na życie. Koszty te powinny być wkalkulowane w cenę produktu ubezpieczeń na życie. Zawsze będą dyskusyjne: ich wysokość, stopa procentowana, a także wymagana częstość badań przez zakład ubezpieczeń. Artykuł nie wyczerpał problematyki, lecz jedynie ją zasygnalizował. Konieczne są dalsze prace empiryczne, które zweryfikowałyby założenia teoretyczne.

Literatura

[1] Kellison S.G., *Theory of Interest*, Richard D. IRWIN INC, Georgia 1991, s. 95-127.

[2] Newton L., Bowers C., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, The Society of Actuaries, Itascaa, Illinois 1968.

LIFE ANNUITIES PAYABLE LESS FREQUENTLY THAN INTEREST IS CONVERTIBLE

Summary

In the current theory and practice, we can observe that practical pensions are paid more often than the interest is folded. It results from the fact that many fees are paid in instalments a few times a year and banks are applying the annual interest. In practice of life insurances, we are coming across clauses that describe the rules you must follow, e.g. the necessity of undergoing medical examinations or the necessity of bearing the cost every few years.

So, to take account of these costs and of completeness of bills, pension paid less frequently than the interest is folded must be calculated. The basic literature on actuarial mathematics does not take up this issue, so the aim of this article is to fill this gap.