

**Edyta Tomasik**

Akademia Ekonomiczna w Poznaniu

## **ROZKŁADY PRAWDOPODOBIENSTWA STÓP ZWROTU INDEKSÓW I AKCJI NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE**

### **1. Wstęp**

Wykorzystywanie normalnego rozkładu prawdopodobieństwa do modelowania empirycznych stóp zwrotu aktywów finansowych jest w wielu sytuacjach kwestią wygody. Istnieją bowiem dobrze rozwinięty aparat matematyczny oraz bogata literatura poświęcone modelom, które oparte są na tym założeniu. I choć już w 1964 r. B. Mandelbrot proponował wykorzystywanie w modelowaniu rozkładów, które mogłyby uchwycić leptokurtyczność i grube ogony zwrotów, modele oparte na rozkładach normalnych do dzisiaj cieszą się dużą popularnością [9]. Badania przeprowadzone przez E. Famę potwierdziły hipotezy B. Mandelbrota, odnośnie do własności empirycznych stóp zwrotu, takich jak: grube ogony, skośność rozkładu, efekt skupiania danych czy długoterminowa zależność danych [5]. Wymienia się dwie potencjalne przyczyny powstawania ciężkich ogonów, a zatem częstszego, niż wynika to z rozkładu normalnego, występowania obserwacji ekstremalnych: albo informacje nie docierają do rynku w postaci ciągłych, gładkich serii, lecz pojawiają się w wiązkach, albo informacje docierają w sposób ciągły, ale reakcje na nie mają nieciągły charakter [12]. Badania empiryczne przeprowadzone przez E. Eberleina i U. Kellera potwierdziły słuszność stosowania rozkładów hiperbolicznych do modelowania finansowego na rynku niemieckim [4]. Potwierdzono również, iż zasadne jest wykorzystywanie rozkładów  $\alpha$ -stabilnych w przypadku rynku amerykańskiego.

Celem niniejszej pracy jest zbadanie, który z rozkładów prawdopodobieństwa:  $\alpha$ -stabilny, hiperboliczny, normalny odwrotny gaussowski czy uogólniony rozkład

błędów jest najbardziej właściwy do modelowania stóp zwrotu indeksów i akcji notowanych na GPW w Warszawie.

## 2. Rozkłady prawdopodobieństwa

Analiza szeregów empirycznych stóp zwrotu wymaga stosowania rozkładów prawdopodobieństwa nieskończenie podzielnych, które mają grubsze ogony niż rozkład normalny. Największą popularnością w modelowaniu stóp zwrotu cieszą się rozkład stabilny, rozkłady z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych oraz uogólniony rozkład błędów.

### 2.1. Rozkład $\alpha$ -stabilny

Rozkład stabilny został wprowadzony przez P. Levy'ego. Obecnie jest on jednym z najpowszechniej stosowanych rozkładów wykorzystywanych do modelowania empirycznych stóp zwrotów. Pełny opis zmiennej losowej o rozkładzie  $\alpha$ -stabilnym wymaga czterech parametrów: indeksu stabilności  $\alpha \in (0, 2]$  (nazywanym także wykładnikiem charakterystycznym rozkładu), parametru skośności  $\beta \in [-1, 1]$ , parametru skali  $\sigma > 0$  oraz parametru przesunięcia  $\mu \in R$ . W ogólnym przypadku rozkład  $\alpha$ -stabilny nie ma skończonej wariancji ani określonej funkcji gęstości. Rozkład ten definiuje się za pomocą funkcji charakterystycznej w postaci [13]:

$$\phi_{St}(t) = \begin{cases} \exp\left[-\sigma^\alpha |t|^\alpha \left(1 - i\beta \operatorname{sgn}(t) \operatorname{tg} \frac{\pi\alpha}{2}\right) + i\mu t\right], & \alpha \neq 1, \\ \exp\left[-\sigma |t| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(t) \ln|t|\right) + i\mu t\right], & \alpha = 1. \end{cases} \quad (1)$$

Indeks stabilności  $\alpha$  odpowiada za grubość ogona rozkładu stabilnego. Jeśli  $\alpha < 2$ , to wariancja zmiennej losowej nie istnieje, a rozkład charakteryzuje się cięższym ogonem niż rozkład normalny, który jest przypadkiem granicznym rozkładu stabilnego, otrzymanym dla  $\alpha = 2$ . Dla  $\beta > 0$  rozkład jest prawostronnie skośny tzn. ma grubszy prawy ogon, dla  $\beta < 0$  jest lewostronnie skośny, czyli ma cięższy lewy ogon, a dla  $\beta = 0$  jest symetryczny. Parametr skali  $\sigma$  pełni funkcję podobną do funkcji odchylenia standardowego w rozkładzie normalnym. Parametr  $\mu$  odpowiada za przesunięcie i dla  $\alpha > 1$  jest równy wartości oczekiwanej. Należy zaznaczyć, że suma dwóch niezależnych zmiennych losowych o rozkładzie  $\alpha$ -stabilnym i indeksie stabilności  $\alpha$  jest dalej zmienną losową  $\alpha$ -stabilną z tym samym parametrem  $\alpha$ . Własność ta nie zachowuje się dla różnych wartości  $\alpha$ .

## 2.2. Uogólniony rozkład hiperboliczny

O.E. Barndorff-Nielsen zaproponował w 1977 r. rodzinę uogólnionych rozkładów hiperbolicznych, będącą klasą rozkładów nieskończenie podzielnych [1]. Rozkłady należące do tej rodziny charakteryzują się tym, że wykres logarytmu ich funkcji gęstości tworzy hiperbolę. W przypadku rozkładu normalnego analogiczny wykres jest parabolą, więc można oczekiwać, że rozkłady należące do rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych będą znacznie lepiej opisywały grube ogony niż rozkład gaussowski. Funkcja gęstości uogólnionego rozkładu hiperbolicznego ma następującą postać:

$$f_{\text{GHYP}}(x) = \frac{(\alpha^2 - \beta^2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi} \delta^2 \alpha^{\lambda-1/2} K_{\lambda}(\delta \sqrt{\alpha^2 - \beta^2})} K_{\lambda-1/2}(\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}) \times \\ \times (\alpha \sqrt{\delta^2 + (x - \eta)^2})^{\lambda-1/2} e^{\beta(x-\mu)}, \quad (2)$$

gdzie  $K_1(\cdot)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessla trzeciego rodzaju z indeksem  $\lambda$ , parametry  $\alpha$  oraz  $\beta$  są parametrami kształtu,  $\delta$  jest parametrem skali,  $\mu$  zaś parametrem położenia. Parametry rozkładu przybierają wartości z następujących obszarów:

jeżeli  $\lambda > 0$ , to  $\delta \geq 0$ ,  $|\beta| < \alpha$ ,

jeżeli  $\lambda = 0$ , to  $\delta > 0$ ,  $|\beta| < \alpha$ ,

jeżeli  $\lambda < 0$ , to  $\delta > 0$ ,  $|\beta| \leq \alpha$ .

Zmiany parametru  $\lambda$  wpływają na charakter całej funkcji gęstości (spłaszczenie, skośność, skalę i przesunięcie) i dlatego też można uznać ten parametr za wyznacznik podklas. Z racji częstszych zastosowań w opisie zjawisk na rynkach finansowych, w dalszych rozważaniach zajmiemy się analizą podklasy rozkładów hiperbolicznych oraz normalnych odwrotnych rozkładów gaussowskich [7; 16].

### Rozkład hiperboliczny

Rozkład hiperboliczny został zaproponowany przez O.E. Barndorffa-Nielsena i należy do rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych. Podklasa ta jest zdefiniowana ze względu na wartość parametru  $\lambda$ , która dla rozkładów hiperbolicznych wynosi 1 [1]. Z własności funkcji Bessla, postać funkcji gęstości w tym przypadku upraszcza się i wyraża się wzorem:

$$f_{\text{HYP}}(x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}}{2\delta\alpha K_1\left(\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}\right)} \exp\left\{\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2} + \beta(x - \mu)\right\}, \quad (3)$$

dla  $\delta \geq 0$ ,  $|\beta| < \alpha$ . Stała normująca  $K_1(\cdot)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessla trzeciego rodzaju z indeksem  $\lambda - 1$ . Zmiany wartości parametru  $\alpha$  są wyraźnie odzwierciedlane w spłaszczeniu funkcji gęstości – im większa wartość parametru  $\alpha$ , tym większe jest skupienie wartości wokół średniej i funkcja przybiera większe wartości. Parametr  $\beta$  odpowiada za skośność rozkładu. Ujemne wartości oznaczają grubszy lewy ogon, a dodatnie – grubszy prawy ogon. Parametr  $\delta$  odpowiada za skalę rozrzutu. Im mniejsza jest jego wartość, tym bardziej skupiona jest masa rozkładu. W przeciwnym przypadku zakres wartości przybieranych z tym samym prawdopodobieństwem jest mniejszy. Parametr  $\mu$  odpowiada za przesunięcie rozkładu. Rozkłady hiperboliczne należą do klasy nieskończenie podzielnych i wszystkie ich momenty są skończone.

### Normalny odwrotny rozkład gaussowski

Drugą podklasę rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych, którą zajmujemy się w dalszych rozważaniach, stanowi normalny odwrotny rozkład gaussowski (NIG). Rozkład ten został zaproponowany przez O.E. Barndorff-Nielsen w 1995 r. [2]. Dla tej podklasy parametr  $\lambda$  wynosi  $-1/2$ . Postać funkcji gęstości normalnego odwrotnego rozkładu gaussowskiego upraszcza się z własności funkcji Bessla i wyraża się wzorem:

$$f_{\text{NIG}}(x) = \frac{\alpha\delta K_1\left(\alpha\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}\right)}{\pi\sqrt{\delta^2 + (x - \mu)^2}} \exp\left\{\delta\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \beta(x - \mu)\right\}, \quad (4)$$

dla  $\delta > 0$ ,  $|\beta| \leq \alpha$ . Stała normująca  $K_1(\cdot)$  jest zmodyfikowaną funkcją Bessla trzeciego rodzaju z indeksem  $\lambda = -1/2$ . Parametry mają takie samo znaczenie jak w opisanym powyżej rozkładzie hiperbolicznym. W normalnym odwrotnym rozkładzie gaussowskim zachowanie ogonów jest określane mianem „średniocieżkich”. Ogony są bowiem cieńsze niż w niegaussowskim rozkładzie stabilnym, ale zdecydowanie grubsze aniżeli w rozkładzie normalnym. Należy podkreślić, że normalny odwrotny rozkład gaussowski ma przydatną w modelowaniu finansowym własność, a mianowicie rozkład NIG jest zamknięty na sumowanie zmiennych niezależnych o rozkładzie NIG. Analogicznej własności nie ma opisany w poprzednim podrozdziale rozkład hiperboliczny. Rozkład NIG należy do klasy nieskończenie podzielnych i wszystkie jego momenty są skończone.

### 2.3. Uogólniony rozkład błędów

Uogólniony rozkład błędów (GED) zyskał popularność, gdyż przy prostej postaci umożliwia opis grubych ogonów oraz takie przeskalowanie, by miał zerową wartość oczekiwaną oraz jednostkową wariancję. Rozkład ten jest przedstawiany w literaturze w różnych parametryzacjach. W niniejszej publikacji będzie wykorzystywana parametryzacja wprowadzona przez S. Vianello i G. Lunettę w 1963 r. [8; 15]. Zgodnie z tą parametryzacją funkcja gęstości ma następującą postać:

$$f_{\text{GED}}(x) = \frac{1}{2p^{1/p}\Gamma(1+1/p)\sigma_p} e^{-\frac{|x-\mu|^p}{p\sigma_p^p}}, \quad (5)$$

gdzie  $\mu$  jest parametrem położenia,  $\sigma_p > 0$  jest parametrem skali,  $p > 0$  jest parametrem kształtu [3]. W parametryzacji wprowadzonej przez S. Vianello i G. Lunettę ważne jest uproszczenie parametru skali  $\sigma_p$  jako parametru zmienności rzędu  $p$ . Kluczowym parametrem rozkładu GED jest parametr  $p$ , który decyduje o postaci rozkładu. Dla  $p = 2$  otrzymujemy rozkład normalny, dla  $p = 1$  rozkład Laplace'a, natomiast dla  $p \rightarrow \infty$  rozkład jednostajny. Rozkład ten jest jednomodalny, symetryczny i dzwonowaty.

### 3. Analizowane dane

W pracy przeprowadzono analizę dopasowania omówionych w poprzednim rozdziale rozkładów do szeregów stóp zwrotów wybranych indeksów oraz spółek wchodzących w skład WIG20 na Giełdzie Papierów Wartościowych w Warszawie w momencie podjęcia badań. Wszystkie analizowane indeksy i walory wraz z rozważanymi dla nich okresami notowań zestawiono w tab. 1.

Badaniu poddane zostały dzienne i tygodniowe logarytmiczne stopy zwrotu. Aby uzyskać tygodniowe stopy zwrotu, zastosowano formułę: piątek – piątek. W przypadku braku notowania w piątek, brakujące notowanie wyznaczone zostało ze średniej geometrycznej wszystkich notowań z danego tygodnia dla odpowiedniej spółki lub indeksu. W ten sposób wyznaczono dla każdego z badanych instrumentów finansowych szereg czasowy kolejnych tygodniowych stóp zwrotu. W celu wyznaczenia stopy zwrotu brano pod uwagę kurs zamknięcia.

W rozważaniu empirycznych szeregów czasowych, powstaje problem ustalenia długości badanych szeregów. Różne okresy analizowanych szeregów są przyczyną otrzymywania różnych wyników badań. Wyniki są szczególnie wrażliwe, gdy badaniom podlega młody rynek kapitałowy, który jest mało stabilny i który nie dostarcza szeregów czasowych wystarczającej długości. Badania przeprowadzono dla okresu od 31.12.1996 r. do 2.01.2007 r. Data początkowa jest związana z roz-

Tabela 1. Okresy notowań analizowanych walorów

Indeks/akcja	Okres notowań	Indeks/akcja	Okres notowań
WIG	31.12.1996 - 02.01.2007	PGNIG	23.09.2005 - 02.01.2007
WIG20	31.12.1996 - 02.01.2007	LOTOS	09.06.2005 - 02.01.2007
WIG-informatyka	07.08.2000 - 02.01.2007	BZWBK	31.12.1996 - 02.01.2007
WIG-telekomunikacja	31.12.1997 - 02.01.2007	TVN	07.12.2004 - 02.01.2007
WIG-spożywczy	31.12.1997 - 02.01.2007	NETIA	15.06.2000 - 02.01.2007
WIG-banki	31.12.1997 - 02.01.2007	BIOTON	16.03.2005 - 02.01.2007
WIG-budownictwo	31.12.1997 - 02.01.2007	PROKOM	10.02.1998 - 02.01.2007
MIDWIG	31.12.1997 - 02.01.2007	GTC	06.05.2004 - 02.01.2007
TECHWIG	31.12.1999 - 02.01.2007	BRE	31.12.1996 - 02.01.2007
KGHM	10.07.1997 - 02.01.2007	AGORA	20.04.1999 - 02.01.2007
PKOBP	10.11.2004 - 02.01.2007	MOL	22.12.2004 - 02.01.2007
PEKAO	30.06.1998 - 02.01.2007	KĘTY	31.12.1996 - 02.01.2007
TPSA	18.11.1998 - 02.01.2007	ORBIS	20.11.1997 - 02.01.2007
PKNORLEN	26.11.1999 - 02.01.2007	BORYSZEW	31.12.1996 - 02.01.2007
BANKBPH	31.12.1996 - 02.01.2007		

Źródło: opracowanie własne.

poczęciem notowania subindeksów indeksu WIG. Jeśli pierwsze notowanie rozpoczęło się po 31.12.1996 r., to analizie poddano cały szereg czasowy. W celu uniknięcia mało czytelnych ułamków wszystkie analizy i wykresy przeprowadzono dla stóp zwrotu przemnożonych przez 100.

#### 4. Analiza danych empirycznych

W analizie własności probabilistycznych zwrotów wydaje się właściwe wyznaczenie i krótkie spojrzenie na podstawowe statystyki opisowe analizowanych szeregów czasowych. Statystyki te zamieszczono w tab. 2.

Analizując wyniki zawarte w tab. 2 łatwo można zaobserwować, że zdecydowana większość empirycznych rozkładów omawianych w pracy indeksów i akcji charakteryzuje się skośnością. Jeśli przeanalizuje się kurtozę empirycznych szeregów zwrotów, daje się zauważyć odchylenie od rozkładu normalnego rozkładu prawie wszystkich analizowanych akcji i indeksów. Kurtoza rozkładu gaussowskiego wynosi 3, a jej eksces 0. We wszystkich analizowanych przypadkach dziennych logarytmicznych stóp zwrotu eksces kurtozy jest znacznie większy od 0. Także dla większości tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu eksces kurtozy znacznie przewyższa eksces rozkładu gaussowskiego. Jedyne dla pięciu spośród analizowanych akcji (PKOBP, PKNORLEN, PGNIG, LOTOS, MOL) eksces kurtozy zawiera się między -1 i 1, a zatem można pokusić się o przypuszczenie, że dla wymienionych walorów nie będzie podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu. Analiza ekscesu kurtozy sugeruje, że stosowanie rozkładu normalnego do

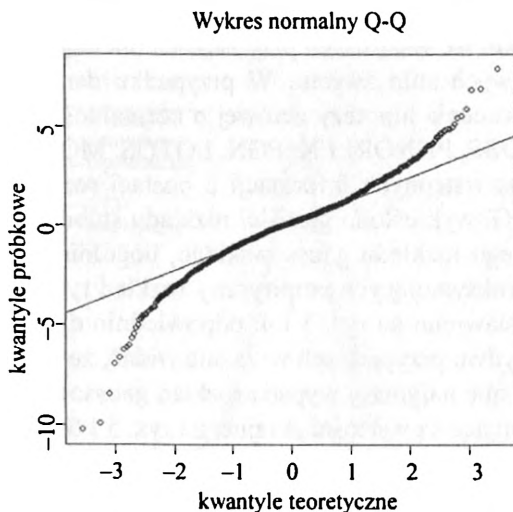
Tabela 2. Statystyki opisowe analizowanych szeregów dziennych i tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotów

Indeks/akcja	Dzienne				Tygodniowe			
	średnia	odchylenie standardowe	skośność	eksces kurtozy	średnia	odchylenie standardowe	skośność	eksces kurtozy
WIG	0,051	1,496	-0,349	3,840	0,239	3,442	-0,442	2,846
WIG20	0,034	1,863	-0,189	4,638	0,157	3,911	-0,142	1,734
WIG-informatyka	-0,008	1,917	0,028	2,881	-0,045	4,299	-0,213	1,777
WIG-telekomunikacja	-0,001	2,332	0,071	1,790	0,005	5,335	0,160	2,130
WIG-spożywczy	0,039	1,388	-0,392	5,791	0,199	3,146	-0,585	4,242
WIG-banki	0,082	1,609	-0,001	2,872	0,395	3,783	-0,487	3,432
WIG-budownictwo	0,065	1,558	-0,185	3,537	0,317	3,677	-0,206	5,112
MIDWIG	0,058	1,262	-0,562	6,043	0,289	3,039	-0,998	7,209
TECHWIG	0,011	2,157	0,061	3,363	0,050	5,103	0,551	4,689
KGHM	0,055	2,867	0,068	3,408	0,265	6,278	0,092	1,865
PKOBP	0,125	1,775	0,380	1,324	0,580	3,969	0,310	0,897
PEKAO	0,068	2,254	0,296	3,579	0,306	4,962	-0,011	4,245
TPSA	0,020	2,345	0,234	1,618	0,090	5,340	0,480	2,674
PKNORLEN	0,046	1,906	0,094	1,069	0,208	4,206	-0,100	0,641
BANKBPH	0,065	2,426	0,193	5,193	0,310	4,715	-0,084	1,260
PGNIG	-0,007	1,727	0,190	1,187	-0,086	3,449	0,057	-0,509
LOTOS	0,127	2,096	-0,383	2,365	0,634	4,800	0,148	-0,417
BZWBK	0,077	2,748	-0,267	6,266	0,368	5,772	0,301	3,387
TVN	0,245	2,024	-0,107	3,326	1,170	4,779	0,214	1,569
NETIA	-0,193	3,931	0,922	17,318	-0,917	10,054	-0,798	11,679
BIOTON	0,275	5,602	-7,956	126,887	1,051	12,475	-3,506	24,821
PROKOM	0,011	2,872	0,216	4,173	0,067	6,204	0,212	2,447
GTC	0,218	2,234	0,769	5,175	0,994	4,704	0,667	1,298
BRE	0,054	2,618	-0,003	3,595	0,250	5,682	-0,085	1,353
AGORA	-0,012	2,504	0,185	4,028	-0,077	6,107	0,388	2,883
MOL	0,083	2,236	-0,392	1,327	0,434	4,934	-0,048	-0,068
KĘTY	0,053	2,481	-0,139	6,160	0,266	5,124	-0,997	8,135
ORBIS	0,063	2,219	0,181	2,931	0,289	5,004	0,263	1,642
BORYSZEW	0,148	3,389	0,259	9,527	0,703	7,050	0,943	4,571

Źródło: opracowanie własne na podstawie [14].

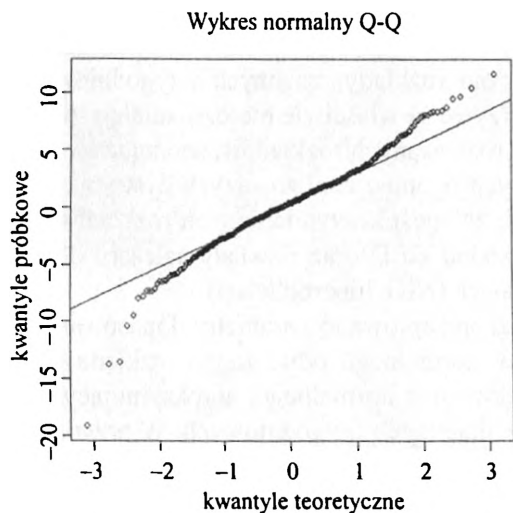
modelowania dziennych empirycznych stóp zwrotu jest obarczone dużym błędem i właściwe może być stosowanie rozkładów z grubymi ogonami.

W celu wstępnej analizy, czy rozkład empirycznych stóp zwrotu indeksu WIG może być modelowany za pomocą rozkładu normalnego, sporządzono wykresy kwantylowe. Zostały one umieszczone na rys. 1 i 2. Zarówno dla dziennych, jak i tygodniowych szeregów zwrotów widać wyraźne odchylenie zwrotów empirycznych od teoretycznych wartości rozkładu gaussowskiego. Nachylenia wykresów dla skrajnych obserwacji są mniejsze niż w obszarach środkowych, co oznacza, że



Rys. 1. Wykres kwantylowy dla dziennych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 2. Wykres kwantylowy dla tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu indeksu WIG20

Źródło: opracowanie własne.

dystrybuanty empiryczne zawierają większą masę prawdopodobieństwa na obszarach ekstremalnych niż dystrybuanta rozkładu normalnego.

Zgodność empirycznych zwrotów indeksów i akcji wymienionych w tab. 1 z rozkładem normalnym została przebadana przy użyciu testów Shapiro-Wilka



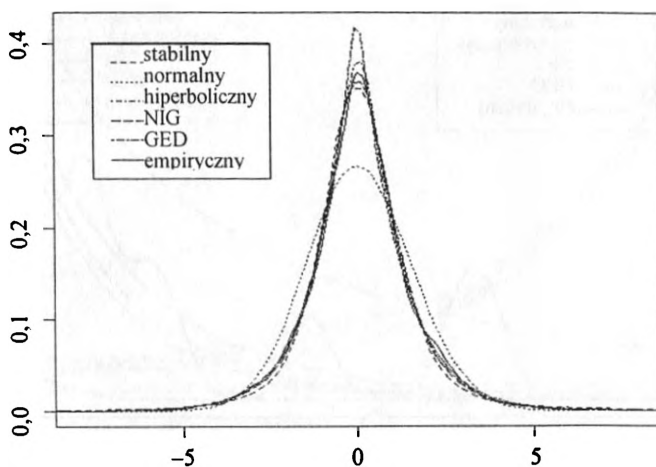
oraz Jarque-Bera [14]. Wyniki testów pozwoliły na odrzucenie hipotezy zerowej o normalności rozkładu we wszystkich przypadkach dla danych dziennych oraz dla większości tygodniowych stóp zwrotu. W przypadku danych tygodniowych nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej o normalności rozkładu dla jedynie pięciu walorów (PKOBP, PKNORLEN, PGN, LOTOS, MOL).

W celu uzyskania wstępnych informacji o postaci rozkładu logarytmicznych zwrotów indeksu WIG, wykreślono gęstości rozkładu stabilnego, hiperbolicznego, normalnego odwrotnego rozkładu gaussowskiego, uogólnionego rozkładu błędów oraz normalnego, aproksymujących empiryczny rozkład tychże zwrotów. Wymienione gęstości przedstawiono na rys. 3 i 4, odpowiednio dla zwrotów dziennych i tygodniowych. W obydwu przypadkach wyraźnie widać, że spośród wymienionych rozkładów zdecydowanie najgorzej wypada rozkład gaussowski. Ze względu na to, że najbardziej interesujące są wartości skrajne, na rys. 5 i 6 przedstawiono przybliżenie lewych ogonów analizowanych gęstości. Na wykresach tych można zaobserwować, że rozkłady empiryczne dziennych i tygodniowych stóp zwrotu indeksu WIG charakteryzują się grubymi ogonami. Ponadto, dla dziennych szeregów zwrotów można zauważyć, że empiryczne stopy zwrotu najlepiej aproksymują rozkłady należące do rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych (hiperboliczny, NIG).

Na wykresach przedstawiających dystrybuanty rozważanych rozkładów, aproksymujących empiryczne rozkłady dziennych i tygodniowych zwrotów indeksu WIG, poszczególne krzywe są właściwie nierozróżnialne. Aby dokładniej przeanalizować dopasowanie rozważanych rozkładów, sporządzono rys. 7 i 8, które zawierają przybliżenie lewych ogonów analizowanych dystrybuant. Na tych wykresach można zaobserwować, że spośród wymienionych rozkładów zdecydowanie najkorzystniej wypadają rozkład GED oraz rozkłady należące do rodziny uogólnionych rozkładów hiperbolicznych (NIG, hiperboliczny).

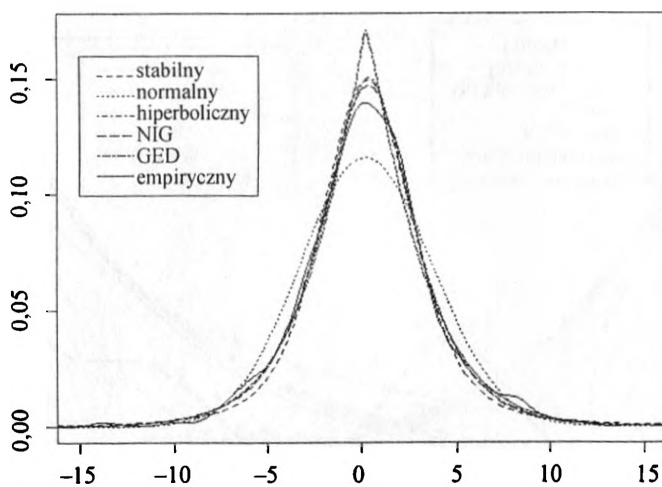
W tabelach 3 i 4 zaprezentowano parametry dopasowanych rozkładów: stabilnego, hiperbolicznego, normalnego odwrotnego rozkładu gaussowskiego, uogólnionego rozkładu błędów oraz normalnego, aproksymujących empiryczny rozkład zwrotów dla szeregów dziennych i tygodniowych. W przypadku rozkładów: hiperbolicznego, NIG oraz GED estymacji dokonano metodą największej wiarygodności [6; 10]. W celu oszacowania parametrów rozkładu stabilnego korzystano z metody kwantyla rozkładu [11]. Należy zaznaczyć, że dla tygodniowych szeregów zwrotów nie udało się oszacować parametrów analizowanych rozkładów dla niektórych z rozważanych walorów. Trzeba jednak zwrócić uwagę, że w przypadku tych akcji dla tygodniowych szeregów zwrotów nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o normalności rozkładu.

W celu porównania jakości dopasowania postulowanych rozkładów teoretycznych do rozkładów empirycznych zastosowano statystyki Kołmogorowa oraz Andersona-Darlinga.



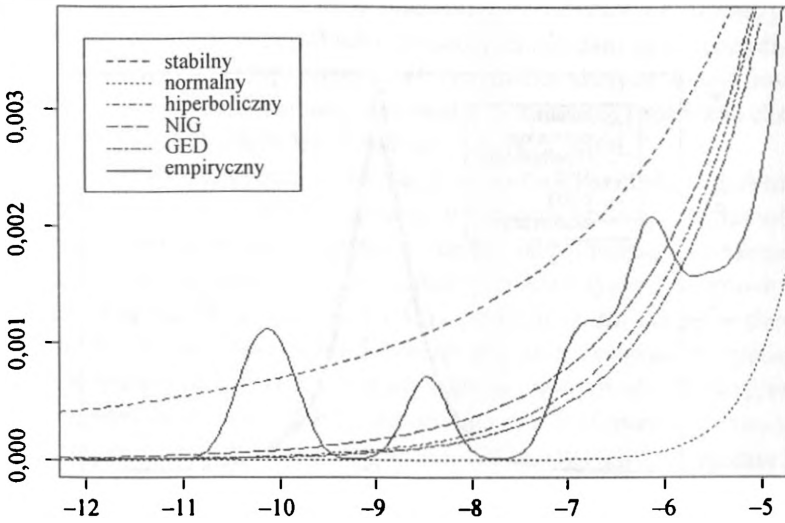
Rys. 3. Gęstość rozkładu stabilnego, normalnego, hiperbolicznego, NIG i GED, aproksymujących empiryczny rozkład dziennych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



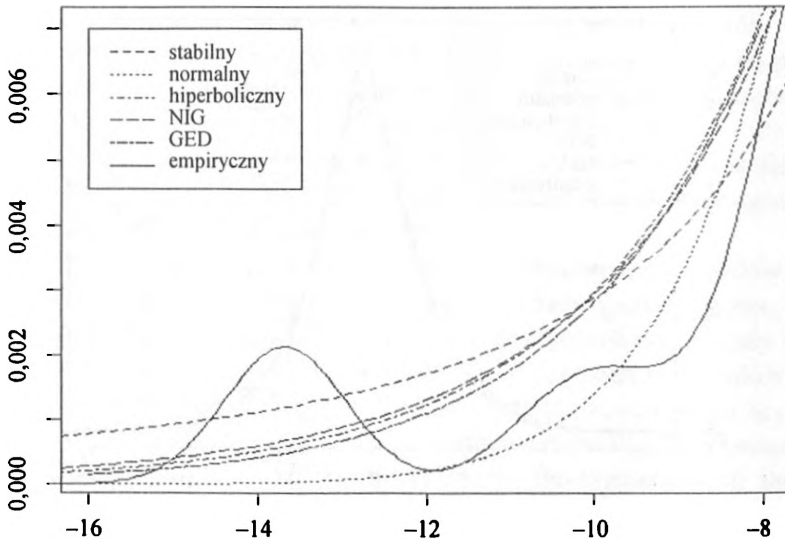
Rys. 4. Gęstość rozkładu stabilnego, normalnego, hiperbolicznego, NIG i GED, aproksymujących empiryczny rozkład tygodniowych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



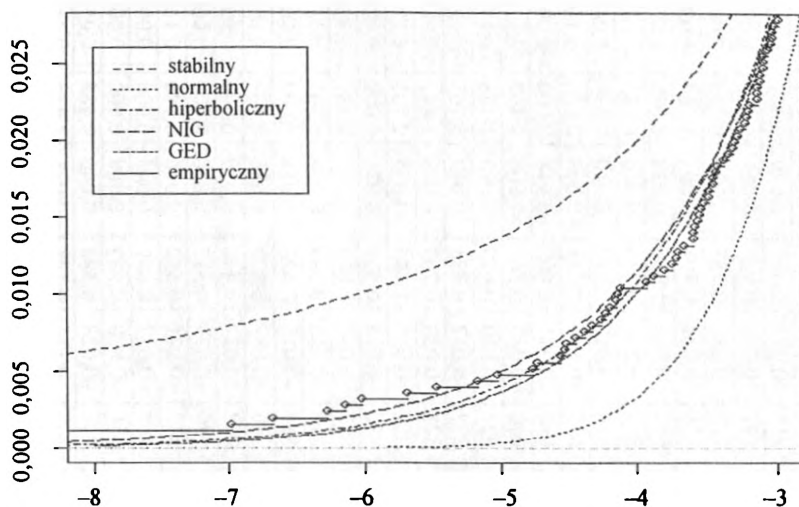
Rys. 5. Lewy ogon gęstości rozważanych rozkładów, aproksymujących empiryczny rozkład dziennych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



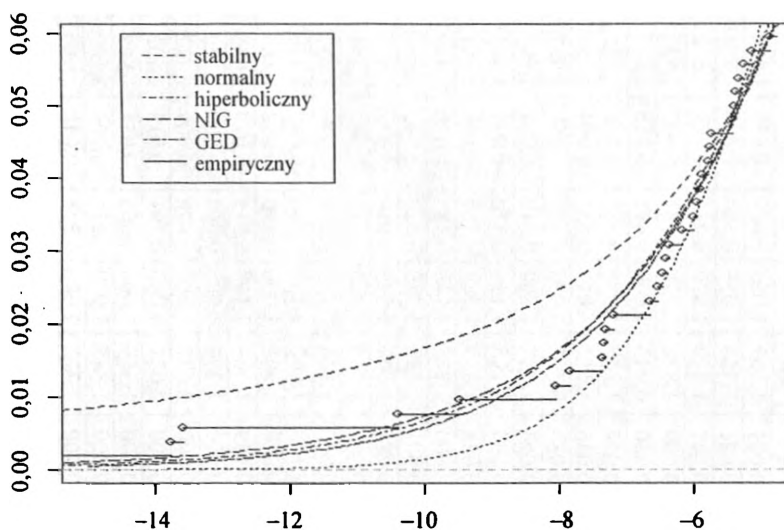
Rys. 6. Lewy ogon gęstości rozważanych rozkładów, aproksymujących empiryczny rozkład tygodniowych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 7. Lewy ogon dystrybuanty rozważanych rozkładów, aproksymujących empiryczny rozkład dziennych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 8. Lewy ogon dystrybuanty rozważanych rozkładów, aproksymujących empiryczny rozkład tygodniowych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 3. Parametry dopasowanych rozkładów dla dziennych logarytmicznych stóp zwrotu

Indeks/akcja	GIED					NIG					Rozkład stabilny					Rozkład hiperboliczny				
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}_p$	$\hat{p}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$			
WIG	0,071	1,103	1,065	0,622	-0,035	1,386	0,128	1,520	-0,018	0,815	0,074	1,005	-0,039	0,417	0,137					
WIG20	0,021	1,368	1,059	0,500	0,009	1,721	0,003	1,540	0,041	0,997	0,009	0,826	0,011	0,630	-0,005					
WIG-informatyka	0,047	1,377	1,020	0,411	-0,009	1,552	0,025	1,451	-0,013	0,972	0,054	0,753	-0,027	0,245	0,092					
WIG-telekomunikacja	-0,009	1,878	1,238	0,481	0,005	2,632	-0,027	1,653	0,007	1,366	-0,019	0,701	0,005	1,364	-0,030					
WIG-spożywczy	0,060	0,943	1,000	0,471	-0,016	0,917	0,072	1,385	0,020	0,640	0,056	1,066	-0,020	0,056	0,074					
WIG-banki	0,052	1,209	1,099	0,583	0,036	1,515	-0,012	1,526	0,117	0,867	0,019	0,936	0,036	0,483	-0,010					
WIG-budownictwo	0,046	1,112	1,011	0,531	0,004	1,294	0,055	1,586	-0,003	0,823	0,045	0,970	0,010	0,399	0,042					
MIDWIG	0,085	0,867	1,000	0,602	-0,067	0,927	0,163	1,486	-0,131	0,621	0,107	1,211	-0,068	0,228	0,157					
TECHWIG	0,054	1,497	1,000	0,310	-0,004	1,501	0,029	1,404	-0,058	1,015	0,071	0,669	-0,018	0,000	0,091					
KGHM	0,004	2,195	1,134	0,370	-0,004	3,005	0,090	1,652	0,071	1,640	-0,023	0,567	-0,008	1,497	0,116					
PKOBP	0,023	1,459	1,269	0,767	0,106	2,361	-0,204	1,590	0,129	1,021	-0,030	0,949	0,095	1,178	-0,175					
PEKAO	0,000	1,713	1,118	0,484	0,038	2,399	-0,123	1,660	0,172	1,277	-0,042	0,723	0,040	1,165	-0,129					
TPSA	-0,001	1,895	1,240	0,520	0,047	2,846	-0,236	1,634	0,099	1,378	-0,028	0,703	0,043	1,441	-0,218					
PKNORLEN	0,024	1,707	1,529	0,954	0,072	3,428	-0,214	1,907	0,437	1,267	-0,033	1,146	0,075	2,723	-0,223					
BANKBPH	0,000	1,700	1,000	0,344	0,004	2,013	0,040	1,587	0,009	1,282	-0,003	0,589	0,011	0,000	0,000					
PGNIG	0,000	1,326	1,121	0,536	0,044	1,637	-0,143	1,434	-0,094	0,923	0,025	0,864	0,040	0,535	-0,130					
LOTOS	0,123	1,662	1,196	0,563	-0,040	2,426	0,302	1,717	0,280	1,218	-0,056	0,799	-0,036	1,307	0,281					
BZWBK	0,000	1,901	1,000	0,290	0,002	2,163	0,064	1,491	0,037	1,387	-0,014	0,527	0,011	0,000	0,000					
TVN	0,139	1,560	1,138	0,513	0,079	2,035	-0,073	1,560	0,308	1,117	-0,082	0,800	0,086	0,954	-0,096					
NETIA	0,000	2,284	1,000	0,099	-0,007	1,520	-0,087	1,226	-0,052	1,262	0,023	0,440	-0,019	0,000	0,000					
BIOTON	0,000	2,677	1,000	0,078	0,009	1,722	0,083	1,202	0,145	1,530	-0,079	0,377	0,020	0,000	0,000					
PROKOM	0,000	2,031	1,000	0,291	0,018	2,402	-0,138	1,479	0,055	1,445	-0,021	0,512	0,016	0,490	-0,119					
GTC	0,000	1,569	1,000	0,365	0,031	1,809	0,061	1,527	0,128	1,160	-0,037	0,646	0,045	0,000	0,000					
BRE	0,000	1,845	1,000	0,314	0,004	2,169	0,030	1,506	0,024	1,356	-0,008	0,543	0,008	0,000	0,000					
AGORA	0,000	1,772	1,000	0,338	0,040	2,086	-0,258	1,499	0,084	1,276	-0,028	0,595	0,040	0,485	-0,252					
MOL	0,122	1,828	1,262	0,596	-0,085	2,899	0,500	1,656	-0,135	1,333	0,134	0,771	-0,071	1,613	0,434					
KĘTY	0,000	1,635	1,000	0,232	-0,003	1,459	0,069	1,385	0,026	1,082	-0,009	0,612	0,010	0,000	0,000					
ORBIS	0,000	1,642	1,069	0,439	0,046	2,133	-0,163	1,611	0,078	1,252	-0,021	0,685	0,046	0,695	-0,161					
BORYSZEW	0,000	2,101	1,000	0,115	0,012	1,493	-0,005	1,354	0,079	1,441	-0,036	0,478	0,017	0,000	0,000					

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].

Tabela 4. Parametry dopasowanych rozkładów dla tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu

Indeks/ akcja	GED				NIG				Rozkład stabilny				Rozkład hiperboliczny			
	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{p}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\delta}$	$\hat{\mu}$	
WIG	0,302	2,694	1,171	0,316	-0,021	3,709	0,481	1,543	-0,041	1,916	0,324	0,471	-0,023	1,810	0,508	
WIG20	0,188	3,264	1,321	0,326	-0,017	4,945	0,422	1,707	-0,008	2,362	0,180	0,451	-0,020	3,105	0,453	
WIG-informatyka	0,240	3,390	1,175	0,252	-0,056	4,417	0,954	1,687	-0,573	2,471	0,551	0,366	-0,060	1,596	1,029	
WIG-telekomunikacja	-0,119	3,956	1,066	0,162	0,006	4,695	-0,174	1,557	-0,126	2,957	-0,041	0,280	0,007	1,402	-0,186	
WIG-spożywczy	0,284	2,217	1,000	0,249	-0,017	2,450	0,367	1,557	-0,126	2,957	-0,041	0,487	-0,019	0,804	0,375	
WIG-banki	0,406	2,875	1,113	0,274	-0,010	3,869	0,543	1,525	0,030	1,996	0,342	0,417	-0,007	1,644	0,498	
WIG-budownictwo	0,131	2,609	1,000	0,234	0,032	3,063	-0,101	1,521	0,168	1,890	0,048	0,418	0,035	0,973	-0,127	
MIDWIG	0,344	2,138	1,000	0,297	-0,030	2,621	0,560	1,588	-0,124	1,659	0,387	0,507	-0,027	0,816	0,520	
TECHWIG	0,093	3,513	1,000	0,135	-0,013	3,495	0,389	1,460	-0,074	2,550	0,121	0,297	-0,022	0,669	0,562	
KGHM	0,322	5,013	1,212	0,169	-0,009	6,730	0,622	1,478	-0,189	3,448	0,496	0,250	-0,009	2,957	0,605	
PKOBP	0,563	3,447	1,392	0,484	0,063	7,321	-0,389	1,774	0,377	2,568	0,385	0,581	0,063	6,061	-0,377	
PEKAO	0,167	3,585	1,022	0,189	0,020	4,503	-0,168	1,613	0,250	2,701	0,022	0,315	0,023	1,680	-0,224	
TPSA	-0,001	4,000	1,083	0,189	0,014	5,322	-0,316	1,654	-0,012	2,920	0,007	0,284	0,012	1,732	-0,244	
PKNORLEN	0,221	3,690	1,449	0,401	-0,033	7,034	0,789	1,695	-0,401	2,721	0,291	0,484	-0,030	5,173	0,744	
BANKBPB	0,223	3,996	1,357	0,291	-0,002	6,471	0,348	1,694	0,043	2,856	-0,022	0,376	0,003	3,977	0,242	
PGNIG	-0,112	3,339	1,766	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	
LOTOS	0,504	4,471	1,598	4,183	2,850	37,369	-34,169	1,725	-0,084	3,200	0,270	5,576	0,125	126,527	-2,203	
BZWBK	0,098	4,295	1,072	0,169	0,013	5,571	-0,060	1,604	0,204	3,126	-0,140	0,260	0,015	1,629	-0,116	
TVN	0,658	3,442	1,000	0,144	0,034	3,293	0,364	1,235	0,237	2,010	0,491	0,316	0,066	0,000	-0,213	
NETIA	0,000	5,553	1,000	0,030	-0,010	2,981	0,119	1,141	-0,279	2,713	0,067	0,186	-0,024	0,000	0,495	
BIOTON	1,143	6,952	1,000	0,038	-0,005	4,855	1,664	1,405	-0,026	3,982	0,840	0,147	-0,001	0,000	1,143	
PROKOM	0,013	4,802	1,147	0,164	-0,013	6,282	0,552	1,554	-0,187	3,452	0,155	0,257	-0,014	2,908	0,608	
GTC	0,661	3,721	1,159	0,310	0,088	6,031	-0,791	1,677	0,513	2,946	0,182	0,396	0,080	3,644	-0,643	
BRE	0,184	4,574	1,226	0,197	0,001	6,448	0,231	1,619	0,034	3,375	-0,024	0,275	0,002	2,733	0,197	
AGORA	-0,452	4,292	1,000	0,125	0,023	4,553	-0,946	1,533	0,200	3,069	-0,619	0,241	0,028	0,436	-1,055	
MOL	0,440	4,917	1,953	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	brak możliwości dop. rozkładu	
KĘTY	0,000	3,537	1,000	0,156	-0,001	3,945	0,294	1,585	0,242	2,564	-0,141	0,300	0,006	1,080	0,120	
ORBIS	0,001	3,641	1,031	0,155	0,011	4,061	0,007	1,410	0,032	2,405	-0,023	0,280	0,011	0,000	0,000	
BORYSZEW	0,000	4,859	1,000	0,121	0,031	5,474	-0,751	1,499	0,285	3,658	-0,275	0,209	0,015	0,000	0,000	

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].

Statystyka Kołmogorowa ma postać:

$$K = \max_x h_K(x) = \max_x |F_i(x) - F_e(x)|, \quad (6)$$

gdzie  $F_i(x)$  oznacza postulowaną dystrybuantę teoretyczną,  $F_e(x)$  zaś dystrybuantę empiryczną. Statystyka ta sprawdza przede wszystkim zgodność rozkładów teoretycznego i empirycznego w okolicach mediany.

Wartości statystyk Kołmogorowa dla dopasowanych rozkładów dla dziennych i tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu przedstawiono w tab. 5 i 6. Dla każdej akcji i indeksu dokonano wyboru najlepiej dopasowanego rozkładu i zaznaczono

Tabela 5. Statystyki Kołmogorowa ( $K$ ) dla dopasowanych rozkładów dla dziennych logarytmicznych stóp zwrotu

Indeks/akcja	Statystyka Kołmogorowa				
	GED	NIG	stabilny	hiperboliczny	normalny
WIG	0,0140	0,0114	0,0144	<b>0,00873</b>	0,0572
WIG20	0,0191	<b>0,00786</b>	0,0130	0,0101	0,0558
WIG-informatyka	0,0266	<b>0,0180</b>	0,0284	0,0190	0,0748
WIG-telekomunikacja	0,0139	<b>0,00889</b>	0,00927	0,0103	0,0406
WIG-spożywczy	0,0149	<b>0,00795</b>	0,0160	0,0146	0,0830
WIG-banki	0,0123	0,0110	0,0132	<b>0,00679</b>	0,0590
WIG-budownictwo	0,0211	<b>0,0107</b>	0,0155	0,0132	0,0643
MIDWIG	0,0223	<b>0,0107</b>	0,0158	0,0177	0,0790
TECHWIG	0,0230	<b>0,0163</b>	0,0208	0,0182	0,0771
KGHM	0,0342	<b>0,0299</b>	0,0378	0,0314	0,0519
PKOBP	<b>0,0415</b>	0,0499	0,0492	0,0486	0,0757
PEKAO	<b>0,0351</b>	0,0387	<b>0,0351</b>	0,0381	0,0491
TPSA	0,0567	0,0488	0,0570	<b>0,0482</b>	0,0604
PKNORLEN	0,0357	<b>0,0337</b>	0,0369	0,0339	0,0393
BANKBPH	0,0404	0,0398	0,0440	<b>0,0363</b>	0,0604
PGNIG	0,0674	0,0516	0,0674	<b>0,0513</b>	0,0764
LOTOS	<b>0,0359</b>	0,0425	0,0525	0,0423	0,0501
BZWBK	<b>0,0366</b>	0,0487	0,0415	0,0436	0,0654
TVN	0,0435	0,0418	0,0578	<b>0,0407</b>	0,0721
NETIA	0,0727	<b>0,0444</b>	0,0727	0,0521	0,140
BIOTON	0,0820	0,0732	<b>0,0485</b>	0,0704	0,173
PROKOM	0,0444	0,0358	0,0444	<b>0,0357</b>	0,0726
GTC	0,0703	0,0732	0,0762	<b>0,0678</b>	0,0725
BRE	0,0497	0,0487	0,0515	<b>0,0463</b>	0,0646
AGORA	0,0554	0,0322	0,0554	<b>0,0301</b>	0,0732
MOL	<b>0,0256</b>	0,0321	0,0328	0,0317	0,0538
KĘTY	0,0584	0,0605	0,0601	<b>0,0517</b>	0,0967
ORBIS	0,0550	0,0531	0,0550	<b>0,0513</b>	0,0663
BORYSZEW	<b>0,150</b>	<b>0,150</b>	0,151	0,156	0,156
Liczba minimów	<b>6</b>	<b>11</b>	<b>2</b>	<b>12</b>	<b>0</b>

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].

Tabela 6. Statystyki Kołmogorowa ( $K$ ) dla dopasowanych rozkładów dla tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu

Indeks/akcja	Statystyka Kołmogorowa				
	GED	NIG	stabilny	hiperboliczny	normalny
WIG	0,0234	<b>0,0155</b>	0,0237	0,0159	0,0522
WIG20	0,0219	0,0206	<b>0,0171</b>	0,0216	0,0475
WIG-informatyka	0,0336	0,0233	0,0287	<b>0,0216</b>	0,0660
WIG-telekomunikacja	0,0205	<b>0,0139</b>	0,0281	0,0164	0,0629
WIG-spożywczy	0,0315	<b>0,0287</b>	0,179	0,0373	0,0941
WIG-banki	0,0221	0,0224	0,0252	<b>0,0214</b>	0,0677
WIG-budownictwo	0,0356	<b>0,0257</b>	0,0288	0,0303	0,0922
MIDWIG	0,0292	0,0225	0,0267	<b>0,0211</b>	0,0727
TECHWIG	0,0375	0,0338	<b>0,0321</b>	0,0360	0,479
KGHM	0,0229	0,0231	<b>0,0221</b>	0,0242	0,0536
PKOBP	0,0561	0,0545	0,0572	0,0542	<b>0,0512</b>
PEKAO	0,0281	0,0171	0,0188	<b>0,0167</b>	0,0633
TPSA	0,0366	<b>0,0335</b>	0,0366	0,0341	0,0658
PKNORLEN	<b>0,0227</b>	0,0288	0,0415	0,0280	0,0423
BANKBPH	<b>0,0299</b>	0,0373	0,0461	0,0356	0,0481
PGNIG	<b>0,0675</b>	brak	brak	0,0731	0,0742
LOTOS	0,0692	0,0719	<b>0,0664</b>	0,0842	0,0848
BZWBK	0,0264	0,0244	0,0353	<b>0,0220</b>	0,0622
TVN	0,0718	0,0604	0,0547	<b>0,0527</b>	0,0982
NETIA	0,101	<b>0,0248</b>	0,0290	0,0781	0,182
BIOTON	0,105	<b>0,0676</b>	0,106	0,106	0,178
PROKOM	0,0453	<b>0,0294</b>	0,0407	0,0311	0,0628
GTC	<b>0,0408</b>	0,0552	0,0766	0,0532	0,0752
BRE	<b>0,0191</b>	0,0223	0,0419	0,0223	0,0504
AGORA	0,0321	0,0216	0,0301	<b>0,0200</b>	0,0833
MOL	0,0486	brak	brak	<b>0,0454</b>	0,0478
KĘTY	0,0476	0,0387	0,0435	<b>0,0318</b>	0,0894
ORBIS	0,0315	0,0274	0,0477	<b>0,0255</b>	0,0880
BORYSZEW	<b>0,0624</b>	0,0736	0,0671	0,0989	0,102
Liczba minimów	6	8	4	10	1

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].

w tabeli wartość odpowiedniej statystyki pogrubioną czcionką. Jak wynika z tab. 5, dla dziennych stóp zwrotu analizowanych walorów w żadnym przypadku nie został wybrany rozkład normalny. Dla tygodniowych stóp zwrotu, jak można zauważyć w tab. 6, rozkład normalny został wybrany tylko raz (dla akcji PKOBP). Należy zaznaczyć, że dla wymienionego waloru podczas testowania normalności nie było podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej. W przeprowadzonych badaniach pod względem dopasowania rozkładów w okolicach mediany zdecydowanie najlepsze wyniki osiągnęto dla rozkładów z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych (NIG, hiperboliczny).



Wykresy funkcji  $h_K$  określającej dopasowanie rozkładów: NIG, hiperbolicznego, stabilnego, GED oraz normalnego do empirycznych dziennych i tygodniowych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG w okolicach mediany przedstawiono na rys. 9 i 10.

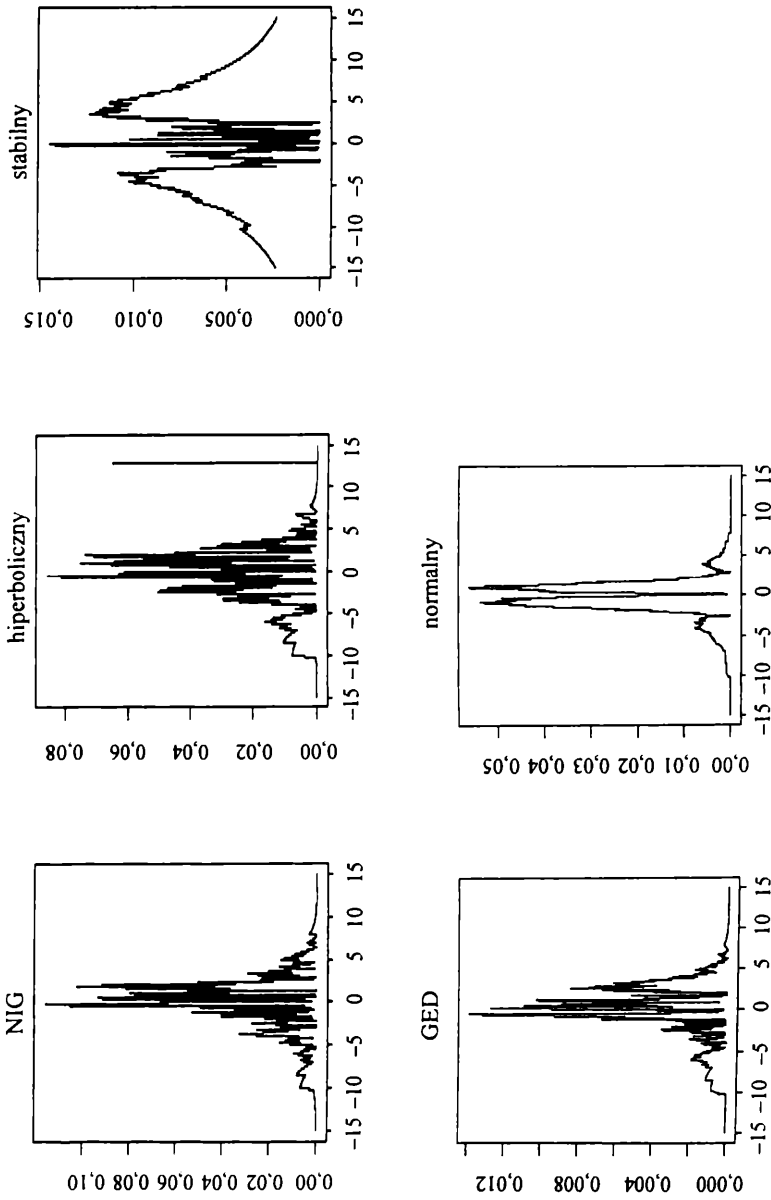
Jak już wspomniano, w celu porównania jakości rozkładu w okolicach wartości ekstremalnych, co związane jest z oszacowaniem maksymalnego ryzyka, posłużono się statystyką Andersona-Darlinga. Jest ona ważoną wersją statystyki Kołmogorowa, nadającą największe wagi obserwacjom ekstremalnym. Statystyka Andersona-Darlinga ma postać:

$$AD = \max_x h_{AD}(x) = \max_x \frac{|F_t(x) - F_e(x)|}{\sqrt{F_t(x)(1 - F_t(x))}}. \quad (7)$$

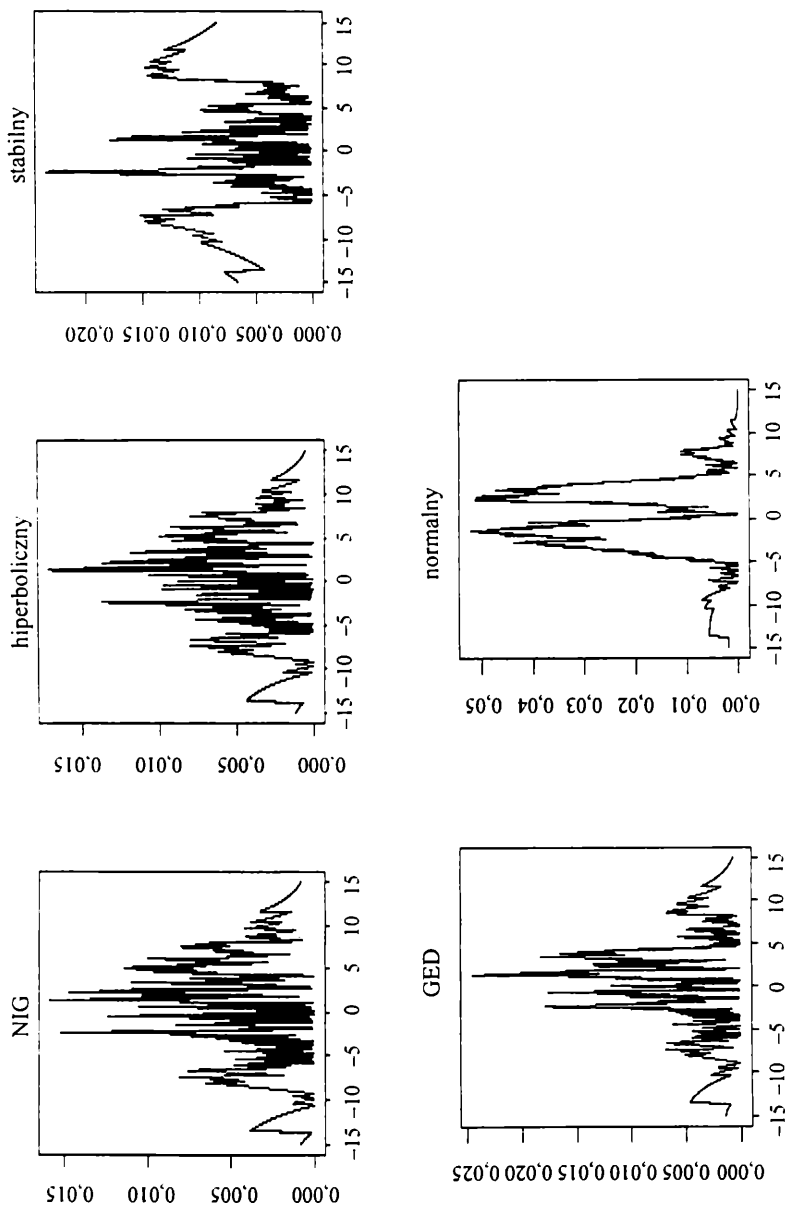
Im mniejsza wartość tejże statystyki, tym lepsze dopasowanie rozkładu do danych.

Wartości statystyk Andersona-Darlinga dla dopasowanych rozkładów dla dziennych i tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu zaprezentowano odpowiednio w tab. 7 i 8. Dla każdej akcji i indeksu dokonano wyboru najlepiej dopasowanego rozkładu i zaznaczono w tabeli wartość odpowiedniej statystyki pogrubioną czcionką. Analizując wyniki przedstawione w tych tabelach, można dostrzec, że w żadnym rozważanym przypadku nie wybrano rozkładu normalnego. Rozkład GED dawał wprawdzie zazwyczaj lepsze wyniki niż rozkład normalny, ale jednak zdecydowanie częściej wybierano rozkłady z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych lub rozkład stabilny. Jeśli chodzi o rozkład stabilny, to w przeprowadzonych badaniach dla szeregów tygodniowych dawał on lepsze dopasowania do rozkładów empirycznych podczas analizy w okolicach wartości ekstremalnych aniżeli w okolicach mediany. Jednakże w przypadku statystyki Andersona-Darlinga, podobnie jak dla statystyki Kołmogorowa, zdecydowanie najlepsze rezultaty osiągnano za pomocą rozkładów z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych (NIG, hiperboliczny).

Wykresy funkcji  $h_{AD}$  określającej dopasowanie rozkładów: NIG, hiperbolicznego, stabilnego, GED oraz normalnego do empirycznych dziennych i tygodniowych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG w okolicach wartości ekstremalnych przedstawiono na rys. 11 i 12.



Rys. 9. Wykres funkcji  $f_{t_k}$  określającej dopasowanie analizowanych rozkładów do empirycznych dziennych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG  
 Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Wykres funkcji  $h_k$  określającej dopasowanie analizowanych rozkładów do empirycznych tygodniowych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 7. Statystyki Andersona-Darlinga (*AD*) dla dopasowanych rozkładów dla dziennych logarytmicznych stóp zwrotu

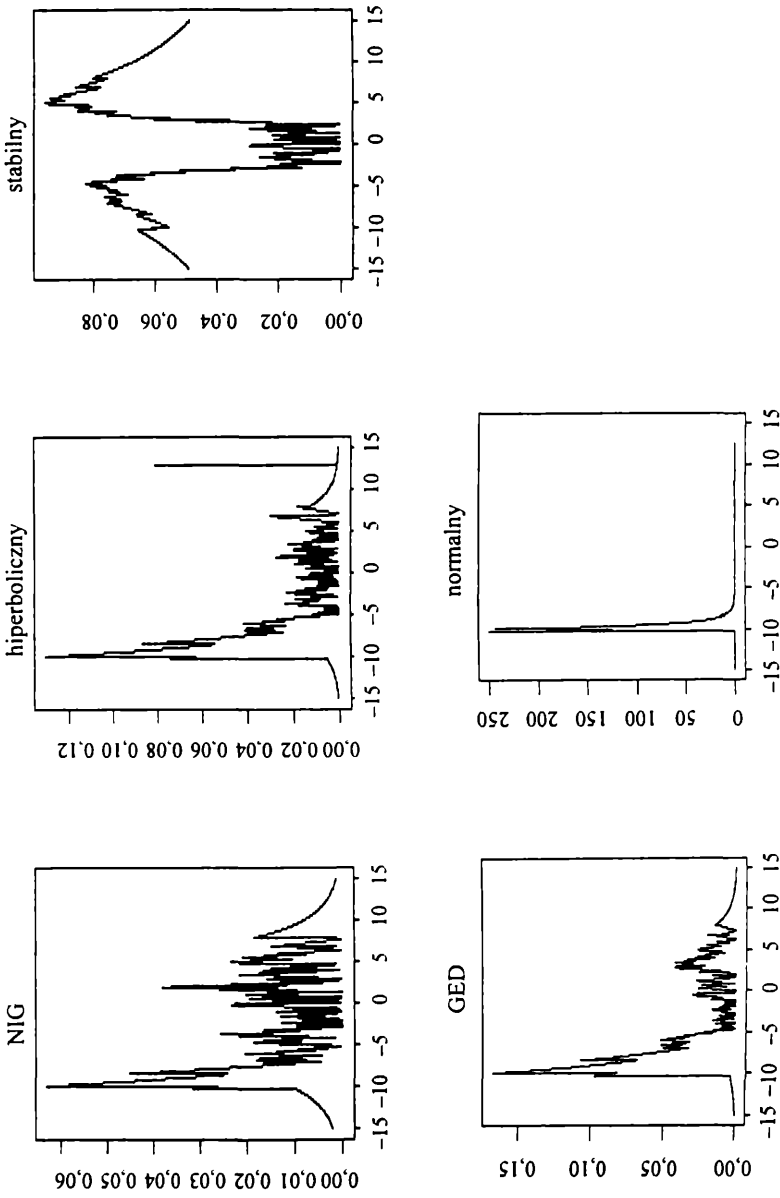
Indeks/akcja	Statystyka Andersona-Darlinga				
	GED	NIG	stabilny	hiperboliczny	normalny
WIG	0,168	<b>0,0630</b>	0,0961	0,131	$2,54 \cdot 10^2$
WIG20	0,168	<b>0,0732</b>	0,100	0,193	$3,54 \cdot 10^3$
WIG-informatyka	0,0661	0,0496	0,101	<b>0,0478</b>	9,93
WIG-telekomunikacja	0,0415	0,0400	0,0785	<b>0,0363</b>	0,216
WIG-spożywczy	0,212	<b>0,0438</b>	0,104	0,198	$6,72 \cdot 10^2$
WIG-banki	0,0790	<b>0,0431</b>	0,0942	0,0785	49,2
WIG-budownictwo	0,0548	<b>0,0394</b>	0,0786	0,0765	53,1
MIDWIG	0,201	<b>0,0323</b>	0,0749	0,186	$1,32 \cdot 10^4$
TECHWIG	0,0641	<b>0,0424</b>	0,0940	0,0798	2,18
KGHM	0,0689	<b>0,0599</b>	0,0757	0,0645	19,7
PKOBP	<b>0,0875</b>	0,0998	0,118	0,0972	0,611
PEKAO	<b>0,0761</b>	0,0774	0,070	0,0789	3,47
TPSA	0,113	0,0977	0,114	<b>0,0964</b>	0,359
PKNORLEN	0,105	<b>0,0698</b>	0,0737	0,0787	0,814
BANKBPH	0,0808	<b>0,0795</b>	0,0881	0,0852	41,9
PGNIG	0,135	0,103	0,135	<b>0,103</b>	0,216
LOTOS	0,162	<b>0,116</b>	0,154	0,141	1,62
BZWBK	0,233	<b>0,0974</b>	0,0830	0,269	$7,30 \cdot 10^4$
TVN	0,305	0,282	<b>0,116</b>	0,486	76,8
NETIA	1,81	<b>0,0889</b>	0,145	0,374	0,794
BIOTON	$3,29 \cdot 10^4$	1,83	<b>0,132</b>	$9,27 \cdot 10^4$	$1,73 \cdot 10^{24}$
PROKOM	0,0888	0,0715	0,0938	<b>0,0713</b>	86,3
GTC	0,141	0,147	0,153	<b>0,136</b>	0,552
BRE	0,0995	0,0973	0,103	<b>0,0927</b>	17,8
AGORA	0,111	<b>0,0646</b>	0,111	0,0938	39,0
MOL	0,109	<b>0,0677</b>	0,103	0,0741	0,483
KĘTY	<b>0,117</b>	0,121	0,120	0,125	96,6
ORBIS	0,110	<b>0,106</b>	0,110	0,103	5,70
BORYSZEW	0,795	<b>0,300</b>	0,302	1,07	1,17
Liczba minimów	3	17	2	7	0

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].

Tabela 8. Statystyki Andersona-Darlinga (AD) dla dopasowanych rozkładów dla tygodniowych logarytmicznych stóp zwrotu

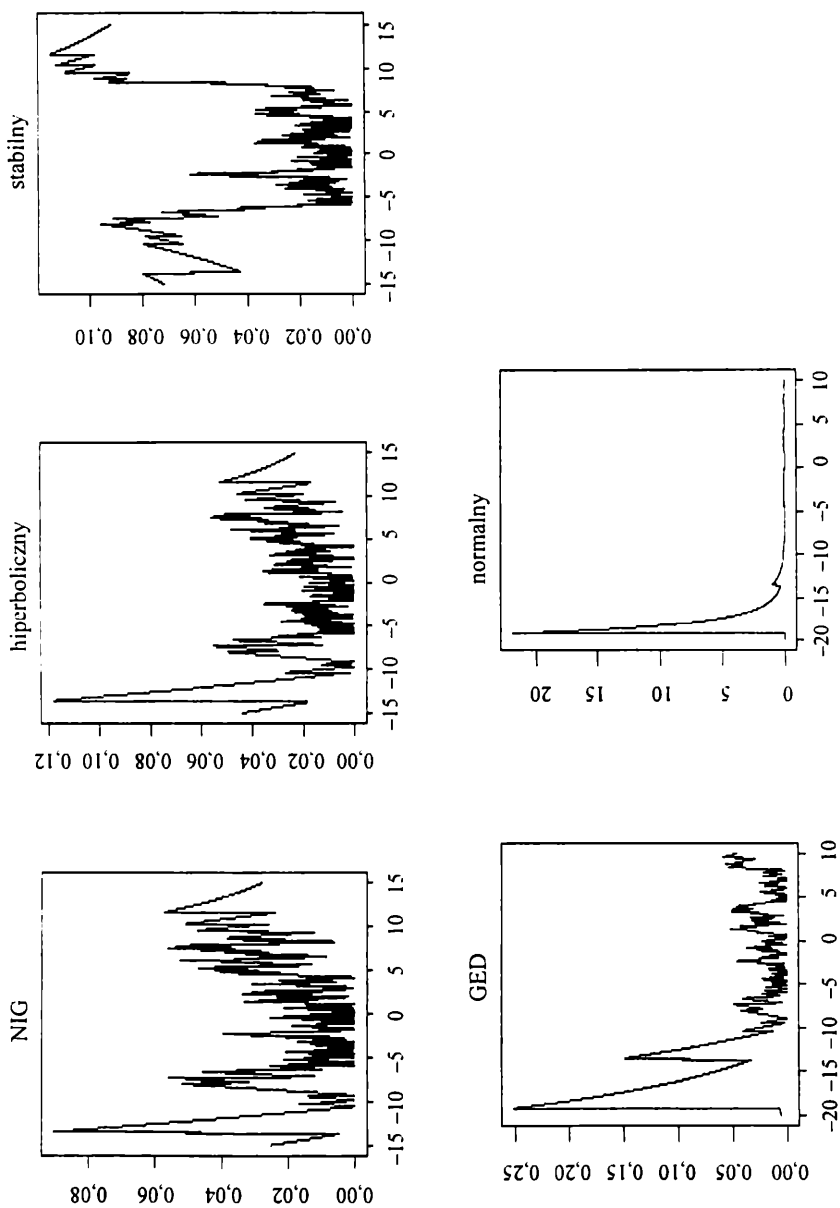
Indeks/akcja	Statystyka Andersona-Darlinga				
	GED	NIG	stabilny	hiperboliczny	normalny
WIG	0,253	<b>0,111</b>	0,115	0,173	22,1
WIG20	0,160	0,0844	<b>0,0784</b>	0,106	0,961
WIG-informatyka	0,136	0,0590	0,0911	<b>0,0587</b>	0,305
WIG-telekomunikacja	0,107	0,0945	<b>0,0920</b>	0,101	0,351
WIG-spożywczy	0,189	<b>0,0735</b>	0,378	0,211	47,2
WIG-banki	0,241	0,161	<b>0,109</b>	0,229	7,00
WIG-budownictwo	0,275	0,257	<b>0,100</b>	0,594	$3,20 \cdot 10^2$
MIDWIG	0,596	0,232	<b>0,103</b>	0,653	$9,04 \cdot 10^3$
TECHWIG	0,142	0,0941	<b>0,0851</b>	0,213	0,292
KGHM	0,0854	0,0827	0,121	<b>0,0774</b>	0,293
PKOBP	0,150	0,148	0,156	<b>0,147</b>	0,227
PEKAO	0,115	0,140	<b>0,0895</b>	0,205	3,94
TPSA	0,0979	<b>0,0811</b>	0,0926	0,0870	0,997
PKNORLEN	0,107	0,101	0,122	<b>0,0997</b>	0,159
BANKBPH	0,111	<b>0,0887</b>	0,0995	0,0978	0,352
PGNIG	<b>0,139</b>	brak	brak	0,148	0,150
LOTOS	<b>0,139</b>	0,153	0,172	0,169	0,170
BZWBK	0,0747	<b>0,0570</b>	0,0963	0,0644	0,516
TVN	<b>0,157</b>	0,174	0,182	0,263	0,340
NETIA	1,42	<b>0,0745</b>	$8,17 \cdot 10^2$	0,824	58,3
BIOTON	8,60	0,392	<b>0,230</b>	9,44	$1,16 \cdot 10^4$
PROKOM	0,0970	<b>0,0649</b>	0,108	0,0691	0,238
GTC	0,109	0,112	0,154	<b>0,108</b>	0,213
BRE	0,0811	<b>0,0610</b>	0,108	0,0641	0,535
AGORA	0,113	0,102	<b>0,0976</b>	0,125	0,558
MOL	0,158	brak	brak	<b>0,150</b>	0,156
KĘTY	0,687	0,250	<b>0,0979</b>	1,06	$2,30 \cdot 10^4$
ORBIS	0,0817	0,0652	0,145	<b>0,0559</b>	0,287
BORYSZEW	0,169	0,147	<b>0,134</b>	0,198	4,28
Liczba minimów	3	8	11	7	0

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem [14].



Rys. 11. Wykres funkcji  $h_{AD}$  określającej dopasowanie analizowanych rozkładów do empirycznych dziennych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 12. Wykres funkcji  $h_{AID}$  określającej dopasowanie analizowanych rozkładów do empirycznych tygodniowych logarytmicznych zwrotów indeksu WIG

Źródło: opracowanie własne.

## 5. Podsumowanie

Przeprowadzone w niniejszej pracy badania potwierdzają, iż wykorzystywanie rozkładu normalnego do modelowania stóp zwrotu na polskim rynku kapitałowym wydaje się nieuprawnione. Statystyczna analiza szeregów stóp zwrotu poza szczególnymi przypadkami całkowicie odrzuca normalność, potwierdzając zarazem hipotezę o istnieniu w rozkładach empirycznych stóp zwrotu grubych ogonów. W tej sytuacji nasuwa się kolejne pytanie o wybór najlepszego rozkładu, tj. rozkładu prawdopodobieństwa, który najlepiej potrafi uchwycić własności probabilistyczne aktywów notowanych na GPW w Warszawie. Na podstawie przeprowadzonej w niniejszej pracy analizy można zasugerować, że rozkłady z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych (NIG, hiperboliczny) precyzyjniej od rozkładu stabilnego oraz rozkładu GED oddają własności empirycznych stóp zwrotu. Szczególnie przekonujące wyniki potwierdzające ten fakt otrzymano, analizując dopasowanie rozkładów teoretycznych do empirycznych w okolicy mediany. Po przeniesieniu analizy w okolice ogonów rozkładów, przydatność rozkładu stabilnego staje się nieco bardziej widoczna dla zwrotów tygodniowych, choć nadal zdecydowanie częściej dopasowywano rozkład hiperboliczny. Do hipotezy o hiperboliczności stóp zwrotu na polskim rynku kapitałowym powinno się podejść bardzo ostrożnie, ponieważ przedstawione badania należy traktować jedynie jako badania pilotażowe. W celu potwierdzenia tej hipotezy trzeba byłoby przebadanie zdecydowanie większą liczbę walorów, a także przeanalizować szeregi stóp zwrotu różnej długości w różnych okresach notowań. Ze względu na uzyskane wyniki należałoby na polskim rynku podjąć próbę wykorzystania modeli finansowych opartych na rozkładach z klasy uogólnionych rozkładów hiperbolicznych. Jednak dopiero praca empiryczna pozwoli zweryfikować, czy zastosowanie hipotezy o hiperboliczności stóp zwrotu na polskim rynku kapitałowym do modelowania finansowego implikuje lepsze wyniki od modelu gaussowskiego. Na razie odpowiedź na to pytanie pozostaje otwarta.

## Literatura

- [1] Barndorff-Nielsen O.E., *Exponentially decreasing distributions for the logarithm of particle size*, „Proceedings of the Royal Society”, London 1977, A 353,
- [2] Barndorff-Nielsen O.E., *Normal Inverse Gaussian Processes and the Modelling of Stock Returns*, Research Report 300, Department of Theoretical Statistics, University of Aarhus, 1995.
- [3] Chiodi M., *Le curve normali di ordine  $p$  come distribuzioni di errori accidentali: una rassegna dei risultati e problemi aperti per il caso univariato e per quello multivariato*, Atti della XL Riunione Scientifica SIS, Firenze 26-28, s. 289–300, 2000.



- [4] Eberlein E., Keller U., *Hyperbolic distributions in finance*, „Bernoulli” 1994, no. 1.
- [5] Fama E., *The behaviour of stock market prices*, „Journal of Business” 1965, no. 38.
- [6] Koponen I., *Analytic approach to the problem of convergence of truncated Levy flights towards the Gaussian stochastic process*, „Physical Review” 1995, no. 52, s. 1197-1199.
- [7] Kuchler U., Neumann K., Sorensen M., Streller A., *Stock returns and hyperbolic distributions*, „Mathematical and Computer Modelling” 1999, no. 29, s. 1-15.
- [8] Lunetta G., *Di una generalizzazione dello schema della curva normale*, Annali della Facoltà di Economia e Commercio di Palermo 1963, vol. 17, no. 2, s. 235-244.
- [9] Mandelbrot B., *The variation of certain speculative process*, [w:] P.H. Cootner (red.), *The Random Character of Stock Market Prices*, MIT Press, Cambridge 1964.
- [10] Mineo A.M., *La migliore combinazione delle osservazioni: curve normali di ordine  $p$  e stimatori di norma  $L_p$* , PhD thesis, 1996.
- [11] Novak S.Y., *Inference on heavy tails from depend data*, „Siberian Adv. Math.” 2002, vol. 2, no. 2, s. 73-96.
- [12] Peters E.E., *Teoria chaosu a rynki kapitałowe*, Wig Press, Warszawa 1997.
- [13] Samorodnitsky G., Taquq M.S., *Stable Non-Gaussian Random Processes*, Chapman & Hall, New York 1994.
- [14] Tomasik E., Echaust K., *Wybrane rozkłady prawdopodobieństwa w modelowaniu empirycznych stóp zwrotu akcji notowanych na GPW w Warszawie*, [w:] W. Sikora (red.), *Z prac Katedry Badań Operacyjnych*, Zeszyt Naukowy Akademii Ekonomicznej w Poznaniu, (w druku).
- [15] Vianelli S., *La misura della variabilità condizionata in uno schema generale delle curve normali di frequenza*, „Statistica” 1963, vol. 33, s. 447-474.
- [16] Venter J.H., de Jongh P.J., *Risk estimation using the Normal Inverse Gaussian distribution*, „The Journal of Risk” 2002, vol. 4, s. 1-23.

## DISTRIBUTION OF PROBABILITIES OF RATES OF RETURNS OF INDICES AND SHARES QUOTED ON THE WARSAW STOCK EXCHANGE

### Summary

In the article, the author presented an analysis of fitting the following distributions: normal, stable, hyperbolic, normal inverse Gaussian, and general error distributions to the series of rates of returns of selected indices and shares included in WIG20 index on the WSE, quoted in the period 31st Dec. 1996 - 2nd Jan. 2007. Daily and weekly log-returns were analyzed. The study showed that the empirical rates of returns of analyzed assets have not got normal distribution and that the distributions from the family of generalized hyperbolic distributions (hyperbolic, NIG) are the best reflecting the characteristics of real rates of returns analyzed in this paper. However, the outcomes should be treated with caution, as there were performed only pilot studies in this matter.