PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Wojciech Otto
Uniwersytet Warszawski

WIELOWYMIAROWY MODEL TEORII ZAUFANIA Z ZASTOSOWANIEM DO UBEZPIECZEŃ GRUPOWYCH NA ŻYCIE[1]

1. Wstęp

Artykuł poświęcony jest prezentacji podstaw wielowymiarowej teorii zaufania (*credibility theory*) w języku, którym zazwyczaj posługują się ekonometrycy. Wykład podstawowy na temat wielowymiarowej teorii zaufania można znaleźć w książce Bühlmanna i Gislera [1], a wykorzystane techniki ekonometryczne łatwo znaleźć w wielu podręcznikach ekonometrii, jak np. w książce Greena [2]. Użycie języka ekonometrii ułatwia zrozumienie wielu problemów prezentowanych w literaturze często w sposób dość zawiły, a w niektórych przypadkach ułatwia wręcz znalezienie sensownych rozwiązań problemów, których nastręczają wielowymiarowość oraz odejście od nierealistycznych założeń najprostszych modeli. Jest oczywiste, że trafny dobór założeń modelu ma ogromny wpływ na błędy dokonywanych predykcji. Trudno jednak o trafności założeń mówić bez sprecyzowania, co jest obiektem modelowania. W artykule przykładowym obiektem modelowania jest ubezpieczenie grupowe na życie, które w warunkach polskich stanowi chyba najwdzięczniejsze pole zastosowań wielowymiarowej teorii zaufania. Oryginalne w niniejszym artykule są te problemy i rozwiązania, które wynikły ze szczególnych założeń przyjętych w związku z tym właśnie zastosowaniem.

W praktyce ubezpieczenie grupowe na życie to w istocie pakiet ubezpieczeń od różnych rodzajów ryzyka, takich jak:

[1] Artykuł powstał w związku z ekspertyzą sporządzoną przez autora dla PZU Życie SA i stanowi rozwiniętą wersję referatu prezentowanego na Ogólnopolskiej Konferencji Naukowej „Statystyka Aktuarialna – Teoria i Praktyka" we Wrocławiu, 21-23 maja 2007.

- zgon głównego ubezpieczonego,
- zgon ubezpieczonego w wyniku nieszczęśliwego wypadku,
- zgon małżonka,
- zgon małżonka spowodowany nieszczęśliwym wypadkiem,
- zgon rodzica lub teścia,
- zgon dziecka,
- urodzenie dziecka,
- osierocenie dziecka,
- inne (np. różne elementy ubezpieczeń wypadkowych i zdrowotnych).

Ubezpieczenie sprzedawane jest pracownikom zakładów pracy, przy czym warunki, na których dochodzi do zawarcia kontraktu, to na ogół:

- objęcie ubezpieczeniem odpowiednio dużego odsetka pracowników,
- składka, lista rodzajów ryzyka objętych ubezpieczeniem oraz odpowiadające im sumy ubezpieczenia są dla wszystkich pracowników objętych umową takie same

Pod presją konkurencji ubezpieczyciele odstępują często od ścisłego zachowania tych warunków, narażają się jednak wtedy na nasilenie zjawiska negatywnej selekcji ryzyk. Nad negatywną selekcją trudno w inny sposób zapanować, ponieważ informacje na temat osób objętych ubezpieczeniem są zazwyczaj bardzo skromne, w związku z czym kalkulacja składki nie opiera się na cechach indywidualnych ubezpieczonych. Umowy obejmują okres roku, a ich warunki (składki, lista rodzajów ryzyka, sumy ubezpieczenia) są corocznie renegocjowane. Te zasady i ograniczenia stwarzają naturalne warunki do stosowania metod kalkulacji składki opartych na teorii zaufania, przy czym:

- kalkulacja składki powinna się opierać na predykcji łącznej wartości szkód z każdego rodzaju ryzyka i odnosić się do ryzyka w przeliczeniu na jednostkę sumy ubezpieczenia, ubezpieczyciel bowiem musi być gotów do wyceny kontraktu przy zmodyfikowanej (w stosunku do poprzedniego roku) liście rodzajów ryzyka oraz przy zmodyfikowanych sumach ubezpieczenia,
- metoda predykcji powinna uwzględniać naturalne przypuszczenie, że między łączną wartością szkód z poszczególnych rodzajów ryzyka mogą zachodzić silne zależności.

Powyższe argumenty przemawiają za wyborem modeli wielowymiarowych. Rozstrzygnięcia dotyczące konkretnego wariantu założeń probabilistycznych (a takich wariantów można rozważać bardzo wiele) dokonano ze względu na charakter dostępnych danych statystycznych, a przede wszystkim:

- niewielką liczbę lat obserwacji,
- wielką liczbę obserwowanych kontraktów (zakładów pracy).

2. Wielowymiarowy model teorii zaufania - wariant uproszczony

W uproszczonym wariancie wielowymiarowego modelu teorii zaufania przyjmować będziemy następujące oznaczenia i założenia:

I. Θ_1, Θ_2, ..., Θ_J to niezależne zmienne losowe o tym samym rozkładzie – nieobserwowalne parametry ryzyka charakteryzujące kontrakty o numerach $j = 1, 2, \ldots, J$.

II. $m_{j,t}$ to liczba jednostek ryzyka (dodatnia), taka sama dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, K$ rodzajów ryzyka w ramach j-tego kontraktu w t-tym roku.

III. $X_{j,t}^{(k)}$ to średnia wartość szkód na jednostkę ryzyka dla sumy ubezpieczenia równej jeden dla k-tego rodzaju ryzyka, w t-tym roku j-tego kontraktu.

IV. $\mathbf{X}_{j,t} = \left[X_{j,t}^{(1)} \;\; X_{j,t}^{(2)} \;\; \ldots \;\; X_{j,t}^{(K)}\right]$ to wektor $(1 \times K)$ obserwacji na j-tym kontrakcie w t-tym roku, $j = 1, 2, \ldots, J$, $t = 1, 2, \ldots, T$.

V. $\mathrm{E}\left(\mathbf{X}_{j,t} \middle| \Theta_j\right) = \mu(\Theta_j) = \left[\mu^{(1)}(\Theta_j) \;\; \mu^{(2)}(\Theta_j) \;\; \ldots \;\; \mu^{(K)}(\Theta_j)\right]$ to wektor $(1 \times K)$ warunkowych wartości oczekiwanych.

VI. $\mathrm{E}\left(\mu(\Theta_j)\right) = \mu = \left[\mu^{(1)} \;\; \mu^{(2)} \;\; \ldots \;\; \mu^{(K)}\right]$ to wektor $(1 \times K)$ bezwarunkowych wartości oczekiwanych.

VII. $\mathrm{cov}\left(\mathbf{X}_{j,t} \middle| \Theta_j\right) = \mathrm{E}\left[\left(\mathbf{X}_{j,t} - \mu(\Theta_j)\right)'\left(\mathbf{X}_{j,t} - \mu(\Theta_j)\right) \middle| \Theta_j\right] = \mathrm{U}(\Theta_j) + \frac{1}{m_{j,t}} \mathrm{V}(\Theta_j)$

to macierz $(K \times K)$ kowariancji warunkowych w ramach tego samego roku i kontraktu, przy czym zakładamy że $\mathrm{V}(\Theta_j)$ jest nieosobliwa.

VIII. $\mathrm{cov}\left(\mathbf{X}_{j,t}, \mathbf{X}_{i,s} \middle| \Theta_j, \Theta_i\right) = 0$ jeśli tylko $j \neq i$ lub $t \neq s$.

IX. $\mathbf{U} = \mathrm{E}\left[\mathrm{U}(\Theta_j)\right]$, $\mathbf{V} = \mathrm{E}\left[\mathrm{V}(\Theta_j)\right]$ to oczekiwane (w przekroju kontraktów) komponenty macierzy kowariancji warunkowych.

X. $\mathbf{A} = \mathrm{E}\left[\left(\mu(\Theta_j) - \mu\right)'\left(\mu(\Theta_j) - \mu\right)\right]$ to nieosobliwa macierz kowariancji warunkowych wartości oczekiwanych kontraktowych wokół ogólnej wartości oczekiwanej.

W powyższych dziesięciu punktach nieco przemieszane są oznaczenia i założenia. Pierwszy punkt zawiera bardzo typowe założenie, iż obserwowane przez nas kontrakty stanowią rezultat przypadkowego losowania z pewnej populacji kontraktów.

Drugie założenie jest wygodnym uproszczeniem, dzięki któremu wiele wyników uzyskuje prostą i czytelną postać. W rzeczywistości założenie to najczęściej nie jest spełnione, toteż w dalszych partiach tekstu zostanie ono uchylone.

Punkty III-VI to w zasadzie typowe oznaczenia, jedyna istotna informacja to to że dopuszczamy, aby liczby lat obserwacji T_j dla poszczególnych kontraktów były różne.

Istotne *novum* w stosunku do najprostszych modeli tkwi w założeniu VII. W wersji podręcznikowej najczęściej przyjmuje się, że wahania wypłat z różnych rodzajów ryzyka dla jednej jednostki wokół wektora warunkowych wartości oczekiwanych $\mu(\Theta_j)$ mają macierz kowariancji $\mathrm{V}(\Theta_j)$, oraz że dla różnych jednostek ryzyka w ramach tego samego roku i kontraktu są one niezależne, a stąd średnia ich wartość $\mathbf{X}_{j,t}$ ma macierz kowariancji $m_{j,t}^{-1}\mathrm{V}(\Theta_j)$. Bardziej realistyczne wydaje się założenie, że oprócz warunkowej wartości oczekiwanej $\mu(\Theta_j)$ niezmiennej dla danego kontraktu w kolejnych latach występuje jeszcze pewien dodatkowy składnik specyficzny dla roku obserwacji, zwiększający lub zmniejszający wartość szkód równolegle dla wszystkich jednostek ryzyka danego kontraktu. Założenie VII oznacza, że przyjmujemy istnienie takiego składnika o macierzy kowariancji $\mathrm{U}(\Theta_j)$. Dla uproszczenia przyjmujemy jednak (założenie VIII), że składnik ten jest odmienny dla różnych kontraktów (naturalne) oraz że jego realizacje w kolejnych latach tego samego kontraktu są nieskorelowane (to już jest uproszczenie). Wybór takiego właśnie wariantu założeń podyktowany był nie tyle realizmem (różne inne założenia mogą się wydawać bardziej realistyczne), ile raczej tym, pod jakim względem dostępne dane są obfite, a pod jakim ubogie:

- z jednej strony bardzo duża liczba J obserwowanych kontraktów oraz duże zróżnicowanie liczebności osób nimi objętych (wartości $m_{j,t}$ od kilkunastu do ponad tysiąca) pozwala liczyć na to, że postać funkcyjna zależności wariancji od liczby jednostek ryzyka da się z sensowną precyzją odtworzyć, nie ma więc powodu przyjmować zbyt restryktywnych założeń w tym zakresie, np. takich, że wariancja jest proporcjonalna do $m_{j,t}^{-1}$,
- z drugiej strony uproszczenie (zerowe autokorelacje) wydaje się uzasadnione niewielką szansą na potwierdzenie empiryczne bardziej wyrafinowanej zależności w sytuacji, gdy liczba lat obserwacji jest niewielka.

Niezależnie od tego, które dane empiryczne są skąpe, a które obfite, zbytnią restryktywność modelu, w którym występuje jedynie składnik macierzy kowariancji postaci $m_{j,t}^{-1}\mathrm{V}(\Theta_j)$, łatwo można wykazać ze względu na szczególny rodzaj ubezpieczenia. Dla większości rozważanych rodzajów ryzyka mamy bowiem prosty rozkład wartości szkody: szkoda wynosi albo jeden, albo zero. Jeśli mamy $m_{j,t}^{(k)}$ niezależnych zmiennych losowych o rozkładach dwumianowych takich, że średnie prawdopodobieństwo zajścia szkody wynosi $\mu_j^{(k)}(\Theta_j)$, a te rodzaje ryzyka są (warunkowo) niezależne, to wariancja ich średniej wartości powinna być nie większa niż

$$\left(m_{j,t}^{(k)}\right)^{-1}\mu_j^{(k)}\left(\Theta_j\right)\left(1-\mu_j^{(k)}\left(\Theta_j\right)\right),$$

a z tego można łatwo wyprowadzić nierówności, które na etapie wnioskowania o parametrach modelu mogą być łatwo testowane, nawet jeśli liczba lat obserwacji T_j dla każdego $j = 1, 2, \ldots, J$ jest niewielka.

2.1. Predyktor homogeniczny wektora $\mu(\Theta_j)$ w modelu uproszczonym

Najlepszym nieobciążonym predyktorem wektora $\mu(\Theta_j)$ wśród liniowych funkcji bez wyrazu wolnego (tzw. homogenicznych) obserwacji $X_{j,1}$, $X_{j,2}$, ..., X_{j,T_j} jest predyktor postaci:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \sum_{t=1}^{T_j} X_{j,t}\left(\mathbf{U}+\frac{1}{m_{j,t}}\mathbf{V}\right)^{-1}\left\{\sum_{\tau=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}+\frac{1}{m_{j,\tau}}\mathbf{V}\right)^{-1}\right\}^{-1}, \tag{1}$$

z macierzą kowariancji błędów predykcji $\mathbf{W}_j := \mathrm{E}\left[\left(\overline{\mathbf{X}}_j-\mu(\Theta_j)\right)'\left(\overline{\mathbf{X}}_j-\mu(\Theta_j)\right)\right]$ daną wzorem:

$$\mathbf{W}_j = \left\{\sum_{t=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}+\frac{1}{m_{j,t}}\mathbf{V}\right)^{-1}\right\}^{-1}. \tag{2}$$

Uzasadnienie predyktora homogenicznego można oprzeć na spostrzeżeniu, że związek obserwacji z prognozowanym wektorem $\mu(\Theta_j)$ spełnia założenia tzw. *seemingly unrelated regressions model*[2] o postaci:

[2] W naszej specyfikacji w jednym bloku znajdują się obserwacje na wszystkich K rodzajach ryzyka, bloki zaś dotyczą kolejnych okresów czasu. Typowa podręcznikowa specyfikacja (por. [2]) w jednym bloku zamieszcza obserwacje z kolejnych okresów, a bloki dotyczą kolejnych rodzajów ryzyka. Wtedy lepiej widać, że jest to zespół K regresji, każda zawierająca wyłącznie wyraz wolny, o wartości w k-tym równaniu regresji równej $\mu^{(k)}(\Theta_j)$.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_{j,1} \\ \mathbf{X}'_{j,2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'_{j,T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{I} \\ \vdots \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix},$$

w którym $\mathbf{I}$ oznacza macierz jednostkową $(K \times K)$, funkcję wektora parametrów regresji pełni wektor $\mu'(\Theta_j)$, rolę wektora obserwacji na zmiennej objaśnianej pełni $(K \cdot T_j)$-elementowy wektor $\left[\mathbf{X}_{j,1}\ \mathbf{X}_{j,2}\ \ldots\ \mathbf{X}_{j,T_j}\right]$, a składniki losowe mają macierz kowariancji postaci:

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix}'\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{U} + m_{j,1}^{-1}\mathbf{V} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U} + m_{j,2}^{-1}\mathbf{V} & \ldots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ldots & \mathbf{U} + m_{j,T_j}^{-1}\mathbf{V} \end{bmatrix}.$$

Typowy blok diagonalny tej macierzy wyznaczamy w następujący sposób:

$$\mathrm{E}\{\varepsilon_t \varepsilon_t'\} \mathrm{E}\left\{\mathrm{E}\left[\varepsilon_t \varepsilon_t' | \Theta_j\right]\right\} = \mathrm{E}\left\{\mathbf{U}(\Theta_j) + m_{j,1}^{-1}\mathbf{V}(\Theta_j)\right\} = \mathbf{U} + m_{j,1}^{-1}\mathbf{V}.$$

Uzasadnieniem teoretycznym dla takiego podejścia jest to, że kryterium jakości predyktora $\tilde{\mu}(\Theta_j)$ wektora $\mu(\Theta_j)$ jest macierz kowariancji bezwarunkowych błędów predykcji $\mathrm{E}\left[\left(\tilde{\mu}(\Theta_j) - \mu(\Theta_j)\right)'\left(\tilde{\mu}(\Theta_j) - \mu(\Theta_j)\right)\right]$, a nie macierz ich kowariancji warunkowych $\mathrm{E}\left[\left(\tilde{\mu}(\Theta_j) - \mu(\Theta_j)\right)'\left(\tilde{\mu}(\Theta_j) - \mu(\Theta_j)\right) | \Theta_j\right]$. Stąd zresztą wynika różnica terminologii – w klasycznych zagadnieniach regresji wektor parametrów jest ustalony, mówimy więc o jego estymacji. W naszym przypadku byłoby tak, gdybyśmy wektor $\mu(\Theta_j)$ uwarunkowali wartością parametru ryzyka Θ_j. Skoro jednak minimalizujemy macierz kowariancji błędów z ich rozkładu bezwarunkowego, to znaczy, że traktujemy $\mu(\Theta_j)$ *explicite* jako wektor losowy, wobec czego jego oszacowanie $\tilde{\mu}(\Theta_j)$ określamy mianem predyktora, a nie estymatora. Powyższe rozróżnienie ma bardzo klarowną interpretację częstościową: zamiast dążyć za wszelką cenę do tego, by dla konkretnego, j-tego kontraktu popełnić jak najmniejsze błędy, dążymy do tego, aby dla kontraktu losowo wybranego z populacji (czytaj: średnio dla bardzo wielu kontraktów) błędy były jak najmniejsze. Uzasadnienie praktyczne jest proste: zarówno $\mu(\Theta_j)$, jak i $\mathbf{U}(\Theta_j)$ oraz $\mathbf{V}(\Theta_j)$ są nieznane (taki jest sens założenia I), natomiast znane są ich wartości oczekiwane μ, $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{V}$. W praktyce oczywiście i tych charakterystyk nie znamy, możemy je tylko z dość dużą precyzją oszacować, ponieważ informacja na ich temat tkwi w danych o wszystkich J kontraktach, a nie tylko w danych o kontrakcie j-tym.

Zastosowanie Uogólnionej Metody Najmniejszych Kwadratów (UMNK) do predykcji wektora parametrów $\mu(\Theta_j)$ prowadzi do predyktora postaci (1) o macierzy kowariancji błędów predykcji postaci (2). Analiza postaci predyktora homogenicznego wskazuje na to, że w niektórych przypadkach szczególnych jego wielowymiarowość jest pozorna, w istocie bowiem predyktor k-tego elementu wektora $\mu(\Theta_j)$ jest funkcją wyłącznie k-tych elementów wektorów $\mathbf{X}_{j,t}$. Łatwo sprawdzić, że dzieje się tak, gdy zachodzi jeden z warunków:

a) macierze $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{V}$ są diagonalne – wtedy predyktory poszczególnych elementów wektora $\mu(\Theta_j)$ można dla każdego $k = 1, 2, \ldots, K$ sprowadzić do postaci:

$$\overline{X}_j^{(k)} = \frac{\sum_{t=1}^{T_1} \frac{X_{j,t}^{(k)} m_{j,t}}{m_{j,t} u_k + v_k}}{\sum_{t=1}^{T_1} \frac{m_{j,t}}{m_{j,t} u_k + v_k}},$$

gdzie u_k oraz v_k to elementy diagonalne macierzy $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{V}$;

b) gdy macierze $\mathbf{U}$ oraz $\mathbf{V}$ są proporcjonalne, a więc gdy istnieje taka stała nieujemna $c_{\mathbf{U}}$, że $\mathbf{U} = c_{\mathbf{U}} \mathbf{V}$, otrzymujemy:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T_j} \mathbf{X}_{j,t} \frac{m_{j,t}}{c_{\mathbf{U}} m_{j,t} + 1}}{\sum_{t=1}^{T_j} \frac{m_{j,\tau}}{c_{\mathbf{U}} m_{j,\tau} + 1}}.$$

Powyższy wzór można jeszcze bardziej uprościć, jeśli $c_{\mathbf{U}} = 0$:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \frac{\sum_{t=1}^{T_j} \mathbf{X}_{j,t} m_{j,t}}{\sum_{\tau=1}^{T_j} m_{j,t}},$$

lub jeśli $c_U \to \infty$:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \frac{1}{T_j}\sum_{t=1}^{T_j}\mathbf{X}_{j,t}.$$

c) Ten ostatni wynik (zwykłą średnią arytmetyczną) otrzymamy także, gdy macierze **U** oraz **V** są dowolne, ale za to liczba jednostek ryzyka w poszczególnych latach jest taka sama, a więc gdy $m_{j,1} = m_{j,2} = \ldots m_{j,T_j}$.

We wszystkich powyższych przypadkach predyktory poszczególnych elementów wektora $\mu(\Theta_j)$ są funkcjami obserwacji dotyczących wyłącznie danego rodzaju ryzyka, a wzory uzyskane w przypadkach b) i c) różnią się od wzoru uzyskanego w przypadku a) m.in. tym, że zastosowanie zapisu macierzowego w przypadku a) jest niewygodne. Dopiero gdy żaden z powyższych warunków nie jest spełniony, predyktor homogeniczny jest istotnie wielowymiarowy.

2.2. Predyktor *credibility* (niehomogeniczny) w modelu uproszczonym

Najlepszym nieobciążonym liniowym predyktorem wektora $\mu(\Theta_j)$ jest predyktor:

$$\mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j)\middle|X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T_j}\right) = \mu + \left(\overline{\mathbf{X}}_j - \mu\right)\mathbf{W}_j^{-1}\left(\mathbf{A}_j^{-1} - \mathbf{W}_j^{-1}\right)^{-1} \tag{3}$$

o macierzy kowariancji błędów predykcji postaci:

$$\mathrm{Cov}\left\{\mu(\Theta_j) - \mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j)\middle|X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T_j}\right)\right\} = \left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{W}_j^{-1}\right)^{-1}. \tag{4}$$

Uzasadnienie predyktora niejednorodnego można oprzeć na spostrzeżeniu, że odpowiada on estymatorowi uzyskanemu UMNK wektora $\mu'(\Theta_j)$ parametrów modelu regresji liniowej:

$$\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{X}}'_j \\ \mu'\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{I} \\ \mathbf{I}\end{bmatrix}\mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{bmatrix},$$

w którym funkcję obserwacji na zmiennej objaśnianej pełni wektor $\begin{bmatrix}\overline{\mathbf{X}}_j & \mu\end{bmatrix}'$, a wektor składników losowych ma macierz kowariancji postaci:

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon_1 \\ \varepsilon_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon'_1 & \varepsilon'_2\end{bmatrix}\right\} = \begin{bmatrix}\mathbf{W}_j & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}\end{bmatrix}.$$

Analiza postaci predyktora *credibility* wskazuje na to, że jego wielowymiarowość jest pozorna, gdy zachodzi jeden z warunków:

a) wszystkie trzy macierze **A**, **U** oraz **V** są diagonalne o k-tych elementach na przekątnej równych odpowiednio a_k, u_k, v_k – wtedy wzory na poszczególne składowe predyktora przybierają dla $k = 1, 2, \ldots, K$ postać:

$$\mathrm{BLUP}\left(\mu^{(k)}(\Theta_j) \middle| X_{j,1}^{(k)}, X_{j,2}^{(k)}, \ldots, X_{j,T_j}^{(k)}\right) = \mu^{(k)} + \left(\overline{X}_j^{(k)} - \mu^{(k)}\right) \frac{a_k \sum_{t=1}^{T_j} \frac{m_{j,t}}{m_{j,t} u_k + v_k}}{1 + a_k \sum_{t=1}^{T_j} \frac{m_{j,t}}{m_{j,t} u_k + v_k}},$$

b) istnieją takie liczby $c_{\mathbf{A}} \geq 0$ oraz $c_{\mathbf{U}} \geq 0$, że zachodzi $\mathbf{A} = c_{\mathbf{A}} \mathbf{V}$ oraz $\mathbf{U} = c_{\mathbf{U}} \mathbf{V}$ (warunek proporcjonalności), wtedy predyktor *credibility* upraszcza się do postaci:

$$\mathrm{BLUP}\left(\boldsymbol{\mu}^{(k)}(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T_j}\right) = \boldsymbol{\mu} + \left(\overline{\mathbf{X}}_j - \boldsymbol{\mu}\right) \frac{c_{\mathbf{A}} \sum_{t=1}^{T_j} \frac{m_{j,t}}{c_{\mathbf{U}} m_{j,t} + 1}}{1 + c_{\mathbf{A}} \sum_{t=1}^{T_j} \frac{m_{j,t}}{c_{\mathbf{U}} m_{j,t} + 1}}.$$

W każdym z pozostałych przypadków (pomijamy przypadek nierealistyczny, kiedy macierz **V** jest zerowa) należy oczekiwać, że predykcja równoczesna wszystkich elementów wektora $\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)$ będzie istotnie efektywniejsza od predykcji przeprowadzanej element po elemencie.

3. Model uogólniony – różna liczba jednostek ryzyka dla różnych rodzajów ryzyka

Dopuszczenie różnej liczby jednostek ryzyka dla różnych rodzajów ryzyka w tym samym roku tego samego kontraktu jest potrzebne, bo tak jest w rzeczywistości. Co więcej, prowadzi do interesujących rezultatów, szczególnie gdy dla niektórych rodzajów ryzyka liczba ta wynosi 0 (rodzaj ryzyka nie pokryty danym kontraktem w danym roku). Niestety, modyfikacja ta wymaga wprowadzenia dodatkowych oznaczeń.

3.1. Oznaczenia i zmodyfikowane założenia modelu uogólnionego

Przede wszystkim oznaczenie wprowadzone w punkcie II modelu uproszczonego zastąpimy teraz zespołem oznaczeń:

II.a. $m_{j,t}^{(k,l)}$ to liczba jednostek ryzyka (osób), które w t-tym roku w ramach j-tego kontraktu były ubezpieczone zarówno od ryzyka k-tego, jak i l-tego rodzaju,

$\mathbf{M}_{j,t} := \left\{ m_{j,t}^{(k,l)} \right\}_{k,l=1,2,\dots,K}$ to macierz zawierająca komplet informacji o liczbie jednostek ryzyka charakteryzujących j-ty kontrakt w t-tym roku,

$m_{j,t}^{(k)}$ to uproszczone oznaczenie elementu diagonalnego $m_{j,t}^{(k,k)}$ macierzy $\mathbf{M}_{j,t}$.

Ponadto utrzymując interpretację $X_{j,t}^{(k)}$ jako średniej wartości szkód podaną w punkcie III dla przypadku, gdy $m_{j,t}^{(k)} > 0$, uzupełnimy to konwencją:

III.a. $X_{j,t}^{(k)} := 0$ gdy $m_{j,t}^{(k)} = 0$, zaś symbol $\mu^{(k)}(\Theta_j)$ zdefiniowany w punkcie V będziemy rozumieć jako warunkową wartość oczekiwaną $X_{j,t}^{(k)}$ pod warunkiem Θ_j oraz dodatkowym warunkiem, że $m_{j,t}^{(k)} > 0$. Zastąpimy także założenie VII założeniem ogólniejszym:

VII.a. $\operatorname{cov}\left(\mathbf{X}_{j,t} \middle| \Theta_j\right) = \mathbf{U}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right) + \mathbf{V}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$, gdzie elementy macierzy $\mathbf{U}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$ oraz $\mathbf{V}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$ dane są wzorami:

$$v_{k,l}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right) = \begin{cases} \dfrac{m_{j,t}^{(k,l)}}{m_{j,t}^{(k)} m_{j,t}^{(l)}} v_{k,l}\left(\Theta_j\right), & \text{gdy } m_{j,t}^{(k)} m_{j,t}^{(l)} > 0, \\ 0, & \text{gdy } m_{j,t}^{(k)} m_{j,t}^{(l)} = 0, \end{cases} \quad k,l = 1,2,\dots,K,$$

$$u_{k,l}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right) = \begin{cases} u_{k,l}\left(\Theta_j\right), & \text{gdy } m_{j,t}^{(k)} m_{j,t}^{(l)} > 0, \\ 0, & \text{gdy } m_{j,t}^{(k)} m_{j,t}^{(l)} = 0, \end{cases} \quad k,l = 1,2,\dots,K,$$

gdzie $v_{k,l}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$ oraz $u_{k,l}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$ to elementy zdefiniowanych już macierzy $\mathbf{V}\left(\Theta_j\right)$ oraz $\mathbf{U}\left(\Theta_j\right)$, przy czym utrzymujemy założenie że $\mathbf{V}\left(\Theta_j\right)$ jest nieosobliwa, a także wprowadzimy dodatkowe oznaczenia:

$$\mathbf{V}\left(\mathbf{M}_{j,t}\right) := \mathrm{E}\left(\mathbf{V}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)\right), \text{ oraz: } \mathbf{U}\left(\mathbf{M}_{j,t}\right) := \mathrm{E}\left(\mathbf{U}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)\right).$$

Macierz $\mathbf{M}_{j,t}$ dla dowolnej pary (j, t) spełnia kilka własności:

- jest symetryczna,
- jej dowolny element pozadiagonalny wiąże z odpowiednimi elementami diagonalnymi nierówność $m_{j,t}^{(k,l)} \leq \min\left\{m_{j,t}^{(k)}, m_{j,t}^{(l)}\right\}$, przy czym w typowych przypadkach nierówność ta będzie przybierać postać równości (wtedy, gdy opcje wyboru dla uczestników kontraktu mają charakter wstępującego ciągu podzbiorów zbioru rodzajów ryzyka),
- jest nieujemnie określona.

Pierwsze dwie własności są oczywiste, ostatnia zaś oczywista nie jest, ale łatwo można ją uzasadnić, wyciągając wnioski z zestawienia trzech skądinąd oczywistych faktów:

- Jeśli j-ty kontrakt w t-tym roku opiewa na jedną jednostkę ryzyka, wtedy macierz $\mathbf{M}_{j,t}$ zawiera wyłącznie zera i jedynki, przy czym każdemu zerowemu elementowi diagonalnemu odpowiadają wiersz i kolumna składające się z samych elementów zerowych. Po usunięciu tych kolumn i wierszy pozostanie podmacierz kwadratowa składająca się z samych jedynek. Taka macierz $\mathbf{M}_{j,t}$ jest oczywiście nieujemnie określona.
- Każda macierz $\mathbf{M}_{j,t}$ jest sumą macierzy opisanych powyżej, odpowiadających poszczególnym jednostkom ze zbioru jednostek objętych kontraktem.
- Suma macierzy nieujemnie określonych jest macierzą nieujemnie określoną.

Warto przy okazji przypomnieć, że model uproszczony zasadzał się na założeniu, że dla danego (j, t) macierz $\mathbf{M}_{j,t}$ zawiera wszystkie elementy równe tej samej liczbie $m_{j,t}$.

Warto też zauważyć, że dla każdego k, któremu odpowiada $m_{j,t}^{(k)} = 0$, wszystkie elementy k-tej kolumny i k-tego wiersza równe są 0 zarówno w przypadku macierzy $\mathbf{M}_{j,t}$, jak i w przypadku macierzy kowariancji warunkowych $\mathbf{U}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$, $\mathbf{V}\left(\Theta_j, \mathbf{M}_{j,t}\right)$ i ich wartości oczekiwanych $\mathbf{U}\left(\mathbf{M}_{j,t}\right)$ oraz $\mathbf{V}\left(\mathbf{M}_{j,t}\right)$. Własność nieujemnej określoności tych macierzy można uzasadnić bardzo podobnie jak w przypadku macierzy $\mathbf{M}_{j,t}$.

3.2. Predyktory w modelu uogólnionym

W modelu uogólnionym będziemy korzystać z uogólnionej odwrotności macierzy Penrose'a Moore'a. Definicja i kilka podstawowych własności uogólnionej odwrotności zawarte zostały w Dodatku. Przyjmijmy oznaczenie $\mathbf{B}^{+}$ dla uogólnionej odwrotności danej macierzy **B**. Przy przyjętych oznaczeniach predyktor homogeniczny $\mu(\Theta_j)$ przybiera postać:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \sum_{t=1}^{T_j} X_{j,t}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\left\{\sum_{t=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\right\}^{+}. \quad (5)$$

Zauważmy, że dla tych k, dla których $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} = 0$, elementy $\overline{X}_j^{(k)}$ wektora $\overline{\mathbf{X}}_j$ przybierają wartość 0. Jeśli dla wszystkich $k = 1, 2, \ldots, K$ zachodzi $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} > 0$ (przynajmniej w niektórych latach jakieś obserwacje o każdym rodzaju ryzyka posiadamy), wtedy uogólniona odwrotność macierzy sprowadza się do zwykłej odwrotności, przynajmniej w odniesieniu do odwracania sumy macierzy:

$$\overline{\mathbf{X}}_j = \sum_{t=1}^{T_j} X_{j,t}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\left\{\sum_{t=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\right\}^{-1},$$

i wtedy też macierz kowariancji błędów predyktora $\overline{\mathbf{X}}_j$ można zapisać w postaci:

$$\mathbf{W}_j = \left\{\sum_{t=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\right\}^{-1}$$

W ogólnym przypadku macierz:

$$\mathbf{W}_j = \left\{\sum_{t=1}^{T_j}\left(\mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,t}) + \mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,t})\right)^{+}\right\}^{+} \quad (6)$$

będziemy określać mianem macierzy „pseudo-kowariancji”, pamiętając, że dla tych k, dla których $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} = 0$, k-ta kolumna i k-ty wiersz macierzy zawierają wyłącznie elementy zerowe, których oczywiście jako kowariancji interpretować nie należy.

Wyniki powyższe otrzymujemy, stosując UMNK do nieznacznie zmodyfikowanego modelu regresji:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}'_{j,1} \\ \mathbf{X}'_{j,2} \\ \vdots \\ \mathbf{X}'_{j,T_j} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{j,1} \\ \mathbf{I}_{j,2} \\ \vdots \\ \mathbf{I}_{j,T_j} \end{bmatrix} \mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix},$$

w którym $\mathbf{I}_{j,t}$ oznacza macierz diagonalną o k-tym elemencie równym jedynce, jeśli $m_{j,t}^{(k)} > 0$, zeru zaś, jeśli $m_{j,t}^{(k)} = 0$, a macierz kowariancji składników losowych jest postaci:

$$\mathrm{E}\left\{\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_{T_j} \end{bmatrix}'\right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,1})+\mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,1}) & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,2})+\mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,2}) & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{U}(\mathbf{M}_{j,T_j})+\mathbf{V}(\mathbf{M}_{j,T_j}) \end{bmatrix}.$$

Najlepszy nieobciążony liniowy predyktor wektora $\mu(\Theta_j)$ przybiera teraz postać:

$$\mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \dots, X_{j,T_j}\right) = \mu + \left(\overline{\mathbf{X}}_j - \mu\right)\mathbf{W}_j^{+}\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{W}_j^{+}\right)^{-1}, \quad (7)$$

a macierz kowariancji jego błędów jest postaci:

$$\mathrm{cov}\left\{\mu(\Theta_j) - \mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \dots, X_{j,T}\right)\right\} = \left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{W}_j^{+}\right)^{-1}. \quad (8)$$

W obu powyższych wzorach nie ma problemu z odwracaniem macierzy $\left(\mathbf{A}^{-1} + \mathbf{W}_j^{+}\right)$ ze względu na to, że odwrotność macierzy dodatnio określonej jest macierzą dodatnio określoną, uogólniona odwrotność macierzy nieujemnie określonej jest macierzą nieujemnie określoną, a suma macierzy dodatnio określonej i nieujemnie określonej jest macierzą dodatnio określoną.

Uzasadnienie predyktora *credibility* można oprzeć na modyfikacji modelu regresji liniowej używanego do uzasadnienia w przypadku uproszczonym:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}'_j \\ \mu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

w którym $\mathbf{I}_j$ oznacza macierz diagonalną o k-tym elemencie równym jedynce, jeśli $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} > 0$, zeru zaś gdy $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} = 0$, a wektor $\overline{\mathbf{X}}_j$ oraz występująca w macierzy kowariancji składników losowych podmacierz $\mathbf{W}_j$ dane są zmodyfikowanymi wzorami.

Istotę dokonanego uogólnienia predyktora *credibility* można podsumować następująco:

- na wartość predyktora $\mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T}\right)$ nie ma wpływu k-ta składowa wektora $\left(\overline{\mathbf{X}}_j - \mu\right)$, o ile dla tej składowej nie mieliśmy obserwacji, a więc $\sum_{t=1}^{T_j} m_{j,t}^{(k)} = 0$, a gwarantuje to struktura macierzy $\mathbf{W}_j^+$,
- mimo to inne składowe wektora $\left(\overline{\mathbf{X}}_j - \mu\right)$ będą miały na ogół wpływ na wartość k-tej składowej predyktora $\mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T}\right)$, o czym decyduje struktura macierzy **A**, a dokładniej niezerowe elementy pozadiagonalne jej k-tego wiersza (a więc i k-tej kolumny).

Ta ostatnia właściwość najlepiej ukazuje przewagę predykcji wektorowej nad predykcją dla każdego rodzaju ryzyka z osobna. Pozwala ona bowiem w przypadku kontraktu, dla którego rozważamy rozszerzenie listy rodzajów ryzyka o dotąd nie ubezpieczany rodzaj k, uzyskać dla tego nowego rodzaju ryzyka oszacowanie warunkowej wartości oczekiwanej $\mu^{(k)}(\Theta_j)$ lepsze od oszacowania opartego na bezwarunkowej wartości oczekiwanej $\mu^{(k)}$.

3.3. Dalsze uogólnienie: osobliwa macierz A

Osobliwość macierzy **A** może mieć postać mniej lub bardziej kłopotliwą. Mało kłopotliwa postać dotyczy przypadku, gdy dla pewnych k wiersz k-ty i kolumna k-ta zawierają same zera, ale po usunięciu z macierzy takich wierszy i kolumn macierz o zredukowanych odpowiednio wymiarach jest już macierzą nieosobliwą. Postępowanie w takim wypadku jest bardzo proste:

- dla każdego rodzaju ryzyka, któremu odpowiada zerowa wartość wariancji międzykontraktowej a_k, przyjmujemy populacyjną wartość oczekiwaną $\mu^{(k)}$ jako predyktor $\mu^{(k)}(\Theta_j)$ i przyjmujemy, iż wariancja błędu predykcji wynosi zero,
- wzory omówione w poprzednich punktach stosujemy do zadania zredukowanego do listy tylko tych rodzajów ryzyka, dla których $a_{k>0} > 0$.

Bardziej kłopotliwy jest przypadek, kiedy wykreślenie z macierzy **A** zerowych wierszy i kolumn nie wystarcza do uzyskania macierzy nieosobliwej. Wiemy jednak, że macierz kowariancji dowolnego wektora losowego musi być co najmniej nieujemnie określona. Wobec tego istnieje taka macierz ortonormalna **C**, że macierz $\Lambda := \mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C}$ jest macierzą diagonalną z rzeczywistymi nieujemnymi pierwiastkami charakterystycznymi na przekątnej. Załóżmy, że rząd macierzy **A** wynosi r, a więc tyle właśnie mamy dodatnich pierwiastków charakterystycznych. Da się więc dobrać takie uporządkowanie kolumn macierzy **C**, że blok pierwszych r kolumn (oznaczmy ten blok przez $\mathbf{C}_1$) odpowiada dodatnim pierwiastkom charakterystycznym, a blok $\mathbf{C}_2$ składający się z pozostałych $(K-r)$ kolumn odpowiada zerowym pierwiastkom charakterystycznym. Podsumowując, mamy:

- $\mathbf{C}'\mathbf{A}\mathbf{C} = \Lambda$, co w wersji blokowej można zapisać w postaci:
- $\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' \\ \mathbf{C}_2' \end{bmatrix} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, gdzie Λ_1 jest macierzą diagonalną $(r \times r)$ zawierającą wszystkie r dodatnich wartości własnych macierzy **A** na przekątnej,
- $\mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}' = \mathbf{C}_1\Lambda_1\mathbf{C}_1' = \mathbf{A}$,
- $\mathbf{I} = \mathbf{C}\mathbf{C}' = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_1' + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2'$.

Dokonamy teraz konstrukcji modelu regresji, który posłuży do uzyskania najlepszego liniowego nieobciążonego predyktora wektora $\mu(\Theta_j)$. Zaczniemy od następującego zapisu:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}_j' \\ \mathbf{C}'\mu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j \\ \mathbf{C}' \end{bmatrix} \mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}'\varepsilon_2 \end{bmatrix},$$

gdzie macierz kowariancji składników losowych jest postaci:

$$\mathrm{E}\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}'\varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}'\varepsilon_2 \end{bmatrix}' \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_j & 0 \\ 0 & \Lambda \end{bmatrix}.$$

Przekształcając model z uwzględnieniem rozbicia macierzy **C** na bloki otrzymujemy zespół $(K + r)$ równań regresji:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}_j' \\ \mathbf{C}_1'\mu' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j \\ \mathbf{C}_1' \end{bmatrix} \mu'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}_1'\varepsilon_2 \end{bmatrix}, \text{ gdzie } \mathrm{E}\left\{ \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}_1'\varepsilon_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}_1'\varepsilon_2 \end{bmatrix}' \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{W}_j & 0 \\ 0 & \Lambda_1 \end{bmatrix},$$

uzupełniony $(K - r)$ równaniami tożsamościowymi:

$$\mathbf{C}_2'\mu' = \mathbf{C}_2'\mu'(\Theta_j).$$

Pierwszy składnik pierwszych K równań regresji możemy teraz przekształcić do postaci:

$$\mathbf{I}_j\mu'(\Theta_j) = \mathbf{I}_j\mathbf{C}\mathbf{C}'\mu'(\Theta_j) = \mathbf{I}_j(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1' + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2')\mu'(\Theta_j) = \mathbf{I}_j\left(\mathbf{C}_1\mathbf{C}_1'\mu'(\Theta_j) + \mathbf{C}_2\mathbf{C}_2'\mu'\right),$$

gdzie ostatnie z przekształceń wynika z równań tożsamościowych modelu. Pierwszych $(K + r)$ równań regresji możemy więc teraz przedstawić w postaci:

$$\begin{bmatrix} \overline{\mathbf{X}}'_j - \mathbf{I}_j\mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2\boldsymbol{\mu}' \\ \mathbf{C}'_1\boldsymbol{\mu}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_j\mathbf{C}_1 \\ \mathbf{I}_{(K-r)} \end{bmatrix} \mathbf{C}'_1\boldsymbol{\mu}'(\Theta_j) + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \mathbf{C}'_1\varepsilon_2 \end{bmatrix}.$$

Uzyskana postać modelu pozwala na predykcję nie tyle samego wektora $\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)$, ile jego zwężającego przekształcenia liniowego. Przyjmując dla tego przekształcenia oznaczenia:

$$\mathbf{z} = \boldsymbol{\mu}(\Theta_j)\mathbf{C}_1, \text{ oraz: } \hat{\mathbf{z}} = \hat{\boldsymbol{\mu}}(\Theta_j)\mathbf{C}_1$$

i stosując UMNK uzyskujemy:

$$\hat{\mathbf{z}} = \left[\boldsymbol{\mu}\mathbf{C}_1\Lambda_1^{-1} + \left(\overline{\mathbf{X}}_j - \boldsymbol{\mu}\mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2\right)\mathbf{W}_j^{+}\mathbf{C}_1\right]\left[\Lambda_1^{-1} + \mathbf{C}'_1\mathbf{W}_j^{+}\mathbf{C}_1\right]^{-1}.$$

Łącząc ten wynik z równaniami tożsamościowymi oraz wykorzystując własności macierzy **C** otrzymujemy ostatecznie wzór na predyktor postaci:

$$\mathrm{BLUP}\left(\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)\middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T}\right) = \boldsymbol{\mu}\mathbf{C}_2\mathbf{C}'_2 + \hat{\mathbf{z}}\mathbf{C}'_1 \tag{9}$$

o macierzy kowariancji błędów predykcji postaci:

$$\mathrm{cov}\left\{\boldsymbol{\mu}(\Theta_j) - \mathrm{BLUP}\left(\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)\middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T}\right)\right\} = \mathbf{C}_1\left(\Lambda_1^{-1} + \mathbf{C}'_1\mathbf{W}_j^{+}\mathbf{C}_1\right)^{-1}\mathbf{C}'_1. \tag{10}$$

Komentując zaprezentowane wyniki, warto zauważyć, że z przypadkiem osobliwej macierzy kowariancji **A** możemy się w praktyce zetknąć w sposób dość naturalny. W przypadku zastosowania, o którym w niniejszym tekście jest mowa, być może jest tak, że cała zmienność wektorów $\boldsymbol{\mu}(\Theta_j)$ wokół wartości oczekiwanej $\boldsymbol{\mu}$ jest liniową funkcją pewnej pojedynczej zmiennej (np. pewnej funkcji przeciętnego wieku ubezpieczonych). W takim przypadku rząd macierzy **A** byłby równy 1. Jeśli niezależnie od przeciętnego wieku ubezpieczonych kontrakty różnią się poziomem jakiegoś innego czynnika ryzyka (np. przeciętną frakcją osób stanu wolnego wśród ubezpieczonych), mamy rząd macierzy **A** równy 2. Jeśli takich czynników ryzyka można wyróżnić r, ale liczba ta jest mniejsza od K – wtedy nadal macierz **A** będzie osobliwa.

Niezależnie od tego, czy prawdziwa macierz **A** jest osobliwa czy nie, w praktyce używać będziemy jej wartości wyestymowanej. Wiadomo jednak, że jedynie w najprostszych przypadkach mamy gwarancję, że wyestymowana na podstawie próbki statystycznej macierz kowariancji spełnia warunek dodatniej określoności. Jeśli nawet prawdziwa macierz kowariancji ten warunek spełnia, potrzebne są dodatkowe warunki (bezpośrednie obserwacje zmiennych losowych, o których kowariancje chodzi, jednakowa liczba obserwacji dla wszystkich tych zmiennych, równe wagi itd.). W naszym przypadku warunki te nie są spełnione. W takiej sytuacji jest naturalne, że wstępnie oszacowaną macierz kowariancji musimy poddać analizie. Jednym z typowych zabiegów mających na celu uzyskanie koherentnego oszacowania jest zabieg stosowany wtedy, gdy rozkład wstępnie oszacowanej macierzy $\overline{\mathbf{A}}$ na wektory i wartości własne prowadzi do wyniku:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{C}_1' \\ \mathbf{C}_2' \end{bmatrix} \overline{\mathbf{A}} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 & \mathbf{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Lambda_2 \end{bmatrix},$$

gdzie podmacierz diagonalna Λ_1 zawiera dodatnie pierwiastki charakterystyczne, zaś podmacierz Λ_2 zawiera pierwiastki niedodatnie. Jako oszacowanie skorygowane przyjmujemy wtedy $\hat{\mathbf{A}} = \mathbf{C}_1\Lambda_1\mathbf{C}_1'$. Często pewien dodatkowy efekt stabilizujący estymatory uzyskujemy, eliminując z podmacierzy Λ_1 (oraz, odpowiednio, bloku $\mathbf{C}_1$) nie tylko ujemne i zerowe pierwiastki charakterystyczne, ale także te pierwiastki dodatnie, które uznajemy za nieistotnie różne od zera. Stosując ten dodatkowy zabieg, tym bardziej zwiększamy szansę uzyskania osobliwej oceny $\hat{\mathbf{A}}$ macierzy $\mathbf{A}$.

3.4. Predykcja wartości szkód z kontraktu w przyszłym okresie czasu

Rozważamy predykcję wartości szkód z kontraktu j-tego w roku T, wychodzącym poza okres próby statystycznej (na ogół będziemy mieli $T = T_j + 1$). Przyjmijmy dla parametrów rozważanego kontraktu następujące oznaczenia:

- $\hat{\mu}(\Theta_j) := \mathrm{BLUP}\left(\mu(\Theta_j) \middle| X_{j,1}, X_{j,2}, \ldots, X_{j,T_j}\right)$,
- $\mathrm{cov}(\mu(\Theta_j)) := \mathrm{E}\left\{\left[\mu(\Theta_j) - \hat{\mu}(\Theta_j)\right]'\left[\mu(\Theta_j) - \hat{\mu}(\Theta_j)\right]\right\}$,
- $Z_{j,T}^{(k)}$ – suma ubezpieczenia dla k-tego rodzaju ryzyka,
- $\mathbf{M}_{j,T}$ – macierz jednostek ryzyka o elementach $m_{j,T}^{(k,l)}$, $k, l = 1, 2, \ldots, K$,
- $\mathbf{X}_{j,T}$ spełnia w okresie T te same założenia co $\mathbf{X}_{j,t}$ w okresach $t = 1, 2, \ldots, T_j$,
- $(\mathbf{Zm})_{j,T}$ – skrócony zapis wektora wierszowego iloczynów $Z_{j,T}^{(k)} m_{j,T}^{(k)}$, $k = 1, 2, \ldots, K$.

Przedmiotem predykcji jest iloczyn skalarny (koszt odszkodowań z przedłużonego na rok T-ty kontraktu):

$$X_{j,T}(\mathbf{Zm})'_{j,T}.$$

Jego najlepszym nieobciążonym liniowym predyktorem jest:

$$\hat{\mu}(\Theta_j)(\mathbf{Zm})'_{j,T}, \tag{11}$$

a wariancja błędu tego predyktora wynosi:

$$\underbrace{(\mathbf{Zm})_{j,T}\mathrm{Cov}\left(\hat{\mu}(\Theta_j)\right)(\mathbf{Zm})'_{j,T}}_{(1)} + \underbrace{(\mathbf{Zm})_{j,T}\mathrm{U}(\mathbf{Zm})'_{j,T}}_{(2)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{K} z_{j,T}^{(k)} z_{j,T}^{(l)} m_{j,T}^{(k,l)} v_{k,j}}_{(3)}, \tag{12}$$

gdzie:

- składnik (1) jest efektem błędów predykcji wektora $\mu(\Theta_j)$,
- składnik (2) jest efektem (niepredyktywnym) odchylenia przypadkowego wektora $\mu(\Theta_j)$ charakterystycznego dla roku predykcji T,
- składnik (3) to efekt (niepredyktywny) fluktuacji wartości szkód z kontraktu przy zadanym wektorze $\mu(\Theta_j)$ oraz zadanym jego odchyleniu charakterystycznym dla roku T.

4. Estymacja parametrów populacji kontraktów

Problemy estymacji parametrów μ, **U**, **V** oraz **A** populacji kontraktów wykraczają dalece poza rozmiary tego artykułu. Rozwiązanie zostanie podane jedynie w przypadku wektora μ oraz na bardzo znacznie uproszczonym przykładzie w odniesieniu do elementów diagonalnych macierzy **U**, **V** oraz **A**.

4.1. Estymacja wektora μ

Efektywny estymator $\hat{\mu}$ wektora μ dany jest wzorem:

$$\hat{\mu} = \sum_{j=1}^{J} \overline{\mathbf{X}}_j \mathrm{Cov}\left(\hat{\mu}(\Theta_j)\right)^{+} \left\{\sum_{j=1}^{J} \mathrm{Cov}\left(\hat{\mu}(\Theta_j)\right)^{+}\right\}^{-1}, \tag{13}$$

z macierzą kowariancji błędów estymacji o postaci:

$$\left\{\sum_{j=1}^{J} \mathrm{cov}\left(\hat{\mu}(\Theta_j)\right)^{+}\right\}^{-1}. \tag{14}$$

Oba wzory są prostą konsekwencją zastosowania UMNK. Zakładamy tutaj jedynie nieosobliwość macierzy $\sum_{j=1}^{J} \mathrm{Cov}\left(\hat{\mu}\left(\Theta_j\right)\right)^{+}$, dopuszczając osobliwość macierzy **A**. Praktycznie sprowadza się to do wymogu, aby dla każdego z rodzajów ryzyka mieć w próbce jakieś kontrakty, które ten rodzaj ryzyka obejmowały.

4.2. Estymacja elementów diagonalnych macierzy A, U i V – przykład uproszczony

Rozważymy jedynie estymację elementów diagonalnych a_k, u_k oraz v_k macierzy **A**, **U** i **V** przy następujących założeniach upraszczających:

- liczba lat obserwacji jest w przekroju kontraktów taka sama:

$$T_1 = T_2 = \ldots = T_j = T \geq 2,$$

- składniki wariancji warunkowej są w przekroju kontraktów takie same:

$$u_k(\Theta_1) = u_k(\Theta_2) = \ldots = u_k\left(\Theta_j\right) = u_k,$$

$$v_k(\Theta_1) = v_k(\Theta_2) = \ldots = v_k\left(\Theta_j\right) = v_k,$$

- dla każdego kontraktu liczba jednostek ryzyka k-tego rodzaju w kolejnych latach obserwacji taka sama: $m_{j,1}^{(k)} = m_{j,2}^{(k)} = \ldots = m_{j,T}^{(k)} = m_j^{(k)} > 0$,
- warunkowe rozkłady zmiennych losowych $X_{j,t}^{(k)}$ (dla danej wartości parametru ryzyka Θ_j) są rozkładami normalnymi.

Wobec tych założeń możemy wartości u_k oraz v_k potraktować jako nieznane parametry modelu regresji liniowej:

$$y_j^{(k)} = u_k + v_k x_j^{(k)} + \varepsilon_j^{(k)}, \; j = 1, 2, \ldots, J,$$

- w którym funkcje zmiennej objaśnianej oraz objaśniającej pełnią odpowiednio:

$$y_j^{(k)} = \frac{1}{T-1}\sum_{t=1}^{T}\left(X_{j,t}^{(k)} - \overline{X}_{j,t}^{(k)}\right)^2,$$

$$x_j^{(k)} = \frac{1}{m_j^k},$$

• składniki losowe zaś mają zerową wartość oczekiwaną i są niezależne, a ich wariancje są równe podwojonym kwadratom wartości oczekiwanych (przeskalowane rozkłady χ^2).

Wobec tego zgodne i asymptotycznie efektywne estymatory u_k oraz v_k otrzymujemy, stosując typową procedurę dwustopniową (wstępne oszacowanie zwykłą MNK zwraca oceny wariancji składników losowych $\varepsilon_j^{(k)}$, finalne oszacowanie UMNK).

W celu estymacji wartości a_k konstruujemy następny model regresji liniowej, w którym wartość ta figuruje jako nieznany parametr:

$$z_j^{(k)} = a_k + \frac{1}{T}\left(u_k + \frac{1}{m_j^{(k)}} v_k \right) + \zeta_j^{(k)},\ j = 1, 2, \ldots, J.$$

W modelu tym funkcję zmiennej objaśnianej pełni:

• $z_j^{(k)} := \left(X_j^{(k)} - X^{(k)} \right)^2$,

• składniki losowe mają zerową wartość oczekiwaną, są niezależne, a ich wariancje są równe podwojonym kwadratom wartości oczekiwanych (przeskalowane rozkłady χ^2).

W pierwszym stopniu procedury estymacji używamy oszacowania $\hat{u}_k$ oraz $\hat{v}_k$ do uzyskania wstępnej oceny a_k:

$$\tilde{a}_k = \frac{1}{J}\sum_{j=1}^{J} z_j^{(k)} + \frac{1}{T}\left(\hat{u}_k + \frac{1}{m_j^{(k)}} \hat{v}_k \right),$$

aby następnie wyznaczyć ocenę finalną:

$$\tilde{a}_k = \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{z_j^{(k)} - \hat{u}_k T^{-1} - \hat{v}_k \left(T m_j^{(k)} \right)^{-1}}{\tilde{a}_k + \hat{u}_k T^{-1} + \hat{v}_k \left(T m_j^{(k)} \right)^{-1}} \right) \Bigg/ \sum_{j=1}^{J} \left(\frac{1}{\tilde{a}_k + \hat{u}_k T^{-1} + \hat{v}_k \left(T m_j^{(k)} \right)^{-1}} \right).$$

Estymacja pozadiagonalnych elementów macierzy **A**, **U** oraz **V**, a także uchylenie upraszczających założeń przyjętych w przykładzie powoduje komplikacje, które wykraczają poza zakres artykułu. Warto jedynie wspomnieć, że niektóre z komplikacji są dość typowe dla zadań analizy wielowymiarowej (o pewnych typowych problemach związanych z estymacją macierzy kowariancji napomknięto w uwagach zamieszczonych pod koniec punktu 3.3). Dość interesujące jest jednak, że znaczące komplikacje wynikają z uwzględnienia składnika $\mathrm{U}(\Theta_j)$ wariancji warunkowej. Warto ponadto zaznaczyć, że podejście do estymacji elementów diagonalnych macierzy **U**, **V** oraz **A** oparte na odpowiednio skonstruowanych modelach regresji liniowej prowadzi do uzyskania sensownych rozwiązań, choć droga ta jest najeżona komplikacjami technicznymi.

5. Dodatek

Dla dowolnej macierzy $\mathbf{B}_{n\times m}$ uogólniona macierz odwrotność Penrose'a Moore'a to taka macierz o rozmiarach $n \times m$ (oznaczmy ją przez $\mathbf{B}^{+}$), która spełnia następujące własności:

- $\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}\mathbf{B}^{+} = \mathbf{B}^{+}$,
- $\mathbf{B}\mathbf{B}^{+}\mathbf{B} = \mathbf{B}$,
- $\mathbf{B}\mathbf{B}^{+}$ oraz $\mathbf{B}^{+}\mathbf{B}$ to macierze symetryczne.

Spośród wielu ogólnych własności najważniejsze to takie, że:

- dla danej macierzy **B** macierz $\mathbf{B}^{+}$ jest jednoznacznie określona,
- jeśli **B** jest kwadratowa i nieosobliwa, to $\mathbf{B}^{+} = \mathbf{B}^{-1}$,
- jeśli **B** jest symetryczna i nieujemnie określona, to $\mathbf{B}^{+}$ jest także symetryczna i nieujemnie określona.

Na nasze potrzeby wystarczy sposób wyznaczania uogólnionej odwrotności dla dwóch przypadków macierzy kwadratowej **B** o wymiarach $n \times n$ o szczególnej postaci:

- jeśli **B** jest diagonalna, to $\mathbf{B}^{+}$ jest też diagonalna i zawiera zera na tych samych pozycjach głównej przekątnej co macierz **B**, a pozostałe elementy głównej przekątnej macierzy $\mathbf{B}^{+}$ równe są odwrotnościom odpowiednich elementów macierzy **B**;
- jeśli **B** jest symetryczna, to $\mathbf{B}^{+} = \mathbf{C}\Lambda^{+}\mathbf{C}'$, gdzie **C** jest macierzą ortonormalną taką, że $\mathbf{B} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}'$, Λ zaś jest macierzą diagonalną zawierającą na głównej przekątnej pierwiastki charakterystyczne macierzy **B**.

Literatura

[1] Bühlmann H., Gisler A., *A Course in Credibility. Theory and its Applications*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg 2005.

[2] Greene W., *Econometric Analysis*, Prentice-Hall, Inc. Upper Saddle River, New Jersey, 2003.

MULTIDIMENSIONAL CREDIBILITY WITH APPLICATION TO THE GROUP LIFE INSURANCE

Summary

The aim of the paper is to present rudiments of multidimensional credibility theory using the language of econometrics. The language makes several problems simple, despite their traditional presentation in the literature on credibility theory seems complex. Moreover, some problems due to multidimensionality and to departure from unrealistic assumptions of simplest credibility models can be identified as typically encountered in econometrics, and solved therein. Of course, accurate choice of realistic assumptions is crucial for the size of prediction errors. However, the realism of assumptions cannot be assessed without stating, what is the object to be modelled. In the paper the role of the exemplary object is played by the group life insurance – probably the most well-aimed object for multidimensional credibility applications in the Polish insurance market.