PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Piotr Krzemiński
Towarzystwo Ubezpieczeń na Życie Warszawa

KALKULACJA REZERW PRZY OPTYMALNYM WYKORZYSTANIU DANYCH SZKODOWYCH

1. Wstęp

Na koniec każdego roku bilansowego towarzystwo ubezpieczeń zobligowane jest do utworzenia rezerw finansowych na pokrycie zaistniałych, ale nie wypłaconych jeszcze odszkodowań. Sumaryczna wartość utworzonych rezerw może zostać podzielona według aktualnego statusu rozpatrywanych roszczeń na dwa rodzaje rezerw, odpowiednio dla:

- szkód zaistniałych i zgłoszonych ubezpieczycielowi[1],
- szkód zaistniałych i nie zgłoszonych do dnia utworzenia rezerwy.

Oszacowanie wysokości rezerwy dla szkód pierwszego rodzaju oparte jest zwykle na informacjach zebranych w procesie likwidacji tych szkód i stanowi sumę oszacowań wartości poszczególnych odszkodowań dokonywanych przez likwidatorów szkód. W drugim przypadku zakład ubezpieczeń nie ma żadnej informacji ani o liczbie ani o rodzaju zaistniałych zdarzeń objętych ochroną ubezpieczeniową, co powoduje, że wartość rezerwy musi zostać oszacowana za pomocą metod statystycznych, na podstawie informacji historycznych dotyczących rozwoju szkód w kolejnych latach, po roku ich zaistnienia. Obliczeń tych dokonuje się po uprzednim zapisaniu dostępnych danych historycznych w charakterystycznym formacie trójkątów szkodowych. Przykład takiego trójkąta szkód wypłaconych przedstawiono na rys. 1.

[1] Zgodnie z bardziej szczegółową klasyfikacją zdefiniowaną w polskim prawie ubezpieczeniowym, szkody te dzielone są dalej na zgłoszone i oszacowane oraz zgłoszone i nieoszacowane. W tej pracy pomijamy ten aspekt zakładając w uproszczeniu, że wartość każdej ze zgłoszonych szkód została w pewien sposób oszacowana.

rok rozwoju / rok powstania szkody	0	1	2	3	...	W
...					...	
$t-5$	$CX_{t-5,0}$	$CX_{t-5,1}$	$CX_{t-5,2}$	$CX_{t-5,3}$	...	$CX_{t-5,W}$
$t-4$	$CX_{t-4,0}$	$CX_{t-4,1}$	$CX_{t-4,2}$	$CX_{t-4,3}$	...	$CX_{t-4,W}$
$t-3$	$CX_{t-3,0}$	$CX_{t-3,1}$	$CX_{t-3,2}$	$CX_{t-3,3}$	...	$CX_{t-3,W}$
$t-2$	$CX_{t-2,0}$	$CX_{t-2,1}$	$CX_{t-2,2}$	$CX_{t-2,3}$	...	$CX_{t-2,W}$
$t-1$	$CX_{t-1,0}$	$CX_{t-1,1}$	$CX_{t-1,2}$	$CX_{t-1,3}$	...	$CX_{t-1,W}$
T	$CX_{t,0}$	$CX_{t,1}$	$CX_{t,2}$	$CX_{t,3}$	...	$CX_{t,W}$

Rys. 1. Trójkąt skumulowanych szkód wypłaconych

Źródło: opracowanie własne.

Dwie najpowszechniej stosowane metody kalkulacji rezerw: *Chain Ladder* (CL) i Bornheuttera-Fergusona (BF) [4; 5], mogą być i są w praktyce stosowane zarówno do trójkątów szkód opartych wyłącznie na skumulowanych wypłatach (ang. *paid losses*), jak i do trójkątów szkód opartych na skumulowanych wypłatach powiększonych o stany rezerw na szkody zgłoszone (ang. *incurred losses*). Wybór pomiędzy rodzajem dostępnych danych stanowi w istocie wybór pomiędzy poniższymi dwiema możliwościami:

- kalkulacją szkód uwzględniającą szerszą informację – zarówno o wypłatach, jak i o szkodach zgłoszonych, których bieżące oszacowania mogą być jednak obarczone błędem,
- kalkulacją opartą jedynie na informacji o dokonanych wypłatach, co zawęża zakres wykorzystywanych danych, ale eliminuje ryzyko dokonywania obliczeń na podstawie błędnych danych.

Indeks t oznacza kolejne lata powstawania szkód, natomiast przez $CX_{t,k}$ oznaczono skumulowaną wartość szkód zaistniałych w roku t, które wypłacone zostały do końca roku k. Zakładając, że przedstawiony trójkąt skonstruowano na koniec roku $t = 0$, na szaro zaznaczono te wartości skumulowanych wypłat, które nie są jeszcze znane w momencie tworzenia rezerwy. W analogiczny sposób skonstruować można trójkąt skumulowanych szkód zgłoszonych. Jeżeli symbolem $CR_{t,k}$ oznaczymy aktualną wartość rezerwy na szkody pochodzące z roku t, które zostały zgłoszone do końca roku k, ale nie zostały jeszcze zlikwidowane, to w poszczególnych komórkach trójkąta szkód zgłoszonych znajdą się sumy $CX_{t,k} + CR_{t,k}$.

Poszukiwane rezerwy dla poszczególnych lat powstawania szkód możemy zapisać jako:

$$CX_{t,W} - CX_{t,0} = U_t - CX_{t,0} = RES_{t,0}, \text{ dla roku } t,$$

$$CX_{t-1,W} - CX_{t-1,1} = U_{t-1} - CX_{t-1,1} = RES_{t-1,1}, \text{ dla roku } t-1,$$

$$CX_{t-2,W} - CX_{t-2,2} = U_{t-2} - CX_{t-2,2} = RES_{t-2,2}, \text{ dla roku } t-2,$$

itd.,
gdzie jako U_t oznaczono ostateczną wysokość szkód z danego roku ($U_t - CX_{t,W}$), a jako $RES_{t,k}$ wysokość poszukiwanej rezerwy dla roku t, na koniec roku k. W przypadku całego portfela poszukiwana jest suma $RES = \sum_{W-1 \geq s \geq 0} RES_{t-s,s}$. Tak zapisana rezerwa szkód RES jest sumą rezerw na szkody zgłoszone i nie zgłoszone. W tym przypadku, gdy jako wynik kalkulacji rezerwy otrzymujemy oszacowanie sumarycznej kwoty pozostałych zobowiązań, różnicę między otrzymanym wynikiem a rezerwą na szkody zgłoszone utworzoną przez likwidatorów $CR_{t,k}$ traktuje się jako oszacowanie rezerwy na szkody niezgłoszone.

Celem niniejszej pracy jest próba wypracowania modelu kalkulacji rezerwy, który pozwalałby nie tylko na dokonywanie optymalnego wyboru między udziałem metod CL i BF w oszacowaniu tej rezerwy, ale również określałby wybór między opisanymi powyżej, dwoma możliwymi zakresami danych stanowiącym podstawę do zastosowania tych metod.

2. Oznaczenia

W celu prowadzenia dalszych rozważań wprowadźmy następujące oznaczenia:

$X_{t,j,w}$ – zmienne losowe reprezentujące sumy szkód, które zaistniały w roku t, zostały zgłoszone ubezpieczycielowi w roku j oraz w pełni zlikwidowane (wypłacone) w roku w. Zakładamy przy tym:

- $W \geq w \geq j$,
- $J \geq j$,
- $W \geq J$,

gdzie W, J oznaczają odpowiednio rok wypłacenia ostatniej szkody ze szkód zaistniałych w roku t oraz rok zgłoszenia ostatniej z tych szkód. Dla indeksów w, j przyjmujemy, że wartość 0 oznacza rok wypłacania lub zgłoszenia szkód równy rokowi ich powstania t, wartość 1 oznacza rok $t+1$, itd.

$Y\left(X_{t,j,w}\right)$ – łączne oszacowanie wysokości szkód $X_{t,j,w}$ dokonywane w zakładzie ubezpieczeń przez likwidatorów szkód[2].

[2] W celu uproszczenia dalszych rozważań zakładamy tutaj, że oszacowanie szkody dokonywane jest tylko raz – w momencie jej zgłoszenia, a jego wartość nie zmienia się aż do momentu wypłacenia

$CX_{t,k} = \sum_j \sum_{w \le k} X_{t,j,w}$ – skumulowana wartość szkód zaistniałych w roku t, które zostały zgłoszone i wypłacone do końca roku k włącznie.

$CXR_{t,k} = \sum_w \sum_{j \le k} X_{t,j,w}$ – skumulowana wartość szkód zaistniałych w roku t, które zostały zgłoszone do końca roku k.

$CR_{t,k} = \sum_{j \le k,\, w > k} Y(X_{t,j,w})$ – rezerwa na szkody zgłoszone do końca roku k, ale nie wypłacone przed końcem tego roku. Jest to sumaryczna wielkość oszacowań dokonanych przez likwidatorów szkód, dla szkód zaistniałych w roku t, zgłoszonych do końca roku k, które zostaną w pełni zlikwidowane i wypłacone w latach $k+1, k+2, \ldots$

$U_t = CX_{t,W}$ – skumulowana, ostateczna wartość wszystkich szkód zaistniałych w roku t.

EP_t – składka zarobiona w roku t.

ULR_t – oczekiwany współczynnik szkodowości dla kohorty szkód zaistniałych w roku t.

ULR_0 – wartość średnia oczekiwanego współczynnika szkodowości dla szkód zaistniałych w poszczególnych latach.

$RES_{t,k} = U_t - CX_{t,k}$ – kwota szkód, które zaistniały w roku t, ale nie zostały wypłacone do końca roku k. Zawiera szkody zgłoszone do towarzystwa ubezpieczeń do końca roku k, które nie zostały jeszcze wypłacone, oraz szkody nie zgłoszone jeszcze do towarzystwa.

p_k^p, q_k^p – współczynniki określające schemat wypłaty szkód zaistniałych w danym roku. Zachodzą warunki:

- $0 \le p_0^p \le p_1^p \le p_2^p \le \ldots \le p_W^p = 1$,
- $q_k^p = 1 - p_k^p$.

p_k^i, q_k^i – współczynniki określające schemat zgłaszania szkód zaistniałych w danym roku. Zachodzą warunki:

- $0 \le p_0^i \le p_1^i \le p_2^i \le \ldots \le p_W^i = 1$,
- $q_k^i = 1 - p_k^i$.

---

odszkodowania. W rzeczywistości proces likwidacji może być bardziej złożony, a wartość rezerwy wielokrotnie przeszacowywana.

3. Model probabilistyczny

Współczynnik szkodowości ULR_t może być traktowany jako pewien parametr ryzyka wahający się z roku na rok wokół swojej średniej ULR_0. Zakładamy, że zmienne ULR_t dla kolejnych lat zdarzeń są od siebie niezależne, mają identyczny rozkład, który charakteryzują momenty:

$$\mathrm{E}(ULR_t) = ULR_0, \tag{1}$$

$$\mathrm{Var}(ULR_t) = \sigma^2_{ULR}. \tag{2}$$

Na podstawie wartości parametru ULR_t określamy następnie momenty warunkowe zmiennej U_t oznaczającej sumaryczną wielkość szkód zaistniałych w danym roku. Rozkład zmiennej U_t zależy od realizacji oczekiwanego współczynnika szkodowości ULR_t w sposób określony poniżej formułami (3) i (4).

$$\mathrm{E}(U_t|ULR_t) = EP_t \cdot ULR_t, \tag{3}$$

$$\mathrm{Var}(U_t|ULR_t) = EP_t^2 \cdot \sigma_t^2. \tag{4}$$

Na podstawie powyższych definicji otrzymujemy następnie momenty bezwarunkowe zmiennej U_t.

$$\mathrm{E}(U_t) = \mathrm{E}(EP_t \cdot ULR_t) = EP_t \cdot ULR_0, \tag{5}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(U_t) &= \mathrm{E}(\mathrm{Var}(U_t|ULR_t)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(U_t|ULR_t)) = \mathrm{E}(EP_t^2 \cdot \sigma_t^2) + \mathrm{Var}(EP_t \cdot ULR_t) = \\ &= EP_t^2 \cdot \sigma_t^2 + EP_t^2 \cdot \sigma^2_{ULR} = EP_t^2(\sigma^2 + \sigma^2_{ULR}).\end{aligned} \tag{6}$$

gdzie $\sigma^2 = \mathrm{E}(\sigma_t^2)$.

Dwustopniowa definicja zmiennej U_t opisującej całkowite wypłaty z danego roku, poprzez wcześniejsze zdefiniowanie parametru ryzyka ULR_t, ma swoje naturalne przyczyny. Wahający się z roku na rok parametr ryzyka ma odzwierciedlać zmienne czynniki wpływające na oczekiwaną wartość szkód, które pozostają w większości poza kontrolą zakładu ubezpieczeń. W przypadku ubezpieczeń komunikacyjnych na wahania parametru ryzyka mogą wpływać: pogoda, natężenie ruchu spowodowane zmianami w cenach paliwa, liczba sprzedawanych samochodów itp. W ubezpieczeniach kredytu jako analogiczny czynnik podać można koniunkturę w gospodarce. Czynniki tego rodzaju wpływają na oczekiwaną wielkość szkód, natomiast rzeczywista realizacja zmiennej U_t zależeć będzie dodatkowo od parametrów charakterystycznych dla portfela zakładu ubezpieczeń, takich jak kwalifikacja przyjmowanych ryzyk lub regionalizacja sprzedaży.

Współczynniki p_k^i, p_k^p określające odpowiednio schemat zgłaszania szkód i schemat wypłacania szkód, w okresie od roku ich powstania t do ostatniego roku rozwoju W, definiujemy formalnie następująco:

$$p_k^p = \mathrm{E}\left(\frac{CX_{t,k}}{U_t} \middle| ULR_t \right), \tag{7}$$

$$p_k^i = \mathrm{E}\left(\frac{CXR_{t,k}}{U_t} \middle| ULR_t \right). \tag{8}$$

Zakładamy przy tym, że definicje te są identyczne dla każdego roku t. Proces zgłaszania szkód kończy się zwykle szybciej od procesu ich wypłacania (warunek $W \geq J$), więc oczywiście może się zdarzyć, że w ostatnich latach wypłacania szkód dla $p_k^i = 1' \; k > J$.

Kolejne, podstawowe dla dalszych rozważań założenie mówi, że oszacowania likwidatorów szkód $Y\left(X_{t,j,w}\right)$ są nieobciążone, co zapisujemy formalnie jako (9).

$$\mathrm{E}\left(Y\left(X_{t,j,w}\right) \middle| X_{t,j,w} \right) = X_{t,j,w}. \tag{9}$$

Zgodnie z wprowadzonymi oznaczeniami, oszacowanie poszukiwanej rezerwy $RES_{t,k}$ dla ustalonego roku t, według każdej z metod bazowych opisują wzory (10)-(13).

Rezerwa obliczona metodą *Chain Ladder* dla szkód wypłaconych

$$RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} = CX_{t,k} \cdot \frac{q_k^p}{p_k^p}. \tag{10}$$

Rezerwa obliczona metodą *Chain Ladder* dla szkód zgłoszonych

$$RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} = \left(CX_{t,k} + CR_{t,k}\right) \cdot \frac{q_k^i}{p_k^i} + CR_{t,k} \tag{11}$$

Rezerwa obliczona metodą Bornheuttera-Fergusona dla szkód wypłaconych

$$RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} = EP_t \cdot ULR_0 \cdot q_k^p. \tag{12}$$

Rezerwa obliczona metodą Bornheuttera-Fergusona dla szkód zgłoszonych

$$RI_{t,k}^{\mathrm{BF}} = EP_t \cdot ULR_0 \cdot q_k^i + CR_{t,k}. \tag{13}$$

Warto zauważyć, że prezentowane metody cechuje skrajnie różny sposób oszacowania ostatecznej wielkości szkód, na podstawie której wyznaczana jest rezerwa. Dla metody CL jest to $CX_{t,k} \cdot \frac{1}{p_k^p}$ lub też $\left(CX_{t,k} + CR_{t,k}\right) \cdot \frac{1}{p_k^i}$, podczas gdy w metodzie BF mamy $\left(EP_t \cdot ULR_0 \cdot q_k^p + CX_{t,k}\right)$ lub też $\left(EP_t \cdot ULR_0 \cdot q_k^i + CX_{t,k} + + CR_{t,k}\right)$. Oznacza to, że metoda CL wykorzystuje jedynie informację o realizacjach szkód z bieżącej kohorty, zaniedbując całkowicie informację o średniej, długoterminowej wielkości tych szkód pochodzącą z lat wcześniejszych. Pozwala to na ewentualne wykorzystanie informacji o realizacji parametru ryzyka ULR_t charakterystycznej dla danego roku, która zawarta jest pośrednio w zmiennych $CX_{t,k}$ oraz $CR_{t,k}$. Odwrotne podejście reprezentuje natomiast metoda BF, która informacji o wypłaconych (i ewentualnie zgłoszonych) dotychczas szkodach używa jedynie jako wartości historycznych, natomiast oszacowanie wartości odszkodowań, które będą wypłacone (lub zgłoszone) w przyszłości opiera wyłącznie na wartości średniej parametru ryzyka ULR_0 pomijając całkowicie fakt, że szkodowość ta dla rozpatrywanej kohorty szkód określona jest bardziej przez realizację zmiennej ULR_t, która może odchylać się od swojej średniej.

4. Rozwiązanie problemu

4.1. Metoda Benktandera

Na podstawie metod *Chain-Ladder* (CL) oraz Bornheuttera-Fergusona (BF) należy tak wykorzystać posiadane informacje, aby zdefiniowany przez nas estymator $\hat{RES}$ rezerwy szkód *RES*, cechował minimalny błąd średniokwadratowy.

Problem znalezienia optymalnego rozwiązania, które byłoby umiejscowione pomiędzy skrajnymi przypadkami, był już poruszany w literaturze [1-3]. Proponowanym rozwiązaniem jest tutaj zdefiniowanie estymatora rezerwy jako średniej ważonej:

$$RP_{t,k}^{\mathrm{B}} = c \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} + (1-c) \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, \tag{14}$$

gdzie współczynnik c wyznacza się w ten sposób, aby zminimalizować błąd średniokwadratowy postaci $\mathrm{E}\left[\left(RES_{t,k} - RP_{t,k}^{\mathrm{B}}\right)^2\right]$.

Nie będziemy w tym miejscu przedstawiać formuł stanowiących pełne rozwiązanie tego problemu. Zainteresowanych odsyłamy do pracy Thomasa Macka [2]. Można w niej znaleźć również ważne wnioski mówiące, że w praktyce współczynnik c może być w większości przypadków zastępowany przez p_k^p bez znaczącej utraty trafności oszacowania (metoda Benktandera [1]).

Stosowanie współczynnika p_k^p jako wagi pomiędzy omawianymi metodami ma swoje intuicyjne uzasadnienie. Dla kohort szkód będących w dalekiej fazie rozwoju, gdzie wypłacone roszczenia stanowią wysoki procent ich oczekiwanej końcowej kwoty, udział metody CL opartej na wielkościach charakterystycznych dla badanej kohorty powinien być duży. W takim przypadku możemy bowiem spodziewać się, że wiedza na temat bieżącego odchylenia się współczynnika szkodowości ULR_t od swojej średniej oraz o realizacji zmiennej U_t, która zawarta jest w dostępnych danych $CX_{t,k}$ oraz $CR_{t,k}$, stanowi bardziej wiarygodne źródło informacji od średniej długookresowej ULR_0. Jeżeli natomiast etap rozwoju szkód jest stosunkowo wczesny, co wyraża się przez niską wartość współczynnika p_k^p, wtedy potencjalny błąd generowany przez metodę CL na podstawie skąpych informacji zawartych w zmiennych $CX_{t,k}$ oraz $CR_{t,k}$ może być relatywnie wysoki. Bardziej stabilne i wiarygodne oszacowanie rezerwy uzyskujemy wówczas poprzez odwoływanie się do średniej wartości szkód $EP_t \cdot ULR_0$.

Metoda Benktandera oraz wnioski płynące z jej analizy mogą być stosowane zarówno do wyników generowanych przez parę metod CL i BF opartych na trójkątach szkód wypłaconych, jak i do analogicznych wyników opartych na trójkątach szkód zgłoszonych. Problem ujednolicenia ewentualnych rozbieżności nie jest jednak poruszany w cytowanych pracach.

4.2. Wyznaczenie rozwiązania

Intuicyjnie wydaje się, że w przypadku lat rozwoju szkód, które charakteryzują się stosunkowo wysoką wartością udziału szkód zgłoszonych p_k^i, do szkód już wypłaconych p_k^p, uwzględnienie informacji o wartości oszacowań $CR_{t,k}$ mogłoby wpłynąć pozytywnie na ograniczenie błędu estymatora rezerwy. Wpływ ten jest oczywiście uzależniony nie tylko od braku obciążenia oszacowań $Y(X_{t,j,w})$, ale także od wariancji tych oszacowań. Jeżeli bowiem trafność, z jaką likwidatorzy szkód oszacowują ich wartości, jest wysoka, co wyraża się przez niską wartość wariancji warunkowej $\mathrm{Var}(Y(X_{t,j,w})|X_{t,j,w})$, to wykorzystanie informacji o wartościach $CR_{t,k}$ podczas kalkulacji rezerwy wpłynie na obniżenie błędu tych metod. Jeżeli jednak przyjmiemy odmienne założenie, o wysokiej rozbieżności dokonywanych oszacowań (wysoka wariancja $\mathrm{Var}(Y(X_{t,j,w})|X_{t,j,w})$), to może okazać się, że z powodu niskiej jakości dodatkowej informacji zawartej w $CR_{t,k}$ nie warto jej wykorzystywać w przeprowadzanych kalkulacjach, gdyż przyczynia się to do wzrostu błędu estymatora.

Podczas rozważania problemu wyważenia wyników generowanych przez metodę *Chain Ladder* i Bornheuttera-Fergusona naturalne wydaje się skonstruowanie w analogiczny sposób estymatora uwzględniającego zarówno informacje o szkodach wypłaconych, jak i o rezerwie na szkody zgłoszone. W tym celu rozważmy model regresji liniowej:

$$RES_{t,k} = b_1 \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} + b_2 \cdot RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} + b_3 \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} + b_4 \cdot RI_{t,k}^{\mathrm{BF}} + \varepsilon, \tag{15}$$

gdzie $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 1$, a czynnik losowy ε ma zerową wartość oczekiwaną $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$ oraz skończoną wariancję $\mathrm{Var}(\varepsilon) < \infty$.

Analizując wstępnie cztery formuły określające metody bazowe dla zaproponowanego wzoru, można dostrzec, że opierają się one w sumie na trzech zmiennych pierwotnych $CX_{t,k}$, $CR_{t,k}$ oraz $(EP_t \cdot ULR_0)$. Metoda BF oparta na szkodach zgłoszonych $RI_{t,k}^{\mathrm{BF}}$ stanowi pewną kombinację liniową trzech pozostałych, ponieważ, jak można zauważyć, prawdziwy jest związek.

$$RI_{t,k}^{\mathrm{BF}} = RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} \cdot \frac{q_k^i}{q_k^p} + p_k^i \cdot \left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} \cdot \frac{p_k^p}{q_k^p} \cdot \frac{q_k^i}{p_k^i} \right). \tag{16}$$

Stąd uwzględnianie wszystkich czterech metod podczas kalkulacji *RES* nie jest konieczne, gdyż jedna z nich nie zawiera żadnej nowej informacji. Postawiony problem możemy zapisać teraz jako

$$\begin{cases} RES_{t,k} = b_1 \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} + b_2 \cdot RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} + (1 - b_1 - b_2) \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} + \varepsilon \\ \mathrm{E}\left[\left(RES_{t,k} - b_1 \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} - b_2 \cdot RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - (1 - b_1 - b_2) \cdot RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} \right)^2 \right] \to \min. \end{cases}$$

Po przekształceniu powyższego równania do postaci

$$RES_{t,k} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} = b_1 \cdot \left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} \right) + b_2 \cdot \left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}} \right) + \varepsilon \tag{17}$$

pozostaje rozwiązać równanie macierzowe (18)

$$\mathbf{V} \cdot \hat{\mathbf{B}} = \mathbf{C}, \tag{18}$$

gdzie:

$$\mathbf{V}=\begin{bmatrix} \operatorname{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) & \operatorname{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) & \operatorname{Var}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{C}=\begin{bmatrix} \operatorname{Cov}\left(R\hat{E}S_{t,k}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) \\ \operatorname{Cov}\left(R\hat{E}S_{t,k}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}-RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) \end{bmatrix}, \ \hat{\mathbf{B}}=\begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \end{bmatrix}.$$

Rozwiązanie równania (18) ma postać:

$$\hat{\mathbf{B}}=\mathbf{V}^{-1}\cdot\mathbf{C}.$$

4.3. Kalkulacje pomocnicze

Do wyznaczenia tego rozwiązania niezbędne będzie jeszcze wyrażenie wariancji i kowariancji poszczególnych rezerw za pomocą wariancji i kowariancji zmiennych pierwotnych $CX_{t,k}$, $CR_{t,k}$ oraz U_t, które mogą być obliczane lub oszacowywane bezpośrednio na podstawie danych szkodowych. W tym celu wprowadzimy poniżej założenia dotyczące momentów zmiennych $CX_{t,k}$ oraz $CR_{t,k}$. Wartości oczekiwane warunkowe oraz bezwarunkowe definiujmy zgodnie z równaniami (19)-(21).

$$\mathrm{E}\left(CX_{t,k}\middle|ULR_t\right)=p_k^p\cdot EP_t\cdot ULR_t, \text{ stąd } \mathrm{E}\left(CX_{t,k}\right)=p_k^p\cdot EP_t\cdot ULR_0, \tag{19}$$

$$\mathrm{E}\left(CR_{t,k}\middle|ULR_t\right)=\left(p_k^i-p_k^p\right)\cdot EP_t\cdot ULR_t, \text{ stąd } \mathrm{E}\left(CR_{t,k}\right)=\left(p_k^i-p_k^p\right)\cdot EP_t\cdot ULR_0, \tag{20}$$

$$\mathrm{E}\left(CX_{t,k}+CR_{t,k}\middle|ULR_t\right)=p_k^i\cdot EP_t\cdot ULR_t, \text{stąd } \mathrm{E}\left(CX_{t,k}+CR_{t,k}\right)=p_k^i\cdot EP_t\cdot ULR_0. \tag{21}$$

Przyjmujemy dodatkowo poniższe założenia odnośnie do wariancji zmiennych $CX_{t,k}$ i $CR_{t,k}$.

$$\operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\middle|ULR_t\right)=p_k^p\cdot EP_t^2\cdot\sigma_t^2, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\right)&=\mathrm{E}\left(\operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\middle|ULR_t\right)\right)+\operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k}\middle|ULR_t\right)\right)=\\&=p_k^p\cdot EP_t^2\cdot\sigma^2+\left(p_k^p\right)^2\cdot EP_t^2\cdot\sigma_{ULR}^2,\end{aligned} \tag{23}$$

$$\operatorname{Var}\left(CX_{t,k}+CR_{t,k}\middle|ULR_t\right)=\operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\middle|ULR_t\right)+\operatorname{Var}\left(CR_{t,k}\middle|ULR_t\right), \tag{24}$$

gdzie $\sigma^2=\mathrm{E}\left(\sigma_t^2\right)$.

W celu zdefiniowania wariancji zmiennej $CR_{t,k}$ wprowadźmy definicję

$$D_{t,k} = \left\{ X_{t,j,w} \right\}_{j \le k,\, w \ge 0} \tag{25}$$

oraz dodatkowy parametr μ^2, który będzie charakteryzować całkowity błąd, jaki mogą popełnić likwidatorzy w przypadku szkód pochodzących z roku t.

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j \le W,\, w>0} Y\left(X_{t,j,w}\right) - \sum_{j \le W,\, w>0} X_{t,j,w} \middle| D_{t,W} \right) = EP_t^2 \cdot \mu^2. \tag{26}$$

Określenie całkowitego błędu równaniem (26) pozwoli nam na następujące zdefiniowanie wariancji warunkowej i bezwarunkowej rezerwy $CR_{t,k}$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(\sum_{j \le k,\, w>k} Y\left(X_{t,j,w}\right) - \sum_{j \le k,\, w>k} X_{t,j,w} \middle| D_{t,k} \right) &= \operatorname{Var}\left(CR_{t,k} - \sum_{j \le k,\, w>k} X_{t,j,w} \middle| D_{t,k} \right) = \\ &= \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \mu^2, \end{aligned} \tag{27}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}\left(CR_{t,k}\right) &= \mathrm{E}\left(\operatorname{Var}\left(CR_{t,k} \middle| D_{t,k}\right)\right) + \operatorname{Var}\left(\mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| D_{t,k}\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \mu^2\right) + \operatorname{Var}\left(\sum_{j \le k,\, w>k} X_{t,j,w} \right) = \\ &= \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \mu^2 + \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \sigma^2 + \left(p_k^i - p_k^p\right)^2 \cdot EP_t^2 \cdot \sigma_{ULR}^2 \end{aligned} \tag{28}$$

z wykorzystaniem równości $\operatorname{Var}\left(CR_{t,k} \middle| D_{t,k}\right) = \operatorname{Var}\left(CR_{t,k} - \sum_{j \le k,\, w>k} X_{t,j,w} \middle| D_{t,k} \right)$.

Kowariancje bezwarunkowe zmiennych $CX_{t,k}$, $CR_{t,k}$ oraz U_t mają postać:

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, U_t\right) &= \mathrm{E}\left(\operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, U_t \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &\quad + \operatorname{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k}, U_t \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, CX_{t,k} + R_{t,k} \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &\quad + \operatorname{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k}, U_t \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\operatorname{Var}\left(CX_{t,k} \middle| ULR_t\right)\right) + \operatorname{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= \mathrm{E}\left(p_k^p \cdot EP_t^2 \cdot \sigma^2\right) + \mathrm{Cov}\left(p_k^p \cdot EP_t \cdot ULR_t, EP_t \cdot ULR_t\right) = \\ = p_k^p \cdot EP_t^2\left(\sigma^2 + \sigma_{ULR}^2\right), \tag{29}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, U_t\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, U_t \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} + \left(U_t - \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w}\right) \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(U_t \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2\left(\sigma^2 + \sigma_{ULR}^2\right) \end{aligned} \tag{30}$$

z wykorzystaniem zależności dodatkowych, poniższych zależności:

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| ULR_t\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(CR_{t,k}, \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w}\right), \mathrm{E}\left(\sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| \sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w}\right) \middle| ULR_t\right) = \\ &= \mathrm{Var}\left(\sum_{j\le k, w>k} X_{t,j,w} \middle| ULR_t\right) = \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \sigma_t^2, \end{aligned}$$

$$\mathrm{Cov}\left(CX_{t,k} + CR_{t,k}, U_t\right) = \mathrm{Cov}\left(CX_{t,k} \middle| ULR_t\right) + \mathrm{Cov}\left(CR_{t,k} \middle| ULR_t\right)$$

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}\left(CX_{t,k}, CR_{t,k}\right) &= \mathrm{E}\left(\mathrm{Cov}\left(CX_{t,k}, CR_{t,k} \middle| ULR_t\right)\right) + \\ &+ \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle| ULR_t\right)\right) = \\ &= \mathrm{Cov}\left(\mathrm{E}\left(CX_{t,k} \middle| ULR_t\right), \mathrm{E}\left(CR_{t,k} \middle\| ULR_t\right)\right) = \end{aligned}$$

$$= p_k^p \cdot \left(p_k^i - p_k^p\right) \cdot EP_t^2 \cdot \sigma_{ULR}^2.$$

Po wprowadzeniu powyższego modelu możemy przejść do kalkulacji wariancji i kowariancji znajdujących się bezpośrednio w definicjach macierzy **V** oraz **C**. W pierwszym kroku przekształcimy momenty składające się na macierze **V** oraz **C** na poszczególne metody kalkulacji rezerw, w równaniach (31)-(35).

$$\mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) + \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) - 2 \cdot \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right), \quad (31)$$

$$\mathrm{Var}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = \mathrm{Var}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) + \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) - 2 \cdot \mathrm{Cov}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right), \quad (32)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) &= \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) - \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) - \\ &- \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) + \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right), \quad (33)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) &= \mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) - \\ - \mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) &- \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) + \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right),\end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}} - RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) &= \mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) - \\ - \mathrm{Cov}\left(\hat{RES}_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) &- \mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) + \mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right),\end{aligned} \quad (35)$$

Następnie, za pomocą formuł (36)-(40), elementy macierzy **V** i **C** wyrazimy za pomocą momentów zmiennych $CX_{t,k}$, $CR_{t,k}$.

$$\mathrm{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) = \left(\frac{q_k^p}{p_k^p}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(CX_{t,k}\right) = \left(\frac{q_k^p}{p_k^p}\right)^2 \cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^p \cdot \sigma^2 + \left(p_k^p\right)^2 \cdot \sigma_{ULR}^2\right), \quad (36)$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) &= \left(\frac{q_k^i}{p_k^i}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(CX_{t,k}\right) + \left(\frac{1}{p_k^i}\right)^2 \cdot \mathrm{Var}\left(CR_{t,k}\right) + \\ &+ 2 \cdot \left(\frac{q_k^i}{p_k^i}\right) \cdot \left(\frac{1}{p_k^i}\right) \cdot \mathrm{Cov}\left(CX_{t,k}, CR_{t,k}\right) = \\ &= \left(\frac{q_k^i}{p_k^i}\right)^2 \cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^p \cdot \sigma^2 + \left(p_k^p\right)^2 \cdot \sigma_{ULR}^2\right) + \end{aligned} \quad (37)$$

$$+\left(\frac{1}{p_k^i}\right)^2 \cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^i - p_k^p\right)\cdot\left(\mu^2 + \sigma^2 + \left(p_k^i - p_k^p\right)\cdot \sigma_{ULR}^2\right) +$$
$$+2\cdot\left(\frac{q_k^i}{p_k^i}\right)\cdot\left(\frac{1}{p_k^i}\right)\cdot p_k^p \cdot \left(p_k^i - p_k^p\right)\cdot EP_t^2 \cdot \sigma_{ULR}^2,$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) &= \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot\frac{q_k^i}{p_k^i}\cdot \operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\right) + \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot\frac{1}{p_k^i}\cdot \operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, CR_{t,k}\right) = \\ &= \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot\frac{q_k^i}{p_k^i}\cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^p \cdot \sigma^2 + \left(p_k^p\right)^2 \cdot \sigma_{ULR}^2\right) + \\ &+ \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot\frac{1}{p_k^i}\cdot p_k^p \cdot \left(p_k^i - p_k^p\right)\cdot EP_t^2 \cdot \sigma_{ULR}^2, \end{aligned} \tag{38}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left(RES_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) &= \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot \operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, U_t\right) - \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot \operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\right) = \\ &= \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot EP_t^2 \cdot p_k^p \cdot \left(\sigma^2 + \sigma_{ULR}^2\right) + \\ &+ \frac{q_k^p}{p_k^p}\cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^p \cdot \sigma^2 + \left(p_k^p\right)^2 \cdot \sigma_{ULR}^2\right), \end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left(RES_{t,k}, RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}\right) &= \frac{q_k^i}{p_k^i}\cdot \operatorname{Cov}\left(CX_{t,k}, U_t\right) - \frac{q_k^i}{p_k^i}\cdot \operatorname{Var}\left(CX_{t,k}\right) + \\ &+ \frac{1}{p_k^i}\cdot \operatorname{Cov}\left(CR_{t,k}, U_t\right) - \frac{1}{p_k^i}\cdot \operatorname{Cov}\left(CR_{t,k}, CX_{t,k}\right) = \\ &= \frac{q_k^i}{p_k^i}\cdot EP_t^2 \cdot \left(p_k^p \cdot \left(\sigma^2 + \sigma_{ULR}^2\right) - \left(p_k^p \cdot \sigma^2 + \left(p_k^p\right)^2 \cdot \sigma_{ULR}^2\right)\right) + \\ &+ \frac{1}{p_k^i}\cdot\left(\left(p_k^i - p_k^p\right)\cdot EP_t^2 \cdot \left(\left(\sigma^2 + \sigma_{ULR}^2\right) - p_k^p \cdot \sigma_{ULR}^2\right)\right). \end{aligned} \tag{40}$$

Warto zauważyć, że przy założeniu kalkulacji rezerwy metodą BF na podstawie stałej średniej ULR_0 rezerwa ta pozostaje wartością deterministyczną, co spowoduje uproszczenie się części pozostałych formuł do postaci (41)-(44).

$$\operatorname{Var}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = 0, \tag{41}$$

$$\mathrm{Cov}\left(RP_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = 0, \tag{42}$$

$$\mathrm{Cov}\left(RI_{t,k}^{\mathrm{CL}}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = 0, \tag{43}$$

$$\mathrm{Cov}\left(RES_{t,k}, RP_{t,k}^{\mathrm{BF}}\right) = 0. \tag{44}$$

5. Podsumowanie

W celu zilustrowania prezentowanych rozwiązań rozważmy przykład liczbowy oparty na następujących założeniach:

- pełen okres rozwoju szkód wynosi 8 lat,
- składka zarobiona EP_t w każdym roku wynosi 10 000,
- oczekiwany współczynnik szkodowości ULR_0 w każdym roku wynosi 50%,
- wszystkie trzy parametry σ_{ULR}^2, σ^2, μ^2 opisujące odpowiednio: wahania współczynnika szkodowości, wahania skumulowanych wypłat oraz wahania oszacowań likwidatorów, są stałe w każdym roku i przybierają wartości podane w tab. 1,
- Oczekiwane schematy rozwoju szkód zgłoszonych i wypłaconych są jednakowe w każdym roku powstawania szkód i dla lat rozwoju 1-8 przybierają poniższe wartości:

p_k^i: 60, 80, 90, 95, 98, 100, 100, 100%,

p_k^p: 35, 50, 60, 70, 85, 95, 100, 100%.

Na podstawie powyższych ogólnych założeń dokonano obliczeń współczynników regresji b_1, b_2 oraz b_3 dla każdego roku rozwoju szkód oraz wartości rezerwy dla każdej z czterech metod bazowych. Następnie wartość rezerwy dla proponowanej, ujednoliconej metody obliczono w oparciu o wyniki metod bazowych, z uwzględnieniem współczynników charakterystycznych dla danego roku rozwoju szkód.

Wyniki obliczeń dla trzech przykładowych zestawów parametrów σ_{ULR}^2, σ^2, μ^2 zapisano w tab. 1.

Jak można zauważyć, w wariantach 1 oraz 2 zmieniono jedynie parametr μ^2 określający trafność oszacowania rezerwy szkód przez likwidatorów. Wzrost tego parametru w przykładzie 2 spowodował zauważalny wzrost błędu dla metod wykorzystujących oszacowania likwidatorów (CL, BF *incurred losses*) przy niezmienionych błędach metod opartych jedynie na szkodach wypłaconych. W obu przypadkach osiągnięto najniższy błąd średniokwadratowy, wykorzystując metody bazowe w najbardziej korzystny sposób. W ostatnim, trzecim przykładzie, poprawiono założenie o trafności oszacowań likwidatorów (niska wartość μ^2) z jednoczesnym

Tabela 1. Otrzymane wyniki

	1	2	3
σ^2_{ULR}	0,0100	0,0100	0,0030
σ^2	0,0010	0,0010	0,0030
μ^2	0,0015	0,0040	0,.0005
Błąd metody (w tys.)			
CL (*paid losses*)	418	418	1254
CL (*incurred losses*)	409	908	430
BF (*paid losses*)	1153	1153	899
BF (*incurred losses*)	482	802	359
Proponowana metoda	244	305	337

Źródło: obliczenia własne.

silnym wzrostem wahań współczynników σ^2_{ULR} oraz σ^2. Spowodowało to oczekiwaną, relatywną poprawę wyników metod opartych na szkodach zgłoszonych względem tych, które bazują wyłączenie na wypłatach. Wytłumaczenie powyższego wyniku wydaje się być relatywnie proste. Przy założeniu o bardzo dobrej jakości informacji zawartej w oszacowaniach likwidatorów, wykorzystanie szerszej informacji o szkodach zgłoszonych w miejsce bardziej skąpej informacji o szkodach wypłaconych pozwala na redukcję błędu prognozy.

Literatura

[1] Benktander G., *An approach to credibility in calculating IBNR for casualty excess reinsurance*, „The Actuarial Review" 1976.

[2] Mack T., *Credible claims reserves: The Benktander Method*, „ASTIN Bulletin" 2000, vol. 30, no. 2.

[3] Venter G., *A three-way credibility approach to loss reserving*, „Insurance: Mathematics and Economics" 1989, no. 8.

[4] Casualty Actuarial Society, *Foundations of Casualty Actuarial Society*, 4th Edition, 2001.

[5] The Faculty and Institute of Actuaries, *Claims Reserving Manual*, 1989 (updated 1997).

LOSS RESERVE CALCULATION WITH AN OPTIMAL CLAIMS DATA USAGE

Summary

The most commonly used loss reserve calculation methods, the Chain Ladder (CL) and the Bornheutter-Ferguson method (BF), represent opposite approaches to the ultimate loss amount

prediction problem. The first one is based only on the current year loss data while the other uses long term average loss ratio. The problem of simultaneous application of both methods was already touched by many authors and some solutions are well known (see the Benktander method).

In practice, both methods mentioned above may be applied to the paid losses or incurred losses triangles. It may happen thou, that the results obtained with these methods may differ significantly from each other, depending on the loss triangle we used.

In this paper, we consider the application of both methods (CL and BF) simultaneously to the incurred and paid claims data. As a result, a unified approach is presented, which enables one to use both, paid losses and incurred losses at the same time. We concentrate on such usage of all available claims data, both paid ones and reported but not paid, that minimizes the mean square error of the reserve prediction. A computational example is also presented.