PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 1 (1201) 2008
Statystyka aktuarialna – teoria i praktyka

Magdalena Homa
Uniwersytet Wrocławski

PARAMETRY ROZKŁADU PROCESU ZAGREGOWANEJ WYPŁATY DLA PORTFELA UBEZPIECZEŃ NA ŻYCIE

1. Wstęp

Działalność ubezpieczeniowa jest związana z występowaniem ryzyka. W ubezpieczeniach na życie ryzyko analizuje się jako: ryzyko związane z przedmiotem ubezpieczenia i ryzyko finansowe. Aspekt finansowy ryzyka związanego z działalnością ubezpieczyciela obejmuje m.in. analizę szkodowości portfela. Przedmiotem analiz jest m.in. zbadanie tzw. procesu zagregowanej wypłaty, który obejmuje wszystkie świadczenia wynikające z zawartych umów składających się na portfel. Proces ten powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem. W pracy zbadano parametry rozkładu procesu zagregowanej wypłaty określonego dla portfela jako całości na podstawie znajomości odpowiednich charakterystyk funkcyjnych procesu skumulowanych świadczeń związanych z indywidualnym ubezpieczeniem. Określono podstawowe parametry rozkładu, które umożliwiają analizę szkodowości portfela i jego prawidłową wycenę.

2. Model ubezpieczenia i strumienie płatności z nim związane

W przypadku ubezpieczeń na życie z wykupionymi opcjami dodatkowymi to warunki ogólne ubezpieczenia specyfikują przypadki życiowe, których dotyczy umowa ubezpieczenia podstawowego (opcje podstawowe) i ubezpieczeń dodatkowych (opcje dodatkowe). Każdemu z tych przypadków życiowych odpowiada odpowiednia opcja polisy ubezpieczeniowej, czyli określony stan ze zbioru $S=\{H,S_1,S_2,\dots,S_k,D\}$. W zbiorze tym stan oznaczony H oznacza sytuację, gdy ubezpieczony jest zdrowy i zgodnie z zawartą umową opłaca składki, stany S_1, S_2, ..., S_k odpowiadają poszczególnym opcjom dodatkowym ubezpieczenia. Zmiana sytuacji życiowej ubezpieczonego powoduje zmianę statusu (stanu) polisy ubezpieczeniowej. Tak więc model opisujący dynamikę zmian sytuacji życiowych osoby ubezpieczonej jest jednocześnie modelem opisującym dynamiczny charakter aktywizacji możliwych opcji polisy (por. [3]). Do opisu zmian stanów od momentu zawarcia umowy ubezpieczenia wykorzystano funkcję $X(t)$, gdzie t ($t \in T$) oznacza czas, jaki upłynął od rozpoczęcia umowy ubezpieczenia. Każdy przypadek życiowy jest zdarzeniem losowym, więc dla każdej chwili t, $X(t)$ jest zmienną losową i $\{X(t), t \in T\}$ jest procesem stochastycznym przybierającym wartości ze skończonej przestrzeni stanów S. Wśród modeli probabilistycznych stosowanych w ubezpieczeniach na życie i dożycie szczególne miejsce zajmują modele Markowa, czyli modele zbudowane z wykorzystaniem procesów Markowa (por. [5; 8]. Są to również procesy, które umożliwiają opisanie procesu towarzyszącego ubezpieczeniu rozszerzonemu o opcje dodatkowe.

Rozszerzenie ubezpieczenia podstawowego (na życie lub dożycie) o opcje dodatkowe wiąże się z rozszerzeniem zakresu ochrony tego ubezpieczenia. W związku z tym w tego typu ubezpieczeniach wyróżnia się trzy rodzaje wypłacanych świadczeń wynikających z charakteru ubezpieczenia. Procesy reprezentujące wielkości wypłaconych świadczeń oznaczono $\{C_j(t)\}$, $\{D_j(t)\}$ oraz $\{C_{jk}(t)\}$. Są to odpowiednio:

– $C_j(\mathcal{T})$ renty wypłacane w okresie $\mathcal{T}$,

– $D_j(\mathcal{T})$ jednorazowe świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku,

– $C_{jk}(\mathcal{T})$ jednorazowe świadczenia wypłacane przez ubezpieczyciela z tytułu zajścia określonego zdarzenia losowego w okresie czasu $\mathcal{T}$.

Świadczenia te możemy podzielić na dwa rodzaje. Pierwszy rodzaj to świadczenia związane z określonym stanem j procesu $\{X(t), t \geq 0\}$, obejmujące renty oraz świadczenia wypłacane z tytułu dożycia określonego wieku. W przypadku tych świadczeń ich wypłata następuje wówczas, gdy aktywna jest odpowiednia opcja ubezpieczenia. Drugi rodzaj wypłat stanowią świadczenia związane z przejściem procesu $\{X(t), t \in T\}$ ze stanu j do stanu k obejmujące świadczenia wypłacane jednorazowo z tytułu zajścia określonego w umowie zdarzenia losowego.

3. Proces skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu

Podstawą wyznaczenia charakterystyk funkcyjnych zagregowanej wypłaty dla portfela polis jest prawidłowa wycena poszczególnych strumieni świadczeń charakterystycznych dla ubezpieczenia indywidualnego. Wyceny poszczególnych strumieni dokonuje się, określając ich zaktualizowaną wartość według wzoru (por. [2]):

$$ZB_t(\mathcal{T}) = \frac{1}{\upsilon(t)} \int_{\mathcal{T}} \upsilon(\tau) dB(\tau). \tag{1}$$

W przypadku świadczeń związanych z określonym stanem wypłata następuje, gdy aktywna jest odpowiednia opcja ubezpieczenia, a zatem zaktualizowana wartość rent wypłaconych do chwili t równa jest:

$$ZC_j(\mathcal{T}) = \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau - t)} I_j(\tau) dC_j(\tau), \tag{2}$$

gdzie $I_j(t) = I_{\{X(t)=j\}} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } X(t) = j, \\ 0, & \text{gdy } X(t) \neq j. \end{cases}$

Całka po prawej stronie to całka Riemanna–Stieltjesa (R–S). W tym przypadku całka Riemanna-Stieltjesa jest zwykłą całką Riemanna. Jeśli płatności dokonywane są w ustalonych odstępach czasu (rok, kwartał, miesiąc itp.) z góry lub z dołu, uzyskuje się całkę Stieltjesa. Mianowicie raty renty wypłaca ubezpieczyciel z dołu, tzn. na koniec okresu, którego dotyczą. Wówczas dla okresu $[v, v+1]$ ratę renty wypłaci ubezpieczyciel w chwili $v+1$. W tym przypadku dla ustalonych odstępów czasu $[v, v+1]$, $v = 0, 1, 2, \ldots$ zachodzi równość:

$$dC_j(t) = c_j(t) d\lceil t \rceil, \; v \le t \le v+1.$$

Wówczas wzór (2) przybiera postać:

$$\begin{aligned} ZC_t^j(\mathcal{T}) &= \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau - t)} I_j(\tau) dC_j(\tau) = \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau - t)} I_j(\tau) c_j(\tau) d\lceil \tau \rceil = \\ &= \sum_j \sum_{v=0} e^{-\delta\cdot(v+1-t)} I_j(v+1) c_j(v+1). \end{aligned} \tag{3}$$

Zaktualizowana na moment t wartość jednorazowej sumy w wysokości $d_j(v)$ wypłaconej w okresie $\mathcal{T}$ jest następująca:

$$ZD_t^j(\mathcal{T}) = \sum_{v \in \mathcal{T}} \sum_{j \in S} e^{-\delta\cdot(v - t)} I_j(v) d_j(v).$$

Zauważmy, że jest to suma Stieltjesa, którą można zapisać jako następującą całkę Riemanna–Stieltjesa:

$$ZD_t^j(\mathcal{T}) = \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau - t)} I_j(\tau) dD_j(\tau). \tag{4}$$

Rozpatrując płatności związane ze zmianą stanu, czyli świadczenia jednorazowe w wysokości $c_{jk}(t)$, należy zauważyć, że w dowolnym odcinku czasu $\mathcal{T}$ proces $\{X(t)\}$ może kilkakrotnie zmienić stan. Niech $N_{jk}(t)$ oznacza liczbę przejść procesu $\{X(t)\}$ ze stanu j do k w czasie $[0,t]$, co zapisuje się następująco (por. [7]):

$$N_{jk}(t) = \#\{\tau \in (0,t]: X(\tau - 0) = j, (X(\tau) = k\}.$$

Wówczas zaktualizowana wartość (na moment t) świadczenia w wysokości $c_{jk}(\tau)$ wypłaconego w chwili τ, jeśli nastąpiło przejście procesu ze stanu j do stanu k dana jest wzorem:

$$ZC_t^{jk}(\tau) = e^{-\delta\cdot(\tau-t)} I_{\left\{X\left(\tau^-\right)=j \wedge X\left(\tau^+\right)=k\right\}} c_{jk}(\tau).$$

Zatem proces losowy postaci:

$$ZC_t^{jk}(\mathcal{T}) = \sum_j \sum_{k\neq j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau) \tag{5}$$

określa zaktualizowaną wartość jednorazowych świadczeń wypłaconych przez ubezpieczyciela z tytułu zawartego indywidualnego ubezpieczenia.

Odpowiednie złożenie procesów wielkości wypłaconych świadczeń prowadzi m.in. do procesu skumulowanych świadczeń związanych z indywidualnym ubezpieczeniem. Proces ten, nazywany również procesem skumulowanych roszczeń (por. [1; 4]), oznaczono $\{W(t)\}_{t\geq 0}$. Uwzględniając poszczególne strumienie płatności charakterystyczne dla ubezpieczenia wieloopcyjnego określone wzorami (2)-(5), otrzymano zaktualizowaną wartość skumulowanych świadczeń jako proces losowy następującej postaci:

$$\begin{aligned} ZW_t(\mathcal{T}) &= \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} dW(\tau) = \\ &= \underbrace{\sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} I_j(\tau) dC_j(\tau) + \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} I_j(\tau) dD_j(\tau)}_{\text{świadczenia związane ze stanem } j} + \\ &\quad + \underbrace{\sum_j \sum_{k\neq j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau)}_{\substack{\text{świadczenia związane z przejściem} \\ \text{procesu ze stanu } j \text{ do } k}}. \end{aligned} \tag{6}$$

Równoważna postać wzoru (6) jest następująca:

$$ZW(\mathcal{T}) = \sum_j \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} I_j(\tau) d\left(W_j(t)\right) + \sum_j \sum_{k\neq j} \int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)} c_{jk}(\tau) dN_{jk}(\tau), \tag{7}$$

gdzie $\{\mathcal{W}_j(t)\}$ jest procesem uwzględniającym wszystkie świadczenia związane ze stanem j.

Z punktu widzenia ubezpieczeń interesujące są następujące charakterystyki funkcyjne procesu: wartość oczekiwana, wariancja, odchylenie standardowe pozwalające oszacować wartość skumulowanych świadczeń i określić precyzję tego oszacowania. Do wyznaczenia wartości oczekiwanej i wariancji skumulowanych świadczeń wystarczy znajomość wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji poszczególnych strumieni płatności (por. [6]). Podstawiając je do wzorów na wartość oczekiwaną i wariancję sumy zależnych zmiennych losowych, otrzymuje się wartość oczekiwaną i wariancję skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu. Zatem wartość oczekiwaną skumulowanych świadczeń oblicza się ze wzoru:

$$
\begin{aligned}
E\left(Z\mathcal{W}_t(\mathcal{T})\middle|X(t)=i\right) &= E\left(\frac{1}{\upsilon(t)}\int_{\mathcal{T}}\upsilon(\tau)d\mathcal{W}(\tau)\middle|X(t)=i\right)= \\
&= \sum_j\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,d\left(C_j(\tau)+D_j(\tau)\right)+ \\
&+\sum_j\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,\mu_{jk}(x+\tau)c_{jk}(\tau)d\tau.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Natomiast wariancja skumulowanych świadczeń jest następująca:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}\left(Z\mathcal{W}_t(\mathcal{T})\middle|X(t)=i\right) &= \mathrm{Var}\left(\frac{1}{\upsilon(t)}\int_{\mathcal{T}}\upsilon(\tau)d\mathcal{W}(\tau)\middle|X(t)=i\right)= \\
&= \sum_j\int_{\mathcal{T}} e^{-2\delta\cdot(\tau-t)}\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,d\left(C_j^2(\tau)+D_j^2(\tau)\right)+ \\
&+2\sum_j\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-2\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}^2(\tau)\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,\mu_{jk}(x+\tau)d\left(C_j(\tau)+D_j(\tau)\right)+ \\
&+\sum_j\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-2\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}^2(\tau)\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,\mu_{jk}(x+\tau)d\tau- \\
&-\left(\sum_j\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,d\left(C_j(\tau)\right)\right)^2- \\
&-\left(\sum_j\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}^2(\tau)\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right)^2-
\end{aligned}
\tag{9}
$$

$$-2\left(\sum_{j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\,d\left(C_j(\tau)+D_j(\tau)\right)\right)\cdot$$

$$\cdot\left(\sum_{j}\sum_{k\neq j}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}c_{jk}(\tau)\,{}_{\tau-t}p_{x+t}^{ij}\mu_{jk}(x+\tau)d\tau\right).$$

4. Proces zagregowanej wypłaty dla portfela polis

Rozważmy portfel złożony z m polis ubezpieczenia zawartych z osobami w wieku $x_1, x_2, ..., x_m$ odpowiednio na okres ubezpieczenia $n_1, n_2, ..., n_m$. W przypadku ubezpieczeń na życie, które sprzedawane są indywidualnie, poszczególne procesy płatności dla portfela są sumą strumieni płatności z indywidualnych polis w portfelu. Dlatego też proces zagregowanej wypłaty dla portfela jako całości oznaczony $\left\{W^{PTF}(t)\right\}_{t\geq 0}$ wyznaczono jako sumę świadczeń związanych z indywidualnym ubezpieczeniem. Zaktualizowana wartość zagregowanej wypłaty wyraża się następującym wzorem:

$$ZW_t^{PTF}(\mathcal{T})=\sum_{l=1}^{m}\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}d\mathcal{W}^l(\tau),$$

gdzie $\mathcal{W}^l(\tau)$ oznacza proces skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu. Wzór ten określa ogólną wycenę wypłaty z portfela polis. Powinien być postrzegany jako dający ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem. Informacje te są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu, kalkulacji składek i dla zachowania wypłacalności ubezpieczyciela. Po uwzględnieniu rodzaju świadczeń (2)-(5), powyższy wzór przybiera postać:

$$\begin{aligned}ZW_t^{PTF}(\mathcal{T})&=\sum_{l=1}^{m}\left[\int_0^t e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\sum_j\left(I_{\left\{X^{(l)}(\tau)=j\right\}}\cdot\left(dC_j^{(l)}(\tau)+dD_j^{(l)}(\tau)\right)+\right.\right.\\&\left.\left.+\sum_{k\neq j}c_{jk}^{(l)}(\tau)dN_{jk}^{(l)}(\tau)\right)\right]=\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\sum_j\sum_{l=1}^{m}I_{\left\{X^{(l)}(\tau)=j\right\}}\left(dC_j^{(l)}(\tau)+dD_j^{(l)}(\tau)\right)+\\&+\int_{\mathcal{T}} e^{-\delta\cdot(\tau-t)}\sum_j\sum_{k\neq j}\sum_{l=1}^{m}c_{jk}^{(l)}(\tau)dN_{jk}^{(l)}(\tau).\end{aligned}\tag{10}$$

W pracy zakłada się niezależność szkód wynikających z rożnych kontraktów ubezpieczeniowych. Założenie to powoduje, że przedstawiony proces odpowiada tylko niektórym szczególnym grupom ubezpieczeń. Dobrze opisuje on grupę ubezpieczeń na życie, do których zaliczamy ubezpieczenia z opcjami dodatkowymi. Zatem jego parametry wyznacza się ze wzorów na wartość oczekiwaną i wariancję sumy niezależnych zmiennych losowych:

$$E\left(ZW_t^{PTF}(T)\middle|X^1(t)=i_1,\ldots,X^m(t)=i_m\right)=\sum_{l=1}^{m}E\left(ZW_t^l(T)\middle|X^l(t)=i_l\right),$$

$$\mathrm{Var}\left(ZW_t^{PTF}(T)\middle|X^1(t)=i_1,\ldots,X^m(t)=i_m\right)=\sum_{l=1}^{m}\mathrm{Var}\left(ZW_t^l(T)\middle|X^l(t)=i_l\right).$$

Występujące w powyższych wzorach parametry skumulowanych świadczeń dla indywidualnego ubezpieczenia: $E\left(ZW_t^l(T)\middle|X^l(t)=i_l\right)$ oraz $\mathrm{Var}\left(ZW_t^l(T)\middle|X^l(t)=i_l\right)$ wyznacza się według wzorów (8) i (9).

W przypadku ubezpieczeń tego typu najważniejszymi czynnikami różnicującymi ubezpieczonych są wiek i płeć. Wyróżnia się też czynniki różnicujące rodzaj ubezpieczenia, tj. okres ubezpieczenia oraz typ ubezpieczenia podstawowego (*UZ* – ubezpieczenie na życie, *UD* – ubezpieczenie na dożycie, *UZD* – ubezpieczenie mieszane). Zatem analizując zagregowaną wypłatę z portfela na podstawie indywidualnych polis składających się na portfel i wyznaczając parametry jej rozkładu, dokonano podziału portfela na klasy według następujących czynników różnicujących: wiek i płeć ubezpieczonego $\left(x_k, {}^{K}\!/_{M}\right)$ oraz okres i przedmiot ubezpieczenia $\left(n_k, {}^{UZ}\!/_{UD}\right)$. W związku z tym niejednorodny portfel polis dzieli się na jednorodne klasy G_1, G_2, ..., G_K o liczebności k-tej klasy odpowiednio M_k. Uwzględniając czynniki różnicujące strukturę jednorodnej klasy oznaczono jako:

$$G_k=\left(x_k,n_k,{}^{UZ}\!/_{UD},M_k,p_k\right).$$

Wówczas wartość oczekiwaną zagregowanej wypłaty wyznaczono w następujący sposób:

$$\begin{aligned}E\left(ZW_t^{PTF}(T)\right)&=E\left(\sum_k ZW_t^{G_k}(T)\right)=\sum_k m_k\cdot E\left(ZW_t^{l_k}(T)\right)=\\&=m\sum_k p_k\cdot E\left(ZW_t^{l_k}(T)\right),\end{aligned}\tag{10}$$

gdzie: $W^{G_k}(t)$ – proces zagregowanej wypłaty z jednorodnej klasy G_k,

$W^{l_k}(t)$ – proces skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu z k-tej klasy,

p_k – prawdopodobieństwo zaliczenia ubezpieczonego do k-tej klasy.

Z powyższego wzoru wynika, że wartość oczekiwana zagregowanej wypłaty dla całego niejednorodnego portfela jest sumą wartości oczekiwanych z poszczególnych klas jednorodnych. Analogicznie wyznacza się wariancję zagregowanej wypłaty jako sumę wariancji z wydzielonych klas.

5. Zagregowana wypłata dla przykładowych portfeli ubezpieczeń

Ubezpieczenie na życie i dożycie

Najprostszym przykładem jest ubezpieczenie podstawowe bez żadnych opcji dodatkowych, obejmujące **ubezpieczenie na życie (UŻ), czyste ubezpieczenie na dożycie (UD) oraz ubezpieczenie na życie i dożycie (UŻD)**. Przedmiotem takich ubezpieczeń jest życie ubezpieczonego. W wymienionych ubezpieczeniach wyodrębnione są dwa przypadki życiowe: życie (*H*) i śmierć (*D*). W tego typu ubezpieczeniach występują dwa rodzaje świadczeń. Pierwsze z nich to świadczenie wypłacane przez ubezpieczyciela w razie śmierci ubezpieczonego w okresie trwania ubezpieczenia oznaczone c_{HD}, drugie zaś jest świadczeniem wypłacanym z tytułu dożycia końca okresu ubezpieczenia d_H. Świadczenia te są równe odpowiednio:

$$c_{HD}(t) = \begin{cases} c & \text{dla } 0 < t \le n, \\ 0 & \text{dla } t > n, \end{cases} \qquad d_H(t) = \begin{cases} d & \text{dla } t = n, \\ 0 & \text{poza tym.} \end{cases}$$

Po uwzględnieniu strumieni płatności charakterystycznych dla ubezpieczeń UŻ, UD i UŻD proces skumulowanych świadczeń zgodnie ze wzorem (6) jest następującej postaci:

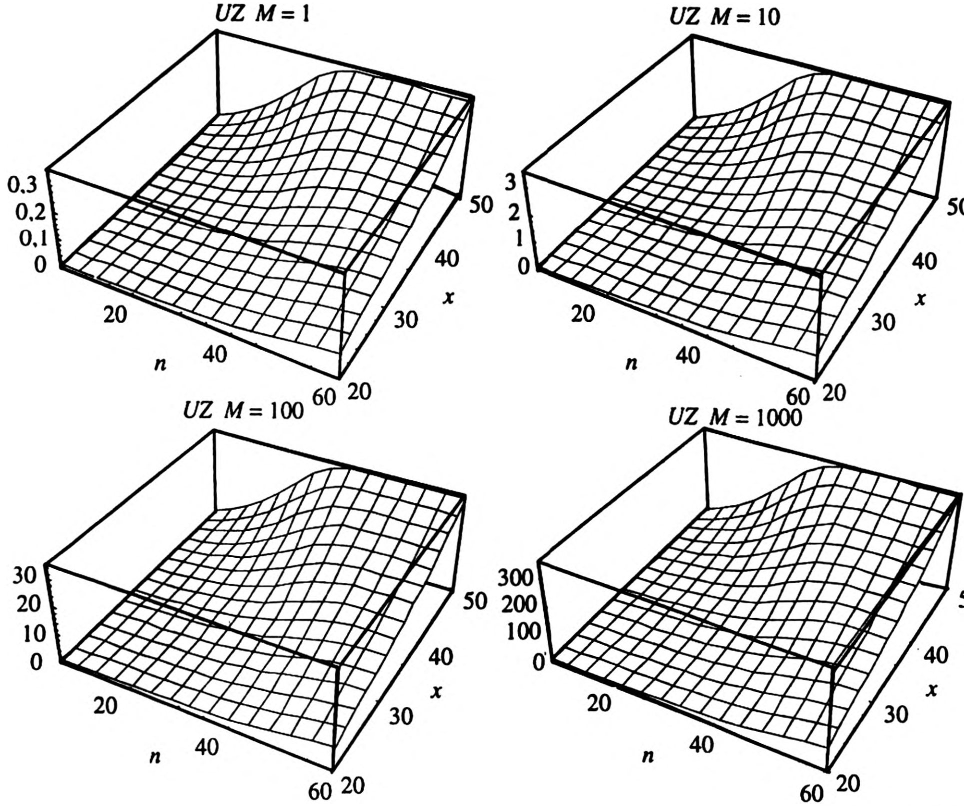
$$\underbrace{d \cdot e^{-\delta\cdot(n-t)} I_H(n)}_{\substack{\text{świadczenia z tytułu} \\ \text{dożycia}}} + \underbrace{\int_t^n e^{-\delta\cdot(s-t)} dN_{HD}(s)}_{\substack{\text{świadczenia z tytułu} \\ \text{śmierci}}}.$$

Zatem zagregowana wypłata dla portfela zgodnie z (10) jest równa:

$$ZW_t^{PTF}(\mathcal{T}) = \sum_{l=1}^{m} \left[d \cdot e^{-\delta\cdot(n-t)} I_H^l(n) + c \int_t^n e^{-\delta\cdot(s-t)} dN_{HD}^l(s) \right].$$

W pracy przeprowadzono analizę podstawowych charakterystyk całkowitej zagregowanej wypłaty dla portfela polis stanowiącą podstawę wyceny portfela oraz analizę przyszłych wypłat z portfela w okresie trwania ubezpieczenia umożliwiających korektę ewentualnych niedoszacowań.

Po pierwsze zbadano parametry całkowitej zagregowanej wypłaty (nazywanej również całkowitymi skumulowanymi świadczeniami), czyli obejmującej całkowite strumienie płatności z uwzględnieniem wieku osób ubezpieczanych i długości okresu ubezpieczenia. Wybrano klasę jednorodną mężczyzn w wieku x lat, którzy zawarli n-letnie ubezpieczenie na życie. Uwzględniając wymienione czynniki różnicujące, strukturę tej klasy oznaczono $G=(x,n,UZ,M,1)$. Do obliczeń numerycznych przyjęto sumę ubezpieczenia równą 1 j.p., stopę oprocentowania równą 5% i intensywność zgonu stosowaną przez duńskie towarzystwa ubezpieczeniowe[1] $\mu_{HD}(t)=0{,}0004+0{,}0000034674\cdot 10^{0{,}06(x+t)}$ (por. [8]). Wykresy wybranych parametrów (wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego) zagregowanej wypłaty dla jednorodnego portfela o określonej strukturze i liczebności równej odpowiednio $M=1,10,100,1000$ przedstawiono na rys. 1 i 2.

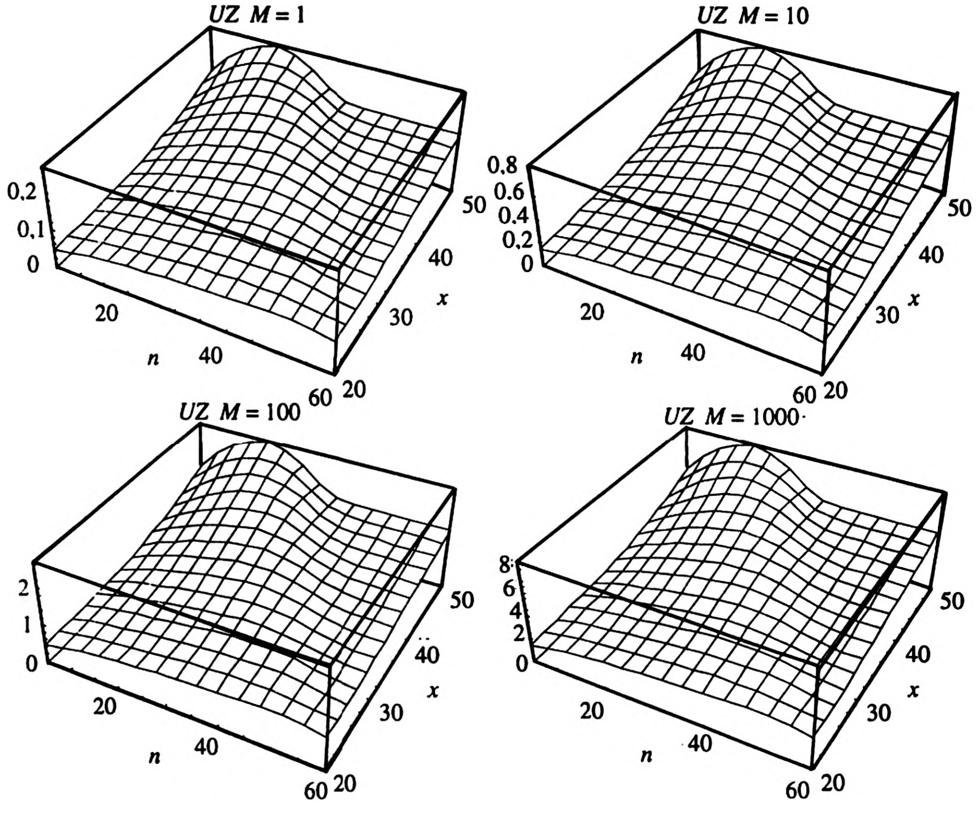


Rys. 1. Wartość oczekiwana zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G=(x,n,M,UZ,1)$

Źródło: opracowanie własne.

[1] Polskie firmy ubezpieczeniowe nie udostępniają ani informacji dotyczących stosowanych funkcji intensywności, ani danych umożliwiających ich aproksymację.

Z rysunków wynika, że w przypadku portfeli jednorodnych liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości wartości oczekiwanej. Jak można się było spodziewać, we wszystkich przypadkach wartość oczekiwana całkowitej zagregowanej wypłaty, niezależnie od wieku wstępu, jest rosnącą funkcją okresu trwania ubezpieczenia n. Jeżeli natomiast rozpatrujemy ją jako funkcję wieku osoby ubezpieczanej, to możemy zaobserwować, że dla wieloletnich kontraktów ubezpieczeniowych są to funkcje rosnące, a dla małych wartości n jest to funkcja prawie stała.

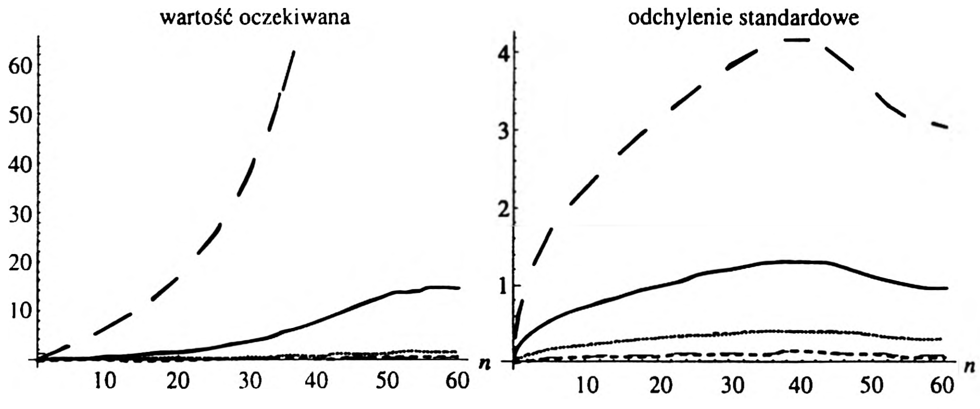


Rys. 2. Odchylenie standardowe zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (x, n, M, UZ, 1)$

Źródło: opracowanie własne.

Odchylenie standardowe jest miarą dokładności oszacowania przeciętnych skumulowanych świadczeń. Przedstawione wykresy wskazują, że również w przypadku odchylenia standardowego liczba polis wpływa jedynie na rząd wielkości, a nie wpływa na przebiegi i własności przedstawionych funkcji. Wykresy odchylenia standardowego we wszystkich przypadkach wskazują, że dla ustalonego wieku osoby ubezpieczanej odchylenie standardowe rośnie od $n = 1$ do maksimum i następnie maleje aż do $n = 60$. Natomiast jako funkcje wieku osób ubezpieczonych są to funkcje rosnące.

Przedstawione własności funkcji można dokładniej przeanalizować, rozpatrując umowy zawarte z ubezpieczonym w określonym wieku. Przyjęto wiek ubezpieczonych mężczyzn 30 lat, co oznacza zbadanie parametrów rozkładu zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze odpowiednio $G = (30, n, UZ, M, 1)$.

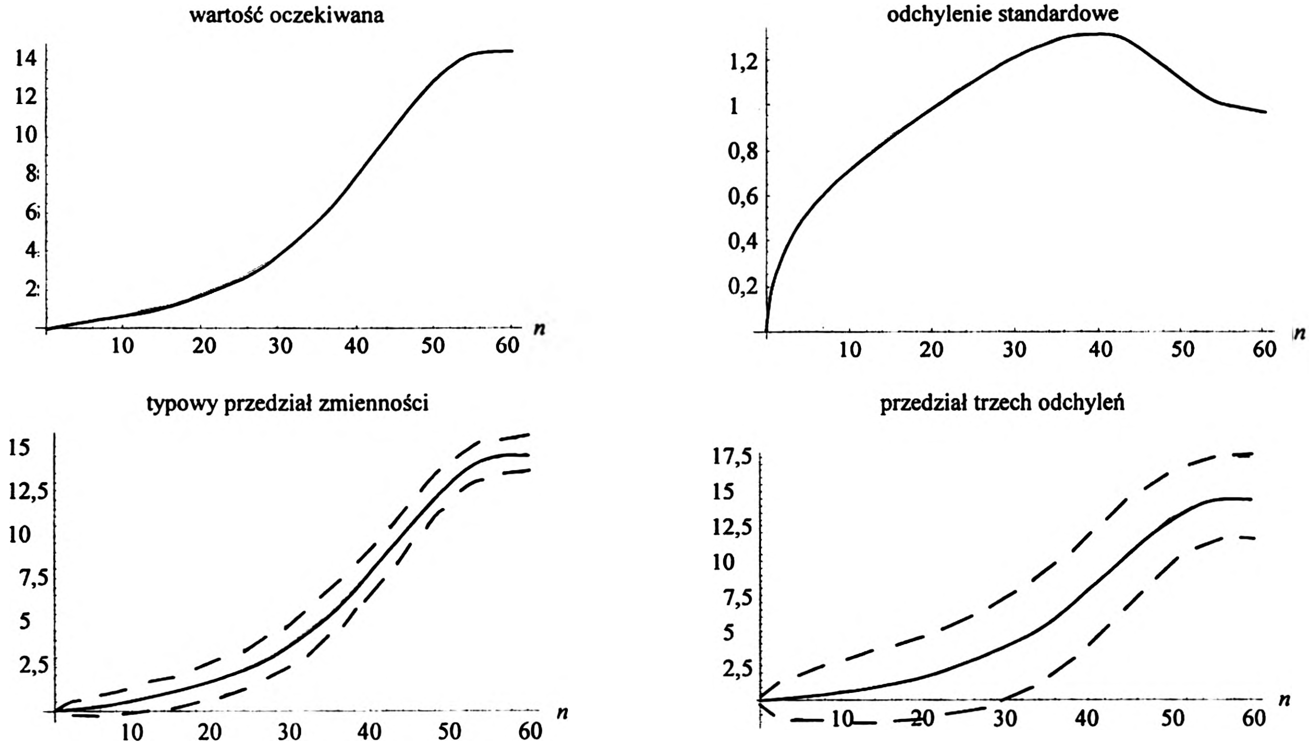


Rys. 3. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, UZ, M, 1)$ i $M = 1, 10, 100, 1000$.

Źródło: opracowanie własne.

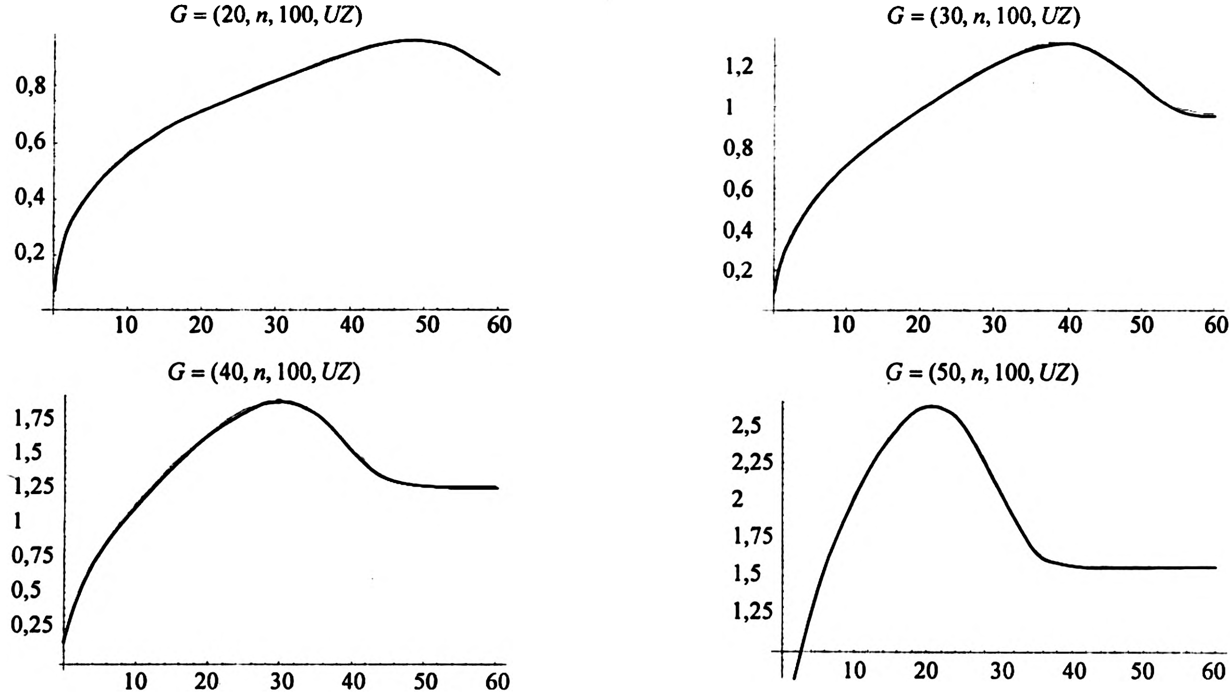
Analizując wyniki uzyskane dla struktury portfela $G = (30, n, UZ, M, 1)$ potwierdza się, że liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości, a przebieg i własności wartości oczekiwanej i odchylenia standardowego jako funkcji n nie zmianiają się przy różnych wartościach M. Dlatego też, ze względu na występujące analogie, do dalszej analizy wybrano portfel o ustalonej liczebności, tzn. przyjęto $M = 100$ przy niezmienionych pozostałych czynnikach różnicujących, czyli zbadano kształtowanie się wybranych charakterystyk funkcyjnych dla portfela o strukturze $G = (30, n, UZ, 100, 1)$. Otrzymane wyniki przedstawiono na rys. 4.

Wykresy analizowanych parametrów całkowitej zagregowanej wypłaty dla portfela $G = (30, n, UZ, 100, 1)$ wskazują, że wartość oczekiwana jest rosnącą funkcją okresu ubezpieczenia, natomiast w przypadku odchylenia standardowego otrzymano funkcję, która osiąga maksimum w punkcie $n_{\max} = 39{,}1$, dla którego ${}_tp_x^{HH} = 0{,}7$. Oznacza to, że w tym przypadku najmniejsza precyzja szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty z portfela charakteryzuje portfel ubezpieczeń zawieranych na okres około 35-45 lat. Aby potwierdzić te tendencje, wyznaczono odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty dla jednorodnych portfeli ubezpieczeń zawieranych z osobami w wieku 20, 30, 40 i 50 lat.



Rys. 4. Parametry całkowitej zagregowanej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, UZ, 100, 1)$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 5. Wpływ czynników różnicujących na odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty z jednorodnego portfela $G = (x, n, UZ, 100, 1)$ $x = 20, 30, 40, 50$

Źródło: opracowanie własne.

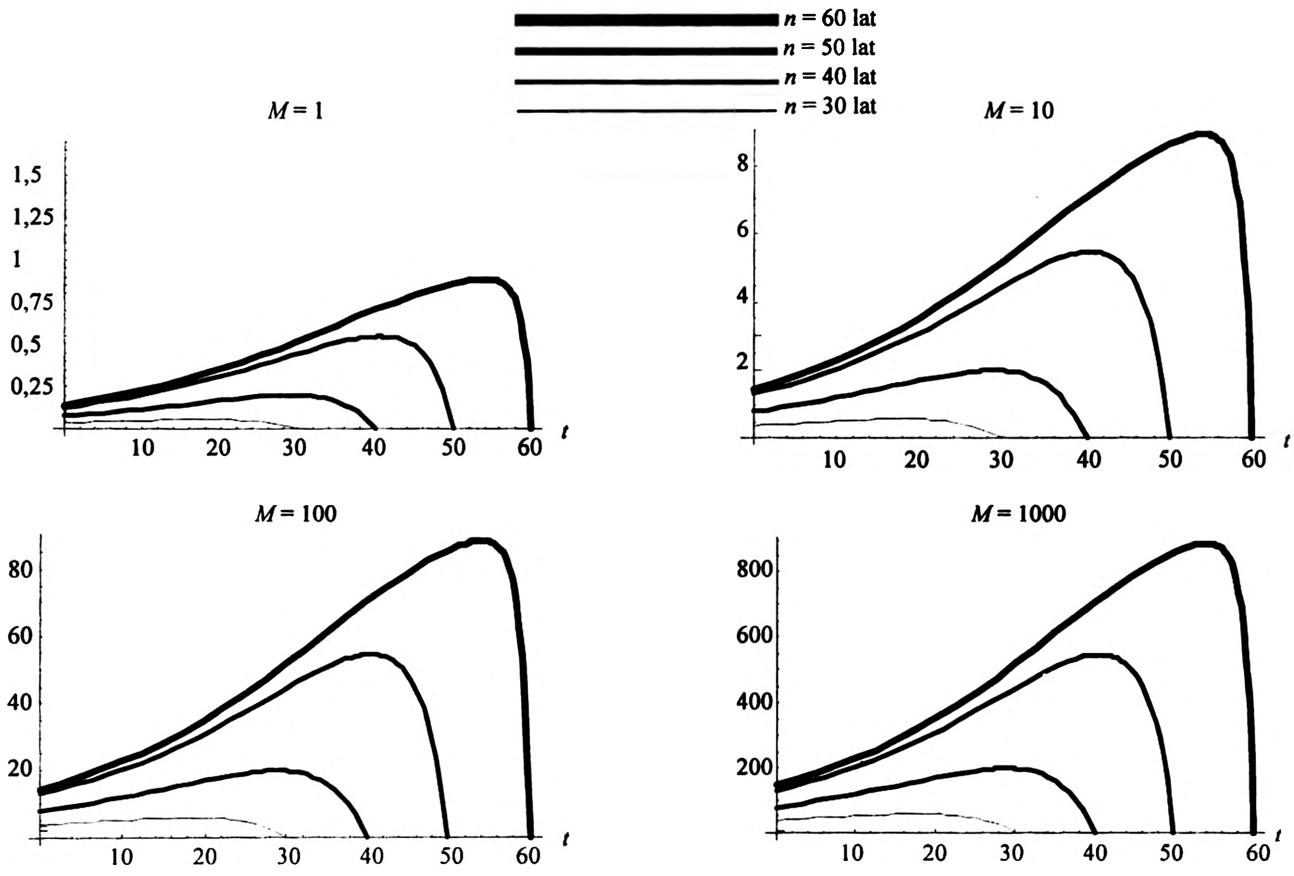
Powyższe wykresy przedstawiają, w jaki sposób czynniki różnicujące (wiek osób ubezpieczanych i okres ubezpieczenia), wpływają na dokładność szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty z portfela. We wszystkich przypadkach wartość odchylenia standardowego rośnie i maksimum osiąga w punkcie, dla którego spełniony jest warunek ${}_np_x = {}_np_x^{HH} = 0{,}7$. W związku z tym najmniejszą precyzją szacunku zagregowanej wypłaty charakteryzują się ubezpieczenia zawierane na okres $n_{\max}$.

Drugi aspekt przeprowadzonej analizy wiąże się z analizą własności procesu przyszłych skumulowanych świadczeń już w okresie trwania ubezpieczenia, z uwzględnianiem ewentualnych niedoszacowań w przyszłych płatnościach. Zbadano więc wartość oczekiwaną i odchylenie standardowe przyszłej zagregowanej wypłaty dla portfela polis o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$ tzn. na portfel składają się n-letnie polisy ubezpieczenia na życie zawarte z mężczyznami w wieku 30 lat, do obliczeń przyjęto okres ubezpieczenia równy odpowiednio 20, 30, 40 i 50 lat.

Podobnie jak w przypadku całkowitej zagregowanej wypłaty, również analizując przyszłe świadczenia wynikające z portfela jednorodnego można stwierdzić, że wielkość portfela wpływa na rząd wielkości, natomiast przebieg wartości oczekiwanej jako funkcji czasu nie ulega zmianie. Interesujące jest zatem zbadanie, czy precyzja szacunków zmienia się w okresie trwania ubezpieczenia. Na rysunku 7 przedstawiono wykresy odchylenia standardowego zagregowanych przyszłych świadczeń dla portfela $G = (30, n, M, UZ)$ i przyjęto okres ubezpieczenia równy odpowiednio 20, 30, 40 i 50 lat.

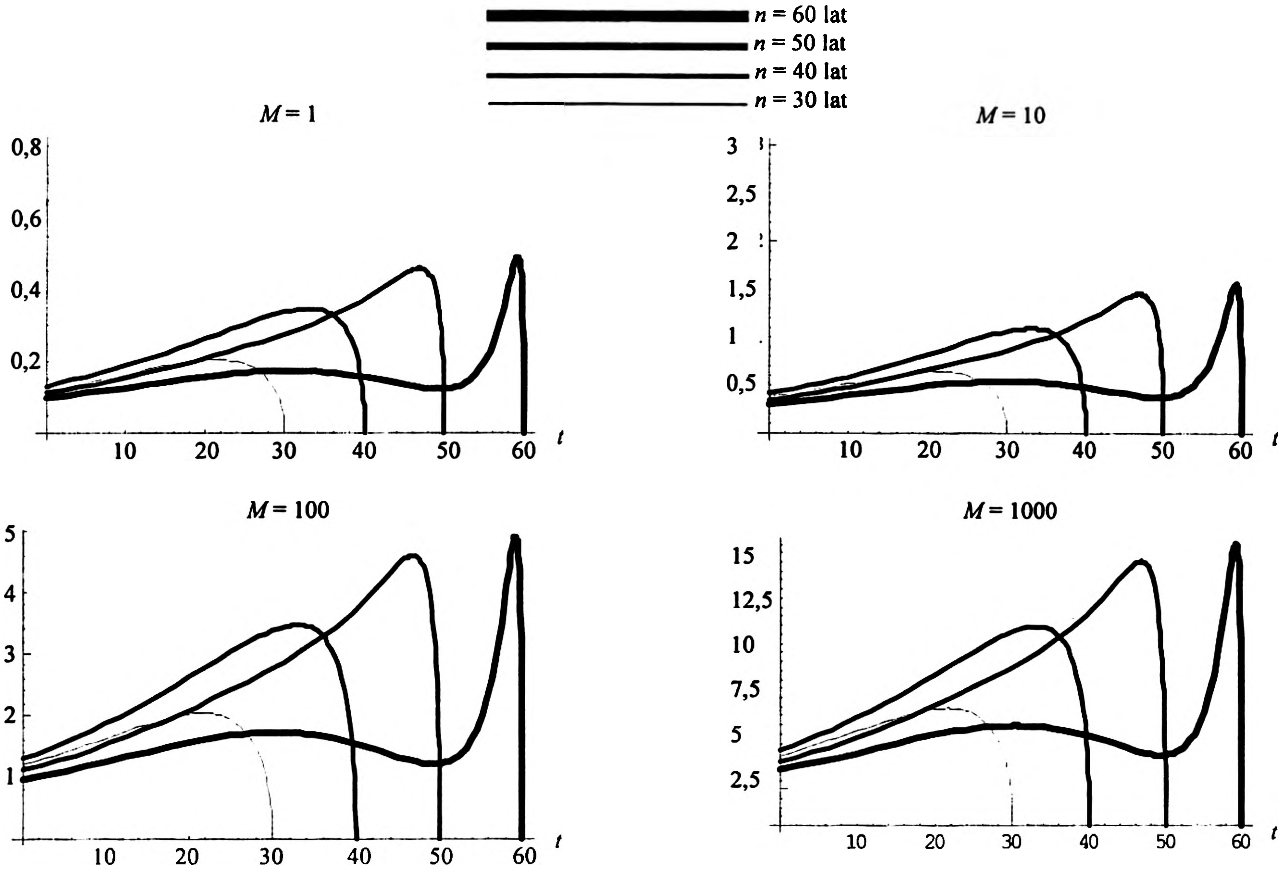
Analiza wyników dotyczących odchylenia standardowego potwierdza, że liczba polis w portfelu wpływa jedynie na rząd wielkości, a przebieg i własności odchylenia standardowego jako funkcji t nie zmieniają się przy różnych wartościach M. Ponadto z powyższych wykresów odchylenia standardowego wynika, że precyzja szacunku oczekiwanej zagregowanej wypłaty zależy od okresu ubezpieczenia. Dlatego też do dalszej analizy wybrano portfel o ustalonej liczebności (przyjęto $M = 100$), czyli zbadano kształtowanie się wybranych charakterystyk funkcyjnych dla portfela o strukturze $G = (30, n, 100, UZ)$ dla różnych okresów ubezpieczenia $n = 20, 30, 40, 50$. Aby dokonać porównania precyzji szacunku, na kolejnym wykresie przedstawiono wartość oczekiwaną przyszłej zagregowanej wypłaty wraz z odpowiadającym jej przedziałem zmienności.

Na podstawie otrzymanych przedziałów zmienności przyszłej zagregowanej wypłaty z portfela ubezpieczeń zawieranych odpowiednio na 20, 30, 40 i 50 lat można zauważyć, że, niezależnie od przyjętego okresu ubezpieczenia, w okresie trwania ubezpieczenia precyzja szacunku zmienia się i nie ma jednoznacznej tendencji. We wszystkich przypadkach wartość odchylenia standardowego rośnie, a pod koniec okresu ubezpieczenia gwałtownie spada. A zatem w okresie trwania ubezpieczenia ubezpieczyciel może korygować ewentualne powstałe w czasie



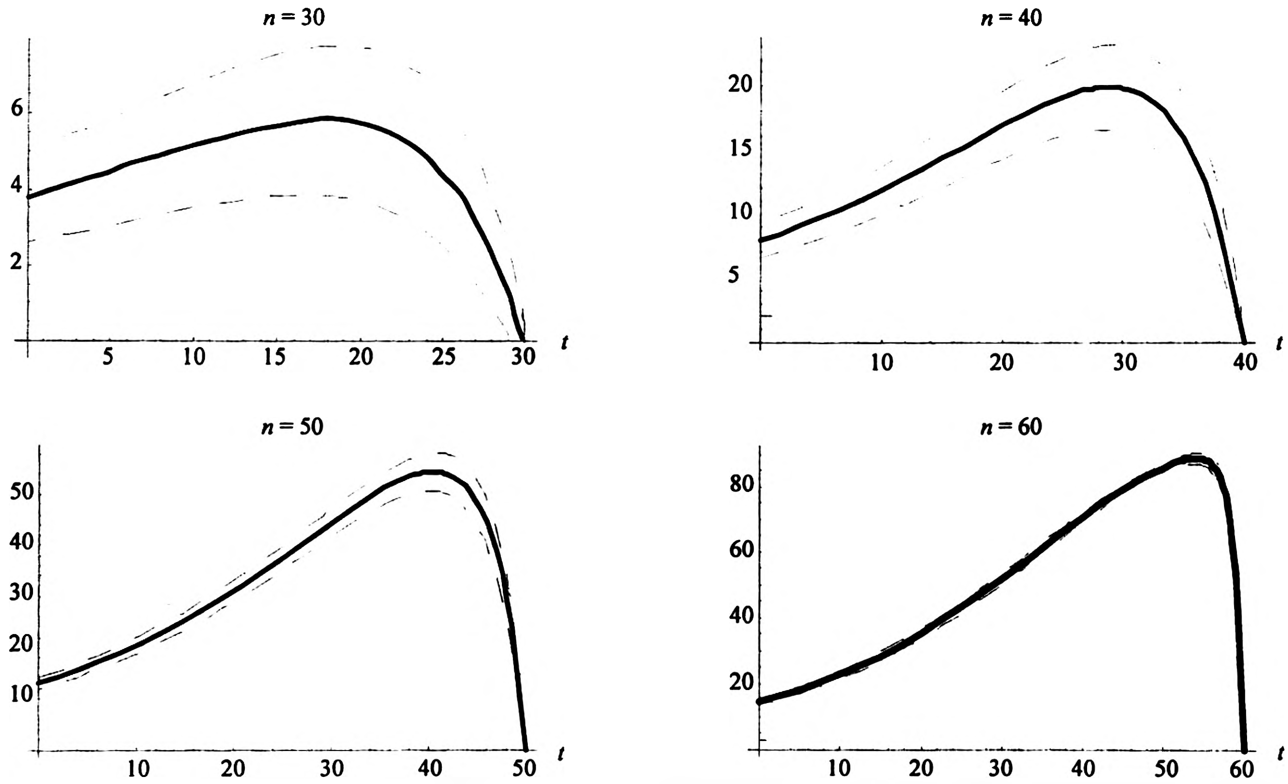
Rys. 6. Wartość oczekiwana przyszłej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$ dla różnych okresów ubezpieczenia

Źródło: opracowanie własne.



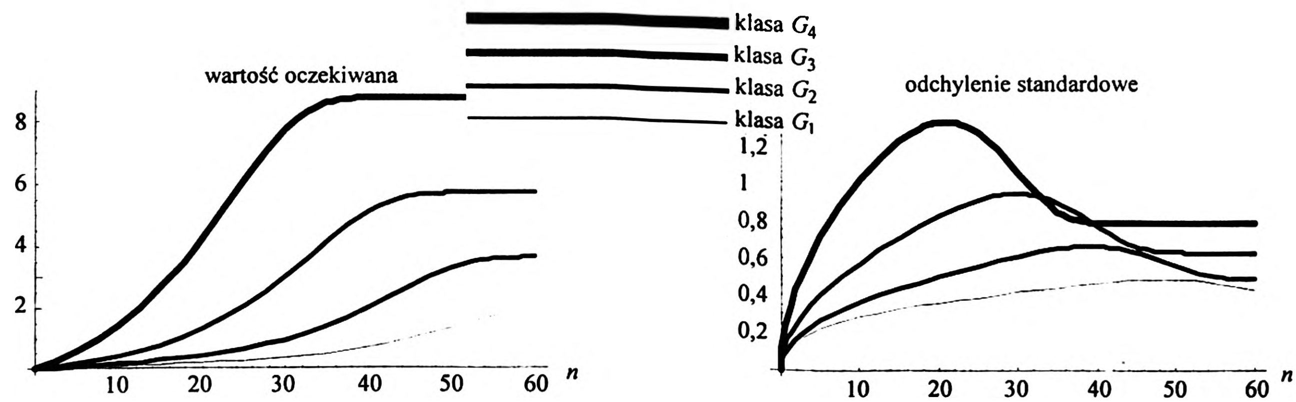
Rys. 7. Odchylenie standardowe przyszłej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, M, UZ)$ dla różnych okresów ubezpieczenia

Źródło: opracowanie własne.



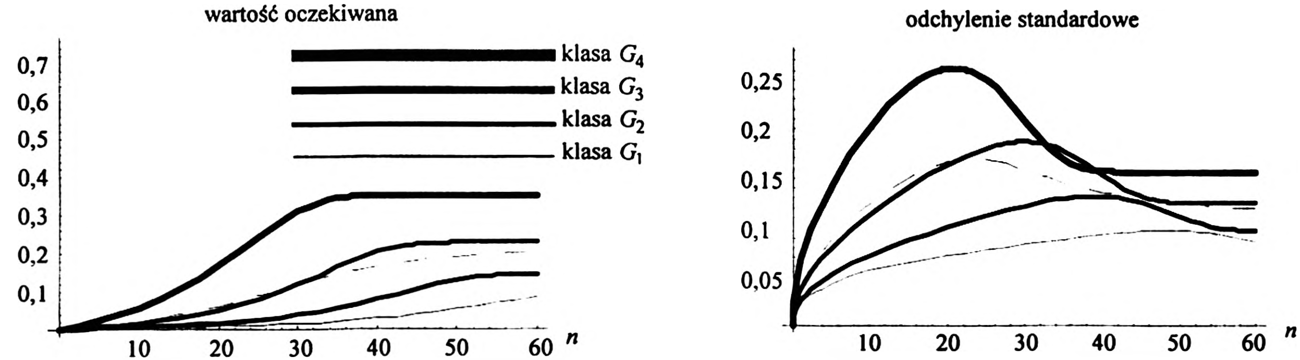
Rys. 8. Przedział zmienności przyszłej wypłaty z portfela o strukturze $G = (30, n, 100, UZ)$ dla różnych okresów ubezpieczenia

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 9. Wartość oczekiwana i odchylenie standardowe całkowitej zagregowanej wypłaty w wyznaczonych jednorodnych klasach o liczebnościach $M_1 = M_2 = M_3 = M_4 = 25$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 10. Składka ubezpieczenia w wyznaczonych jednorodnych klasach oraz dla portfela jako całości wraz z precyzją jej szacunku

Źródło: opracowanie własne.

niedoszacowania zagregowanej wypłaty, jednak powinien uwzględniać rosnące wartości odchylenia standardowego.

Przedstawione analizy dotyczyły parametrów zagregowanej wypłaty portfela jednorodnego. Jeśli portfel ubezpieczeń jest niejednorodny, ubezpieczyciel, uwzględniając czynniki różnicujące, powinien podzielić go na jednorodne klasy i wyceniać zgodnie z tym, co przedstawiono. Aby pokazać, jak istotny jest podział na jednorodne klasy, wyceniono niejednorodny portfel jako całość i z uwzględnieniem jednorodnych klas. Wybrano portfel ubezpieczeń o strukturze $G = \left(x, n, UZ, 100, \frac{1}{4}\right)$ z czynnikiem różnicującym wiek osób ubezpieczanych. Zatem z całego portfela wydzielono ze względu na wiek ubezpieczonych cztery klasy: trzydziestolatków, czterdziestolatków, pięćdziesięciolatków i sześćdziesięciolatków, którzy zawarli n-letnie ubezpieczenie na życie. Klasy te oznaczono odpowiednio: $G_1 = \left(30, n, UZ, M_1, \frac{1}{4}\right)$, $G_2 = \left(40, n, UZ, M_2, \frac{1}{4}\right)$, $G_3 = \left(50, n, UZ, M_3, \frac{1}{4}\right)$ oraz $G_4 = \left(60, n, UZ, M_4, \frac{1}{4}\right)$.

Na rysunkach 9 i 10 przedstawiono wycenę portfela wraz z precyzją jej szacunku dla portfela jako całości (linia przerywana) oraz z uwzględnieniem niejednorodności. Porównując wyniki uzyskane dla niejednorodnego portfela, widzimy, że wyceniając niejednorodny portfel, ubezpieczyciel powinien uwzględniać jego strukturę. W przypadku wyceny takiego portfela jako całości, tzn. bez podziału na jednorodne klasy, składka za takie ubezpieczenie dla wszystkich byłaby „niesprawiedliwa". Dla osób ubezpieczonych należących do klas G_1 i G_2 byłaby za wysoka, a dla ubezpieczonych z klas G_3 i G_4 za niska. Innymi słowy, jest ona za wysoka dla osób o wysokim ryzyku, a za mała dla ubezpieczonych o dużym ryzyku. Jest to zjawisko tzw. niekorzystnej klasyfikacji, które prowadzi do deficytu finansowego towarzystwa, a w konsekwencji do jego bankructwa.

6. Wnioski

Analiza szkodowości portfela to innymi słowy analiza zasobów finansowych związanych z ubezpieczeniem. W pracy zbadano proces zagregowanej wypłaty dla portfela ubezpieczeń na życie z wykupionymi opcjami dodatkowymi. W określaniu procesu zagregowanej wypłaty dla tego typu ubezpieczeń uwzględniono różne rodzaje strumieni finansowych, a wykorzystanie całki Riemana-Stieltjesa pozwoliło uzyskać postać procesu, która stanowi uogólnienie klasycznego ujęcia zagregowanej wypłaty. Uzyskana postać procesu określa ogólną wycenę wypłaty z portfela polis, która powinna być postrzegana jako dająca ważną informację o ryzyku finansowym związanym z portfelem. Następnie wyznaczono podstawowe parametry rozkładu, takie jak wartość oczekiwana i odchylenie standardowe procesu zagregowanej wypłaty, które pozwalają opisywać i mierzyć stopień „ryzykowności" portfela. Informacje te są niezwykle przydatne w długoterminowym planowaniu, kalkulacji składek i dla zachowania wypłacalności ubezpieczyciela. Na koniec rozważania teoretyczne zilustrowano przykładem najprostszego ubezpieczenia wieloopcyjnego.

Literatura

[1] Błaszczyszyn B., Rolski T., *Podstawy matematyki ubezpieczeń na życie*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 2004.

[2] Bowers N.L., Gerber H.U., Hickman J.C., Jones D.A., Nesbitt C.J., *Actuarial Mathematics*, Society of Actuaries, Schamburg 1986.

[3] Gerber H.U., *Life Insurance Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin 1995.

[4] Grandell J., *Aspects of Risk Theory*, Springer-Verlag, New York 1992.

[5] Hoem J.M., *Markov Chain Models in Life Insurance*, „Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik" 1972, Nr. 9, s. 91-107.

[6] Homa M., *Momenty procesu skumulowanych świadczeń w indywidualnym ubezpieczeniu wieloopcyjnym*, Ekonometria 17, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej nr 1002, AE, Wrocław 2006.

[7] Iosifescu M., *Skończone procesy Markowa i ich zastosowania*, PWN, Warszawa 1988.

[8] Wolthuis H., *Life Insurance Mathematics (The Markovian Model)*, Universiteit van Amsterdam, Amsterdam 2003.

MOMENTS OF THE AGGREGATED PAYMENTS FOR PORTFOLIO OF LIFE INSURANCE POLICY

Summary

All activities of the insurer are connected with the risk. Risk in multi-state life insurance can be analyzed in two aspects: protection and financial risk. The second kind of risk is connected with calculation of premium, calculation of mathematical reserves or analysis of benefits and risk. The essence of this work is the discussion on the moments of total aggregated payments (benefits) generated by homogeneous or non-homogeneous portfolio of life insurance policy. This process includes all benefits characteristic for individual policies generated by portfolio. The author presented the current value of this process for a portfolio of multi-state insurance and calculated its parameters: conditional expected value, variance and standard deviation. These parameters determine both correct portfolio value and correct calculation of premium, and enable describing and estimating the „riskness" of the homogeneous and non-homogeneous insurance portfolio.