PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU
Nr 60 2009
Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek

**Stanisław Wanat**

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie

# OGRANICZENIA ROZKŁADU ZAGREGOWANYCH DODATNIO ZALEŻNYCH RODZAJÓW RYZYKA

## 1. Wstęp

W zarządzaniu ryzykiem jednym z głównych, a zarazem z najtrudniejszych zadań jest wyznaczenie rozkładu zagregowanych rodzajów ryzyka. Jeżeli założymy, że rodzaje te są modelowane za pomocą zmiennych losowych $X_1,...,X_k$, to problem sprowadza się do wyznaczenia rozkładu sumy $Y = X_1 + ... + X_k$. W praktyce wyznaczenie takiego rozkładu jest skomplikowane, gdyż wymaga rozstrzygnięcia kwestii dotyczącej zależności między zmiennymi $X_i \quad (i = 1,...k)$. Badacz najczęściej dysponuje wiedzą dotyczącą rozkładów brzegowych wektora $(X_1,...,X_k)$ oraz pewną wiedzą dotyczącą zależności między tymi rozkładami. Można zatem powiedzieć, że od „połączenia" dostępnej wiedzy na temat rozkładów zmiennych $X_i$, $i = 1,...,k$ oraz charakteru powiązań między nimi zależy ocena zagregowanego ryzyka $Y$, a w szczególności wyznaczenie jego rozkładu.

W przypadku braku lub tylko częściowej wiedzy o strukturze zależności między zmiennymi losowymi $X_1,...,X_k$ nie można w sposób jednoznaczny wyznaczyć rozkładu ich sumy. W literaturze przedmiotu w takich sytuacjach proponuje się rozwiązanie polegające na wyznaczeniu rozkładów będących jego dolnym i górnym ograniczeniem. Problem poszukiwania takich ograniczeń ma dość długą historię. Pierwsze wyniki w tym zakresie dla sumy dwóch zmiennych losowych są przedstawione w pracach [Makarov, 1981] i [Frank, Nelsen, Schweitzer 1987] oraz w [Rüschendorf 1982]. Wyniki te zostały następnie uogólnione na przypadek $k$-wymiarowy ($k \geq 3$) z uwzględnieniem dodatkowych informacji o strukturze zależności między sumowanymi zmiennymi losowymi (por. np. [Denuit, Genest, Marceau, 1999; Embrechts, Höing, Juri 2003; *Actuarial Theory...* 2005]). Ograniczeń takich poszukiwano nie tylko dla sumy, ale ogólniej: dla rzeczywistych funkcji zmiennych losowych. Wprowadzając wiedzę o zależności między zmiennymi losowymi, ograniczenia dla rozkładu zmiennej będącej niemalejącą i ciągłą funkcją $\psi(X_1, X_2)$ dwóch zmiennych losowych podano w pracy [Williamson, Downs 1990]. Natomiast w pracy [Embrechts, Puccetti 2006a] podano ograniczenia dla rozkładu zmiennej losowej będącej funkcją $k$ zmiennych losowych $\psi(X_1,...,X_k)$ w przypadku barku wiedzy o strukturze zależności między $X_1,...,X_k$. Z kolei w pracy [Li, Scarsini, Shared 1996] przedstawiono ograniczenia rozkładu sumy dwóch wektorów losowych $\mathbf{X}=\left(X_1,...,X_k\right)$ i $\mathbf{X}'=\left(X_1',...,X_k'\right)$. Wyniki uzyskane w tej pracy zostały poprawione w [Embrechts, Puccetti 2006b], w której uzyskano także dokładniejsze ograniczenia dla rozkładu sumy wektorów losowych o takich samych rozkładach wielowymiarowych.

## 2. Wybrane koncepcje dodatniej zależności

W zagadnieniach aktuarialnych szczególne znaczenie mają struktury dodatniej zależności. W przypadku dwuwymiarowym podstawowym pojęciem dodatniej zależności jest wprowadzona w 1966 r. przez E.L. Lehmanna zależność dodatnio ćwiartkowa (por. [Lehmann 1966]). Zmienne losowe $X_1$ i $X_2$ są dodatnio ćwiartkowo zależne (w skr. *PQD − Positive Quadrant Dependence*), jeżeli

$$P\left(X_1 \le x_1,\, X_2 \le x_2\right) \ge P\left(X_1 \le x_1\right) P\left(X_1 \le x_1\right), \tag{1}$$

dla wszystkich $x_1, x_2 \in R$.

Uogólnieniem tej zależności na przypadek więcej niż dwóch zmiennych losowych jest tzw. dodatnia zależność orthantowa. Ten typ zależności jest rozważany m.in. w następujących pracach: [Esary, Proschan, Walkup 1967; Joe, 1997; *Actuarial Theory*… 2005]. Definiuje się za pomocą dodatnio dolno- i górnoorthantowej zależności. Mianowicie, niech $\mathbf{X}=\left(X_1,...,X_k\right)$ będzie $k$-wymiarowym wektorem losowym.

1. Wektor **X** jest dodatnio dolnoorthantowo zależny (w skr. *PLOD − Positively Lower Orthant Dependent*), gdy

$$P\left(X_1 \le x_1,...,X_k \le x_k\right) \ge \prod_{i=1}^{k} P\left(X_i \le x_i\right), \tag{2}$$

dla każdego $(x_1,...,x_k) \in R^k$.

2. Wektor **X** jest dodatnio górnoorthantowo zależny (w skr. *PUOD − Positively Upper Orthant Dependent*), gdy

$$P\left(X_1 > x_1,...,X_k > x_k\right) \ge \prod_{i=1}^{k} P\left(X_i > x_i\right), \tag{3}$$

dla każdego $(x_1,...,x_k) \in R^k$.

3. Wektor **X** jest dodatnio orthantowo zależny (w skr. *POD – Positively Orthant Dependent*), gdy dla każdego $(x_1,...,x_k) \in R^k$ jednocześnie zachodzą warunki (2) i (3), czyli jest jednocześnie dodatnio dolnoorthantowo i górnoorthantowo zależny.

Intuicyjnie nierówność (3) oznacza, że jest bardziej prawdopodobne, iż zmienne $X_1,...,X_k$ przyjmują jednocześnie duże wartości niż wówczas, gdyby były one niezależne. Analogicznie można zinterpretować nierówność (2).

Kolejną koncepcją dodatniej zależności jest współmonotoniczność zmiennych losowych. Wprowadzili ją D. Schmeidler [1986], M.E. Yaari [1987] w rozwijanej dualnej teorii podejmowania decyzji w warunkach ryzyka. W kontekście zarządzania ryzykiem w ubezpieczeniach wykorzystali ją m.in. J. Dhaene, M. Denuit, M.J. Goovaerts, R. Kaas, D. Vyncke, S. Wang (por. [*Comonotonicity and maximal*... 2000; *The Concept of comonotonicity*... 2002a, 2002b; *Risk measures and comonotonicity*... 2006]). Ogólnie współmonotoniczność zmiennych losowych $X_1,...,X_k$ oznacza, że większym wartościom jednej z nich odpowiadają większe wartości wszystkich pozostałych. Wyłączając związki o niemalejącym charakterze funkcyjnym, okazuje się, że współmonotoniczność jest najsilniejszym pojęciem dodatniej zależności.

Wektor losowy $\mathbf{X}=\left(X_1,...,X_k\right)$ jest współmonotoniczny wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje zmienna losowa *Z* oraz niemalejące funkcje $h_i$, $i=1,...,k$ takie, że rozkład wektora **X** jest taki sam jak rozkład wektora $\left(h_1(Z),...,h_k(Z)\right)$. Warunki równoważne na współmonotoniczność oraz podstawowe własności tej koncepcji zależności przedstawiono m.in. w pracy [*The Concept of comonotonicity*... 2002a]. W dalszym ciągu „wersję" wektora losowego $\mathbf{X}=\left(X_1,...,X_k\right)$ z takimi samymi rozkładami brzegowymi i współmonotoniczną strukturą zależności będziemy oznaczać przez $\mathbf{X}^c=\left(X_1^c,...,X_k^c\right)$. Dystrybuantę sumy współmonotonicznych zmiennych losowych $Y^c=X_1^c+...+X_k^c$ w przypadku ściśle rosnących i ciągłych dystrybuant $F_i$ zmiennych $X_i$ można wyznaczyć na podstawie wzoru (por. np. [*The Concept of comonotonicity*... 2002a]):

$$\sum_{i=1}^{k} F_i^{-1}\left(F_{Y^c}(x)\right)=x. \tag{4}$$

## 3. Ograniczenia w przypadku dodatniej struktury zależności

Przyjmijmy, że agregacji podlega *k* rodzajów ryzyka $X_1,...,X_k$. Symbolem $C^d$ oznaczamy dualną do funkcji połączenia *C*, czyli $C^d(u_1,...,u_k)=P\left(\bigcup_{i=1}^{k}\{U_i\le u_i\}\right)$, gdzie $U_i$ jest zmienną losową o rozkładzie jednostajnym na przedziale $[0,1]$. Jeżeli założymy, że zależność między zmiennymi $X_1,...,X_k$ jest opisana funkcją połączenia *C*, dla której istnieją funkcje połączenia $C_0$ i $C_1$ takie, że $C_0$ z dołu ogranicza *C*, tzn.

$$C(u_1,...,u_k)\ge C_0(u_1,...,u_k), \tag{5}$$

dla każdego $(u_1,...,u_k)\in[0,1]^k$, natomiast $C_1^d$ z góry ogranicza $C^d$, tzn.

$$C^d(u_1,...,u_k) \le C_1^d(u_1,...,u_k), \tag{6}$$

dla każdego $(u_1,...,u_k) \in [0,1]^k$,

To dystrybuanta sumy $Y = X_1 + ... + X_k$ ma ograniczenia o postaci (por. np. [Cossette, Denuit, Marcelu 2002])

$$F_{\min}^{C_0}(y) \le F_Y(y) \le F_{\max}^{C_1}(y), \tag{7}$$

dla każdego $y \in R$,

gdzie:

$$F_{\min}^{C_0}(y) = \sup_{(x_1,...,x_{k-1}) \in R^{k-1}} \left\{ C_0\left(F_1(x_1),...,F_{k-1}(x_{k-1}), F_k(y-(x_1+...+x_{k-1}))\right)\right\}, \tag{8}$$

$$F_{\max}^{C_1}(y) = \inf_{(x_1,...,x_{k-1}) \in R^{k-1}} \left\{ C_1^d\left(F_1(x_1),...,F_{k-1}(x_{k-1}), F_k(y-(x_1+...+x_{k-1}))\right)\right\}. \tag{9}$$

Zależnie od postaci funkcji połączenia $C_0$ i $C_1$ za pomocą wzorów (7)-(9) można wyznaczyć ograniczenia rozkładu zagregowanych rodzajów ryzyka dla różnych struktur zależności. W szczególności[1] $C_0 = C_W$ (gdzie $C_W$ oznacza dolne ograniczenie Frécheta) oraz $C_1^d = \tilde{C}_W^d := \min(1, \sum_{i=1}^k u_i)$ oznacza brak wiedz o strukturze zależności. Natomiast agregowane rodzaje ryzyka $X_1,...,X_k$ charakteryzują się dodatnio orthantową zależnością, gdy dolnym ograniczeniem jest niezależna funkcja połączenia $C_\Pi$, czyli $C_0(u_1,...,u_k) = u_1 \cdot ... \cdot u_k$, a górnym $C_1^d(u_1,...,u_k) = 1-(1-u_1)\cdot ... \cdot(1-u_k)$.

Rozważania nieco się upraszczają podczas agregacji dwóch rodzajów ryzyka. Ponieważ dla dwuwymiarowych funkcji połączenia warunek $C \ge C_0$ jest równoważny warunkowi $C^d \le C_0^d$, można przyjąć, że $C_1 = C_0$. Wówczas warunki (5) i (6) redukują się do konieczności istnienia funkcji połączenia $C_0$ takiej, że[2]

$$C(u_1,u_2) \ge C_0(u_1,u_2), \tag{10}$$

dla wszystkich $(u_1,u_2) \in [0,1]^2$.

[1] Dla $k > 3$ dolne ograniczenie Frécheta $C_W$ nie jest funkcją połączenia. Mimo to przy tak określonym dolnym i górnym ograniczeniu wzory (8) i (9) nadal obowiązują, gdyż ich prawdziwość wykazuje się, wykorzystując tylko własność $C_0$ i $C_1^d$ polegającą na tym, że są one rosnące ze względu na każdy argument.

[2] Spełnienie tego warunku oznacza, że zakładany rozkład w relacji porządku korelacyjnego następuje po rozkładzie opisywanym funkcją połączenia $C_0$, czyli dla wszystkich niemalejących funkcji $g_1$ i $g_2$ prawdziwa jest nierówność $\mathrm{cov}_C\left(g_1(X_1), g_2(X_2)\right) \ge \mathrm{cov}_{C_0}\left(g_1(X_1), g_2(X_2)\right)$, gdzie $\mathrm{cov}_C$ (odp. $\mathrm{cov}_{C_0}$) oznacza kowariancję w przypadku rozkładu modelowanego funkcją połączenia $C$ (odp. $C_0$). Definicja i własności porządku korelacyjnego są przedstawione m.in. w: [*Actuarial theory for*... 2005, s. 287-295].

Przy tak określonej strukturze zależności dystrybuanta sumy $Y = X_1 + X_2$ ma ograniczenia o postaci:

$$F_{\min}^{C_0}(y) \le F_Y(y) \le F_{\max}^{C_0}(y), \tag{11}$$

dla każdego $y \in R$,
gdzie:

$$F_{\min}^{C_0}(y) = \sup_{x_1 \in R} \left\{ C_0 \left( F_1(x_1), F_2(y - x_1) \right) \right\}, \tag{12}$$

$$F_{\max}^{C_0}(y) = \inf_{x_1 \in R} \left\{ C_0^d \left( F_1(x_1), F_2(y - x_1) \right) \right\}. \tag{13}$$

Jeżeli warunek (10) spełnia niezależna funkcja połączenia $C_0 = u_1 u_2$, to mamy do czynienia z agregacją dodatnio ćwiartkowo zależnych rodzajów ryzyka.

Praktyczne wyznaczenie przedstawionych ograniczeń wymaga najczęściej zastosowania odpowiednich metod numerycznych. W celu wyznaczenia dolnego i górnego ograniczenia dla rozkładu sumy dwóch zmiennych losowych o postaci (12) i (13) można zastosować numeryczną metodę aproksymacyjną przedstawioną w pracy [Williamson, Downs 1990]. Zgodnie z nią, oznaczając przez $I_a(\cdot)$ funkcję charakterystyczną zbioru $[a, \infty)$ i wybierając dostatecznie dużą liczbę naturalną $N$, ograniczenia (12) i (13) można aproksymować odpowiednio przez:

$$\tilde{F}_{\min,N}^{C_0}(y) = \frac{1}{N} \sum_{s=1}^{N} I_{q_{\min}(s/N)}(y), \tag{14}$$

$$\tilde{F}_{\max,N}^{C_0}(y) = \frac{1}{N} \sum_{s=0}^{N-1} I_{q_{\max}(s/N)}(y), \tag{15}$$

gdzie:

$$q_{\min}(s / N) = \min_{s \le l \le N} \left\{ F_1^{-1}\left( \frac{l}{N} \right) + F_2^{-1}\left( v_{s,l} \right) \right\}, \tag{16}$$

$$q_{\max}(s / N) = \max_{0 \le l \le s} \left\{ F_1^{-1}\left( \frac{l}{N} \right) + F_2^{-1}\left( v_{s,l}^* \right) \right\}, \tag{17}$$

przy czym $v_{s,l}$ i $v_{s,l}^*$ są rozwiązaniami odpowiednio równań

$$C_0\left( \frac{l}{N}, v_{s,l} \right) = \frac{s}{N}, \tag{18}$$

dla $0 \le s \le l \le N$.

$$v_{s,l}^{*} - C_0\left(\frac{l}{N}, v_{s,l}^{*}\right) = \frac{s-l}{N}, \tag{19}$$

dla $0 \le s \le l \le N$.

# 4. Wpływ struktury zależności na wartość zagrożoną – przykład numeryczny

Związane z określoną strukturą zależności ograniczenia rozkładu łącznego ryzyka można wykorzystać do oszacowania ograniczeń wartości zagrożonej determinowanych tą strukturą. Z warunku (11) wynika, że

$$\left(F_{\max}^{C_1}\right)^{-1}(\alpha) \le VaR_\alpha(Y) \le \left(F_{\min}^{C_0}\right)^{-1}(\alpha). \tag{20}$$

W przypadku dwuwymiarowym wyrażone związkiem (20) granice wartości zagrożonej dla $\alpha = s/N$ można bezpośrednio aproksymować za pomocą (16) i (17).

Wpływ omówionych struktur zależności na wartość zagrożoną zostanie zilustrowany przykładem, w którym agregacji podlegają dwa rodzaje ryzyka $X_1$ i $X_2$ modelowane takim samym rozkładem normalnym $N(1,1)$. Rozważamy następujące struktury zależności:

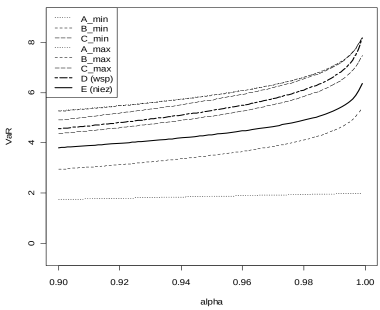
A. Brak wiedzy o strukturze zależności ($C_0 = C_1 = C_W$).

B. Ryzyka dodatnio ćwiartkowo zależne ($C_0 = C_1 = C_\Pi$).

C. Z dołu ograniczona funkcją połączenia Claytona z parametrem $\theta^{Cl} = 6$, z góry − funkcją połączenia przeżycia Gumbela z parametrem $\theta^{Gu} = 0,25$ (w obydwóch przypadkach parametry są tak dobrane, aby współczynnik τ-Kendalla między agregowanymi ryzykami był równy 0,75).

D. Ryzyka są współmonotoniczne.

E. Ryzyka są niezależne.




Rys. 1. Wartość zagrożona w zależności od struktury zależności

Źródło: opracowanie własne.

Tabela 1. Wartość zagrożona w zależności od struktury zależności dla wybranego poziomu tolerancji

| Struktura zależności | $\alpha = 0,95$ | | $\alpha = 0,99$ | |
|---|---|---|---|---|
| | $VaR_{\min}$ | $VaR_{\max}$ | $VaR_{\min}$ | $VaR_{\max}$ |
| A | 1,872075 | 5,903098 | 1,972426 | 7,087974 |
| B | 3,505289 | 5,891805 | 4,508441 | 7,085892 |
| C | 5,072329 | 5,715304 | 6,346569 | 7,050038 |
| D | 5,289707 | | 6,652696 | |
| E | 4,326174 | | 5,289953 | |

Źródło: obliczenia własne.

Ograniczenia wartości zagrożonej $VaR_{\alpha}(X_1 + X_2)$ dla $\alpha = s/N$ z przedziału $[0,900,\ 0,999]$ (gdzie $N = 1000$) dla trzech pierwszych struktur zależności A, B i C (aproksymowane wzorami (16) i (17)) oraz jej wartość dla struktury D i E przedstawiono na rys. 1 oraz (tylko dla $\alpha = 0,95$ i $\alpha = 0,99$) w tab. 1. Obliczenia wykonano, wykorzystując przedstawiony algorytm Williamson-Downsona (odpowiedni program napisano w pakiecie R).

## 5. Podsumowanie

Ustalenie „właściwej" struktury zależności jest bardzo ważne w modelowaniu zagregowanego ryzyka. Przedstawiony prosty przykład wskazuje, jak wpływa ona na wartość zagrożoną (*VaR*) zaliczaną do jednych z najczęściej stosowanych w praktyce miar ryzyka. Przykład ten unaocznia również fakt, którego intuicyjnie należało się spodziewać i który można ogólnie udowodnić (por. np. [Denuit, Genest, Marcelu 1999]): to, że dodatkowa wiedza o strukturze zależności, jak np. stwierdzenie dodatniej zależności, „zawęża obszar", w którym leży właściwy rozkład zagregowanego ryzyka, co zawęża przedział możliwych wartości *VaR*. Wykorzystanie go w praktyce wymaga oczywiście zastosowania narzędzi umożliwiających stwierdzenie dodatniej zależności. Mogą to być m.in. testy proponowane w pracach [Denuit, Scaillet 2004; Scaillet 2005; Janic-Wróblewska, Kallenberg, Ledwina 2004].

W praktyce założenie najgorszego scenariusza dotyczącego realizacji agregowanych rodzajów ryzyka często odbywa się przez przyjęcie współmonotonicznej struktury zależności, czyli zastępuje się sumę $Y$ „mniej atrakcyjną" sumą $Y^c$. Założenie takie upraszcza także obliczania wartości zagrożonej dla zagregowanego ryzyka (jest ona sumą wartości zagrożonych agregowanych rodzajów ryzyka). Podany przykład wskazuje jednak, że maksymalna wartość *VaR* nie jest osiągana w przypadku współmonotonicznych rodzajów ryzyka. Można zatem wskazać gorsze (w sensie *VaR*) scenariusze realizacji rodzajów ryzyka niż współmonotoniczność.

# Literatura

*Actuarial theory for dependent risks. Measures, orders and models*, red. M. Denuit, J. Dhaene, M. Goovaerts, Kaas R., John Wiley & Sons, Ltd. 2005.

Cossette H., Denuit M., Marceau E., *Distributional bounds for functions of dependent risks*, "Schweizerische Aktuarvereinigung. Mitteilungen" 2002 no 1, s. 45-65.

Denuit M., Genest C., Marceau E., *Stochastic bounds on sums of dependent risks*, "Insurance: Mathematics & Economics" 1999, vol. 25, s. 85-104.

Denuit M., Scaillet O., *Nonparametric tests for positive quadrant dependence*, "Journal of Financial Econometrics" 2004, vol. 2, no 3, s. 422-450.

Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Theory*, "Insurance: Mathematics & Economics" 2002a, vol. 31, no 1, s. 3-33.

Dhaene J., Denuit M., Goovaerts M.J., Kaas R., Vyncke D., *The concept of comonotonicity in actuarial science and finance: Applications*, "Insurance: Mathematics & Economics" 2002b, vol. 31 no 2, s. 133-161.

Dhaene J., Vanduffel S., Tang Q., Goovaerts M., Kaas R., Vyncke D., *Risk measures and comonotonicity: a review*, "Stochastic Models" 2006, vol. 22, no 4.

Dhaene J., Wang S., Young V., Goovaerts M.J., *Comonotonicity and maximal stop-loss premiums*, "Mitteilungen der Schweiz. Aktuarvereinigung" 2000 no 2, 99-113.

Embrechts P., Höing A., Juri A., *Using copulae to bound the value-at-risk for functions of dependent risks*, "Finance and Stochastics" 2003, vol. 7, s. 145-167.

Embrechts P., Puccetti G., *Bounds for functions of dependent risks*, "Finance and Stochastics" 2006a, vol. 10, s. 341-352.

Embrechts P., Puccetti G., *Bounds for functions of multivariate risks*, "Journal of Multivariate Analysis" 2006b, vol. 97, s. 526-547.

Esary J.D., Proschan F., Walkup D.W., *Association of random variables, with applications*, "Annals of Mathematical Statistics" 1967, vol. 38, no 5, s. 1466-1474.

Frank M.J., Nelsen R., Schweizer B., *Best-possible bounds on the distribution of a sum − a problem of Kolmogorov*, "Probability Theory and Related Fields" 1987, vol. 7, s. 199-211.

Janic-Wróblewska A., Kallenberg W.C.M., Ledwina T., *Detecting positive quadrant dependence and positive function dependence,* "Insurance: Mathematics & Economics" 2004, vol. 34, s. 467-487.

Joe H., *Multivariate models and dependence concepts*, Chapman-Hall, 1997.

Lehmann E.L., *Some concepts of dependence*, "Annals of Mathematical Statistics" 1966, vol. 37, no 5, s. 1137-1153.

Li H., Scarsini M., Shared M., *Bounds for the distribution of a multivariate sum*, [w:] *Distributions with fixed marginals & related topics,* red. B. Schweizer, M.D. Taylor, L. Rüschendorf, IMS Lecture Notes − Monograph Series 1996, vol. 28, s. 198-212.

Makarov G.D., *Estimates for the distribution function of the sum of two random variables when the marginal distributions are fixed*, "Theory of Probability and its Applications" 1981, vol. 26, s. 803-806.

Rüschendorf L., *Random variables with maximum sums*, "Advances in Applied Probability" 1982, vol. 14, s. 623-632.

Scaillet O., *A Kolmogorov-Smirnov type test for positive quadrant dependence*, FAME − International Center for Financial Asset Management and Engineering, Research Paper 2005 nr 128.

Schmeidler D., *Integral representation without additivity*, "Proceedings of the American Mathematical Society", 1986, vol. 97, s. 255-261.

Williamson R., Downs T., *Probabilistic arithmetic. I. Numerical methods for calculating convolutions and dependency bounds*, "International Journal of Approximate Reasoning" 1990, vol. 4, s. 89-158.

Yaari M.E., *The dual theory of choice under risk*, "Econometrica" 1987, vol. 55, s. 95-115.

# BOUNDS FOR THE DISTRIBUTION OF AGGREGATED POSITIVE DEPENDENT RISKS

## Summary

In this paper we present some of the recent results for finding distributional bounds for aggregated positive dependent risks. We use POD and comonotonicity as a modeling approach for positive dependent risks. The methodology used is based on the theory of copulae. The techniques introduced are exemplified in case of Value-at-Risk.