

Tomasz Pisula

Politechnika Rzeszowska

OCENA RYZYKA UPADŁOŚCI SPÓŁEK GIEŁDOWYCH Z WYKORZYSTANIEM MODELI STRUKTURALNYCH

1. Wstęp

Dla inwestorów giełdowych inwestujących w papiery wartościowe notowanych spółek giełdowych bardzo ważne jest określenie ryzyka upadłości dla spółek, w których aktywa finansowe zainwestowali oni swoje pieniądze. Przy ocenie ryzyka upadłości szczególnie przydatne dla inwestorów mogą okazać się metody matematyczno-statystyczne umożliwiające oszacowanie prawdopodobieństwa upadłości spółek giełdowych z zastosowaniem tzw. modeli strukturalnych, które z powodzeniem są stosowane przy ocenie ryzyka kredytowego.

W modelach strukturalnych do przewidywania momentu niewypłacalności (upadłości) firmy wykorzystuje się analizę ewolucji w czasie podstawowych zmiennych strukturalnych determinujących jej kondycję finansową, takich jak: rynkowa wartość aktywów firmy, rynkowa wartość zobowiązań i długów firmy. Modele strukturalne są często w literaturze nazywane modelami AVM (*Asset Value Models*) lub modelami typu Mertona. To właśnie Robert C. Merton jako pierwszy zastosował teorię wyceny opcji przy określaniu wzajemnych zależności między długiem korporacyjnym przedsiębiorstwa a wartością rynkową akcji tego przedsiębiorstwa. W swoim modelu Merton (zob. [Merton 1974]) zaobserwował, że wartość rynkowa akcji przedsiębiorstwa może być modelowana i obliczana jako opcja na wartość rynkową aktywów przedsiębiorstwa. W modelach strukturalnych zdarzenie niewypłacalności (potencjalnej upadłości firmy) następuje wówczas, gdy wartość aktywów firmy spada poniżej predefiniowanej wcześniej (różnie definiowanej w różnych modelach) bariery niewypłacalności (zależnej od wartości zobowiązań dłużnych firmy).

Modele strukturalne można podzielić na dwie podstawowe klasy modeli. Pierwszą klasę stanowią tzw. modele opcyjne (*Option-Theoretic Models*). Przykładem tego typu modeli jest np. klasyczny model Mertona (zob. [Merton 1974]) oraz model firmy Moody's KMV (zob. [Crosbie, Bohn 2003]). Drugą klasę stanowią tzw. *First Passage Models* (FPM). Tego typu modele zostały po raz pierwszy wykorzystane w pracy [Black,

Cox 1976]. Podejście zaproponowane przez Blacka i Coxa zostało później dalej rozwinięte przez kolejnych autorów (zob. np. [Leland, Toft 1996; Finger (red.) 2002]).

Artykuł jest próbą przedstawienia praktycznych aspektów strukturalnego podejścia do zagadnień oceny ryzyka upadłości polskich spółek giełdowych na przykładzie 12 spółek notowanych na GPW w Warszawie z regionu Podkarpacia.

2. Klasyczny model opcyjny Mertona

W modelu Mertona zakłada się (zob. np. [Merton 1974; Krysiak 2006]), że wartość rynkowa aktywów firmy podlega procesowi dyfuzji (ewoluuje jako geometryczny ruch Browna) opisany równaniem:

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t, \quad (1)$$

gdzie: V_t jest wartością aktywów firmy w dowolnej chwili $t \geq 0$, σ jest zmiennością (odchyleniem standardowym) dla chwilowych zwrotów dV_t/V_t z aktywów firmy, μ jest parametrem dryfu (średnia z chwilowych zwrotów dV_t/V_t), zaś W_t jest standardowym ruchem Browna.

Dynamikę zmian w czasie wartości aktywów firmy określa zależność:

$$V_T = V_t e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}\cdot\varepsilon_T}. \quad (2)$$

Ze wzoru (2) wynika, że logarytmy z aktywów podlegają rozkładowi normalnemu o parametrach:

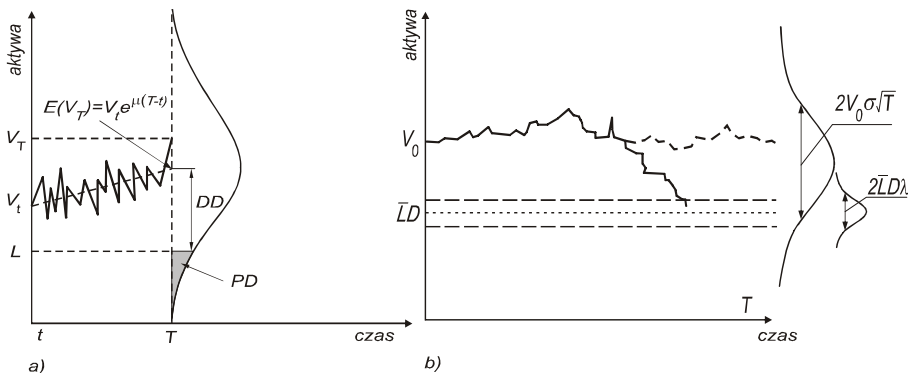
$$\ln(V_T) : N\left(\ln(V_t) + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right), \quad (3)$$

a więc aktywa firmy mają rozkład logarytmiczno-normalny z wartością oczekiwaną w chwili T równą $E[V_T] = V_t e^{\mu(T-t)}$.

W modelu Mertona zakłada się, że struktura kapitałowa firmy jest bardzo prosta i składa się tylko z akcji oraz zerokuponowych obligacji o wartości nominalnej L i terminie wykupu T , których wartości w czasie $0 \leq t \leq T$ wynoszą odpowiednio E_t oraz B_t . Jeżeli w terminie wykupu długu wartość aktywów firmy będzie w stanie pokryć wartość nominalną zobowiązań L ($V_T \geq L$), to firma jest wypłacalna, a posiadacze akcji otrzymują wypłatę $V_T - L$. W sytuacji przeciwnej, gdy wartość aktywów firmy nie jest w stanie pokryć wartości zobowiązań ($V_T < L$), firma nie jest w stanie dotrzymać zobowiązania spłaty długu i wtedy posiadacze obligacji (długu firmy) przejmują kontrolę nad firmą, posiadacze akcji zaś nic nie otrzymują.

W modelu Mertona przyjmuje się, że firma może być w sytuacji potencjalnej upadłości tylko w momencie T (terminie wykupu długu).

W modelach strukturalnych miernikiem potencjalnej upadłości firmy jest tzw. prawdopodobieństwo niedotrzymania zobowiązań spłaty długu, czyli prawdopodobieństwo potencjalnej upadłości – PD (*Default Probability*). Interpretację prawdopodobieństwa niewypłacalności (upadłości) w modelach typu Mertona ilustruje rys. 1a.



Rys. 1. Interpretacja modeli: a) klasyczny model opcyjny Mertona, b) model strukturalny *RiskMetrics*
Źródło: [Crouhy, Galai, Mark 2000; Finger (red.) 2002].

Funkcja wypłat dla posiadaczy akcji w momencie T jest opisana wzorem:

$$E_T = \max\{V_T - L, 0\}, \quad (4)$$

więc profil wypłat posiadaczy akcji (4) jest identyczny z profilem wypłat europejskiej opcji kupna. Jeżeli firma nie wypłaca dywidendy, to stosując klasyczną formułę opcyjną Blacka-Scholesa, wartość akcji firmy w dowolnym momencie $0 \leq t \leq T$ można wyznaczyć ze wzoru:

$$E_t(V_t, \sigma, T - t) = V_t \cdot N_{(0,1)}(d_1) - Le^{-r(T-t)} N_{(0,1)}(d_2), \quad (5)$$

gdzie:

$$d_1 = \frac{\ln(V_t/L) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}, \quad (6)$$

zaś $N_{(0,1)}(\cdot)$ określa dystrybuantę rozkładu normalnego standaryzowanego, r jest natomiast stałą logarymiczną wolną od ryzyka stopą zwrotu.

Prawdopodobieństwo niedotrzymania zobowiązań spłaty długu (upadłości firmy) w momencie T (zob. rys. 1a) wyznacza się ze wzoru:

$$\begin{aligned}
 PD &= P\{\ln(V_T) < \ln(L)\} = \\
 &= P\left\{\frac{\ln(V_T) - (\ln(V_t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} < \frac{\ln(L) - (\ln(V_t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}}\right\} \quad (7) \\
 &= N_{(0,1)}\left(\frac{\ln(L/V_t) - (\mu - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right).
 \end{aligned}$$

W literaturze (zob. np. [Crosbie, Bohn 2003; Saunders 2001]) spotyka się często termin określający tzw. odległość do niewypłacalności (DD – *Distance to Default*). Miara ta mierzy, jak daleko (jaka liczbę odchyłeń standardowych) od granicy upadłości znajduje się oczekiwana (przyszła) wartość rynkowa aktywów firmy. Korzystając z faktu, że logarytmy z wartości aktywów mają rozkład normalny (zob. (3)), odległość tę można wyznaczyć ze wzoru:

$$DD = \frac{E[\ln(V_T)] - \ln(L)}{\sigma_{\ln(V_T)}} = \frac{\ln(V_t/L) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}. \quad (8)$$

Klasyczny model opcyjny Mertona jest często stosowany w praktyce do obliczania prawdopodobieństwa upadłości (PD) dla rocznych horyzontów czasu ($T - t = 1$).

3. Strukturalny model przewidywania upadłości w metodologii *RiskMetrics*

W modelu strukturalnym zastosowanym przez *RiskMetrics* w metodologii *CreditGrades*TM zakłada się, że dynamika zmian wartości rynkowej aktywów firmy jest modelowana procesem (1) z parametrem dryfu równym 0 ($\mu = 0$). Zmienność w czasie wartości rynkowej aktywów firmy w dowolnym momencie $T > 0$ jest wyrażona (zob. [Finger (red.) 2002]) wzorem:

$$V_T = V_0 e^{-\sigma^2 T/2 + \sigma W_T}, \quad (9)$$

gdzie: V_0 – początkowa wartość aktywów firmy,
 σ – zmienność zwrotów aktywów,
 W_T – standardowy ruch Browna.

W modelu *RiskMetrics* barierę niewypłacalności definiuje się jako $L \cdot D$, czyli taką część zobowiązań firmy, jaką właściciele jej zobowiązań mogą odzyskać w sytuacji jej niewypłacalności. Zmienna D określa wielkość tzw. długu na akcję (*Debt-per-Share*), zaś L jest tzw. procentem odzysku (*recovery rate*). Na podstawie przeprowadzonych badań empirycznych zauważono, że procent odzysku L (*recovery rate*) przyjmuje wartości losowe, może być zatem modelowany za pomocą zmiennej losowej mającej rozkład logarytmiczno-normalny o średniej $E[L] = \bar{L}$ oraz procentowym

odchyleniu standardowym $\sqrt{VAR[\ln(L)]} = \sqrt{\lambda^2} = \lambda$. Losowa bariera potencjalnej upadłości firmy wyrażona jest zatem zależnością $LD = \bar{L}D \cdot e^{\lambda Z - \lambda^2/2}$, gdzie: $Z: N_{(0,1)}$. Interpretację strukturalnego modelu *RiskMetrics* przewidywania upadłości firmy przedstawia rysunek (zob. rys. 1b).

Zdarzenie potencjalnej upadłości firmy nie nastąpi tak długo, jak długo spełniony będzie następujący warunek dla wartości rynkowej aktywów:

$$V_T > LD \Leftrightarrow V_0 e^{\sigma W_T - \sigma^2 T/2} > \bar{L}D e^{\lambda Z - \lambda^2/2}. \quad (10)$$

Na podstawie zależności (10) otrzymuje się wzór na prawdopodobieństwo przeżycia firmy – PS (*Survival Probability*) do momentu $T > 0$ o postaci:

$$\begin{aligned} PS(T) &= P(\forall t < T, V_t > LD) = P(\forall t < T, V_0 e^{\sigma W_t - \sigma^2 t/2} > \bar{L}D e^{\lambda Z - \lambda^2/2}) = \\ &= N_{(0,1)}(-A_T / 2 + \ln(d) / A_T) - d \cdot N_{(0,1)}(-A_T / 2 - \ln(d) / A_T), \end{aligned} \quad (11)$$

gdzie: $d = \frac{V_0}{\bar{L}D} e^{\lambda^2} = \frac{S_0 + \bar{L}D}{\bar{L}D} e^{\lambda^2}$, $A_T = \sqrt{\sigma^2 T + \lambda^2} = \sqrt{\left(\sigma_s^* \frac{S^*}{S^* + \bar{L}D}\right)^2 T + \lambda^2}$, S_0

jest początkową wartością rynkową akcji firmy (kapitalizacją rynkową akcji firmy), S^* jest referencyjną wartością rynkową akcji, σ_s^* jest zaś referencyjną roczną zmiennością (historyczną lub implikowaną) dla akcji.

W modelu strukturalnym *RiskMetrics* zmienność wartości rynkowej aktywów firmy wyraża wzór:

$$\sigma = \sigma_s \cdot S / (S + \bar{L}D), \quad (12)$$

więc odległość od bariery niewypłacalności DD (*Distance to Default*) wynosi:

$$DD = \left[\ln(V) - \ln(\bar{L}D) \right] / \sigma = (S + \bar{L}D) / (\sigma_s \cdot S) \cdot \ln((S + \bar{L}D) / (\bar{L}D)). \quad (13)$$

W modelu strukturalnym zastosowanym przez *RiskMetrics* w metodologii *CreditGrades*TM zdarzenie potencjalnej upadłości firmy może nastąpić (w przeciwieństwie do klasycznego modelu Mertona) w dowolnym momencie $0 < t \leq T$.

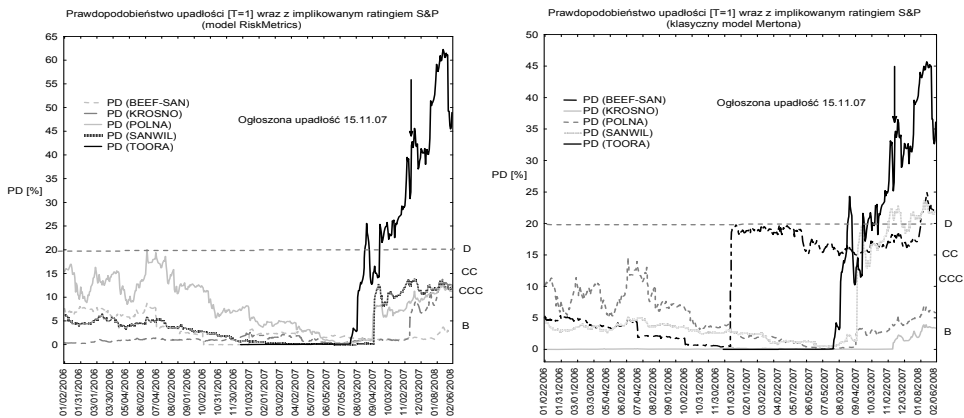
W modelu *RiskMetrics* przy oszacowaniu prawdopodobieństwa potencjalnej upadłości firmy $PD(T) = P(\exists t < T, V_t \leq LD) = 1 - PS(T)$ istotną rolę ogrywa: wielkość długu na akcję – D , średni procent odzysku (*mean recovery rate*) – \bar{L} oraz jego procentowe odchylenie standardowe – λ . Wartość długu na akcję D (*Debt-per-Share*) oblicza się (zob. [Finger (red.) 2002]) z zależności $D = Z / N$, gdzie: Z jest wielkością długu firmy, N jest zaś liczbą akcji firmy. Ponadto (na podstawie posiadanej bazy danych historycznych dotyczącej wielkości odzyskiwania długu dla prawie 300 firm z USA, które upadły w okresie 1987-1997) *RiskMetrics* przyjmuje w swoim modelu: $\bar{L} = 0.5$, zaś $\lambda = 0.3$ (30%).

4. Ocena ryzyka upadłości dla spółek giełdowych z regionu Podkarpacia

Omawiane modele strukturalne zostały wykorzystane do oceny ryzyka upadłości polskich spółek giełdowych pochodzących z regionu województwa podkarpackiego. Były to spółki notowane na GPW w Warszawie do dnia 8.02.2008 r. i mające dostatecznie długą (co najmniej roczną historię notowań). W tym okresie na giełdzie notowanych było 12 spółek z regionu Podkarpacia¹. Jedną z badanych spółek – spółka TOORA – ogłosiła w badanym okresie upadłość i nie jest już obecnie notowana na giełdzie.

Dla wszystkich 12 badanych spółek oszacowano dynamikę zmian prawdopodobieństwa upadłości w okresie od 02.01.2006 do 08.02.2008. Przy obliczaniu wartości prawdopodobieństwa upadłości korzystano z najnowszych dostępnych informacji (pochodzących z kwartalnych sprawozdań finansowych spółek) dotyczących aktualnych wartości zobowiązań krótko- i długoterminowych oraz liczby akcji w obrocie. Za wartości wolnej od ryzyka stopy zwrotu przyjęto wartości stóp zwrotu dla 52-tygodniowych (rocznych) bonów skarbowych (dane pochodziły ze sprawozdań NBP).

Dynamikę zmian prawdopodobieństwa upadłości w rocznym horyzoncie czasu ($T = 1$) dla badanych spółek giełdowych z Podkarpacia w analizowanym okresie od stycznia 2006 do lutego 2008 roku przedstawiają wykresy na rys. 2 i 3. Na wykresach przedstawiono również (odpowiadające wyznaczonym wartościom prawdopodobieństwa upadłości) tzw. implikowane ratingi stosowane przez Standard & Poor's (S&P).



Rys. 2. Dynamika zmian prawdopodobieństwa upadłości wraz z odpowiadającym ratingiem S&P dla spółek o dużym ryzyku upadłości z regionu Podkarpacia w okresie od 2.01.2006 do 8.02.2008
Źródło: opracowanie własne.

¹ ASSECOPOL (sektor informatyczny), BEEF-SAN (sektor spożywczy), DĘBICA, ROPCZYCE, ŚNIEŻKA, STOMIL SANOK (sektor chemiczny), KROSNO (sektor materiałów budowlanych), POLNA, ZELMER (sektor elektromaszynowy), SANWIL (przemysł lekki), ŚRUBEX, TOORA (przemysł metalowy).

Z przeprowadzonej oceny ryzyka upadłości polskich spółek giełdowych z regionu Podkarpacia wynika kilka wniosków praktycznych:

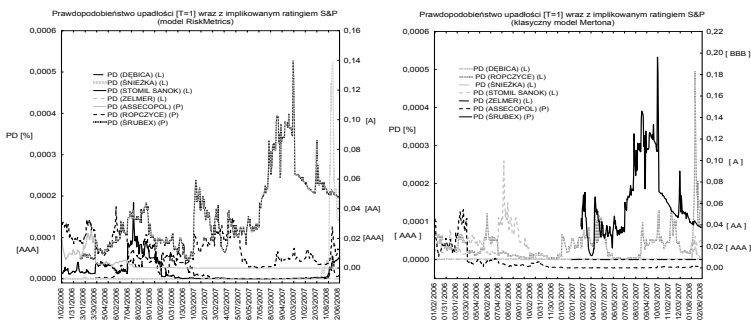
1. Pięć spółek giełdowych – TOORA, BEEF-SAN, POLNA, SANWIL oraz KROSNO – charakteryzuje się dużym ryzykiem upadłości (w badanym okresie wartości prawdopodobieństwa upadłości dla tych spółek wynosiły od kilku do nawet 60%). Z oszacowań otrzymanych za pomocą modelu strukturalnego *RiskMetrics* wynika (zob. rys. 2), że spośród nich najmniej narażona na upadłość jest spółka BEEF-SAN. Dla tej spółki wartości prawdopodobieństwa upadłości w badanym okresie nigdy nie przekroczyły 10%, a na końcu badanego okresu oscylowały wokół 3% (jest to spółka o ratingu [B], a więc narażona na zmianę kondycji finansowej, ale obecnie wykazująca zdolność do spłaty swoich zobowiązań). Znacznie bardziej narażone na niewypłacalność według modelu *RiskMetrics* są spółki: KROSNO, POLNA, SANWIL, dla których wartości prawdopodobieństwa upadłości w badanym okresie nie przekroczyły 20%, na końcu badanego okresu wykazywały zaś tendencję wzrostową i w lutym 2008 r. wyniosły ponad 10% (świadczy to o tym, że są to spółki o ratingu [CCC], a więc są one narażone na niewypłacalność, jednak zależy to istotnie od sprzyjających uwarunkowań ekonomicznych). Klasyczny model opcyjny Mertona dawał trochę odmienne oszacowania dla prawdopodobieństwa upadłości ryzykownych spółek. Według tego modelu dwie spółki, tj. POLNA i KROSNO, charakteryzują się średnim ryzykiem upadłości (wartości prawdopodobieństwa upadłości nigdy nie przekroczyły 15%, a na końcu badanego okresu oscylowały wokół 5%). Natomiast spółki BEEF-SAN oraz SANWIL według modelu Mertona charakteryzują się bardzo dużym ryzykiem upadłości (z prawdopodobieństwem upadłości oscylującym na końcu badanego okresu wokół 20%, a niekiedy dochodzącym nawet do 25%). Oznacza, to że spółki te posiadają rating [CC] – duże ryzyko niewypłacalności, a nawet [D] – aktualna niemożność spłaty zobowiązań.

2. Oba zastosowane modele strukturalne dobrze prognozowały zagrożenie upadłością dla najbardziej ryzykownej spółki TOORA. Wzrost wartości prawdopodobieństwa upadłości dla tej spółki był zauważalny już od sierpnia 2007 r., kiedy to jego wartości przekroczyły próg 10%. We wrześniu roku 2007 wartości prawdopodobieństwa upadłości przekroczyły próg 20% i systematycznie wzrastały, co oznacza, że spółka ta ma rating [D] – aktualna niemożność spłaty zobowiązań (potencjalny bankrut)².

3. Pozostałe 7 spółek (zob. rys. 3) charakteryzuje się bardzo małym ryzykiem upadłości w badanym okresie. Prawdopodobieństwo upadłości w obu modelach nie przekraczało wartości 0,2%. Oznacza to, że spółki te charakteryzowały się bardzo dobrą (rating [AA]) oraz ekstremalną wiarygodnością spłaty zobowiązań (rating [AAA]).

Omawiane modele strukturalne mogą być z powodzeniem wykorzystywane w praktyce, gdyż dobrze prognozują prawdopodobieństwo upadłości spółek giełdowych. Pozwalają one na określenie dynamiki zmian prawdopodobieństwa upadłości, umożliwiają tym samym inwestorom bieżącą ocenę wiarygodności finansowej

² Ostatecznie spółka TOORA ogłosiła upadłość 15.11.2007 r.



Rys. 3. Dynamika zmian prawdopodobieństwa upadłości wraz z odpowiadającym ratingiem S&P dla spółek o małym ryzyku upadłości z regionu Podkarpacia w okresie od 2.01.2006 do 8.02.2008
Źródło: opracowanie własne.

interesujących ich spółek giełdowych. Na podstawie oszacowanych wartości prawdopodobieństwa upadłości możliwe jest określenie implikowanego ratingu dla spółek znajdujących się w portfelach inwestycyjnych inwestorów.

Literatura

- Black F., Cox J., *Valuing corporate securities: some effects of bond indenture provisions*, "Journal of Finance" 1976 no 31.
- Crosbie P., Bohn J., *Modeling default risk*, Working Paper, Moody's KMV Corporation, New York 2003.
- Crouhy M., Galai D., Mark R., *A comparative analysis of current credit risk models*, "Journal of Banking & Finance" 2000 no 24.
- Finger C. (red.), *CreditGrades™ technical document*, RiskMetrics, New York 2002.
- Krysiak Z., *Ryzyko kredytowe a wartość firmy – pomiar i modelowanie*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2006.
- Leland H., Toft K., *Optimal capital structure, endogenous bankruptcy and the term structure of credit spreads*, "Journal of Finance" 1996 no 50.
- Merton R., *On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates*, "Journal of Finance" 1974 no 29.
- Saunders A., *Metody pomiaru ryzyka kredytowego*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków 2001.

RISK ASSESSMENT OF STOCK COMPANIES INSOLVENCY WITH THE USE OF STRUCTURAL MODELS

Summary

In efficient investment in the securities of quoted stock companies a very important role for investors is played by information concerning the potential risk of insolvency for those companies where investors has already invested their financial assets. During the assessment of the risk insolvency very useful can be estimates for the probability of the potential insolvency of stock companies obtained by means of so-called structural models which are successfully applied during the assessment of credit risk. In the paper the practical aspects of structural approach for the issues of risk estimate of stock companies insolvency are featured with the use of some structural models exemplified by twelve companies from the Podkarpacie region.