PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 108
Współczesne tendencje rozwojowe badań operacyjnych 2010

Marek Nowiński
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

TESTOWANIE DETERMINIZMU W EKONOMICZYCH SZEREGACH CZASOWYCH

Streszczenie: Obecnie coraz częściej zakłada się, że większość sygnałów, z którymi spotykamy się w naturze lub w działalności człowieka, generują układy nieliniowe, które ponadto znajdują się pod wpływem zniekształceń losowych, nazywanych najczęściej szumem. Prowadzi to do konieczności wykorzystywania teorii stochastycznych i nieliniowych modeli dynamicznych w wielu dziedzinach współczesnych badań naukowych. W pracy przedstawiono nową, prostą metodę topologiczną, dzięki której można wstępnie potwierdzić lub odrzucić hipotezę o obecności deterministycznych zachowań typu chaotycznego w małych zbiorach danych $(N \leq 500)$, co umożliwia dokonywanie dalszych, pogłębionych analiz rzadko próbkowanych procesów ekonomicznych, z obserwacjami notowanymi nawet w trybie miesięcznym lub kwartalnym.

Słowa kluczowe: teoria chaosu, nieliniowe modele dynamiczne, determinizm

Obecnie coraz częściej się przyjmuje, że większość sygnałów płynących z natury lub działalności człowieka jest generowana przez układy nieliniowe, które dodatkowo znajdują się pod wpływem zniekształceń losowych, nazywanych najczęściej szumem. Rodzi to konieczność wykorzystywania teorii stochastycznych i nieliniowych modeli dynamicznych w wielu dziedzinach współczesnych badań naukowych. W tym ujęciu złożone układy charakteryzowane są przez dopasowane do nich konkretne modele dynamiczne, których parametry estymuje się na podstawie szeregów czasowych obserwacji zmiennych opisujących badane zjawisko. Wobec wielkiej liczby analizowanych układów zazwyczaj nie jesteśmy w stanie określić szczegółowej postaci potrzebnego modelu i musimy rozpatrywać stosunkowo obszerną klasę możliwych do zastosowania modeli parametrycznych. Trudności te powodują, że stosowanie stochastycznych, nieliniowych modeli dynamicznych, tworzonych na podstawie szeregów czasowych obserwacji, jest rzeczywiście skomplikowane – przy obecnym stanie wiedzy nie dysponujemy żadnymi uniwersalnymi i jednocześnie efektywnymi metodami rozwiązania tego problemu. Deterministyczne techniki wnioskowania nie mogą dostarczyć dokładnych oszacowań parametrów modelu w obecności szumu w danych. Problem ten komplikuje się jeszcze bardziej, gdy mamy do czynienia z szumem zarówno pomiarowym, jak i wewnętrznym, dynamicznym, który może zmieniać istotne własności badanego układu.

Jako układ dynamiczny będziemy traktować każdy układ, którego stan zmienia się (lub może się zmieniać) w czasie. Początkowo będą to układy deterministyczne i autonomiczne (niezależne od wpływu czynników zewnętrznych), choć oczywiście natychmiast musi nastąpić urealnienie tego opisu do układów zbliżonych do sytuacji, z którą mamy do czynienia w otaczającej nas rzeczywistości, a więc uwzględnienie szumu, zniekształceń pomiarowych oraz zakłóceń zewnętrznych. Pomiarów dokonuje się poprzez gromadzenie zbioru kolejnych, równo rozmieszczonych w czasie, wartości jednej zmiennej układu. Dzięki pewnym twierdzeniom o rekonstrukcji układów nieliniowych można pokazać, że topologiczne własności układu mogą być całkowicie odtworzone na podstawie zachowania się tej jednej zmiennej w czasie. Rekonstrukcja odbywa się poprzez odtworzenie trajektorii układu w przestrzeni wektorowej, gdzie jako wektory stanu przyjmuje się ciągi kolejnych obserwacji, odsuniętych od siebie o tę samą wielkość opóźnienia czasowego. Procedurę tę nazywa się zanurzaniem szeregu czasowego w przestrzeni o wyższym wymiarze.

Załóżmy, że oryginalna przestrzeń fazowa badanego układu dynamicznego to skończonowymiarowa przestrzeń wektorowa R^n. Stan układu opisany jest przez pewien wektor – punkt tej przestrzeni. Wtedy rzeczywistą dynamikę układu można opisać jako n-wymiarowe odwzorowanie F w przestrzeni R^n (oczywiście zakładamy przypadek dyskretny, co jest całkowicie zgodne z rzeczywistą sytuacją w analizie ekonomicznych szeregów czasowych).

W tej pracy zakładamy, że dyskretne układy dynamiczne mogą generować badane przez nas szeregi zgodnie z zależnościami:

$$\boldsymbol{s}_{t+1} = F(\boldsymbol{s}_t + \eta_t), \quad \text{gdzie } \boldsymbol{s}_t \in R^n, \ t \in T, \tag{1}$$

$$x_{t+1} = h[F(\boldsymbol{s}_t + \eta_t)] + \xi_t, \quad h : R^n \to R^1, \tag{2}$$

gdzie $\boldsymbol{s}_t$ to stany nieznanego, pierwotnego układu wielowymiarowego, η_t to szum dynamiczny wewnątrz układu (powodujący niejednoznaczność kolejnego stanu układu dla danego stanu bieżącego), $h(\cdot)$ to pewna funkcja pomiarowa generująca skalarny szereg czasowy obserwacji x_t układu dynamicznego, a ξ_t to szum pomiarowy.

Własności tego typu układów mogą przesądzać o tym, że otrzymywane na ich podstawie ciągi obserwacji x_t powinny przynajmniej częściowo mieć własności deterministyczne. Spróbujmy wobec tego określić, co rozumiemy przez determinizm skalarnego szeregu czasowego x_t z wartością oczekiwaną $E(x_t)$. Szereg taki nazywamy deterministycznym, gdy istnieje pewna nielosowa funkcja $\tilde{F}$ (aproksymująca F) taka, że $x_t = \tilde{F}(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, ...)$. Natomiast szereg x_t zawiera składniki deterministyczne, gdy istnieje deterministyczna funkcja $\tilde{F}$ taka, że $x_t = \tilde{F}(x_{t-1}, x_{t-2}, x_{t-3}, ..., \quad e_{t-1}, e_{t-2}, e_{t-3}, ...) + e_t$, gdzie e_t to zmienna losowa o średniej zerowej (ale niekoniecznie jako ciąg wartości niezależnych zmiennych losowych o jednakowym rozkładzie). Determinizm nazywamy nieliniowym, gdy funkcja $\tilde{F}$ jest nieliniowa względem swych argumentów. Nie będziemy tutaj (w odróżnieniu od niektórych innych podejść w literaturze) zaliczać układów zawierających składniki zarówno deterministyczne, jak i losowe do układów typu stochastycznego. Będziemy je natomiast nazywać układami stochastyczno-deterministycznymi lub układami stochastycznymi z nieliniowymi składowymi deterministycznymi. Podkreśla to nasze zainteresowanie występowaniem w danych istotnych struktur, które jednak nie mogą być wyjaśnione wyłącznie za pomocą liniowych modeli stochastycznych. Aby mierzyć stopień determinizmu, nieliniowości i prognozowalności, w układach tego typu wprowadzono szereg mierników nieliniowych, które ostatnio licznie stosuje się do ekonomicznych i finansowych szeregów czasowych (zob. np. [Nowiński 2007]).

Badania dynamiki ekonomicznych i finansowych szeregów czasowych, po wstępnym przygotowaniu danych i analizie wizualnej, najczęściej rozpoczynają się od testowania determinizmu i stopnia nieliniowości występujących w nich zależności. Typowe przykłady miar stopnia determinizmu i nieliniowości to:

– szacowanie wykładników Lapunowa,
– obliczanie wymiaru korelacyjnego,
– stosowanie opartego na tym wymiarze testu BDS,
– obliczanie wskaźników wykorzystujących ideę informacji wzajemnej, entropię i inne miary złożoności procesów,
– testowanie horyzontu prognozowalności nieliniowej.

Zazwyczaj główna idea badań tego typu polegała na porównywaniu wyników stosowania prostych miar nieliniowości (lub nawet chaotyczności) do rzeczywistych procesów ekonomicznych i do wygenerowanych na ich podstawie procesów czysto losowych. Wszelkie istotne odchylenia uzyskanych wartości statystyk były przyjmowane jako oznaka wykrycia nieliniowych zależności deterministycznych. Bardzo istotne w tym wypadku jest określenie, co oznacza stwierdzenie wystąpienia „istotnego odchylenia” od losowości. Przecież w każdym przypadku mamy do czynienia z naturalnymi, statystycznymi wahaniami wartości szacowanych mierników. Badania komplikuje też to, że finansowe szeregi czasowe są w rzeczywistości kombinacją procesów stochastycznych i deterministycznych, co potwierdza większość badaczy (zob. np. [Schittenkopf *et al.* 2000]). Inny problem polega na tym, że dla statystyk stosowanych do testowania nieliniowości rzeczywistych szeregów danych zazwyczaj nie dysponujemy teoretycznymi rozkładami ich wartości dla procesów losowych. Próbą ominięcia tych problemów jest wprowadzenie nowych statystyk testujących, np. statystyki BDS, dla których wystarczające są rozkłady typu asymptotycznego, stanowiące pewne oszacowania ich wartości dla procesów szumu liniowego.

Teoretyczne wymagania determinizmu układu przy obliczaniu niezmienników dynamicznych (np. wymiaru korelacyjnego oraz wykładników Lapunowa) bardzo ograniczają możliwości ich stosowania. Jednak nieliniowa analiza układów dynamicznych wykorzystywana jest także do danych, o których nie można jednoznacznie stwierdzić, że są generowane przez układy deterministyczne. Dotyczy to badań w takich dziedzinach, jak: rozwój populacji w naukach biologicznych, diagnostyka medyczna (analiza sygnałów EEG, EKG), zmiany pola magnetycznego Ziemi w geofizyce, zmiany natężenia światła obiektów astronomicznych, a także dynamika ekonomicznych szeregów czasowych (kursy wymiany walut, notowania giełdowe lub wskaźniki makroekonomiczne). Wyniki tych badań, interpretowane jako pewne miary złożoności badanych układów, napotykają jednak szereg sprzeciwów, zwłaszcza ze strony naukowców zajmujących się badaniami eksperymentalnymi. Chociaż prawie wszyscy zgadzają się, że złożoność procesów powinna odzwierciedlać trudności opisu i objaśniania charakterystyk sygnałów generowanych poprzez układy dynamiczne, to bardzo istotne jest obiektywne spojrzenie na analizowane dane oraz jasne zdefiniowanie własności, które chcemy mierzyć. Na przykład pewne wymiary w teorii nie są wrażliwe na zmiany układów współrzędnych pomiarowych – niestety jest to prawda tylko dla niemożliwych do uzyskania w praktyce, nieskończenie licznych, dokładnych danych. Nawet niewielkie zmiany parametrów układu dynamicznego mogą powodować istotne wahania wymiarów i zmiany geometrycznej postaci trajektorii, co powoduje niestabilność oszacowań wymiaru korelacyjnego, dokonywanych na podstawie skończonych zbiorów danych. Badania skupiły się przede wszystkim na konstrukcji testów pomagających odróżnić nieliniowe sygnały deterministyczne od liniowych procesów stochastycznych opartych na rozkładzie normalnym, a także testów umożliwiających rozróżnienie dwóch różnych stanów tego samego układu nieliniowego.

Odróżnienie dynamiki nieliniowej układu od liniowych zachowań stochastycznych wcale nie jest proste, gdyż oba procesy potrafią przyjmować zadziwiająco skomplikowaną i podobną postać. Często trzeba przesądzić, czy złożone struktury widoczne w danych szeregu czasowego są skutkiem występowania zależności nieliniowych, czy tylko korelacji nieliniowych. Innymi słowy, musimy próbować określić, czy nieregularność (nieokresowość procesu) jest spowodowana przez nieliniowy deterministyczny charakter zależności w układzie, czy też przez losowość zmiennych układu (lub losowe zmiany jego parametrów). Często proste procesy autoregresyjne rzędu pierwszego, z wprowadzonymi zakłóceniami w postaci addytywnego białego szumu, generują dane o skomplikowanej postaci, które są ze sobą ściśle skorelowane. Jeszcze bardziej skomplikowane wzorce zachowań mogą tworzyć liniowe autoregresyjne procesy średniej ruchomej ARMA, które w istocie składają się z dwóch części. Pierwsza z nich to składowa autoregresyjna, która opisuje wewnętrzną dynamikę procesu. Druga to średnia ruchoma – zrealizowana na składnikach losowych. W najprostszy sposób można to przedstawić jako model postaci ARMA (1, 1):

$$s_{t+1} = a_0 + a_1 s_t + b_1 \xi_t \, .$$

Przedstawimy teraz nową, prostą metodę topologiczną[1], dzięki której można wstępnie potwierdzić lub odrzucić hipotezę o obecności zachowań chaotycznych w małych zbiorach danych ($N \le 500$), co później umożliwia dokonywanie dalszych, pogłębionych analiz rzadko próbkowanych procesów ekonomicznych, z obserwacjami notowanymi nawet w trybie miesięcznym lub kwartalnym. Niech x_t, $t = 1, ..., N$ oznacza obserwacje skalarnego szeregu czasowego generowanego przez pewien nieznany układ dynamiczny. Jeśli ciąg ten ma charakter deterministyczny, to zgodnie z twierdzeniem Takensa dla odpowiedniego wyboru wymiaru zanurzenia *m* oraz opóźnienia czasowego τ istnieje taka funkcja *G*, że $\boldsymbol{x}_{t+\tau} = G(\boldsymbol{x}_t)$, $G : R^m \to R^m$, gdzie $\boldsymbol{x}_t$ to wektory zanurzenia w przestrzeni *m*-wymiarowej z separacją czasową wynoszącą τ [Takens 1981]. Często określa się ją jako funkcję topologicznie sprzężoną z pierwotnym odwzorowaniem *F*, co oznacza, że *G* zachowuje topologiczne własności funkcji *F*, a zwłaszcza ciągłość trajektorii w przestrzeni fazowej. Jeśli zatem $\{x_t\}$ naprawdę stanowi deterministyczny szereg czasowy obserwacji, to dla każdej pary punktów prawidłowo zrekonstruowanej przestrzeni stanów $(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_j)$ powinny istnieć dowolnie małe wielkości $\alpha > 0$ takie, że

$$\left\| \boldsymbol{x_i} - \boldsymbol{x_j} \right\| < \alpha \Rightarrow \left\| G(\boldsymbol{x_i}) - G(\boldsymbol{x_j}) \right\| < \alpha \qquad (3)$$

gdzie $\| \cdot \|$ oznacza euklidesowską odległość między wektorami. Własność ta powoduje, że obrazy bliskich punktów układu muszą znajdować się także blisko siebie w przestrzeni fazowej, czyli oznacza ciągłość tej przestrzeni. Jest to typowa własność procesów deterministycznych i można ją wykorzystać do odróżnienia dynamiki losowej od zbliżonej do niej dynamiki chaotycznej.

Proponowana przez nas miara determinizmu może też być wykorzystana jako test odróżniający procesy szumu losowego od tych, w których występują zależności funkcjonalne zniekształcone zakłóceniami losowymi. Podstawowa idea testu polega na ocenie, w jakim stopniu zrekonstruowany układ dynamiczny zachowuje własności ciągłości procesu w przestrzeni fazowej. Ocena ta następuje przy wykorzystaniu zmodyfikowanej metody najbliższych sąsiadów do aproksymacji dynamiki badanego procesu. Zakładamy w tym przypadku, że spełnienie warunku (3)

[1] Opartą na idei łącznego wykorzystania pojęcia sumy korelacyjnej i metody fałszywych najbliższych sąsiadów, wykorzystanej również w opracowaniu N. Wesnera [2004].

oznacza weryfikację własności ciągłości topologicznej procesu. Aby uprościć zapis, przyjmujemy, że $\tau = 1$ i określamy najbliższego sąsiada punktu $\boldsymbol{x_T}$ jako: $\boldsymbol{x_K} = \arg \min\limits_{i \neq T, i=m,\dots,N} \left\{ \left\| \boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{x_i} \right\| \right\}$. Najbliższego sąsiada jego obrazu można wtedy zapisać jako: $\boldsymbol{x_{K+1}} = \arg \min\limits_{i \neq T+1, i=m,\dots,N} \left\{ \left\| \boldsymbol{x_{T+1}} - \boldsymbol{x_i} \right\| \right\}$. Niech $d_T = \left\| \boldsymbol{x_T} - \boldsymbol{x_K} \right\|$ oraz $d_{T+1} = \left\| \boldsymbol{x_{T+1}} - \boldsymbol{x_{K+1}} \right\|$ oznaczają odpowiednio minimalne odległości między dowolnym punktem $\boldsymbol{x_i}$ i innym punktem danej przestrzeni fazowej, więc dla tak określonych wektorów $\boldsymbol{x_T}$ oraz $\boldsymbol{x_K}$ (uzyskanych na podstawie danych deterministycznego szeregu czasowego) możliwe jest ustalenie dowolnie małych wartości α, dla których spełniony jest warunek:

$$d_T < \alpha \Rightarrow d_{T+1} < \alpha. \tag{4}$$

W obliczeniach praktycznych przyjęto wartości parametrów α jako 1/10 część odchylenia standardowego odległości między punktami aktualnie analizowanego, zrekonstruowanego układu stanów. Eksperymenty numeryczne pokazują, że dla krótkich szeregów czasowych udział punktów przestrzeni fazowej, które spełniają ten warunek, rośnie w miarę zwiększania się wymiaru jej zanurzenia. Obserwacja ta powoduje, że można zaproponować następującą miarę determinizmu procesu:

$$DETM = \frac{\text{liczba par punktów } \left(\boldsymbol{x_T}, \boldsymbol{x_K}\right) \text{ realizujących warunek (4)}}{(N - m + 1)m} \tag{5}$$

gdzie *N* to liczba obserwacji szeregu, a *m* to wymiar zanurzenia. Wartość współczynnika *DETM* oblicza się dla różnych wielkości tego wymiaru, a dla każdego wektora $\boldsymbol{x_T}$, $T = m, \dots, N$ bierze się pod uwagę tylko jednego jego najbliższego sąsiada $\boldsymbol{x_K}$, $K \neq T$, $K = m, \dots, N$, który minimalizuje euklidesowską odległość wektora $\boldsymbol{x_T}$ od wszystkich wektorów tej samej *m*-wymiarowej przestrzeni stanów. W drugim kroku procedury bierze się pod uwagę wszystkie te pary najbliższych sąsiadów, dla których ich obrazy w przestrzeni (*m*+1)-wymiarowej zachowują własność najbliższego sąsiedztwa. Dla szeregu typu deterministycznego miara *DETM* powinna być istotnie większa od zera, przy ciągle zwiększanym wymiarze zanurzenia. Niestety dla dowolnych procesów deterministycznych nie jest możliwe ustalenie teoretycznego zakresu istotnych wartości współczynnika *DETM*. Pomimo to można stwierdzić, że dla danych niezależnych i stacjonarnych prawdopodobieństwo, iż para punktów przypadkowo spełnia warunek (5), gwałtowanie spada, kiedy rośnie wartość *N*. Należy się więc spodziewać, że wartość *DETM* powinna szybko osiągnąć poziom zbliżony do zera dla dostatecznie dużej liczby obserwacji szeregu.

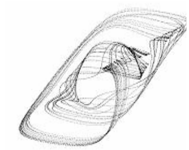
Aby zilustrować efektywność tej miary determinizmu dla różnych szeregów czasowych, obliczono jej wartości na podstawie obserwacji generowanych przez proces białego szumu, kolorowego szumu (ze współczynnikiem korelacji wynoszącym 0,9) oraz typowych procesów chaotycznych Henona i Mackeya–Glassa, a także, wykorzystywanych przez nas do porównań, pięciu szeregów ekonomicznych. Wyniki obliczeń przedstawiono w tab. 1.

Konkretnie wykorzystano szeregi czasowe:

– BSZUM: klasyczny proces białego szumu[2], 1024 obserwacje,
– FSZUM: szum fraktalny typu brownowskiego[3], 1024 obserwacje,
– HENON: proces Henona, 1024 obserwacje (trajektoria i wzór generujący proces poniżej),

$$x_{t+1} = y_t - 1{,}4x_t^2 + 1$$
$$y_{t+1} = 0{,}3x_t$$

– MACKEY: empiryczny proces Mackeya-Glassa, 512 obserwacji



– CPI: miesięczne wskaźniki poziomu cen towarów i usług konsumpcyjnych (Consumer Price Index) w USA – z lat 1913-2005, 1112 obserwacji (źródło: U.S. Department of Labor),
– DJIA: wartości wskaźnika Dow Jones Industrial Average z giełdy NYSE – dane dzienne zamknięcia z lat 1986-2002, 3897 obserwacji (źródło: Yahoo! Finance Inc.),
– RNAFT: ceny ropy naftowej na rynku amerykańskim – dane miesięczne z lat 1946-2005, 716 obserwacji,
– SREBRO: ceny srebra ($/uncję) na rynku NY Comex Silver – dane dzienne z lat 1981-1996, 3500 obserwacji,
– US-DEM: kurs wymiany walut US/DEM – dane dzienne z lat 1984-2000, 4096 obserwacji.

[2] Ciąg niezależnych zmiennych losowych o jednakowych rozkładach prawdopodobieństwa, ze skończoną wartością oczekiwaną i wariancją.

[3] To dobrze znany proces stochastyczny (wygenerowany dla wartości wykładnika Hursta *He* = 0,5), który powstaje przez całkowanie gaussowskiego procesu białego szumu, a jego najważniejszą cechą jest to, że wszystkie kolejne przemieszczenia (przyrosty wartości) nie są ze sobą skorelowane, jeśli chodzi zarówno o kierunek, jak i o wielkość przesunięcia.

Tabela 1. Stopień determinizmu $DETM$ dla szeregów czasowych różnych typów przy stopniowym zwiększaniu wymiaru zanurzenia (dla parametrów $\alpha = 0,3\sigma$, gdzie σ to odchylenie standardowe szeregu)

Dane	Wymiar zanurzenia					
	$m = 2$	$m = 3$	$m = 4$	$m = 5$	$m = 6$	$m = 7$
BSZUM	0,052	0,056	0,078	0,060	0,081	0,069
FSZUM	0,059	0,098	0,077	0,074	0,089	0,097
HENON	0,066	0,061	0,193	0,132	0,180	0,262
MACKEY	0,070	0,091	0,134	0,125	0,140	0,110
CPI	0,034	0,112	0,183	0,099	0,088	0,122
DJIA	0,046	0,052	0,098	0,043	0,077	0,093
RNAFT	0,023	0,035	0,028	0,086	0,102	0,098
SREBRO	0,078	0,098	0,089	0,102	0,133	0,999
US-DEM	0,012	0,072	0,047	0,100	0,098	0,096

Źródło: opracowanie własne.

Z tabeli 1 wynika bezpośrednio, że miara determinizmu $DETM$ jest stosunkowo efektywnym narzędziem w badaniach determinizmu. Dla procesów chaotycznych wartość współczynnika $DETM$ przekracza istotnie poziom 0,1 dla większych wartości wymiaru zanurzenia *m*, podczas gdy dla wszystkich procesów losowych nie zbliża się nawet do tej wartości. Niestety bardzo niskie wartości tych oszacowań dla małych wymiarów zanurzenia świadczą o tym, że metodą tą nie można odróżnić układów chaotycznych, rekonstruowanych w przestrzeni o zaniżonym wymiarze, od układów losowych, zwłaszcza w przypadku układów generujących kolorowy szum. Wielu autorów podkreśla (zob. np. [Osborne, Provenzale 1989]), że niedostateczna liczba obserwacji szeregu daje ten sam efekt, co obecność korelacji czasowych, gdyż powoduje uzyskanie fałszywych oszacowań wymiarów układu i uniemożliwia odróżnienie chaotycznych szeregów czasowych od procesów losowych. Miara determinizmu $DETM$ pozwala częściowo ominąć te trudności i szczególnie dobrze powinna odgrywać swoją rolę w wykrywaniu obecności chaosu niskowymiarowego w niezbyt licznych zbiorach obserwacji, co jest celem wielu analiz danych ekonomicznych. Wskaźnik stopnia determinizmu został więc również obliczony dla przykładowych danych ekonomicznych. Tabela 1 pokazuje, że prawie we wszystkich przypadkach, dla tych danych, tak jak dla procesów losowych, współczynnik $DETM$ nie przekraczał wartości 0,1, co mogłoby świadczyć o tym, że nie były one generowane przez niskowymiarowe układy chaotyczne i częściowo potwierdzałoby hipotezę efektywnego rynku. Jednakże wyniki te nie są tak jednoznaczne, gdyż średnie wartości współczynnika $DETM$ dla danych ekonomicznych, chociaż niewysokie, są znacznie wyższe niż dla procesów losowych, a w kilku przypadkach przekraczają istotnie graniczną wartość 0,1 (zwłaszcza dla szeregów o większej gładkości, takich jak CPI). Jest też znamienne, że ich wartość wyraźnie rośnie po zastosowaniu do danych procedur nieliniowej redukcji szumu, co również sprawdzono eksperymentalnie. Powoduje to, że nie możemy bezwarunkowo odrzucić przynajmniej deterministycznego podłoża tych procesów i zachodzi potrzeba sprawdzenia własności deterministycznych innych ekonomicznych szeregów czasowych o mniejszej złożoności, w których liczba czynników zewnętrznych i stopień ich ingerencji w badane układy nie są tak wielkie.

Literatura

Nowiński M., *Nieliniowa dynamika szeregów czasowych w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo AE, Wrocław 2007.

Osborne A.R., Provenzale A., *Finite correlation dimension for stochastic system with power-law spectra*, "Physica D" 1989 vol. 35, s. 357-381.

Schittenkopf C. *et al*., *On non-linear, stochastic dynamics in economic and financial time series*, "Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics" 2000 vol. 4, s.101-121.

Takens F., *Detecting strange attractors in turbulence*, [w:] *Notes in Mathematics*, *Dynamical Systems and Turbulence*, red. L.S. Young, Springer-Verlag, Berlin 1981.

Wesner N., *Searching for chaos in low frequency*, "Ecoomics Bulletin" 2004 vol. 3 no 1, s. 1-8.

TESTING ECONOMIC TIME SERIES FOR NONLINEAR DETERMINISM

Summary: Nowadays, there is growing a significant interest in analyzing economic time series for detecting elements of nonlinearity and deterministic chaos. The main goal of this nonlinear time series analysis is to detect important, but other than linear, properties of scalar observations generated by deterministic, dynamic systems, including these affected by noise (internal and external, measurement laxity). It should improve short-term forecasting possibilities and eventually enable attempts of controlling processes generating these time series.

Before applying nonlinear techniques to dynamical phenomena occurring in real world environment, it is necessary to ask if the use of such advanced techniques is justified by deterministic character and specific patterns in the data. While many processes in nature a priori seem very unlikely to be linear, the possible nonlinear nature might not be evident in their dynamics. The method of confirming the plausible determinism of data gives us possibility to answer this question. The analysis should enable identification of deterministic nonlinear dependencies in data and perhaps chaotic character of the process. One of the most important tasks is to evaluate topological invariants of the reconstructed system, which is helpful in determining its nonlinear properties.

The article describes the simple topological method trying to solve the most important practical problem connected with reconstruction of chaotic attractors properties basing only on observational data by confirming the deterministic base hypothesis of dynamic processes even within small samples $(N \leq 500)$. This enables further and deeper analysis of economic time series with monthly or even quarterly gathered observations.