

Mirosława Sztemberg-Lewandowska

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

**ANALIZA CZYNNIKOWA I TEORIA REAKCJI
NA POZYCJĘ W MODELACH CECHY LATENTNEJ**

Streszczenie: Konfirmacyjna analiza czynnikowa i teoria reakcji na pozycję należą do modeli cechy latentnej. Modele IRT służą do estymacji parametrów, które reprezentują ukryte zdolności, umiejętności respondentów.

Analiza czynnikowa służy do wykrywania optymalnej grupy czynników głównych, tłumaczących korelację między zmiennymi obserwowalnymi. W konfirmacyjnej analizie czynnikowej dla zmiennych niemetrycznych wykorzystuje się korelacje polichoryczne lub tetrachoryczne dla zmiennych dychotomicznych. Jednocześnie taka analiza wymaga zastosowania innej metody estymacji parametrów modelu – metody diagonalnie ważonych najmniejszych kwadratów.

Zaprezentowano badanie mające wyodrębnić czynniki mające decydujący wpływ na popularność wybranych czekolad. Ważnym aspektem była analiza trudności oceny przez respondentów zmiennych opisujących czekolady.

1. Wstęp

Modele teorii reakcji na pozycję (IRT) oraz konfirmacyjnej analizy czynnikowej (CFA) dla zmiennych niemetrycznych są szczególnymi przypadkami bardziej ogólnego modelu cechy latentnej (tab. 1). Natomiast model cechy latentnej jest zaliczany do modeli zmiennych latentnych, w których zmienne ukryte są metryczne, a zmienne obserwowalne – niemetryczne.

Konfirmacyjna analiza czynnikowa została sformułowana przez Jöreskoga (1971), a następnie rozszerzona dla niemetrycznych zmiennych przez Christoffersona (1975). Równoległe powstał model reakcji na pozycję dla zmiennych dycho-

Tabela 1. Klasyfikacja modeli zmiennych latentnych

		Zmienne obserwowalne	
		metryczne	niemetryczne
Zmienne latentne	metryczne	analiza czynnikowa	analiza czynnikowa dla zmiennych dyskretnych, teoria wyniku zadania testowego
	niemetryczne	analiza latentnych profili	analiza latentnych klas

Źródło: [Bartholomew 1987].

tomicznych dzięki pracy Rascha (1960), który został rozszerzony dla zmiennych dyskretnych. Zatem modele IRT i CFA powstawały w oddzielnych nurtach statystycznych, co podkreśla różnice między nimi [Bartholomew 1987; Konarski 2004].

2. Model teorii reakcji na pozycję oraz konfirmacyjna analiza czynnikowa

W literaturze wyróżnia się kilka **modeli IRT**. Modele te różnią się funkcją matematyczną wyjaśniającą prawdopodobieństwo poprawnej odpowiedzi na daną pozycję testową. Jednym z nich jest model Birnbauma opisany wzorem:

$$P_{ni} (X_{ni} = 1 / \theta_n, b_i) = \frac{e^{Da_i(\theta_n - b_i)} + c_i}{e^{Da_i(\theta_n - b_i)} + 1}, \quad (1)$$

gdzie: b_i – parametr trudności i -tej pozycji testowej,
 a_i – parametr mocy dyskryminacyjnej i -tej pozycji testowej,
 c_i – współczynnik zgadywania i -tej pozycji testowej,
 D – stała skalowania równa 1,7,
 θ_n – poziom cechy latentnej – zdolności n -tego respondenta.

Wzór ten opisuje prawdopodobieństwo poprawnej odpowiedzi udzielonej przez n -tego respondenta na i -te zadanie. Model Birnbauma jest modelem trójparametrycznym.

Innym przykładem modelu IRT jest dwuparametryczny model Lorda, w którym współczynnik zgadywania jest równy zero ($c_i = 0$). W jednoparametrycznym modelu Rascha ustalony jest nie tylko współczynnik zgadywania, ale także parametr mocy dyskryminacyjnej ($c_i = 0$, $a_i = \frac{1}{D}$).

Model konfirmacyjnej analizy czynnikowej jest opisany wzorem:

$$x_i = a_{i0} + a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \dots + a_{ip}y_p + e_i \quad (i = 1, \dots, p), \quad (2)$$

gdzie: p – numer obserwacji,
 x_i – i -ta obserwowalna zmienna,
 $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_p)$ – wektor latentnych zmiennych,
 e_i – reszta.

Dodatkowo zakłada się, że reszta ma rozkład normalny ze średnią 0 i wariancją σ_i^2 , ukryte zmienne są niezależne o rozkładzie normalnym $y_j \sim N(0,1)$ dla wszystkich j . W przypadku zmiennych porządkowych zakłada się, że obserwowalne niemetryczne zmienne są realizacjami sztucznych metrycznych ukrytych zmiennych (por. [Bartholomew i in. 2002; Konarski 2004]). Te ukryte zmienne są

nieobserwowalne, jednak nie należy ich mylić z latentnymi zmiennymi. Oznaczmy obserwowalne porządkowe zmienne za pomocą $x_1^*, x_2^*, x_3^*, \dots, x_p^*$ oraz niekompletnie obserwowalne zmienne przez $x_1, x_2, x_3, \dots, x_p$. Każda zmienna x_i^* ma m_i kategorii oraz $m_i - 1$ progów, które oznaczmy za pomocą $t_{i1}, t_{i2}, t_{i3}, \dots, t_{i(m_i-1)}$. Progi te dzielą skalę ukrytej zmiennej x_i na m_i kategorii. Związek między niemierzalną zmienną x_i^* oraz mierzalną x_i jest następujący:

$$x_i^* = s \Leftrightarrow t_{i(s-1)} < x_i \leq t_{is} \quad (s = 1, 2, \dots, m_i), \quad (3)$$

gdzie:

$$t_{i0} = -\infty, t_{i1} < t_{i2} < \dots < t_{i(m_i-1)}, t_{im_i} = +\infty. \quad (4)$$

Dodatkowo zakłada się, że zmienna x_i ma średnią zero i wariancję równą jeden.

Analiza czynnikowa bazuje na macierzy korelacji między zmiennymi, w podejściu klasycznym, dla zmiennych metrycznych, wykorzystuje się korelacje liniowe Pearsona. Natomiast dla zmiennych porządkowych stosuje się korelacje polichoryczne. Szczególnym przypadkiem zmiennych porządkowych są zmienne mierzone na skalach, które mają dwie kategorie (por. [Duffy i in. 1998; Ming, Yinsheng, Suni Rao 1999]); dla tych zmiennych wyznacza się korelacje tetrachoryczne.

W literaturze [Bartholomew i in. 2002] zaleca się stosowanie korelacji liniowych Pearsona dla zmiennych mierzonych na skalach, które mają sześć i więcej stopni. W przypadku zmiennych mierzonych na skalach, które mają pięć i mniej stopni, należy bazować na macierzy korelacji polichorycznych (tetrachorycznych).

Jednocześnie analiza czynnikowa przeprowadzona dla macierzy korelacji polichorycznych (tetrachorycznych) wymaga zastosowania innej metody estymacji parametrów modelu (metody diagonalnie ważonych najmniejszych kwadratów: DWLS – *Diagonally Weighted Least Squares*) [Wang 2005, s. 128-134]. Adekwatność w ten sposób otrzymanego modelu testuje się za pomocą przeskalowanego *chi-kwadrat* Satorry i Bentlera.

3. Przykład empiryczny

W celu zobrazowania opisanych modeli przytoczone zostanie badanie dotyczące rynku czekolad. Czekolady oceniano ze względu na 7 cech: *a* – popularność, *c* – poziom słodkości, *d* – asortyment smakowy, *e* – estetyka opakowania, *f* – dostępność, *g* – popularność marki, *h* – promocje. Zmienne zaprezentowano na skali siedmiostopniowej. Krańce skali określono w postaci antonimów. Ankietowany oceniał tylko te czekolady, które były mu znane.

Celem badania było wyodrębnienie czynników mających decydujący wpływ na popularność wybranych czekolad. Ważnym aspektem była analiza trudności oceny

przez respondentów zmiennych opisujących czekolady oraz określenie, które czekolady „zaburzają” relacje między zmiennymi.

Postawiono dwie hipotezy badawcze:

1) czynniki decydujące o popularności czekolad to: właściwości smakowe i powszechność;

2) czekolada Pomorzanka, która została oceniona przez najmniejszą liczbę respondentów, zakłada związki między badanymi zmiennymi.

W wyniku zastosowania eksploracyjnej analizy czynnikowej otrzymano model dwuczynnikowy (tab. 2).

Tabela 2. Ładunki czynnikowe uzyskane po zastosowaniu metody największej wiarygodności z rotacją Varimax

Symbol zm.	Zmienne	Czynnik 1	Czynnik 2
<i>a</i>	popularność czekolady	0,839	0,421
<i>c</i>	poziom słodkości	-0,304	-0,952
<i>d</i>	asortyment smakowy	0,574	0,781
<i>e</i>	estetyka opakowania	0,470	0,831
<i>f</i>	dostępność	0,945	0,320
<i>g</i>	popularność marki	0,830	0,524
<i>h</i>	promocje	0,848	0,412
Procent wyjaśnionej wariancji		71,35%	22,62%

Pogrubioną czcionką zaznaczono ładunki czynnikowe większe co do wartości bezwzględnej od 0,60.

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem pakietu SPSS.

Czynnik pierwszy opisany jest przez: popularność czekolady, dostępność, popularność marki, promocje, natomiast czynnik drugi opisują: poziom słodkości, asortyment smakowy, estetyka opakowania.

Za pomocą confirmacyjnej analizy czynnikowej sprawdzono dopasowanie otrzymanego modelu czynnikowego do danych. Otrzymano następujące wartości wskaźników dopasowania: wartość statystyki $\chi^2 = 31,37$; liczba stopni swobody $df = 14$;

$$\text{GFI} = 0,694; \text{AGFI} = 0,388; \text{CFI} = 0,865; \text{PNFI} = 0,527.$$

Dla modelu zerowego otrzymano następujące wyniki:

$$\text{GFI} = 0,194; \text{AGFI} = -0,075; \text{CFI} = 0; \text{PNFI} = 0.$$

Zatem należy odrzucić hipotezę o braku liniowej zależności pomiędzy zmiennymi. Natomiast model zbudowany przez badacza jest dość dobrze dopasowany do danych.

Następnie wykorzystano model Rascha do zbadania trudności oceny przez respondentów zmiennych opisujących czekolady. W celu prostszej interpretacji wy-

Tabela 3. Współczynniki trudności ocen zmiennych

Nazwa parametru	Wartość estymowana	Błąd standardowy
beta a.c1	0.447	0.503
beta a.c2	0.104	1.139
beta c.c1	-2.019	0.546
beta c.c2	-4.829	1.573
beta d.c1	0.166	0.485
beta d.c2	-0.459	1.147
beta e.c1	1.080	0.571
beta e.c2	1.370	1.170
beta f.c1	0.748	0.530
beta f.c2	0.706	1.143
beta g.c1	0.166	0.485
beta g.c2	-0.459	1.147
beta h.c1	-0.587	0.462
beta h.c2	-1.964	1.201

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu R.

Tabela 4. Statystyki dla zmiennych

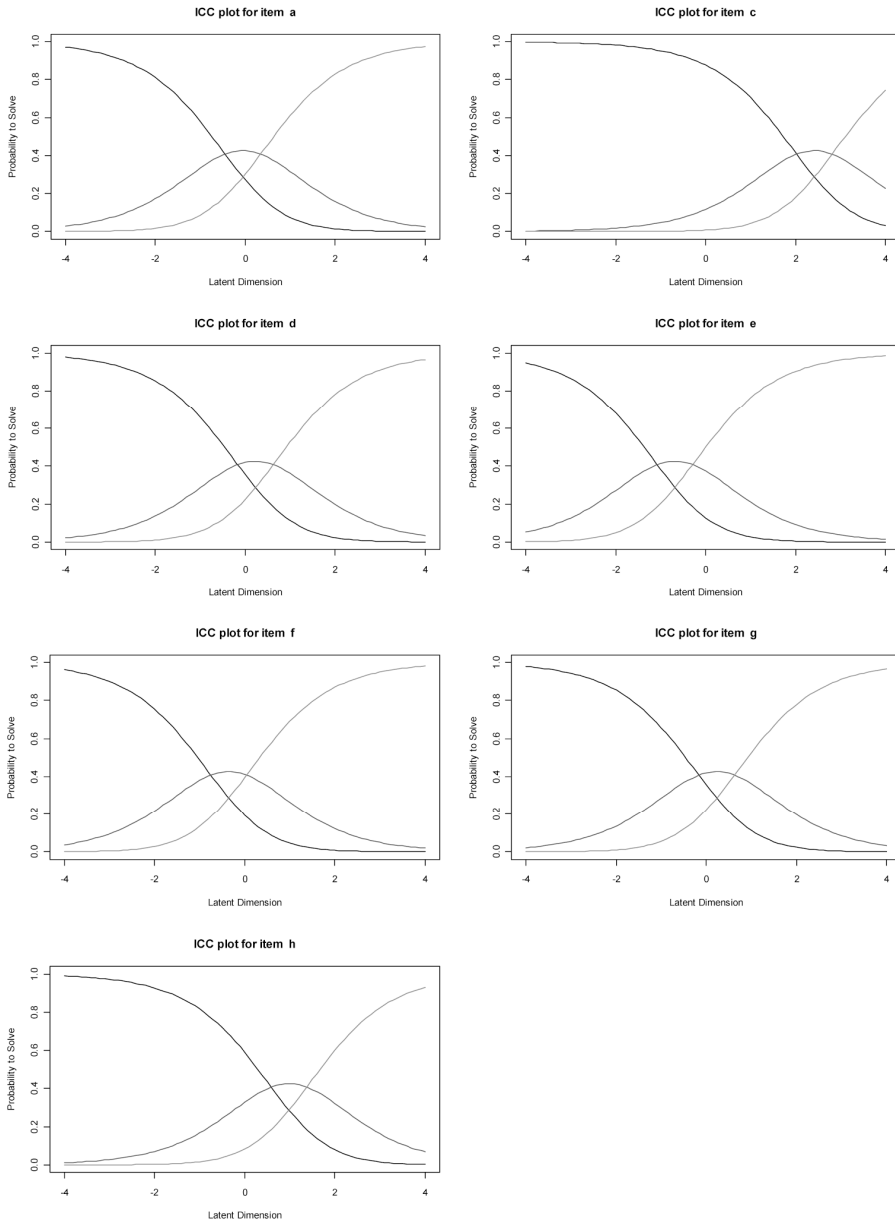
Symbol	Zmienne	Chi ²	Stopnie swobody	<i>p</i>
<i>a</i>	popularność czekolady	3.077	12	0.995
<i>c</i>	poziom słodkości	156.984	12	0.000
<i>d</i>	asortyment smakowy	9.397	12	0.669
<i>e</i>	estetyka opakowania	2.271	12	0.999
<i>f</i>	dostępność	1.908	12	1.000
<i>g</i>	popularność marki	3.787	12	0.987
<i>h</i>	promocje	4.239	12	0.979

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu R.

Tabela 5. Statystyki dla czekolad

Nazwa	Chi ²	Stopnie swobody	<i>p</i>
Goplana	5.066	7	0.652
E. Wedel	2.693	7	0.912
Terravita	3.326	7	0.853
Śnieżka	10.184	7	0.178
Pomorzanka	132.429	7	0.000
Wawel	10.184	7	0.178
Milka	2.693	7	0.912
Alpen Gold	2.693	7	0.912
Fazer	3.495	7	0.836
Lindt	3.514	7	0.834
Nestle	2.693	7	0.912
Cadbury	2.693	7	0.912

Źródło: obliczenia własne z wykorzystaniem programu R.



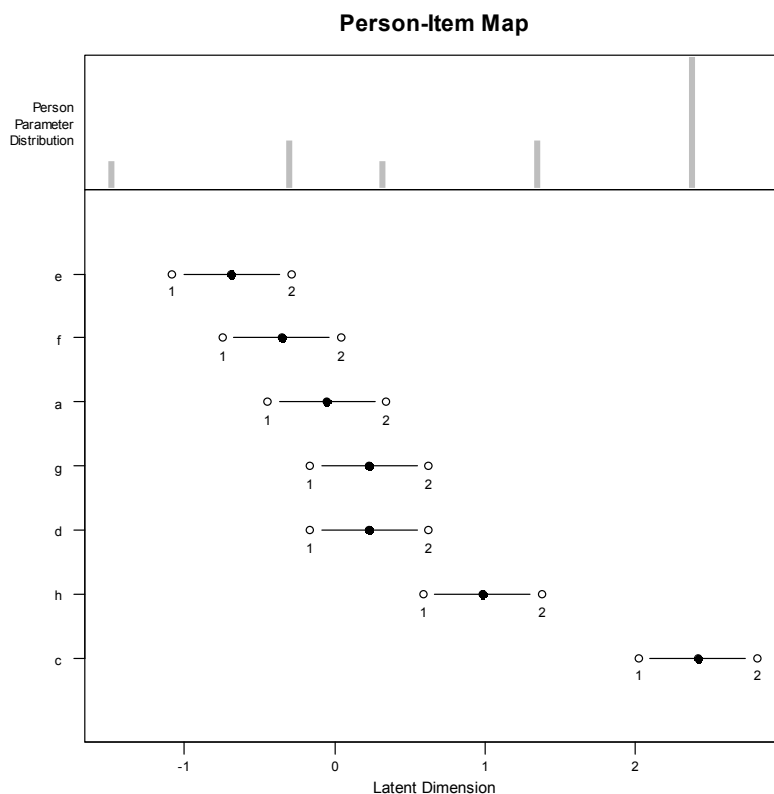
Rys. 1. Krzywe charakterystyczne dla poszczególnych zmiennych

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

ników pierwotne odpowiedzi respondentów przedstawione na skali siedmiostopniowej zostały przekodowane do skali trzystopniowej. W tabelach zamieszczono współczynniki trudności: oceny zmiennych (tab. 3) oraz wartości testu chi-kwadrat dla tych zmiennych (tab. 4). Test chi-kwadrat bada stopień dopasowania poszczególnych parametrów modelu Rascha do danych i określa, które z pozycji mają niską moc dyskryminacyjną i powinny zostać wyeliminowane. Z tabeli 4 wynika, że taką zmienną jest poziom słodkości.

Podobna analiza, dotycząca jednak czekolad, jest przedstawiona w tab. 5, z której wynika, że czekolada Pomorzanka powinna zostać wyeliminowana z badań.

W modelach IRT bardzo pomocne są krzywe charakterystyczne pozycji testowej (*Item Characteristic Curve – ICC*) [Sagan 2002]. Krzywa ICC określa prawdopodobieństwo poprawnej odpowiedzi na pozycję testową w zależności od wartości cechy ukrytej (zdolności, umiejętności respondenta). W modelu Rascha krzywe charakterystyczne różnią się jedynie przesunięciem w poziomie względem zera. Przesunięcie w prawo oznacza, że dana pozycja była poprawnie oceniana przez



Rys. 2. Person-item map

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem programu R.

respondentów o wyższych zdolnościach – pozycja trudniejsza. Pozycja łatwiejsza charakteryzuje się przesunięciem w lewo (rys. 1).

Najtrudniejsza w ocenie jest zmienna c – poziom słodkości, a nieco łatwiejsza h – promocje. Najłatwiejsze w ocenie okazały się zmienna e – estetyka opakowania i f – dostępność.

W analizie modelu Rascha wykorzystano program R, który oprócz krzywych charakterystycznych umożliwia także inną prezentację graficzną wyników – za pomocą Person-item map. Wykres ten w dolnej części przedstawia trudność danej pozycji (zmiennej), a w górnej części rozkład parametrów opisujących zdolności respondentów (czekolad). Pozycje powinny być rozłożone wzdłuż całej skali, aby właściwie mierzyły zdolności respondentów.

Na rysunku 2 zmienna c – poziom słodkości, odstaje od pozostałych zmiennych, co potwierdza, że usunięcie jej będzie korzystne dla badania.

4. Podsumowanie

W przeprowadzonym badaniu wyodrębniono dwa czynniki: powszechność czekolady i właściwości smakowe czekolady, które są dość dobrze dopasowane do danych. Zmienna „poziom słodkości” okazała się bardzo trudna w ocenie dla respondentów i należy ją usunąć z badania. Zatem drugi czynnik jest związany ze zmiennymi „asortyment smakowy” i „estetyka opakowania”, należy go więc utożsamiać bardziej z wizerunkiem czekolady niż z jej właściwościami smakowymi.

Czekolada Pomorzanka powinna zostać wyeliminowana z badań, jest to skutkiem małej popularności tej czekolady.

Badanie potwierdza, że analizę czynnikową dla zmiennych kategoryalnych warto uzupełnić o teorię reakcji na pozycję skali. Model IRT jest modelem pełnej informacji, ponieważ wykorzystuje całą informację zawartą w danych. Natomiast model CFA dla zmiennych dyskretnych jest modelem ograniczonej informacji, ponieważ wykorzystuje tylko informacje zawarte w korelacjach między zmiennymi.

Model CFA dla zmiennych dyskretnych z jednym czynnikiem, który podobnie jak w IRT oznacza zdolności respondentów, jest równoważny z dwuparametrycznym modelem IRT. W literaturze przedstawione zostały relacje pomiędzy parametrami tych modeli [Konarski 2004].

Literatura

- Bartholomew D.J., *Factor analysis for categorical data*, „Journal of the Royal Statistical Society” Series B (Methodological) 1980 vol. 42, no 3, s. 293-321.
- Bartholomew D.J., *Latent Variable Models and Factor Analysis*, New York, Oxford University Press, 1987.
- Bartholomew D.J., Steele F., Moustaki I., Galbraith J.I., *The Analysis and Interpretation of Multivariate Data for Social Scientists*, Chapman & Hall/CRC, 2002.

- Duffy D., Battistutta D., Mathews J., Martin N., *A factor analysis of associations among self-reported immune related symptoms in a large twin sample*, „Twin Research” 1998 no 1.
- Konarski R., *Model cechy latentnej w analizie psychometrycznej testów i pozycji testowych*, [w:] *Standardy wymagań i normy testowe w diagnostyce edukacyjnej*, B. Niemiecko, H. Szaleniec (red.), Polskie Towarzystwo Diagnostyki Edukacyjnej, Kraków 2004.
- Ming T., Yinsheng Q., Sunil Rao J., *Robustness of the latent variable model for correlated binary data*, „Biometrics” 1999 vol. 55, no 1, s. 258-263.
- Sagan A., *Zastosowanie wielowymiarowych skal czynnikowych i skal Rascha w badaniach marketingowych (na przykładzie efektów komunikacyjnych reklamy)*, Zeszyty Naukowe AE nr 605, Kraków 2002.
- Wang W.CH., *A Comparison of Alternative Estimation Methods In Confirmatory Factor Analyses of the General Health Questionnaire across Four Groups of Australian Immigrants*, <http://adt.lib.swin.edu.au/uploads/approved/adtVSWT20051025.122616/public/02whole.pdf>, 2005.

FACTOR ANALYSIS AND ITEM RESPONSE THEORY IN LATENT TRAIT MODELS

Summary: Confirmatory factor analysis and item response theory are a method of latent trait models. IRT models are used as a basis for statistical estimation of parameters that represent the locations of persons and items on a latent continuum or, more correctly, the magnitude of the latent trait attributable to the persons and items.

Factor analysis is used to detect the optimal group of main factors, which explain the correlation among observed variables. Confirmatory factor analysis for ordered variables uses polychoric correlation or tetrachoric for binary data and Diagonally Weighted Least Squares estimation method.

The article presents the usage of factor analysis to reduce the set of chocolate characteristics in order to reach the few major factors influencing consumers' choice of a brand and usage IRT to measure of the difficulty of an item.