EKONOMETRIA ECONOMETRICS 33 • 2011

ISSN 1507-3866

Janusz Łyko
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

WPŁYW KONCENTRACJI INDYWIDUALNYCH OPINII NA ISTNIENIE MAKSYMALNIE ZGODNEJ W SENSIE BORDY PREFERENCJI GRUPOWEJ

Streszczenie: Jednym ze sposobów wyłaniania preferencji grupowej jest metoda porównywania alternatyw parami. Została ona zaproponowana przez Condorceta i do dziś stanowi kanon metod grupowego wyboru. Idea porównań parami może zostać sformalizowana za pomocą indeksu preferencji. Co więcej, pojęcie to można uogólnić w ten sposób, aby uwzględniało punktowy sposób agregacji opinii Bordy. W pracy przedstawiono to uogólnienie, a także wykazano, że przeciwnie niż w przypadku metody Condorceta koncentracja indywidualnych opinii nie prowadzi do wyboru jednoznacznej preferencji maksymalnie zgodnej z opiniami elektoratu.

Słowa kluczowe: preferencja, wybór grupowy, indeks preferencji, indeks Bordy, porównanie parami.

1. Wstęp

W 1785 r. Condorcet [1785] podał paradoks wskazujący, że intuicyjnie rozumiana naturalna zasada zwykłej większości może prowadzić do braku racjonalności grupowego wyboru. Analizując przykład trzech wyborców, którzy wypowiadali się na temat trzech wariantów, zauważył, że nie zawsze na podstawie indywidualnych opinii, posługując się zasadą zwykłej większości, można wskazać optymalne w sensie zgodności z gustami elektoratu uporządkowanie grupowe. Istotnie, oznaczając te warianty jako a, b, c, a liniowe ich uporządkowanie w postaci trzyliterowego słowa, przy preferencjach reprezentowanych relacjami abc, bca oraz cab nie można podać maksymalnie zgodnego z tymi gustami liniowego uporządkowania zbioru wariantów. Dwóch z trzech wyborców preferuje a nad b, dwóch b nad c i podobnie dwóch c nad a. W związku z tym maksymalnie zgodna z opinią elektoratu relacja zawierałaby świadczący o nieracjonalności wyboru cykl. Powstaje zatem problem określenia warunków, w których zasada większości, wyrażona porównaniem parami, prowadzi do wskazania maksymalnie zgodnej z opiniami elektoratu grupowej relacji liniowego porządku.

2. Twierdzenie Arrowa i Maya

W 1951 r. K.J. Arrow [1951] opublikował słynne twierdzenie o dyktatorze. Sformułował on i rozwiązał problem polegający na skonstruowaniu funkcji, która zadanemu układowi preferencji indywidualnych przyporządkowuje pewną preferencję zwaną grupowym wyborem. Przy dość naturalnych założeniach wynik okazał się zaskakujący. Otóż wymagając jedynie nieograniczonej dziedziny, jednomyślności i niezależności wyboru, funkcja reprezentująca zbiorową opinię jest rzutem na pewną oś. W związku z tym grupowy wybór nigdy nie jest kompromisem odmiennych upodobań. Może zdarzyć się nawet tak, że tylko jeden członek elektoratu ma poglądy zgodne z preferencją grupową, a wszyscy inni z tym się nie zgadzają. Mówiąc językiem potocznym – w grupie wyborców znajduje się dyktator, którego upodobania narzucane są całej społeczności, a wybór dyktatora jest zupełnie przypadkowy.

Rok później opublikowane zostało twierdzenie K.O. Maya [1952]. Wskazało ono miejsce reguły większościowej w procesie agregacji indywidualnych opinii [Rae, Schicker 2001]. Zgodnie z tym twierdzeniem jedyną metodą akceptującą jednocześnie postulaty nieograniczonej dziedziny, anonimowości, neutralności i mocnej monotoniczności jest metoda zwykłej większości. Biorąc pod uwagę to, że anonimowość i neutralność są bardzo mocno osadzone w tradycjach demokratycznych, a mocna monotoniczność jest warunkiem akceptowalnym z punktu widzenia racjonalności procesu decyzyjnego, rozwiązań uwzględniających paradoks Condorceta poszukiwać należy, osłabiając pierwsze z założeń, czyli założenie nieograniczonej dziedziny. W takiej sytuacji otrzymane rezultaty można traktować jako wskazania do zasad tworzenia koalicji czy zasad kształtowania reguł kwalifikowanej większości głosów. Wyboru społecznego nie dokonuje się wtedy spośród wszelkich możliwych wariantów. Oznacza to, że funkcja grupowego wyboru nie jest określona na zbiorze wszelkich możliwych uporządkowań wariantów, lecz na pewnym jego podzbiorze, interpretowanym np. jako rozwiązanie koalicyjne.

3. Porównania parami

U podstaw większościowej zasady w rozpatrywanym przykładzie Condorceta leży idea porównywania alternatyw parami. Jednym z formalnych ujęć tego zagadnienia jest zaproponowany przez A. Smoluka indeks preferencji [Florek i in. 1999]. Zaproponowane rozwiązanie sprowadza się do zliczania głosów oddanych na poszczególne pary wariantów. Preferencją reprezentującą grupowy wybór jest taka preferencja, dla której liczba głosów jest największa. Nie rozwiązuje to oczywiście problemu Condorceta. W podanym przez niego przykładzie preferencja wyznaczona w ten sposób nie jest określona jednoznacznie, a relacja maksymalnie zgodna z indywidualnymi opiniami nie jest preferencją. Prowadzi to do zdefiniowania relacji maksymalnej zgodności, czyli relacji w najlepszy sposób odzwierciedlającej opinie indywidualne, oraz sformułowania problemu wskazania warunków potrzebnych lub wystarczających na to, aby relacja ta była preferencją. W przypadku idei zaprezentowanej przez Condorceta pewne częściowe rozwiązanie tego zadania zostało wskazane w 2000 r. [Łyko 2000]. W kolejnych latach podano także inne ujęcia tego samego problemu ze wskazaniem możliwych kierunków poszukiwań jego rozwiązania [Łyko 2010]. Okazuje się, że można, w pewien sposób ograniczając dziedzinę funkcji, zapewnić przechodniość grupowego wyboru. Ograniczenie to polega na zawężeniu zbioru wszystkich możliwych układów preferencji tylko do takich, dla których zgodność opinii dla każdej pary alternatyw przekracza dwie trzecie ogólnej liczby wyborców. Jednoznaczność relacji maksymalizującej indeks jest zatem zapewniona dzięki odpowiedniej koncentracji indywidualnych opinii elektoratu.

W 1770 r. Borda [1781] zaproponował punktowy system agregacji indywidualnych opinii. W systemie tym ważne jest nie tylko to, czy dana alternatywa uznawana jest za lepszą niż inna, lecz także to, o ile jest ona lepsza, co wyrażone jest liczbą innych alternatyw przedzielających dwie analizowane. W tym wypadku grupowy wybór uwzględnia także skalę akceptacji określonego rozwiązania. Każda alternatywa w liniowym uporządkowaniu każdego wyborcy otrzymuje określoną liczbę punktów, tym większą, im wyżej w rankingu określonego głosującego stoi. Grupowa preferencja wskazywana jest natomiast na podstawie zsumowanych w ten sposób uzyskanych punktów. Oczywiście może się zdarzyć tak, że dwie alternatywy uzyskają w ten sposób taką samą liczbę punktów i w związku z tym maksymalnie zgodna z indywidualnymi preferencjami preferencja grupowa nie jest wyznaczona jednoznacznie.

Zaproponowaną przez Condorceta ideę porównywania parami można także stosować w przypadku punktowej metody Bordy. Podobnie można, po pewnej modyfikacji, wykorzystać pojęcie indeksu preferencji i analizować maksymalnie zgodne w tym sensie relacje grupowe. Wnioski z tych rozważań są jednak w tym wypadku znacznie różne.

4. Indeks preferencji w sensie Bordy

Niech M oznacza k-elementowy zbiór alternatyw. O populacji wyborców zakładać się będzie, że jest zbiorem złożonym z n elementów. Bez zmniejszania ogólności można przyjąć, że jest to podzbiór $\{1, ..., n\}$ zbioru liczb naturalnych. Każdy z wyborców swoją opinię o elementach zbioru alternatyw przedstawia w postaci relacji preferencji, tzn. relacji przeciwzwrotnej, przechodniej oraz spójnej. Relacje te nazywa się profilami czy preferencjami indywidualnymi i oznacza p_i, $i = 1, ..., n$. Konkretną preferencję przedstawia się natomiast w postaci słowa $m_{i1}m_{i2} \dots m_{in}$, gdzie pierwszy element interpretuje się jako najlepszą, a ostatni jako najgorszą alternatywę w opinii wyborcy i. Symbol $O(M)$ oznacza rodzinę wszystkich preferencji w zbiorze M. Każdą funkcję

$$f : P \rightarrow O(M),$$

gdzie P jest dowolnym niepustym podzbiorem zbioru $O^n(M)$, nazywa się funkcją grupowego wyboru. Funkcja grupowego wyboru przyporządkowuje więc każdemu układowi preferencji indywidualnych należących do P pewną relację preferencji, którą interpretuje się jako wyraz gustów wyborców czy ankietowanych.

Konstruując indeks preferencji w sensie Bordy, należy na wstępie ustalić miarę rozróżnienia alternatyw w indywidualnym uporządkowaniu, czyli przyporządkować każdej z nich liczbę punktów Bordy. W najprostszym przypadku przyjmuje się, że o różnicy w ocenie świadczy liczba innych elementów rozdzielających dane alternatywy [Klamler 2004]. W związku z tym dla $p_i = m_{i1}\, m_{i2} \dots m_{ik}$ można określić ją jako różnicę

$$\beta_{p_i}(m_{ij}) = k - j.$$

Pojęcie indeksu pary (x, y) względem układu $P = (p_1, \dots p_n)$ dla dowolnych $x, y \in M$ oraz $P = (p_1, \dots, p_n) \in O^n(M)$ w takim wypadku może zostać zdefiniowane jako

$$I_P^B(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (\beta_{p_i}(x) - \beta_{p_i}(y)).$$

Indeks pary jest liczbowym wyrazem opinii elektoratu w sprawie dwóch alternatyw x oraz y. Uwzględnia on nie tylko preferencje ograniczone do tych dwóch wariantów, lecz także to, które miejsca zajmują one w liniowym uporządkowaniu wszystkich wyborców.

Ustalając dowolną preferencję $p \in O(M)$ symbolem

$$\mathrm{ind}_P{}^B(p) = \sum_{(x,y)\in p} I_P^B(x, y),$$

oznaczamy jej indeks względem wspomnianego wcześniej układu. Indeks jest funkcją przekształcającą zbiór $O(M)$ wszystkich preferencji w zbiorze M w zbiór liczb całkowitych. Jest on miarą zgodności relacji z upodobaniami indywidualnymi $(p_1, \dots, p_n)$. Im jest on większy, tym lepiej odzwierciedla ona poszczególne, jednostkowe gusty elektoratu. W związku z tym zapewnienie maksymalnej zgodności z gustami elektoratu polegać będzie na maksymalizacji indeksu w klasie relacji preferencji. W przypadku, gdy wszyscy wyborcy są jednomyślni, czyli $P = (p, \dots, p)$, maksymalna preferencja jest wyznaczona jednoznacznie i równa jest p. Przyjmując zatem jako wartość funkcji grupowego wyboru preferencję maksymalizującą indeks, zapewnia się spełnienie warunku jednomyślności Pareto.

Problem polega na tym, że preferencje maksymalizujące indeks nie zawsze są wyznaczone jednoznacznie. Łatwo zauważyć, że w przykładzie podanym przez Condorceta $p_1 = abc$, $p_2 = bca$, $p_3 = cab$ i funkcja $\mathrm{ind}_P{}^B$ jest w tym przypadku funkcją stałą, gdyż indeks każdej pary jest równy zeru i w związku z tym taką też wartość przyjmuje ta funkcja dla dowolnej z sześciu możliwych preferencji. W związku z tym przyporządkowanie dowolnej preferencji ze zbioru $O(M)$ preferencji maksymalizującej jej indeks, czyli $\mathrm{ind}_P{}^B$, nie dla każdego podzbioru P zbioru $O^n(M)$ jest funkcją.

5. Maksymalizacja indeksu preferencji w sensie Bordy

Suma wszystkich punktów Bordy przyznanych alternatywie x na podstawie układu preferencji $P=(p_1, ..., p_n)\in O^n(M)$ jest równa

$$I_P^B(x) = \sum_{i=1}^{n} \beta_{p_i}(x).$$

Definicja. Rankingiem Bordy układu preferencji $P=(p_1, ..., p_n)\in O^n(M)$ nazywa się dowolną preferencję $p = m_1\ m_2 \ ...\ m_k$, dla której

$$I_P^B(m_1)\geq I_P^B(m_2)\geq ...\geq I_P^B(m_k).$$

Dla ustalonego profilu preferencji indywidualnych $P = (p_1, ..., p_n) \in O^n(M)$ może istnieć więcej niż jeden ranking Bordy. W przykładzie Condorceta każda preferencja ma tę własność. Z punktu widzenia prowadzonych tu rozważań dotyczących jednoznaczności preferencji maksymalizującej indeks najważniejsze jest pytanie o jednoznaczność rankingu Bordy. Oczywiste jest bowiem, że:

Twierdzenie. Jeżeli p jest rankingiem Bordy układu preferencji

$$P=(p_1, ..., p_n)\in O^n(M),$$

a q dowolną inną preferencją w zbiorze M, to

$$\mathrm{ind}_P{}^B(p) \geq \mathrm{ind}_P{}^B(q).$$

Łatwo można zauważyć, że relacja ρ określona w zbiorze M wzorem

$$x\rho y \Leftrightarrow I_P^B(x) > I_P^B(y)$$

jest przeciwzwrotna i przechodnia. W związku z tym, aby była ona relacją preferencji, należy określić warunki, w których jest ona relacją spójną. Warunek spójności nie będzie spełniony tylko wtedy, gdy dwie różne alternatywy będą miały taką samą liczbę punktów Bordy. Wobec tego ponieważ

$$I_P^B(x)-I_P^B(y)=\sum_{i=1}^{n}\beta_{p_i}(x)-\sum_{i=1}^{n}\beta_{p_i}(y)=\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_{p_i}(x)-\beta_{p_i}(y)\right)=I_P^B(x,y),$$

oczywiste staje się:

Twierdzenie. Relacja ρ jest relacją preferencji wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdych $x, y \in M$ $I_P^B(x,y) \neq 0$.

W takiej sytuacji wszystkie składniki sumy $\mathrm{ind}_P{}^B(\rho) = \sum_{(x,y)\in\rho} I_P^B(x,y)$ są dodatnie i dlatego wynika stąd:

Wniosek. Jeżeli relacja $x\rho y \Leftrightarrow I_P^B(x) > I_P^B(y)$ jest preferencją, to jest ona jedynym rankingiem Bordy, czyli jednoznacznie wyznaczoną relacją maksymalizującą wartość funkcji $\mathrm{ind}_P{}^B$ w zbiorze $O(M)$.

Okazuje się, że jest to jedyny przypadek, kiedy preferencja maksymalizująca indeks $\mathrm{ind}_P{}^B$ jest wyznaczona jednoznacznie. Jeżeli bowiem dla pewnych $x, y \in M$ $I_P^B(x,y) = 0$, to oznacza to, że obie alternatywy mają taką samą liczbę punktów Bordy. W związku z tym w uporządkowaniu grupowym określonym rankingiem Bordy mogą zajmować sąsiednie pozycje. Wobec tego zamiana miejscami alternatyw x i y w preferencji grupowej p nie zmienia wartości indeksu i dlatego istnieje więcej niż jedna preferencja o takim samym maksymalnym indeksie.

Spostrzeżenie to pozwala w prosty sposób zauważyć, że inaczej niż w przypadku maksymalizacji indeksu preferencji w sensie Condorceta koncentracja indywidualnych opinii nie prowadzi do jednoznaczności relacji maksymalizującej indeks. Jeżeli bowiem $n = k$ i $p_1 = m_1m_2 \ldots m_k$, natomiast $p_2 = p_3 = \ldots p_k = m_2m_3 \ldots m_km_1$, to dla

$$P = (p_1, \ldots, p_k) \quad I_P^B(m_1) = I_P^B(m_k) = k-1$$

i w związku z tym istnieje więcej niż jeden ranking Bordy. Tym samym preferencja maksymalizująca indeks nie jest wyznaczona jednoznacznie. Brak jednoznaczności występuje nawet w takiej sytuacji, gdy prawie wszyscy wyborcy są zgodni w swoich opiniach. Świadczy to w pewnym sensie o słabości metody Bordy. Reguła większościowa reprezentowana zasadą porównań parami Condorceta przy tak zgodnym elektoracie prowadzi do rozstrzygnięcia w postaci optymalnej preferencji grupowej. Nie daje natomiast takiego rezultatu sposób agregacji opinii indywidualnych zgodny z zasadą Bordy.

6. Wnioski

Konstruując funkcję indeksu preferencji wykorzystującą ideę porównywania alternatyw parami, można w zależności od sposobu agregacji indywidualnych opinii otrzymać znacznie różne wnioski dotyczące istnienia rozwiązań optymalnych. Za rozwiązanie optymalne przyjmuje się oczywiście takie, które w maksymalnym stopniu zgodne jest z opinią elektoratu. Wyrazem tej zgodności jest maksymalizacja indeksu preferencji. W przypadku agregacji zgodnie z zasadą zarówno Condorceta, jak i Bordy podzbiory dziedziny funkcji grupowego wyboru, czyli zbioru $O^n(M)$, dla których możliwe jest wskazanie jednoznacznie wyznaczonej preferencji maksymalizującej indeks, nie są zbiorami pustymi. Różne jakościowo muszą jednak być warunki je określające. W przypadku agregacji zgodnie z zasadą Condorceta wystarczy postulować odpowiednią, przewyższającą dwie trzecie zgodność elektoratu. Nie jest to natomiast warunek wystarczający w sensie agregacji zgodnie z ideą Bordy. W tym wypadku nawet zgodność na poziomie wszystkich z wyjątkiem jednego wyborcy przy odpowiednio dużym zbiorze alternatyw nie gwarantuje optymalnego w rozpatrywanym sensie grupowego wyboru. Oznacza to, że w tym wypadku trudniej jest tworzyć koalicje i jednostkowe decyzje łatwiej przekładają się na zbiorową opinię.

Literatura

Arrow K.J. (1951), *Social Choice and Individual Values*, John Wiley, New York.

Borda J. (1781), *Memoire sur les elections au scrutin*, Memoires des l'Academie Royale des Sciences, Paris.

de Condorcet M. (1785), *Essai sur l'Application de l'Analyse a la Probabilite des Decisions Rendues a laPluralitedes Voix*, L'Imprimerie Royale, Paris.

Florek J., Habiniak L., Łyko J., Misztal A., Smoluk A. (1999), *Problem grupowego wyboru a środek ciężkości*, Ekonomia Matematyczna 3, AE, Wrocław.

Klamler Ch. (2004), *The Dodgson ranking and the Borda Mount: a binary comparison*, „Mathematical Social Sciences", no 48.

Łyko J. (2000), *Twierdzenie Arrowa a ordynacje wyborcze*, [w:] *Elementy metrologii ekonomicznej*, red. A. Smoluk, AE, Wrocław.

Łyko J. (2010), *Optymalizacja preferencji*, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 108, UE, Wrocław.

May K.O. (1952), *A set of independent, necessary and sufficient conditions for simple majority decision*, „Econometrica", no 20.

Rae D.W., Schicker E. (2001,1997), *Reguła większościowa*, [w:] G. Lissowski, *Elementy teorii wyboru społecznego*, Scholar, Warszawa.

EFFECT OF CONCENTRATION OF INDIVIDUAL OPINIONS ON THE EXISTENCE OF A MAXIMUM MATCHING COLLECTIVE PREFERENCE ACCORDING TO BORDA

Summary: One of the ways of establishing group preferences is by a method of comparison of alternatives in pairs. It has been proposed by Condorcet and until today it has been considered a principle of group selection methods. The idea of comparison in pairs may be formalized using a preference index. Moreover, the concept can be generalized in such a way as to acknowledge Borda's method of point aggregation of opinion. This work shows the generalization, and it demonstrates that rather than in the case of the Condorcet method, the concentration of individual opinions does not lead to a conclusive selection of an unambiguous preference most compatible with the opinions of the electorate.

Key words: preference, group choice, preference index, Borda's index, comparison in pairs.