EKONOMETRIA ECONOMETRICS 33 • 2011

ISSN 1507-3866

Jan Florek

Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

PREFERENCJE O MAKSYMALNEJ WADZE

Streszczenie: Niech M będzie skończonym zbiorem m alternatyw oraz I funkcją wagową określoną na iloczynie kartezjańskim tego zbioru. Każdej preferencji na zbiorze M przyporządkowujemy wagę równą sumie wartości, które funkcja wagowa I przyjmuje na tej preferencji. Funkcja wagowa I wyznacza jednoznacznie pewną relację, którą nazywamy relacją uniwersalnie maksymalną. Dowodzimy, że każda preferencja o wadze maksymalnej zawiera relację uniwersalnie maksymalną. W dalszej części pracy definiujemy (α, I)-preferencję wyznaczoną przez dowolny ciąg m-elementowy α o wartościach 0 lub 1. Dowodzimy, że każda (α, I)-preferencja zawiera relację uniwersalnie maksymalną. Świadczy to o tym, jak bardzo wybór preferencji o wadze maksymalnej może być niejednoznaczny.

Słowa kluczowe: wybór grupowy, preferencja optymalna, funkcja wagowa.

1. Wstęp

Problem przyporządkowania preferencjom indywidualnym preferencji grupowej sformalizował Arrow [1951]. Problemem grupowych decyzji zajmowali się również Black [1958], Farquharson [1969], Riker i Ordeshook [1973]. Smoluk i współautorzy [Florek i in. 1999] zdefiniowali funkcję grupowego wyboru Φ, która każdemu układowi preferencji indywidualnych P przyporządkowuje preferencję grupową $\Phi(P)$ maksymalnie zgodną z danym układem preferencji indywidualnych. Ważnymi zagadnieniami dotyczącymi funkcji grupowego wyboru jest problem wyznaczenia preferencji $\Phi(P)$, jak również problem jednoznaczności. Łyko [2000] podał pewien warunek restrykcyjny dotyczący funkcji grupowego wyboru, który pozwala jednoznacznie wyznaczyć preferencję $\Phi(P)$. Florek [2000] i Misztal [2001] pokazali, że funkcja grupowego wyboru Φ spełnia następujący warunek jednomyślności w sensie Arrowa:

(*) dla dowolnego układu preferencji P, jeśli wszystkie preferencje indywidualne tego układu zawierają parę (x, y), to preferencja $\Phi(P)$ również ją zawiera.

Na problem można spojrzeć szerzej. Rozważmy skończony m-elementowy zbiór alternatyw M oraz funkcję wagową I określoną na iloczynie kartezjańskim tego zbioru. Dla każdej preferencji na zbiorze M definiujemy wagę preferencji jako sumę wartości, które funkcja wagowa przyjmuje na zbiorze wszystkich par tej preferencji (definicja 1). W twierdzeniu 1 uogólniliśmy rezultat Łyki na przypadek funkcji wagowej spełniającej pewne nierówności (zob. uwaga 1). Funkcja wagowa I wyznacza pewną relację, którą nazywamy relacją uniwersalnie I-maksymalną (definicja 3). W twierdzeniu 3 (III) dowodzimy, że każda preferencja o wadze maksymalnej zawiera relację uniwersalnie I-maksymalną. Powyższy rezultat możemy interpretować jako uogólnienie rezultatu Florka i Misztala (zob. uwaga 3). W *dalszej części pracy definiujemy* (α, I)*-preferencję wyznaczoną przez dowolny ciąg* m-elementowy α o wartościach 0 lub 1 (definicja 6). W twierdzeniu 4 dowodzimy, że każda (α, I)-preferencja zawiera relację uniwersalnie I-maksymalną. Powyższych ciągów α jest oczywiście 2^m. Świadczy to o tym, jak bardzo wybór preferencji o wadze maksymalnej może być niejednoznaczny.

Wyznaczenie preferencji o maksymalnej wadze ma duże zastosowanie ekonomiczne. Problem ustalenia maksymalnego grupowego wyboru pojawia się na przykład w sytuacjach, gdy zespól ekspertów lub grupa legislacyjna próbuje podjąć wspólną decyzję, ustalić wspólną preferencję lub wystawić wspólną opinię maksymalnie zgodną z decyzjami lub opiniami indywidualnymi. Problem wyznaczenia preferencji grupowej występuje przy ustalaniu ordynacji wyborczej. Ważnym zastosowaniem jest znalezienie konsensusu przy ustalaniu nakładów budżetowych przez rządzącą koalicję wyborczą. Innym zastosowaniem jest wyznaczenie centralnego rankingu wyższych uczelni w Polsce.

2. Funkcja wagowa

Relacją na zbiorze skończonym M, $|M| \geq 2$, nazywamy podzbiór iloczynu kartezjańskiego $M \times M$. Preferencją (mocnym porządkiem liniowym) nazywamy relację przeciwzwrotną, przechodnią i spójną. Oznaczmy przez **P** rodzinę wszystkich preferencji na zbiorze M. Poniższą definicję I-wagi dla niepustej relacji r na zbiorze M wprowadzono w pracy J. Florka [2000].

Definicja 1. Funkcją wagową I nazywamy funkcję rzeczywistą na zbiorze $M \times M$. Funkcję wagową I rozszerzamy na relacje niepuste. Jeżeli r jest niepustą relacją na zbiorze M, to liczbę

$$I(r) = \sum_{(x,y)\in r} I(x,y)$$

nazywamy I-wagą relacji r. Mówimy, że preferencja p ma wagę I-maksymalną, jeżeli funkcja I przyjmuje na **P** dla preferencji p wartość maksymalną.

Twierdzenie 1. Niech I będzie funkcją wagową na zbiorze $M \times M$ spełniającą następujące warunki:

a) $I(x, y) + I(y, x) = n$ dla $(x, y) \in M \times M$,

b) $I(x, y) \leq I(x, t) + I(t, y)$ dla $(x, y), (x, t), (t, y) \in M \times M$,

c) $I(x, y) < \frac{1}{3}n$ lub $\frac{2}{3}n < I(x, y)$ dla $x \neq y$, $(x, y) \in M \times M$.

Wtedy $p = \{(x, y) \in M \times M : I(x, y) > \frac{2}{3}n\}$ jest jedyną preferencją o wadze I-maksymalnej.

Dowód. Na mocy warunków (*a*) i (*b*) mamy

$$n - I(y, x) \leq n - I(t, x) + n - I(y, t).$$

Stąd na mocy (a) otrzymujemy

$$I(y, t) + I(t, x) + I(x, y) \leq n + I(y, x) + I(x, y) = 2n.$$

A więc relacja $p = \{(x, y) \in M \times M : I(x, y) > \frac{2}{3}n\}$ jest przechodnia. Stąd p jest preferencją, bo na mocy (a) i (c) jest również relacją przeciwzwrotną i spójną. Oczywiście p jest jedyną preferencją o wadze I-maksymalnej.

Uwaga 1. Niech $P = \{p_1, \ldots, p_n\} \in \mathbf{P}^n$ będzie ustalonym układem preferencji należących do rodziny **P**. Definiujemy funkcję wagową I_P na zbiorze $M \times M$, gdzie $I_P(x, y)$ jest liczbą preferencji układu P, do których para (x, y) należy. Funkcję wagową I_P rozszerzamy na relacje niepuste zgodnie z definicją 1. Funkcję I_P nazywamy funkcją wagową wyznaczoną przez układ preferencji P (zob. [Florek i in. 1999]). W pracy J. Florka [2000] pokazano, że funkcja wagowa I_P spełnia warunki (a) i (b) twierdzenia 1. Stąd wynika, że jeżeli funkcja wagowa I_P spełnia warunek (c) twierdzenia 1, to istnieje dokładnie jedna preferencja mająca wagę I_P-maksymalną (zob. [Łyko 2000]).

3. Relacja uniwersalnie *I*-maksymalna i modyfikacja preferencji

Niech M będzie zbiorem skończonym, $m = |M| \geq 2$, **P** rodziną wszystkich preferencji na zbiorze M, a I funkcją wagową na zbiorze $M \times M$. Poniższą definicję nadwyżki wagowej pary niepustych podzbiorów zbioru M wprowadzono w pracy J. Florka [2000].

Definicja 2. Jeżeli (A, B) jest parą niepustych podzbiorów zbioru M, to liczbę

$$[A, B] = \sum_{(x,y) \in A \times B} I(x, y) - I(y, x)$$

nazywamy nadwyżką wagową pary (A, B). Dla podzbiorów jednopunktowych $A = \{a\}$, $B = \{b\}$ będziemy pisać krótko $[a, b]$. Dla odcinków $A = (x_k, \ldots, x_1)$ i $B = (x_r, \ldots, x_s)$ preferencji $(x_1, \ldots, x_m)$ przyjmujemy oznaczenie $[A, B] = [\{x_k, \ldots, x_1\}, \{x_r, \ldots, x_s\}]$.

Definicja 3. Relacją uniwersalnie I-maksymalną nazywamy zbiór wszystkich par (x, y) spełniających warunki:

$$(**) \begin{cases} [x, y] > 0 \\ \forall_{t \in M} [x, y] \geq [y, t] \end{cases}.$$

Uwaga 2. Relacja uniwersalnie I-maksymalna jest przeciwzwrotna i przechodnia.

Twierdzenie 2. Niech I będzie funkcją wagową na zbiorze $M \times M$ spełniającą następujące warunki:

(a) $I(x, y) + I(y, x) = n$ dla $(x, y) \in M \times M$,

(b) $I(x, y) \leq I(x, t) + I(t, y)$ dla $(x, y), (x, t), (t, y) \in M \times M$.

Wtedy relacja uniwersalnie I-maksymalna zawiera zbiór wszystkich par (x, y) takich, że $I(x, y) = n$.

Dowód. Niech $I(x, y) = n$. Na mocy (a) i (b) mamy

$$I(y, t) + I(t, x) \leq n + I(y, x) = I(x, y).$$

Stąd na mocy (b)

$$I(y, t) + I(t, x) \leq I(x, y) \leq I(x, t) + I(t, y).$$

A więc

$$[x, t] = I(x, t) - I(t, x) \geq I(y, t) - I(t, y) = [y, t].$$

Definicja 4. Mówimy, że para odcinków (A, B) preferencji p jest incydentna, jeżeli ostatni element odcinka A i pierwszy element odcinka B są kolejnymi elementami preferencji p. Jeżeli (A, B) jest parą odcinków incydentnych preferencji $p = (x_1, \ldots, x_m)$, gdzie

$$A = (x_{a+1}, \ldots, x_b) \text{ i } B = (x_{b+1}, \ldots, x_c)$$

dla $0 \leq a < b < c \leq m$, to następującą preferencję nazywamy (A, B)-modyfikacją preferencji p:

$$(x_1, \ldots, x_a, x_{b+1}, \ldots, x_c, x_{a+1}, \ldots, x_b, x_{c+1}, \ldots, x_m) \text{ dla } 0 < a,\ c < m,$$
$$(x_{b+1}, \ldots, x_c, x_1, \ldots, x_b, x_{c+1}, \ldots, x_m) \text{ dla } a = 0,\ c < \mathrm{m},$$
$$(x_1, \ldots, x_a, x_{b+1}, \ldots, x_m, x_{a+1}, \ldots, x_b) \text{ dla } 0 < a,\ c = m,$$
$$(x_{b+1}, \ldots, x_m, x_1, \ldots, x_b) \text{ odpowiednio dla } a = 0,\ c = m.$$

Twierdzenie 3.

I. Jeżeli preferencja p ma parę odcinków incydentnych (A, B) o ujemnej nadwyżce wagowej, to (A, B)-modyfikacja preferencji p ma I-wagę większą niż $I(p)$.

II. Jeżeli x, y są elementami zbioru $T \subseteq M$ oraz $[x, T] \leq [y, T]$, to para (x, y) nie należy do relacji uniwersalnie I-maksymalnej.

III. Każda preferencja o wadze I-maksymalnej zawiera relację uniwersalnie I-maksymalną.

Dowód

I. Niech (A, B) będzie parą odcinków incydentnych o ujemnej nadwyżce wagowej i preferencja p' będzie (A, B)-modyfikacją preferencji p. Wtedy

$$I(p) - I(p') = [A, B] < 0.$$

II. Jeżeli $[x, y] > 0$ i $[x, T] \leq [y, T]$, to istnieje $t \in T$ takie, że $[x, t] < [y, t]$. Stąd para (x, y) nie spełnia warunku (**) definicji 3.

III. Niech $p = (x_l, \ldots, x_m)$ będzie preferencją o wadze I-maksymalnej. Jeżeli para (x, y) nie należy do preferencji p, to para (y, x) należy do tej preferencji. Stąd istnieją $k < l$ takie, że $y = x_k$ i $x = x_l$ oraz $T = (x_k, \ldots, x_l)$ jest odcinkiem preferencji p. Ponieważ p jest preferencją o wadze I-maksymalnej, to na mocy (I)

$$[x_k, T] \geq 0 \text{ i } [T, x_l] \geq 0.$$

Stąd $[x, T] = [x_l, T] \leq [x_k, T] = [y, T]$ i na mocy (II) para (x, y) nie należy do relacji uniwersalnie I-maksymalnej.

Uwaga 3. Funkcja wagowa I_P wyznaczona przez układ n preferencji (zob. uwaga 1) spełnia warunki a i b twierdzenia 2. A więc na mocy twierdzenia 2 i twierdzenia 3 (III) preferencja o wadze I_P-maksymalnej zawiera zbiór wszystkich par $(x, y) \in M \times M$ takich, że $I_P(x, y) = n$. Innymi słowy, funkcja grupowego wyboru Φ spełnia warunek jednomyślności w sensie Arrowa (*) (zob. [Florek 2000; Misztal 2001]).

4. Preferencje zawierające relację uniwersalnie I-maksymalną

Niech M będzie zbiorem skończonym, $m = |M| \geq 2$, $\mathbf{P}$ rodziną wszystkich preferencji na zbiorze M oraz niech I będzie funkcją wagową na zbiorze $M \times M$.

Definicja 5. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ będzie ciągiem o wyrazach 0 lub 1. α-modyfikacją preferencji $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_m) \in \mathbf{P}$ nazywamy preferencje $\tau^\alpha \in \mathbf{P}$ powstałą po uporządkowaniu wyrazów ciągu $t_1, t_2, \ldots t_m$ według następującej reguły:

$$\underset{i<j}{\forall} \begin{cases} t_i < t_j & \text{dla} \quad \alpha_i = 0, \\ t_j < t_i & \text{dla} \quad \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Zauważmy, że preferencja τ^α zawiera ciąg zstępujący odcinków τ_i^α, $1 \leq i \leq m$, spełniający następujące warunki:

(a) $\{t_i, \ldots, t_m\}$ jest zbiorem wyrazów odcinka τ_i^α,

(b) t_i jest pierwszym (ostatnim) elementem odcinka τ_i^α, dla $\alpha_i = 0$ odpowiednio dla $\alpha_i = 1$.

Przykład 1. Niech $\alpha = (1, 0, 1, 0, \ldots, \alpha_m)$ będzie ciągiem naprzemiennym o wyrazach 0 lub 1 ($\alpha_m = 0$ dla m parzystego, $\alpha_m = 1$ dla m nieparzystego). Preferencja

$$\tau^\alpha = (t_2, t_4, t_6, \ldots, t_5, t_3, t_1)$$

jest α-modyfikacją preferencji $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Ponadto

$$\tau_1^\alpha = \tau^\alpha,\ \tau_2^\alpha = (t_2, t_4, t_6, \ldots, t_5, t_3),\ \tau_3^\alpha = (t_4, t_6, \ldots, t_5, t_3),$$

$$\tau_4^\alpha = (t_4, t_6, \ldots, t_5),\ \tau_5^\alpha = (t_6, \ldots, t_5), \ldots$$

jest ciągiem zstępującym odcinków preferencji τ^α.

Lemat 1. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ będzie ciągiem o wyrazach 0 lub 1 oraz niech τ^α będzie α-modyfikacją preferencji $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Wtedy

$$I(\tau^\alpha) = \frac{1}{2} I(M \times M \setminus \Delta) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i \le m} (-1)^{\alpha_i} [t_i, \tau_i^\alpha],$$

gdzie $\Delta = \{(x, x): x \in \mathrm{M}\}$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję. Przyjmijmy następujące oznaczenie:

$$(-1)^{\alpha_i}(x, y) = \begin{cases} (x, y) & \text{dla } \alpha_i = 0, \\ (y, x) & \text{dla } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

Stąd mamy

$$I\left((-1)^{\alpha_1}(t_1, y)\right) = \tfrac{1}{2} I(t_1, y) + \tfrac{1}{2} I(y, t_1) + \tfrac{1}{2}(-1)^{\alpha_1}[t_1, y]. \tag{1}$$

Oznaczmy $\Delta_2 = \{x, x): x \in \mathrm{T}_2\}$. Na mocy indukcji możemy przyjąć, że

$$I(\tau_2^\alpha) = \frac{1}{2} I(T_2 \times T_2 \setminus \Delta_2) + \frac{1}{2} \sum_{2 \le i \le m} (-1)^{\alpha_i} [t_i, \tau_i^\alpha].$$

Stąd na mocy (1)

$$I(\tau^\alpha) = \sum_{y \in \tau_2^\alpha} I\left((-1)^{\alpha_1}(t_1, y)\right) + I(\tau_2^\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2} I(t_1, \tau_2^\alpha) + \frac{1}{2} I(\tau_2^\alpha, t_1) + \frac{1}{2}(-1)^{\alpha_1}[t_1, \tau_1^\alpha] + I(\tau_2^\alpha) =$$
$$= \frac{1}{2} I(M \times M \setminus \Delta) + \frac{1}{2} \sum_{1 \le i \le m} (-1)^{\alpha_i} [t_i, \tau_i^\alpha].$$

Definicja 6. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ będzie ciągiem o wyrazach 0 lub 1. Funkcja wagowa I oraz ciąg α wyznaczają ciąg alternatyw $t_i \in M$ oraz ciąg zbiorów $T_i = \{t_i, \ldots, t_m\}$, $1 \le i \le m$, zdefiniowany indukcyjnie w następujący sposób:

(c) $T_1 = M$, $T_{i+1} + T_i \setminus \{t_i\}$,

(d) $t_i \in T_i$ spełnia następujący warunek

$$\begin{cases} [t_i, T_i] = \max\{[y, T_i] : y \in T_i\} & \text{dla } \alpha_i = 0 \\ [T_i, t_i] = \max\{[T_i, y] : y \in T_i\} & \text{dla } \alpha_i = 1. \end{cases}$$

(α, I)-preferencją nazywamy α-modyfikację preferencji $(t_1, t_2, \ldots, t_m)$.

Przypomnijmy, że każda preferencja o wadze I-maksymalnej zawiera relację uniwersalnie I-maksymalną (zob. twierdzenie 1 (III)) oraz ma I-wagę nie mniejszą od $\frac{1}{2}(M \times M \setminus \Delta)$. Istotnie, jeżeli preferencje p i p' są przeciwne, to $I(p) + I(p') = I(M \times M \setminus \Delta)$. Poniższe twierdzenie pokazuje, że takie same własności ma każda (α, I)-preferencja.

Twierdzenie 4. Niech $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ będzie ciągiem o wyrazach 0 lub 1 oraz niech p będzie (α, I)-preferencją. Wtedy mamy:

I. $I(p) \geq \frac{1}{2} I(M \times M \setminus \Delta)$,

II. preferencja p zawiera relację uniwersalnie I-maksymalną.

Dowód. Rozważmy ciąg alternatyw $t_i \in M$ oraz ciąg zbiorów $T_i \subseteq M$, $1 \leq i \leq m$, spełniający warunki (c) i (d) definicji 6. Niech $p = \tau^\alpha$ będzie α-modyfikacją preferencji $\tau = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$. Na mocy warunku (a) i (d) definicji 5 i 6 mamy:

$$(-1)^{\alpha_i}[t_i, \tau_i^\alpha] \geq \max\ \{(-1)^{\alpha_i}[y, \tau_i^\alpha] : y \in \tau_i^\alpha\}.$$

Ponieważ

$$\sum_{y \in \tau_i} (-1)^{\alpha_i}[y, \tau_i^\alpha] = 0, \text{ to } (-1)^{\alpha_i}[\tau_i^\alpha, y] \geq 0,$$

stąd na mocy lematu 1 otrzymujemy (I).

Udowodnimy własność (II). Jeżeli para (x, y) nie należy do preferencji $p = \tau^\alpha$, to para (y, x) należy do tej preferencji. Ponieważ ciąg odcinków τ_i^α, $1 \leq i \leq m$ jest ciągiem zstępującym, to istnieje najkrótszy odcinek τ_j^α preferencji τ^α, do którego należą x i y. Na mocy warunku (b) definicji 5 mamy:

$$y = t_j \text{ dla } \alpha_j = 0, \text{ lub } x = t_j \text{ dla } \alpha_j = 1.$$

Na mocy warunku (a) i (d) definicji 5 i 6 otrzymujemy:

$$[y, \tau_j^\alpha] = [t_j, \tau_j^\alpha] \geq [x, \tau_j^\alpha] \text{ dla } \alpha_j = 0,$$
$$[\tau_j^\alpha, x] = [\tau_j^\alpha, t_j] \geq [\tau_j^\alpha, y] \text{ dla } \alpha_j = 1.$$

Stąd $[x, \tau_j^\alpha] \leq$ i na mocy twierdzenia 3 (II) para (x, y) nie należy do relacji uniwersalnie I-maksymalnej.

Literatura

Arrow K. (1951), *Social Choice Individual Values*, John Wiley, New York.
Black D. (1958), *The Theory of Committes and Elections*, Cambridge University Press, London.
Farquharson R. (1969), *Theory of Voting*, Yale University Press, New Haven, Conn.

Riker W.H., Ordeshook P.C. (1973), *Positive Political Theory*, Prentice-Hall. Inc., Englewood Cliffs, N.J.

Florek J., Habiniak L., Łyko J., Misztal A., Smoluk A. (1999), *Problem grupowego wyboru a środek ciężkości*, Ekonomia Matematyczna, Wrocław.

Florek J. (2000), *Optymalny grupowy wybór*, [w:] *Elementy metrologii ekonomicznej*, red. A. Smoluk, Wrocław.

Łyko J. (2000), *Twierdzenie Arrowa a ordynacje wyborcze,* [w:] *Elementy metrologii ekonomicznej,* red. A. Smoluk, Wrocław.

Misztal A. (2001), *Grupowy wybór a liczby Arrowa*, [w:] Ekonometria 8, red. J. Dziechciarz, AE, Wrocław.

PREFERENCES OF MAXIMAL WEIGHT

Summary: Let M be a finite set of m alternatives. We consider a real function I on the Cartesian product of this set. To every preference on the set M we assign the weight which is equal to the sum of all values of function I on the preference. The weight function I determines a unique relation which we universally call maximal. It is proved that any preference with the maximal weight contains the universally maximal relation. In the following part of the paper we give a definition of the (α, I) preference determined by every sequence α of length m with 0-1 values. It is shown that every (α, I) preference contains the universally maximal relation. We can see, therefore, how many different preferences of maximal weight may occur.

Key words: group choice, optimal preference, weight function.