EKONOMETRIA ECONOMETRICS 34 • 2011

ISSN 1507-3866

Michał Kolupa, **Zbigniew Śleszyński**

Politechnika Radomska

ZASTOSOWANIE METODY FROBENIUSA-SCHURA DO WYZNACZANIA MACIERZY ODWROTNEJ DO DANEJ MACIERZY BRZEGOWEJ

Streszczenie: W pracy podano zastosowanie metody Frobeniusa-Schura do wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy brzegowej postaci: $U = \left[\begin{array}{c|c} A & f \\ \hline g & z \end{array}\right]$. Zastosowanie to polega na wyznaczeniu bloków α, β, γ i δ na podstawie równości macierzowej: $\begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$. Następnie wykorzystano sposób wyznaczania wspomnianych bloków do wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy $B(k+1)$, gdzie $B(k+1) = \begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ R_0^T(k) & 1 \end{bmatrix}$.

Słowa kluczowe: macierz odwrotna, macierz brzegowa, metoda Frobeniusa-Schura.

Teoria macierzy brzegowych, jako bardzo wygodne i uniwersalne narzędzie do wszelkich działań na macierzach, doczekała się wielu publikacji (zob. np. [Kolupa, Śleszyński 2010]). W niniejszym artykule podano sposób wyznaczania macierzy odwrotnej do macierzy brzegowej, wykorzystując metodę Frobeniusa-Schura. Załóżmy zatem, że dana jest macierz brzegowa U postaci:

$$U = \left[\begin{array}{c|c} A & f \\ \hline g & z \end{array}\right], \tag{1}$$

gdzie A jest nieosobliwą macierzą stopnia n, wektory f oraz g są n-wymiarowymi wektorami, odpowiednio kolumnowym oraz wierszowym, z zaś jest liczbą.

Udowodnimy następujące twierdzenie

Jeśli liczba q postaci:

$$q = z - gA^{-1} f \tag{2}$$

jest różna od zera, to macierz brzegowa U jest macierzą nieosobliwą.

Dowód:

Na macierzy brzegowej U danej wzorem (1) wykonujemy przekształcenia elementarne typu α (w ich wyniku macierz A przechodzi w górną macierz trójkątną z jednostkową główną przekątną – oznaczamy otrzymaną macierz przez A^*) oraz przekształcenia typu β (w ich wyniku wektor – g przechodzi w wektor zerowy). Po wykonaniu na macierzy U powyższych przekształceń przechodzi ona w macierz U^* postaci:

$$U^* = \left[\begin{array}{c|c} A^* & f^* \\ \hline 0 & q \end{array}\right], \tag{3}$$

f^* powstaje z wektora f przez wykonanie na macierzy U przekształceń typu α [Kolupa 1982]. Tam też dowodzi się, że:

$$\frac{\det U}{\det A} = z - gA^{-1}f = q. \tag{4}$$

Ze wzoru (4) wynika, że:

$$\det U = \left(z - gA^{-1}f\right) \cdot \det A. \tag{5}$$

Ponieważ z założenia $\det A \neq 0,$ stąd z zależności (5) wynika teza twierdzenia.

Metoda Frobeniusa-Schura zastosowana do macierzy U w celu wyznaczenia macierzy do niej odwrotnej U^{-1} (zakładamy, że macierz U jest nieosobliwa) polega na wyznaczeniu bloków α, β, γ i δ na podstawie równości macierzowej postaci:

$$\begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

Wykonując podane w zależności (6) działania, otrzymujemy następujące układy równań macierzowych:

$$\begin{cases} A\alpha + f\gamma = I_n \\ g\alpha + z\gamma = 0_{1\times n} \end{cases} \tag{7}$$

oraz

$$\begin{cases} A\beta + f\delta = 0_{n\times 1} \\ g\beta + z\delta = 1 \end{cases}. \tag{8}$$

Rozwiązujemy kolejno wyżej podane układy.

Z pierwszego równania układu (7) mamy warunek:

$$\alpha = A^{-1} - A^{-1} f\gamma, \tag{9}$$

a po podstawieniu do drugiego równania układu (7) warunku (9) otrzymujemy:

$$gA^{-1} - gA^{-1}f\gamma + z\gamma = 0_{1\times n}, \tag{10}$$

czyli

$$\left(z - gA^{-1}f\right)\gamma = -gA^{-1}. \tag{11}$$

Ostatecznie

$$\gamma = -\frac{gA^{-1}}{z - gA^{-1}f}. \tag{12}$$

Mianownik równania (12) na podstawie udowodnionego twierdzenia jest różny od zera, a to oznacza, że blok γ jest dobrze określony. Z kolei blok α dany wzorem (9) otrzymuje postać:

$$\alpha = A^{-1} + \frac{A^{-1}fgA^{-1}}{z - gA^{-1}f}. \tag{13}$$

Z tych samych co przy bloku γ powodów jest on również dobrze określony.

Przystępujemy do rozwiązania układu (8). Mamy kolejno:

$$\beta = -A^{-1}f\delta, \tag{14}$$

stąd po podstawieniu (14) do drugiego równania układu (8) otrzymujemy:

$$-gA^{-1}f\delta + z\delta = 1, \tag{15}$$

czyli

$$\left(z - gA^{-1}f\right)\delta = 1. \tag{16}$$

Ostatecznie mamy więc:

$$\delta = \frac{1}{z - gA^{-1}f}. \tag{17}$$

Na podstawie (14) blok β ma postać:

$$\beta = -\frac{A^{-1}f}{z - gA^{-1}f}. \tag{18}$$

W mianownikach równości (17) i (18), definiujących bloki δ i β, występuje liczba $q = z - gA^{-1}f$, która w świetle założenia o nieosobliwości macierzy U jest niezerowa, oznacza to, że również wspomniane bloki są dobrze określone.

Zauważmy, że zaproponowane postępowanie możemy stosować do wyznaczania macierzy odwrotnej dla dowolnej macierzy nieosobliwej. Wystarczy ją podzielić na bloki zgodnie ze wzorem (1) i jeśli tylko macierz wewnętrzna tej macierzy jest nieosobliwa, wówczas zgodnie ze wzorami (13), (18), (12) oraz (17) wyznaczamy odpowiednie bloki macierzy odwrotnej. Konsekwencją powyższej uwagi są szerokie zastosowania zaproponowanej metody, w tym ekonometryczne.

Obecnie zastosujemy wzory (12), (13), (17) i (18) do wyznaczenia macierzy odwrotnej do macierzy $B(k+1)$ postaci:

$$B(k+1) = \begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ R_0{}^T(k) & 1 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

Macierz $R(k)$ oraz wektor $R_0(k)$ są elementami pary korelacyjnej ($R(k)$, $R_0(k)$). Macierz $B(k+1)$ służy do wyznaczania wartości współczynnika zbieżności $\varphi^2(k)$. Jego wartość otrzymujemy po wykonaniu na macierzy $B(k+1)$ przekształceń elementarnych typu α oraz β. Wówczas w miejscu jedynki, podanej w macierzy $B(k+1)$, w macierzy przekształconej $B^*(k+1)$ otrzymamy współczynnik zbieżności $\varphi^2(k)$.

Zachodzi przy tym:

$$\phi^2(k) = 1 - R_0{}^T(k) R^{-1}(k) R_0(k). \tag{20}$$

Na podstawie wzoru (4) mamy:

$$\frac{\det B(k+1)}{\det R(k)} = \phi^2(k) \tag{21}$$

albo

$$\det B(k+1) = \phi^2(k) \cdot \det R(k). \tag{22}$$

Zastosujemy wzór (6) do macierzy *B(k+1)* danej wzorem (19).

Wiedząc, że

$$R(k)A(k) = R_0(k), \tag{23}$$

na podstawie (13) otrzymujemy:

$$\alpha = R^{-1}(k) + \frac{R^{-1}(k)R_0(k)R_0{}^T(k)R^{-1}(k)}{\phi^2(k)} = R^{-1}(k) + \frac{A(k)A^T(k)}{\phi^2(k)}. \tag{24}$$

Z kolei na podstawie wzoru (12) otrzymujemy:

$$\gamma = -\frac{R_0{}^T(k)R^{-1}(k)}{\varphi^2(k)} = -\frac{A^T(k)}{\varphi^2(k)}. \tag{25}$$

Natomiast na podstawie (18) dostajemy zależność:

$$\beta = -\frac{R^{-1}(k)R_0(k)}{\phi^2(k)} = -\frac{A(k)}{\phi^2(k)}. \tag{26}$$

Na podstawie (17) otrzymujemy ostatni blok macierzy odwrotnej do macierzy danej wzorem (19):

$$\delta = \frac{1}{\phi^2(k)}. \tag{27}$$

Zauważmy ponadto, że zachodzi

$$\phi^2(k) = 1 - r^2(k). \tag{28}$$

Ostatecznie macierz odwrotna do macierzy $B(k+1)$ przyjmuje postać:

$$B^{-1}(k+1) = \begin{bmatrix} R^{-1}(k)\phi^2(k) + A(k)A^T(k) & -A(k) \\ -A^T(k) & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\phi^2(k)}. \tag{29}$$

Sprawdzimy jeszcze, czy wyznaczona macierz odwrotna do macierzy $B(k+1)$ spełnia warunek:

$$B(k+1)B^{-1}(k+1) = B^{-1}(k+1)B(k+1) = I_{k+1}. \tag{30}$$

Sprawdzimy tylko, czy zachodzi:

$$B(k+1)B^{-1}(k+1) = I_{k+1}. \tag{31}$$

Sprawdzenie, czy zachodzi:

$$B^{-1}(k+1)B(k+1) = I_{k+1} \tag{32}$$

przebiega w sposób analogiczny do pokazanego niżej i dlatego zaniechamy jego prezentacji.

Na podstawie wzorów (19) i (29) mamy:

$$\begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ R_0^T(k) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1}(k)\phi^2(k) + A(k)A^T(k) & -A(k) \\ -A^T(k) & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\phi^2(k)} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}. \tag{33}$$

Pokażemy, że:

$$a = I_k, \quad b = 0, \quad c = 0, \quad d = 1. \tag{34}$$

Mamy zatem:

$$a = R(k)\left(R^{-1}(k)\phi^2(k) + A(k)A^T(k)\right)\frac{1}{\phi^2(k)} - R_0(k)A^T(k)\frac{1}{\phi^2(k)}. \tag{35}$$

$$b = -R(k)A(k)\frac{1}{\phi^2(k)} + R_0(k)\frac{1}{\phi^2(k)}. \tag{36}$$

$$c = R_0^{\ T}(k)\left(R^{-1}(k)\phi^2(k) + A(k)A^T(k)\right)\frac{1}{\phi^2(k)} - A^T(k)\frac{1}{\phi^2(k)}. \tag{37}$$

$$d = -R_0^{\ T}(k)A(k)\frac{1}{\varphi^2(k)} + \frac{1}{\varphi^2(k)}. \tag{38}$$

Zauważmy, że na podstawie wzoru (35) mamy:

$$\begin{aligned} a &= R(k)R^{-1}(k)\phi^2(k)\frac{1}{\phi^2(k)} + \frac{R(k)A(k)A^T(k)}{\phi^2(k)} - \frac{R_0(k)A^T(k}{\phi^2(k)} = \\ &= I_k + \frac{R_0(k)A^T(k)}{\phi^2(k)} - \frac{R_0(k)A^T(k}{\phi^2(k)} = I_k. \end{aligned} \tag{39}$$

Na podstawie wzoru (36) dostajemy:

$$b = -R_0(k)\frac{1}{\phi^2(k)} + R_0(k)\frac{1}{\phi^2(k)} = 0. \tag{40}$$

Z kolei na podstawie wzoru (37) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} c &= R_0^{\ T}(k)R^{-1}(k)\phi^2(k)\frac{1}{\phi^2(k)} + \frac{R_0^{\ T}(k)A(k)A^T(k)}{\phi^2(k)} - \frac{A^T(k)}{\phi^2(k)} = \\ &= A^T(k) + \frac{\left(1-\phi^2(k)\right)A^T(k)}{\phi^2(k)} - \frac{A^T(k)}{\phi^2(k)} = \\ &= A^T(k)\left(1 + \frac{1-\phi^2(k)+1}{\phi^2(k)}\right) = 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Na koniec na podstawie wzoru (38) dostajemy:

$$d = -r^2(k)\frac{1}{\phi^2(k)} + \frac{1}{\phi^2(k)} = \frac{1}{\phi^2(k)}\left(1 - r^2(k)\right) = \frac{\phi^2(k)}{\phi^2(k)} = 1. \tag{42}$$

Na podstawie (39)-(42) stwierdzamy więc, że spełniona jest równość (31). Obecnie zaprezentujemy przykład ilustrujący podane wyżej postępowanie.

Przykład

Dana jest para korelacyjna ($R(3)$, $R_0(3)$), gdzie macierz korelacji oraz wektor korelacji przyjmują postać:

$$R(3)=\begin{bmatrix}1 & 0,5 & 0,4\\ 0,5 & 1 & 0,8\\ 0,4 & 0,8 & 1\end{bmatrix},\qquad R_0(3)=\begin{bmatrix}0,2\\ 0,4\\ 0,5\end{bmatrix}. \tag{43}$$

Wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy stopnia 4 $B(4)$, danej wzorem (19):

$$B(4)=\begin{bmatrix}R(3) & R_0(3)\\ R_0^{\ T}(3) & 1\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 0,5 & 0,4 & 0,2\\ 0,5 & 1 & 0,8 & 0,4\\ 0,4 & 0,8 & 1 & 0,5\\ \hline 0,2 & 0,4 & 0,5 & 1\end{array}\right]. \tag{44}$$

Wykorzystamy wzór (29). Mamy zatem:

$$B^{-1}(4)=\begin{bmatrix}R^{-1}(3)\phi^2(3)+A(3)A^T(3) & -A(3)\\ -A^T(3) & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\phi^2(3)}. \tag{45}$$

Zauważmy, że w parze korelacyjnej danej wzorem (44) macierz korelacji jest macierzą neutralną (składowe macierzy $R(3)$ są ilorazami odpowiednich składowych wektora $R_0(3)$), stąd współczynnik determinacji $r^2(3)$ jest równy kwadratowi najwyższej składowej wektora korelacji, natomiast wektor oszacowań parametrów strukturalnych ma wszystkie składowe zerowe z wyjątkiem odpowiadającej najwyższej składowej wektora korelacji – jest ona równa tej składowej. Mamy więc:

$$\phi^2(3)=0,75,\qquad A(3)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0,5\end{bmatrix}. \tag{46}$$

Bezpośrednim rachunkiem wyznaczymy macierz odwrotną do macierzy $R(3)$. W ogólnym wypadku zalecamy tutaj wykorzystać macierze brzegowe.

$$R^{-1}(3)=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{28}{9} & -\frac{20}{9}\\ 0 & -\frac{20}{9} & \frac{25}{9}\end{bmatrix}. \tag{47}$$

Aby wyznaczyć macierz $B^{-1}(4)$, zgodnie ze wzorem (45), obliczamy jej lewy górny blok. Na podstawie (46) oraz (47) otrzymujemy:

$$R^{-1}(3)\phi^2(3)+A(3)A^T(3)=\frac{3}{4}\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{28}{9} & -\frac{20}{9}\\ 0 & -\frac{20}{9} & \frac{25}{9}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\0\\0,5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0 & 0,5\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3}\\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{3}\end{bmatrix}.$$

W efekcie mamy więc:

$$R^{-1}(4)=\frac{4}{3}\cdot\begin{bmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0\\ -\frac{1}{2} & \frac{7}{3} & -\frac{5}{3} & 0\\ 0 & -\frac{5}{3} & \frac{7}{3} & -0,5\\ 0 & 0 & -0,5 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{3} & -\frac{2}{3} & 0 & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{28}{9} & -\frac{20}{9} & 0\\ 0 & -\frac{20}{9} & \frac{28}{9} & -\frac{2}{3}\\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3}\end{bmatrix}.$$

Literatura

Kolupa M., *Macierze brzegowe w badaniach ekonometrycznych*, PWE, Warszawa 1982.

Kolupa M., Śleszyński Z., *Algebra macierzy brzegowych z zastosowaniami*, Wydawnictwo C.H. Beck, Warszawa 2010.

APPLICATION OF FROBENIUS-SCHUR METHOD IN DERIVING INVERSE MATRIX OF GIVEN BORDERED MATRIX

Summary: The paper describes the application of Frobenius-Schur method in deriving inverse matrix of bordered matrix given as: $U=\left[\begin{array}{c|c}A & f\\ \hline g & z\end{array}\right]$. This application consists in deriving

blocks α, β, γ and δ using matrix equality: $\begin{bmatrix} A & f \\ g & z \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_n & 0_{n\times 1} \\ 0_{1\times n} & 1 \end{bmatrix}$. Then the way those blocks were derived was used for deriving inverse matrix of matrix $B(k+1)$, where: $B(k+1) = \begin{bmatrix} R(k) & R_0(k) \\ R_0^T(k) & 1 \end{bmatrix}$.

Keywords: inverse matrix, bordered matrix, Frobenius-Schur method.