PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 176
Taksonomia 18. Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania 2011

Ewa Wędrowska
Uniwersytet Warmińsko-Mazurski w Olsztynie

DYWERGENCJE JENSENA-SHANNONA ORAZ JENSENA-RÉNYIEGO JAKO MIARY ROZBIEŻNOŚCI STRUKTUR

Streszczenie: W artykule wskazano na możliwość wykorzystania do oceny stopnia rozbieżności struktur miar dywergencji. Zaprezentowano symetryczne „wygładzenie" dywergencji Kullbacka-Leiblera, jakim jest miara rozbieżności Jensena-Shannona, będąca funkcją entropii Shannona. Istotną zaletą dywergencji Jensena-Shannona jest możliwość uogólnienia jej do badania podobieństwa więcej niż dwóch struktur, a także możliwość uwzględnienia wag dla rozpatrywanych obiektów. Kolejna przedstawiona miara dywergencji to dywergencja Jensena-Rényiego stopnia α, która jest odpowiednio funkcją entropii Rényiego i uogólnieniem dywergencji Jensena-Shannona.

Słowa kluczowe: dywergencja Jensena-Shannona, dywergencja Jensena-Rényiego, podobieństwo struktur.

1. Wstęp

Miary dywergencji stanowią popularne metody kwantyfikacji stopnia rozbieżności rozkładów prawdopodobieństw. Dlatego też mogą stać się przydatne do oceny stopnia zgodności struktur, poszerzając tym samym zbiór dostępnych metod z zakresu taksonomii.

Wśród miar dywergencji wyróżnić można dwie grupy: pierwsza z nich to dywergencje klasy Csiszára (*f*-dywergencje) [Csiszár 1967], drugą stanowią dywergencje klasy Jensena, określonej przez Burbea i Rao [1982]. Do klasy *f*-dywergencji należy popularna miara Kullbacka-Leiblera. Jej własności, w szczególności brak symetrii oraz nieograniczoność, powodują ograniczone możliwości jej zastosowania. Lin [1991] zdefiniował dywergencję należącą do klasy dywergencji Jensena, bazującą na entropii Shannona, będącą jednocześnie symetrycznym „wygładzeniem" miary Kullbacka-Leiblera. Dywergencja Jensena-Shannona może być wykorzystana do badania rozbieżności więcej niż dwóch struktur. He, Hamza i

Krim [2003] zaproponowali kolejną dywergencją klasy Jensena. Miara ta bazuje na entropii Rényiego, stanowi więc uogólnienie dywergencji Jensena-Shannona.

W artykule przedstawiono własności dywergencji Jensena-Shannona oraz dywergencji Jensena-Rényiego, wyznaczające kierunek zastosowań obu miar rozbieżności. Celem opracowania jest wskazanie możliwości wykorzystania dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego do oceny stopnia rozbieżności struktur.

2. Dywergencja Jensena-Shannona

Dywergencja Jensena-Shannona (JSD), zwana też promieniem informacji, bazuje na entropii Shannona, mając jednocześnie związek z entropią względną Kullbacka-Leiblera, której jest symetrycznym „wygładzeniem". Dywergencja Jensena-Shannona jest popularną miarą kwantyfikacji stopnia rozbieżności dwóch rozkładów prawdopodobieństw (zob. np. [Lin 1991; Dhillon i in. 2003; Hibbard 2004; Hung, Yang 2007]). Dlatego też możliwe jest wykorzystanie miar dywergencji do oceny stopnia zróżnicowania struktur charakteryzujących obiekty społeczno-gospodarcze.

Rozważmy obiekty scharakteryzowane odpowiednio następującymi wektorami wskaźników struktury:

$$S_p^n = [\omega_{1p}, \omega_{2p}, ..., \omega_{np}] \text{ oraz } S_q^n = [\omega_{1q}, \omega_{2q}, ..., \omega_{nq}].$$

Składowe wektorów $[\omega_{1p}, \omega_{2p}, ..., \omega_{np}]$ i $[\omega_{1q}, \omega_{2q}, ..., \omega_{nq}]$ spełniają następujące warunki:

1) unormowania: $0 \le \omega_{ip} \le 1$ oraz $0 \le \omega_{iq} \le 1$ dla $i = 1, 2, ..., n$;

2) sumy jednostkowej: $\sum_{i=1}^{n} \omega_{ip} = 1$ oraz $\sum_{i=1}^{n} \omega_{iq} = 1$.

Dywergencja Jensena-Shannona określona została przez Lina [1991] jako uogólnienie symetrycznej *L*-dywergencji. Dla pary struktur S_p^n i S_q^n JSD przyjmie następującą postać:

$$JS(S_p^n, S_q^n) = H_S(\pi_1 S_p^n + \pi_2 S_q^n) - (\pi_1 H_S(S_p^n) + \pi_2 H_S(S_q^n)), \tag{1}$$

gdzie π_1 oraz π_2 ($\pi_1 + \pi_2 \ge 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$) stanowią wagi związane odpowiednio ze strukturami S_p^n oraz S_q^n. Występująca w formule (1) entropia Shannona

$$H_S(S^n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \log_2 \frac{1}{\omega_i}$$

struktury n-elementowej $S^n = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n]$ jest funkcją wklęsłą, przyjmującą wartości nieujemne. Dlatego też entropia Shannona spełnia nierówność Jensena prawdziwą dla funkcji wklęsłych, mianowicie:

$$H_S\left(\sum_{j=1}^{r} \pi_j S_j^n\right) \geq \sum_{j=1}^{r} \pi_j H_S(S_j^n),$$

gdzie $0 \leq \pi_j \leq 1$ $\left(j = 1, 2, ..., r\right)$ oraz $\sum_{j=1}^{r} \pi_j = 1.$

Stąd dywergencja Jensena-Shannona, określona formułą (1), przyjmuje wartości nieujemne.

Uwzględnienie w formule (1) wag $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$ daje możliwość wyrażenia dywergencji Jensena-Shannona w postaci różnicy między entropią Shannona struktury o wskaźnikach otrzymanych ze średnich arytmetycznych odpowiednich wskaźników struktur S_p^n *i* S_q^n a średnią entropii Shannona struktur S_p^n *i* S_q^n:

$$JS(S_p^n, S_q^n) = H_S\left(\frac{S_p^n + S_q^n}{2}\right) - \left(\frac{H_S(S_p^n) + H_S(S_q^n)}{2}\right). \tag{2}$$

Związek JSD z dywergencją Kullbacka-Leiblera uwidacznia się po wykorzystaniu definicji entropii Shannona w wyrażeniu (2), które przekształcić można do następującej postaci:

$$JS(S_p^n, S_q^n) = \frac{1}{2} KL\left(S_p^n, \frac{S_p^n + S_q^n}{2}\right) + \frac{1}{2} KL\left(S_q^n, \frac{S_p^n + S_q^n}{2}\right), \tag{3}$$

gdzie KL stanowi dywergencję Kullbacka-Leiblera określoną następująco dla pary struktur S_p^n *i* S_q^n:

$$KL(S_p^n, S_q^n) = \sum_{i=1}^{n} \omega_{ip} \log \frac{\omega_{ip}}{\omega_{iq}}. \tag{4}$$

Dywergencja Jensena-Shannona dla pary struktur S_p^n *i* S_q^n spełnia następujące własności [Lin 1991; Lamberti i in. 2008]:

I. Wartości dywergencji Jensena-Shannona są nieujemne i ograniczone: $0 \leq JS(S_p^n, S_q^n) \leq 1$.

II. $JS(S_p^n, S_q^n) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_p^n = S_q^n$.

III. Dywergencja JS jest symetryczna: $JS(S_p^n, S_q^n) = JS(S_q^n, S_p^n)$.

IV. Pierwiastek z $JS(S_p^n, S_q^n)$ spełnia warunek nierówności trójkąta.

Dywergencja JSD ma charakter miary zróżnicowania struktur, co oznacza, że dla pary struktur identycznych przyjmuje wartość równą zero, a wraz z narastaniem stopnia zróżnicowania JSD jej wartości dążą do jedności. Za wykorzystaniem dywergencji JSD jako miary zróżnicowania struktur przemawia fakt, że własności I-III równoważne są postulatom stawianym miarom zróżnicowania struktur, sformułowanym między innymi w pracy Kukuły [1996, s. 37]. Ponadto dywergencja Jensena-Shannona jest nieujemna, zwrotna i symetryczna, stanowi zatem miarę odległości. Nie spełnia jednak warunku nierówności trójkąta [Lamberti i in. 2008], nie jest zatem metryką. W pracy Lambertiego i in. [2008] wykazano, że pierwiastek arytmetyczny z dywergencji Jensena-Shannona spełnia warunek nierówności trójkąta, $\sqrt{JS(S_p^n, S_q^n)}$ jest zatem metryką odległości.

Istotną zaleta dywergencji Jensena-Shannona to możliwość wykorzystania jej do badania rozbieżności więcej niż dwóch struktur. Uogólnienie JSD zdefiniowane jest następującą formułą [Lin 1991, s. 149]:

$$JS(S_1^n, S_2^n, ..., S_r^n) = H_S\left(\sum_{j=1}^{r} \pi_j S_j^n\right) - \sum_{j=1}^{r} \pi_j H_S(S_j^n), \tag{5}$$

gdzie $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_r$ są wagami spełniającymi warunki: $0 \le \pi_j \le 1$ $(j = 1, 2, ..., r)$ oraz $\sum_{j=1}^{r} \pi_j = 1$, związanymi odpowiednio ze strukturami $S_1^n, S_2^n, ..., S_r^n$.

3. Dywergencja Jensena-Rényiego

Dywergencja Jensena-Rényiego (JRD) zdefiniowana została w pracy [He i in. 2003] jako uogólnienie dywergencji Jensena-Shannona bazujące na entropii Rényiego. Entropia Rényiego stopnia α jest uogólnieniem entropii Shannona, wynikającym z zastosowania średniej Kołmogorowa-Nagumo [Lavenda 2004]. Entropia Rényiego stopnia α $(\alpha > 0, \alpha \ne 1)$ struktury n-elementowej

$$S^n = [\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n] \quad \left(0 \le \omega_i \le 1, \sum_{i=1}^{n} \omega_i = 1\right)$$

określona jest następująco [Rényi 1961, s. 549]:

$$H_{R\alpha}(S^n) = \frac{1}{1-\alpha} \log_2\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i^{\alpha}\right). \tag{6}$$

Entropia Rényiego jest wielkością nieujemną dla każdego $\alpha \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ oraz jest wklęsła dla $\alpha \in (0,1)$, natomiast dla $\alpha > 1$ jest wklęsła lub wypukła [Hibbard 2004, s. 235]. Stąd nierówność Jensena dla funkcji wklęsłych:

$$H_{R\alpha}\left(\sum_{j=1}^{r} \pi_j S_j^n\right) \geq \sum_{j=1}^{r} \pi_j H_{R\alpha}(S_j^n)$$

spełnia zawsze entropia Rényiego dla wartości stopnia $\alpha \in (0,1)$. Dla pozostałych $\alpha > 1$ nierówność Jensena spełniona jest jedynie dla tych wartości α, dla których entropia $H_{R\alpha}(S^n)$ jest wklęsła.

Dywergencja Jensena-Rényiego stopnia α $(0 < \alpha < 1)$ dla pary struktur S_p^n i S_q^n określona zostanie formułą:

$$JR_\alpha(S_p^n, S_q^n) = H_{R\alpha}(\pi_1 S_p^n + \pi_2 S_q^n) - (\pi_1 H_{R\alpha}(S_p^n) + \pi_2 H_{R\alpha}(S_q^n)), \tag{7}$$

gdzie π_1 oraz π_2 ($\pi_1 + \pi_2 \geq 0$, $\pi_1 + \pi_2 = 1$) stanowią wagi związane odpowiednio ze strukturami S_p^n oraz S_q^n.

Dywergencja Jensena-Rényiego dla pary struktur S_p^n i S_q^n spełnia następujące własności dla $\alpha \in (0,1)$:

1) wartości dywergencji Jensena-Rényiego są nieujemne i ograniczone: $0 \leq JR_\alpha(S_p^n, S_q^n) \leq 1$.

2) $JR_\alpha(S_p^n, S_q^n) = 0$ wtedy i tylko wtedy, gdy $S_p^n = S_q^n$.

3) dywergencja Jensena-Rényiego jest symetryczna: $JR_\alpha(S_p^n, S_q^n) = JR_\alpha(S_q^n, S_p^n)$.

4) dywergencja Jensena-Rényiego jest wypukła [He i in. 2003, s. 1213].

5) granicą dywergencji Jensena-Rényiego dla $\alpha \to 1$ jest dywergencja Jensena--Shannona:

$$\lim_{\alpha \to 1} JR_\alpha(S_p^n, S_q^n) = JS(S_p^n, S_q^n)$$ [He i in. 2003, s. 1213].

Dywergencja Jensena-Rényiego, podobnie jak JSD, ma charakter miary zróżnicowania struktur i spełnia postulaty stawiane miarom niepodobieństwa struktur. JRD oferuje dodatkową możliwość swobodnego doboru stopnia $\alpha \in (0,1)$, co skutkuje jednoczesnym wpływem na wrażliwość omawianej miary na rozbieżność struktur.

Dywergencja Jensena-Rényiego może być również wykorzystana do badania rozbieżności więcej niż dwóch struktur [He i in. 2003, s. 1213]:

$$JR_{\alpha}(S_1^n, S_2^n, ..., S_r^n) = H_{R\alpha}\left(\sum_{j=1}^{r}\pi_j S_j^n\right) - \sum_{j=1}^{r}\pi_j H_{R\alpha}(S_j^n), \tag{8}$$

gdzie $\pi_1, \pi_2, ..., \pi_r$ są wagami spełniającymi warunki: $0 \le \pi_j \le 1$ $\left(j = 1, 2, ..., r\right)$ oraz $\sum_{j=1}^{r}\pi_j = 1,$ związanymi odpowiednio ze strukturami $S_1^n, S_2^n, ..., S_r^n$.

4. Przykład empiryczny

Struktura ludności według płci i wieku stanowi podstawę wielu analiz demograficznych. Ilustruje ona dotychczasowe trendy w płodności, umieralności i migracji, a także determinuje kształtowanie się przyszłych tendencji. Struktura ludności według wieku jest wynikiem głównie przemian zachodzących w reprodukcji ludności oraz mobilności przestrzennej osób.

W Polsce w okresie przechodzenia do gospodarki wolnorynkowej obserwuje się znaczny spadek przyrostu naturalnego ludności oraz nasilenie procesu starzenia się społeczeństwa [*Podstawowe informacje*... 2008]. Rezultatem przemian w procesach demograficznych w Polsce jest gwałtowne zmniejszenie się liczby dzieci (0-14 lat), ich udział w ogólnej liczbie ludności obniżył się do około 16% na koniec roku 2009 z około 25% w 1990 roku. Jest to wynikiem niskiej płodności, co spowodowało, że Polska stała się krajem, który u progu XXI wieku wszedł w zaawansowaną fazę starości demograficznej. Jako ważny czynnik warunkujący przestrzenne zróżnicowanie procesu starzenia się ludności wskazuje się na migracje [Kurek 2009].

W artykule zbadano stopień rozbieżności w strukturze ludności według wieku dla obu płci w ujęciu przestrzennym, z uwzględnieniem podziału administracyjnego według województw. Struktura ludności według wieku dla obu płci w poszczególnych województwach wyrażona została w odsetkach ludności w następujących biologicznych grupach wieku (tab. 1):

– 0-14 lat – dzieci (młodość demograficzna);
– 15-64 lata – dorośli bez osób starszych;
– 65 lat i więcej – osoby starsze (starość demograficzna).

Stopień rozbieżności w strukturze mężczyzn i kobiet według wieku w każdym z województw zbadano za pomocą dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego stopnia $\alpha = 0{,}1$, $\alpha = 0{,}5$ oraz $\alpha = 0{,}9$ (tab. 2). Zastosowanie obu miar jest możliwe, gdyż składowe wektorów struktur charakteryzujących odpowiednie województwa spełniają warunki sumy jednostkowej oraz unormowania w przedziale $[0, 1]$, co daje możliwość wyznaczenia entropii empirycznej dla odpowiednich struktur, a przez to miar dywergencji. Wyznaczenie JSD oraz JRD wymaga ustalenia wag π_1 oraz π_2, spełniających warunki: $\pi_1 + \pi_2 \geq 0$ oraz $\pi_1 + \pi_2 = 1$. Wagi związane odpowiednio ze strukturą mężczyzn oraz kobiet przyjęte zostały na tym samym poziomie, tak aby spełniały zadane kryteria $\pi_1 = \pi_2 = \frac{1}{2}$.

Tabela 1. Ludność według płci, wieku i województw w Polsce (stan w dniu 31.12.2009)

Województwo	Mężczyźni			Kobiety		
	0-14 lat	15-64 lata	65 lat i więcej	0-14 lat	15-64 lata	65 lat i więcej
Dolnośląskie	0,1502	0,7490	0,1008	0,1312	0,7035	0,1654
Kujawsko-pomorskie	0,1665	0,7353	0,0982	0,1474	0,7010	0,1516
Lubelskie	0,1636	0,7254	0,1111	0,1465	0,6790	0,1745
Lubuskie	0,1641	0,7475	0,0884	0,1466	0,7080	0,1455
Łódzkie	0,1516	0,7353	0,1131	0,1299	0,6876	0,1825
Małopolskie	0,1692	0,7233	0,1076	0,1516	0,6863	0,1621
Mazowieckie	0,1624	0,7237	0,1139	0,1412	0,6852	0,1737
Opolskie	0,1444	0,7435	0,1121	0,1274	0,7016	0,1710
Podkarpackie	0,1695	0,7275	0,1030	0,1533	0,6892	0,1575
Podlaskie	0,1589	0,7243	0,1168	0,1427	0,6807	0,1766
Pomorskie	0,1744	0,7279	0,0977	0,1557	0,6984	0,1459
Śląskie	0,1477	0,7378	0,1145	0,1307	0,7014	0,1679
Świętokrzyskie	0,1535	0,7310	0,1155	0,1388	0,6808	0,1804
Warmińsko-mazurskie	0,1712	0,7399	0,0889	0,1544	0,7005	0,1451
Wielkopolskie	0,1711	0,7364	0,0924	0,1516	0,7052	0,1431
Zachodniopomorskie	0,1587	0,7471	0,0942	0,1417	0,7080	0,1503

Źródło: dane Głównego Urzędu Statystycznego.

Wartości JSD oraz JRD dla struktur ludności według wieku dla obu płci w województwach Polski wskazują na niewielkie rozbieżności pomiędzy strukturami. Największe różnice widoczne są w województwach: świętokrzyskim, dolnośląskim i łódzkim, najmniejsze w województwach: pomorskim, śląskim oraz wielkopolskim. Zauważyć można, że wykorzystanie dywergencji Jensena-Rényiego daje możliwość doboru wykładnika α, co wpływa na wrażliwość miary na rozbieżność pomiędzy porównywanymi strukturami (tab. 2).

Zastosowanie dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego umożliwia zbadanie zgodności więcej niż dwóch struktur. Dlatego też zbadano stopień rozbieżności pomiędzy strukturą wieku we wszystkich województwach Polski dla obu płci (tab. 3).

Wartości obu miar dywergencji wskazują na znikome rozbieżności pomiędzy strukturą wieku kobiet i mężczyzn w województwach Polski w roku 2009. Nie występowało zatem istotne zróżnicowanie regionalne pomiędzy województwami Polski ze względu na strukturę ludności według wieku zarówno wśród kobiet, jak i mężczyzn.

Tabela 2. Wartości dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego dla struktur ludności według wieku dla obu płci w województwach Polski w roku 2009

Województwo	$JS(S_p^n, S_q^n)$	$JR_\alpha(S_p^n, S_q^n)$		
		$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,9$
Pomorskie	0,00407	0,00099	0,00362	0,00418
Śląskie	0,00436	0,00093	0,00360	0,00440
Wielkopolskie	0,00463	0,00117	0,00421	0,00477
Małopolskie	0,00470	0,00104	0,00395	0,00477
Podkarpackie	0,00481	0,00110	0,00412	0,00490
Kujawsko-pomorskie	0,00485	0,00116	0,00428	0,00497
Podlaskie	0,00522	0,00106	0,00418	0,00525
Opolskie	0,00527	0,00113	0,00436	0,00534
Zachodniopomorskie	0,00541	0,00132	0,00485	0,00557
Mazowieckie	0,00542	0,00114	0,00441	0,00546
Warmińsko-mazurskie	0,00562	0,00142	0,00516	0,00581
Lubuskie	0,00582	0,00148	0,00536	0,00603
Lubelskie	0,00602	0,00126	0,00489	0,00606
Świętokrzyskie	0,00608	0,00122	0,00485	0,00611
Dolnośląskie	0,00668	0,00151	0,00573	0,00681
Łódzkie	0,00711	0,00147	0,00573	0,00715

Źródło: obliczenia własne.

Tabela 3. Wartości dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego dla struktur ludności według wieku dla obu płci w roku 2009

Ludność według płci	$JS(S_1^n, ..., S_{16}^n)$	$JR_\alpha(S_1^n, ..., S_{16}^n)$		
		$\alpha = 0,1$	$\alpha = 0,5$	$\alpha = 0,9$
Mężczyźni	0,001097	0,00028	0,00100	0,00113
Kobiety	0,001312	0,00026	0,00102	0,00132

Źródło: obliczenia własne.

5. Podsumowanie

Miary dywergencji są stosowane przede wszystkim do oceny stopnia rozbieżności pomiędzy rozkładami prawdopodobieństw. Mogą być także wykorzystane do oceny zgodności struktur. W szczególności wskazane w artykule własności dywergencji Jensena-Shannona oraz Jensena-Rényiego zachęcają do wykorzystania tych miar w badaniu podobieństwa obiektów opisanych przez wskaźniki struktury. Obie scharakteryzowane miary spełniają postulaty stawiane miarom zróżnicowania struktur. Ponadto swobodny dobór stopnia α dywergencji Jensena-Rényiego daje możliwość wyboru miary o większej bądź mniejszej wrażliwości na rozbieżność struktur. Istotną zaletą obu dywergencji jest możliwość wykorzystania ich do oceny stopnia rozbieżności więcej niż dwóch struktur.

Literatura

Burbea J., Rao C.R., *On the convexity of some divergence measures based on entropy functions*, „IEEE Transactions on Information Theory” 1982, vol. 28, no. 3, s. 489-495.

Csiszár I., *Information type measures of difference of probability distributions and indirect observations*, „Studia Sci. Mat. Hung” 1967, vol. 2, s. 299-318.

Dhillon I.S., Mallele S., Kumar R., *A divisive information – theoretic feature clustering algorithm for text classification*, „Journal of Machine Learning Research” 2003, no. 3, s. 1265-1287.

He Y., Hamza B., Krim H., *A generalized divergence measure for robust image registration*, „IEEE Transactions on Signal Processing” 2003, vol. 51, no. 5, s. 1211-1220.

Hibbard L.S., *Region segmentation using information divergence measures*, „Medical Image Analysis” 2004, no. 8, s. 233-244.

Hung W.L., Yang M.S., *On the J-divergence of intuitionistic fuzzy seta with its application to pattern recognition*, „Information Sciences” 2007, no. 178, s. 1641-1650.

Lamberti P.W., Majtey A.P., Borras A., Casas M., Plastino A., *Metric character of the quantum Jensen-Shannon divergence*, „Physical Review A” 2008, no. 77, 052311-1 – 052311-6.

Lavenda B.H., *Mean entropies*, „Open Systems & Information Dynamics” 2004, no. 12, s. 289-302.

Lin J., *Divergence measures based on the Shannon entropy*, „IEEE Transactions on Information Theory” 1991, vol. 37, no. 1, s. 145-151.

Kukuła K., *Statystyczne metody analizy struktur ekonomicznych*, Wyd. Edukacyjne, Kraków 1996.

Kurek S., *Starzenie się ludności na obszarach przemysłowych w Polsce*, Prace Komisji Gospodarki Przemysłu nr 14, Warszawa – Kraków 2009, s. 104-120.

Podstawowe informacje o rozwoju demograficznym Polski do 2007 roku. Notatka informacyjna Departamentu Badań Demograficznych, GUS, Warszawa 2008.

Rényi A., *On measures of entropy and information*, Proc. Fourth Berkeley Symp. on Math. Statist. and Prob., vol. 1, Univ. of Calif. Press, Berkeley 1961, s. 547-561.

JENSEN-SHANNON AND JENSEN-RÉNYI DIVERGENCES AS DISCREPANCY MEASURES OF STRUCTURES

Summary: This paper indicates the possibility of applying the measures of divergences for the assessment of the degree of difference of structures. It presents the symmetric smoothing of Kullback-Leibler divergence in the form of the measure of divergences by Jensen-Shannon, which is a function of Shannon entropy. The possibility of its generalization for testing the similarity of more than two objects as well as the possibility of including weights for the considered objects represents important advantages of Jensen-Shannon divergence. Jensen-Rényi divergence of α degree, which is a function of Rényi entropy and the generalization of Jensen-Shannon divergence, is another measure of presented divergence.