PRACE NAUKOWE UNIWERSYTETU EKONOMICZNEGO WE WROCŁAWIU nr 176
Taksonomia 18. Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania 2011

Artur Zaborski
Uniwersytet Ekonomiczny we Wrocławiu

ZASTOSOWANIE ALGORYTMU SMACOF DO BADAŃ OPARTYCH NA PROSTOKĄTNEJ MACIERZY PREFERENCJI

Streszczenie: SMACOF jest strategią skalowania wielowymiarowego, wykorzystującą metodę majoryzacji, która aproksymuje w kolejnych cyklach iteracyjnych minimalne wartości funkcji STRESS. Celem artykułu jest prezentacja metodologii skalowania wielowymiarowego za pomocą dostępnego w środowisku `R` algorytmu SMACOF i jego modyfikacji na potrzeby prostokątnej macierzy preferencji. Na zakończenie zaprezentowano przykład, w którym wykorzystano funkcję `smasofRect` pakietu `smacof`.

Słowa kluczowe: skalowanie wielowymiarowe, macierz preferencji, majoryzacja, SMACOF.

1. Wstęp

Skalowanie wielowymiarowe jest zbiorem technik mających na celu przedstawienie w geometrycznej formie (zazwyczaj w przestrzeni dwuwymiarowej) relacji zachodzących między obiektami traktowanymi jako punkty w przestrzeni wielowymiarowej. Za pomocą odpowiednich procedur dokonuje się takiego rozmieszczenia na mapie percepcyjnej punktów, aby dopasowanie konfiguracji odległości w przestrzeni wielowymiarowej i dwuwymiarowej było najlepsze. Miarą dopasowania obydwu konfiguracji jest funkcja STRESS (*STandardized REsidual Sum of Squares*). Jedną z metod aproksymujących minimalne wartości funkcji dopasowania jest metoda majoryzacji, a algorytm wykorzystujący tę metodę nosi nazwę SMACOF (*Scaling by MAjorizing a COmplicated Function*).

Uniwersalność algorytmu SMACOF przejawia się między innymi w tym, że poprzez odpowiednią modyfikację możliwe jest jego wykorzystanie nie tylko dla danych zawartych w prostokątnej macierzy odległości, ale również w modelach różnic indywidualnych, tzn. gdy danych jest wiele macierzy odległości (zob. [Zaborski 2010]), oraz w badaniach preferencji respondentów ujętych w prostokątnej macierzy niepodobieństw.

W artykule przedstawiono algorytm skalowania za pomocą algorytmu SMACOF, jego modyfikację oraz możliwości zastosowania w badaniu, w którym dane wejściowe zawarte są w prostokątnej macierzy preferencji. Do skalowania preferencji w zaprezentowanym badaniu empirycznym wykorzystano funkcję `smacofRect` pakietu `smacof` dostępnego w środowisku R

2. Charakterystyka algorytmu SMACOF

W skalowaniu wielowymiarowym dla danego zbioru obiektów $A=\{A_1,...,A_n\}$, gdzie n jest liczbą obiektów, oraz niepodobieństw δ_{ij} między A_i oraz A_j $(i, j=1,\ldots,n)$ poszukuje się takiego odwzorowania zbioru obiektów w zbiór punktów w przestrzeni r-wymiarowej (r zazwyczaj jest równe 2 lub 3), aby:

$$d_{ij} \approx \hat{d}_{ij} = f(\delta_{ij}), \tag{1}$$

gdzie: d_{ij} – odległość między punktami $\mathbf{x}_i$ a $\mathbf{x}_j$,

$\hat{d}_{ij}$ – funkcja regresji między d_{ij} a δ_{ij}.

Wielkości $\hat{d}_{ij}$ wyznaczane są tak, aby minimalizowały wartość funkcji dopasowania STRESS, która w najprostszej odmianie przyjmuje postać (zob. [Kruskal 1964]):

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i,j}(d_{ij}-\hat{d}_{ij})^2}{\sum_{i,j} d_{ij}^2}}. \tag{2}$$

W związku z tym podstawowym zadaniem skalowania wielowymiarowego jest znalezienie takiej konfiguracji punktów w przestrzeni o zredukowanej liczbie wymiarów, która minimalizuje wartość funkcji dopasowania. Jedną z metod optymalizacji jest algorytm SMACOF, w którym do wyznaczania w kolejnych cyklach iteracyjnych konfiguracji punktów wykorzystuje się metodę majoryzacji funkcji dopasowania STRESS, przedstawionej w postaci (zob. [De Leeuw, Mair 2008]):

$$SS = \sum_{i<j} w_{ij}\left(\delta_{ij} - d_{ij}(\mathbf{X})\right)^2, \tag{3}$$

gdzie $w_{ij}=1$, jeżeli δ_{ij} jest dane (w przeciwnym przypadku $w_{ij}=0$).

Idea metody majoryzacji (zob. np. [Groenen 1993, s. 5; Zaborski 2001, s. 69-70]) polega na wyznaczaniu minimum funkcji $f(x)$ o skomplikowanej postaci analitycznej, poprzez zastępowanie jej w kolejnych cyklach iteracyjnych przez pewną funkcję pomocniczą $g(x,c)$, której minimalizacja jest znacznie łatwiejsza (np. $g(x,c)$ jest funkcją kwadratową zmiennej *x*). Funkcja pomocnicza jest funkcją majoryzującą, jeżeli $f(x)$ zawsze przyjmuje wartości nie większe niż funkcja $g(x,c)$ ($\forall x\ f(x) \leq g(x,c)$), a wykres funkcji pomocniczej jest styczny do wykresu funkcji podstawowej w tzw. punkcie podparcia *c* ($f(c) = g(c,c)$).

Algorytm modelu SMACOF, podobnie jak większości innych modeli skalowania wielowymiarowego, jest następujący (zob. [Borg, Groenen 2005, s.191]):

1. Wyznaczenie konfiguracji początkowej $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^0$ punktów reprezentujących obiekty w przestrzeni *r*-wymiarowej.
2. Obliczenie wartości funkcji dopasowania STRESS dla konfiguracji początkowej $SS(\mathbf{X}^0)$.
3. Wyznaczenie $\mathbf{X}^u$, gdzie *u* – numer iteracji.
4. Obliczenie wartości funkcji dopasowania $SS(\mathbf{X}^u)$.
5. Jeżeli $|SS(\mathbf{X}^u) - SS(\mathbf{X}^{u-1})| < \varepsilon$ (ε − nieujemna stała) lub *u* jest równe maksymalnej, z góry ustalonej, liczbie iteracji − następuje koniec procesu obliczeniowego. W przeciwnym przypadku dokonuje się podstawienia $\mathbf{Y} = \mathbf{X}^u$ i przechodzi do kroku 3.

W algorytmie SMACOF funkcją majoryzującą (3) jest (zob. [De Leeuw, Heiser 1977; Borg, Groenen 2005, s. 190; De Leeuw, Mair 2008]):

$$\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 1 + tr\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X} - 2tr\mathbf{X}^T\mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}, \tag{4}$$

gdzie: **V** – macierz o elementach $v_{ij} = \begin{cases} \sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} w_{ij} & \text{dla } i = j \\ -w_{ij} & \text{dla } i \neq j \end{cases}$,

B(Y) – macierz o elementach $b_{ij} = \begin{cases} \dfrac{-w_{ij}\delta_{ij}}{d_{ij}(\mathbf{Y})} & \text{dla } i \neq j \text{ i } d_{ij}(\mathbf{Y}) \neq 0 \\ 0 & \text{dla } i \neq j \text{ i } d_{ij}(\mathbf{Y}) = 0 \\ -\sum\limits_{\substack{j=1 \\ i\neq j}}^{n} b_{ij} & \text{dla } i = j \end{cases}$,

Y – konfiguracja punktów wyznaczonych w *u*–1 cyklu iteracyjnym.

Minimum funkcji (4) otrzymuje się, przyrównując pochodne $\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ do zera, tzn.

$$\nabla\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = 2\mathbf{VX} - 2\mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{Y} = \mathbf{0}, \tag{5}$$

gdzie $\nabla\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y})$ jest gradientem $\tau(\mathbf{X},\mathbf{Y})$.

Ostatecznie rozwiązaniem równania (5) jest macierz:

$$\mathbf{X}^u = \begin{cases} \mathbf{V}^+\mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{Y} \\ n^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{Y} \ \text{gdy} \underset{\mathrm{i\neq j}}{\forall} \ w_{ij} = 1 \end{cases}, \tag{6}$$

gdzie $\mathbf{V}^+ = (\mathbf{V} + \mathbf{11}^T)^{-1} - n^{-1}\mathbf{11}^T$ ($\mathbf{1}$ – wektor kolumnowy złożony z jedynek) jest macierzą odwrotną Moora-Penrose'a.

3. Podstawy skalowania wielowymiarowego w badaniach preferencji

W przeciwieństwie do metod skalowania wielowymiarowego, w których konfiguracja punktów reprezentujących obiekty jest wyznaczana na podstawie symetrycznej macierzy odległości, w badaniach preferencji dane wejściowe zawarte są w prostokątnej macierzy, której wiersze zazwyczaj reprezentują respondentów, natomiast kolumny – badane obiekty (w zależności od celu badania mogą to być również obiekty i zmienne lub respondenci i zmienne). Elementy poszczególnych wierszy macierzy są ocenami preferencji dla każdego z respondentów, najczęściej otrzymanymi w wyniku rangowania.

Celem skalowania wielowymiarowego w badaniach preferencji jest wyznaczenie, w oparciu o dane wejściowe, zależności między obiektami (np. markami produktów), zmiennymi (atrybutami produktów) oraz osobami oceniającymi obiekty lub zmienne (respondentami). Cele te mogą być realizowane za pomocą modelu punktu idealnego (por. np. [Green, Rao 1972, s. 215]):

$$\delta_{ki} = \sum_{a=1}^{r} \left(x_{ka}^2 - x_{ia}^1\right)^2 + e_k, \tag{7}$$

gdzie: δ_{ki} – ocena preferencji k-tego respondenta ($k = 1, 2, \ldots, m$) względem i-tego obiektu ($i = 1, 2, \ldots, n$),

x_{ka}^2 – punkt idealny (wartość wzorcowa) a-tego wymiaru dla k-tego respondenta,

x_{ia}^1 – a-ta współrzędna i-tego punktu,

e_k – wyraz wolny.

Zastosowanie modelu punktu idealnego umożliwia utworzenie na podstawie macierzy preferencji konfiguracji punktów reprezentujących zarówno obiekty $\mathbf{X}_1 = (\mathbf{x}_1^1, \mathbf{x}_2^1, \ldots, \mathbf{x}_n^1)^T$, jak i respondentów $\mathbf{X}_2 = (\mathbf{x}_1^2, \mathbf{x}_2^2, \ldots, \mathbf{x}_m^2)^T$. Model punktu idealnego przyjmuje założenie, że preferencje wszystkich respondentów determinowane są przez takie same wymiary, a każdy respondent posiada w przestrzeni swoje najbardziej preferowane miejsce (punkt idealny), które traktowane jest jako punkt odniesienia do oceny preferencji obiektów poprzez porównanie ich odległości od punktu idealnego.

4. Adaptacja algorytmu SMACOF dla prostokątnej macierzy preferencji

Uzasadnienie wykorzystania metody majoryzacji dla prostokątnej macierzy preferencji wynika z faktu, że metoda ta umożliwia wyznaczenie konfiguracji dwóch zbiorów punktów na podstawie niepodobieństw między respondentami a obiektami (lub zmiennymi). W takim przypadku macierz **X** należy zastąpić dwiema macierzami $\mathbf{X}_1$ i $\mathbf{X}_2$ zawierającymi współrzędne punktów reprezentujących odpowiednio *n* obiektów i *m* respondentów. Drugi składnik równania (4) ma wtedy postać (zob. [Groenen 1993, s. 99]):

$$
\begin{aligned}
tr\mathbf{X}^T\mathbf{V}\mathbf{X} &= tr\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^T & \mathbf{X}_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12}\\ \mathbf{V}_{12}^T & \mathbf{V}_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{bmatrix} = \\
&= tr\mathbf{X}_1^T\mathbf{V}_{11}\mathbf{X}_1 + 2tr\mathbf{X}_1^T\mathbf{V}_{12}\mathbf{X}_2 + tr\mathbf{X}_2^T\mathbf{V}_{22}\mathbf{X}_2,
\end{aligned} \tag{8}
$$

gdzie $\begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12}\\ \mathbf{V}_{12}^T & \mathbf{V}_{22}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m\mathbf{I} & -\mathbf{1}\mathbf{1}^T\\ -\mathbf{1}\mathbf{1}^T & n\mathbf{I}\end{bmatrix}$.

Podobnie macierz $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ należy podzielić na cztery podmacierze:

$$
\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}(\mathbf{Y}) & \mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})\\ \mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})^T & \mathbf{B}_{22}(\mathbf{Y})\end{bmatrix}, \tag{9}
$$

gdzie: $\mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})$ – macierz o elementach $b_{ik} = \begin{cases} \dfrac{-w_{ik}\delta_{ik}}{d_{ik}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2)} & \text{dla } d_{ik}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) \neq 0\\ 0 & \text{dla } d_{ik}(\mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2) = 0, \end{cases}$

$\mathbf{B}_{11}(\mathbf{Y})$ − diagonalna macierz o elementach $b_{ii} = -\sum_k b_{ik}$,

$\mathbf{B}_{22}(\mathbf{Y})$ − diagonalna macierz o elementach $b_{kk} = -\sum_i b_{ik}$.

Wtedy trzeci składnik równania (4) jest równy:

$$tr\mathbf{X}^T\mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{Y} = tr\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1^T & \mathbf{X}_2^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11}(\mathbf{Y}) & \mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y}) \\ \mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})^T & \mathbf{B}_{22}(\mathbf{Y})\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix} =$$

$$= tr\mathbf{X}_1^T\mathbf{B}_{11}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_1 + tr\mathbf{X}_1^T\mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_2 + \tag{10}$$

$$+ tr\mathbf{X}_2^T\mathbf{B}_{22}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_2 + tr\mathbf{X}_2^T\mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})^T\mathbf{Y}_1.$$

Po przyrównaniu pochodnych funkcji majoryzującej do zera oraz wykorzystaniu macierzy odwrotnej Moora-Penrose'a (zob. [Borg, Groenen 2005, s. 298]):

$$\mathbf{V}^+ = \begin{bmatrix}\mathbf{V}_{11}^+ & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{V}_{22}^+\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m^{-1}(\mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & n^{-1}(\mathbf{I} - n^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T)\end{bmatrix}, \tag{11}$$

współrzędne punktów reprezentujących respondentów i obiekty po u-tym cyklu iteracyjnym wynoszą:

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_1^u &= \mathbf{V}_{11}^+\left[\mathbf{B}_{11}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_1 + \mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_2\right] \\ \mathbf{X}_2^u &= \mathbf{V}_{22}^+\left[\mathbf{B}_{12}(\mathbf{Y})^T\mathbf{Y}_2 + \mathbf{B}_{22}(\mathbf{Y})\mathbf{Y}_1\right].\end{aligned} \tag{12}$$

5. SMACOF dla prostokątnej macierzy preferencji w prgramie R

Wielowymiarowe skalowanie na podstawie prostokątnej macierzy preferencji, wykorzystujące metodę majoryzacji funkcji dopasowania jest możliwe w programie R za pomocą funkcji `smacofRect` pakietu `smacof`. Składnię funkcji oraz opis jej podstawowych argumentów zawiera tab. 1.

Tabela 1. Opis funkcji `smacofRect` w programie R

`smacofRect(delta, ndim = 2, weightmat = NULL, init = NULL, verbose = FALSE, itmax = 1000, eps = 1e-6)`	
`delta`	tabela danych lub macierz preferencji
`ndim`	wymiar przestrzeni, w której prezentowane są wyniki skalowania
`weightmat`	macierz wag (opcjonalnie)
`init`	konfiguracja początkowa (opcjonalnie)
`verbose`	TRUE oznacza, że podawane są wartości STRESS w kolejnych cyklach iteracyjnych
`itmax`	maksymalna liczba iteracji
`eps`	kryterium zbieżności

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem dokumentacji programu R.

Przykład

Wybranym osobom, które zajmują się sprzedażą sprzętu komputerowego, przedstawiono 8 marek monitorów LCD z prośbą o przedstawienie swoich preferencji poprzez przyporządkowanie poszczególnym markom liczb od 1 do 8, przy czym liczba jeden oznaczała markę najbardziej preferowaną.

Tabela 2. Macierz preferencji marek monitorów LCD

Respondent	Marka monitorów							
	Samsung	LG	Maxdata	Philips	Benq	NEC	Neovo	Hyundai
1	2	1	8	3	4	7	6	5
2	3	5	6	1	2	7	8	4
3	1	5	6	2	7	3	8	4
4	2	5	8	3	4	1	7	6
5	3	1	5	2	4	6	7	8
6	1	4	5	3	6	2	7	8
7	1	2	7	4	5	6	3	8
8	3	2	5	1	6	4	7	8
9	3	1	5	2	4	6	7	8
10	1	2	3	6	8	4	5	7
11	1	4	8	2	3	6	7	5
12	4	5	6	3	1	2	7	8
13	2	1	8	3	5	4	6	7
14	5	1	7	2	4	3	8	6
15	1	6	2	5	7	8	3	4
16	2	4	6	1	3	7	8	5
17	1	2	7	3	6	5	8	4
18	1	3	8	2	4	7	6	5
19	1	3	7	2	5	6	8	4
20	2	3	6	1	7	5	8	4
21	2	3	6	1	7	8	5	4
22	2	1	8	4	5	7	3	6
23	2	1	8	3	5	4	6	7
24	5	1	8	2	4	3	7	6
25	6	2	3	1	8	5	4	7
26	1	5	4	3	6	2	7	8
27	2	7	3	1	8	5	4	6
28	3	1	7	2	4	8	5	6

Źródło: opracowanie własne.

Na podstawie otrzymanej w ten sposób macierzy preferencji (zob. tab. 2) przeprowadzono skalowanie wielowymiarowe z wykorzystaniem funkcji `smacofRect` z następującą składnią poleceń:

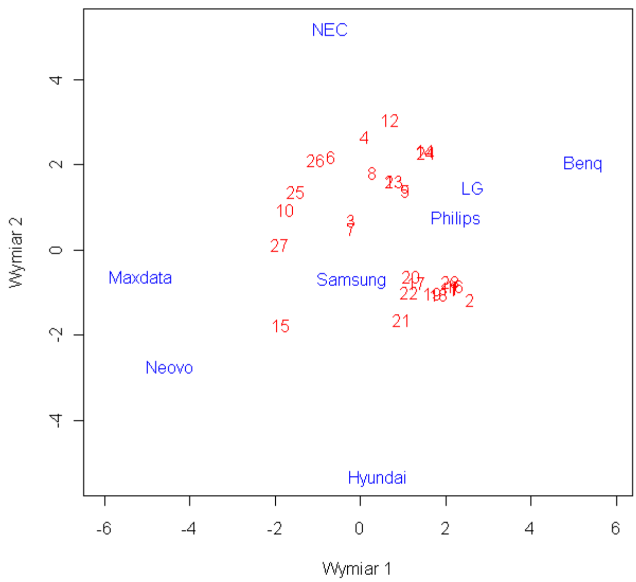
```
   > library (smacof)
   > x <- read.csv2("monitory_pref.csv", header=TRUE,
row.names=1)
   > options(OutDec=",")
   > mon.unf<-smacofRect(x, ndim=2, itmax=1000, reg=1e-6)
   #prezentacja wyników
   > print(mon.unf)
```

```
> summary(mon.unf)
> plot(mon.unf, joint=TRUE, asp=1, xlab="Wymiar 1",
ylab="Wymiar 2", main=" ")
```

W wyniku zastosowanej procedury otrzymano raport końcowy oraz dwuwymiarową konfigurację badanych marek monitorów i respondentów (zob. rys. 1).

```
> summary(mon.unf)
Model: Rectangular smacof
Number of subjects: 28
Number of objects: 8
Final stress value: 308,7973
Number of iterations: 313

Subjects configurations(rows):  Objects configurations (columns):
 D1 D2                           D1 D2
1 2,1785 -0,9175                Samsung -0,2136 -0,7100
2 2,5698 -1,1690                LG 2,6388 1,4602
3 -0,2133 0,7044                Maxdata -5,1391 -0,6268
4 0,1050 2,6547                 Philips 2,2476 0,7390
5 1,0677 1,3965                 Benq 5,2301 2,0263
6 -0,6694 2,1803                NEC -0,7163 5,1867
 . . . . . . . . .              Neovo -4,4662 -2,7387
28 2,1107 -0,7356               Hyundai 0,4188 -5,3365
```



Rys. 1. Konfiguracja punktów reprezentujących marki monitorów i respondentów

Źródło: opracowanie własne z wykorzystaniem funkcji `smacofRect`.

Rozkład punktów na mapie percepcyjnej pozwala na stwierdzenie, że najbardziej preferowaną przez respondentów marką monitorów jest Samsung. Świadczy o tym duże skupienie punktów idealnych w sąsiedztwie tej marki. Nieco gorzej oceniane LG i Philips postrzegane są jako marki podobne. Najmniej preferowaną marką monitorów jest Hyundai.

6. Podsumowanie

Skalowanie wielowymiarowe oparte na prostokątnej macierzy niepodobieństw jest jednym z podstawowych narzędzi geometrycznej prezentacji preferencji. Umożliwia ono równoczesną prezentację dwóch grup punktów: reprezentujących obiekty oraz respondentów. Dzięki temu możliwa jest ocena zależności występujących między respondentami a obiektami, a także między respondentami oraz między obiektami.

W artykule zaprezentowano modyfikację algorytmu SMACOF, wykorzystującego metodę majoryzacji funkcji dopasowania na potrzeby prostokątnej macierzy preferencji. Podstawowymi walorami tego podejścia (oprócz powszechnej dostępności dzięki oprogramowaniu w środowisku R) jest to, że gwarantuje ciąg nierosnących wartości funkcji dopasowania w kolejnych cyklach iteracyjnych oraz dopuszcza występowanie brakujących danych.

Literatura

Borg I., Groenen P., *Modern Multidimensional Scaling. Theory and Applications*, Springer-Verlag, New York 2005.

De Leeuw J., Heiser W.J., *Convergence of Correction-matrix Algorithms for Multidimensional Scaling*, [w:] J.R. Barra, F. Brodeau, G. Romier, B. van Cutsem (red.), *Recent Developments in Statistics*, North-Holland, Amsterdam 1977, s. 133-145.

De Leeuw J., Mair P., *Multidimensional Scaling Using Majorization: SMACOF in R*, Department of Statistics, UCLA. Department of Statistics Papers, Paper 2008010903, http://repositories.cdlib.org/uclastat/papers/2008010903.

Green P.E., Rao V.R., *Applied Multidimensional Scaling*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1972.

Groenen P.J.F., *The Majorization Approach to Multidimensional Scaling: Some Problems and Extensions*, DSWO Press, Leiden University, Leiden 1993.

Kruskal J.B., *Multidimensional scaling by optimising goodness of fit to a nonmetric hypothesis*, „Psychometrika” 1964, 29, s. 1-27.

Zaborski A., *Skalowanie wielowymiarowe w badaniach marketingowych*, Wyd. Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, Wrocław 2001.

Zaborski A., *Wykorzystanie metody majoryzacji funkcji dopasowania w modelach różnic indywidualnych*, [w:] K. Jajuga, M. Zalesiak (red.), *Klasyfikacja i analiza danych – teoria i zastosowania*, Taksonomia 17, Prace Naukowe Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu nr 107, Wrocław 2010, s. 181-189.

THE APPLICATION OF SMACOF ALGORITHM IN RESEARCH BASED ON RECTANGULAR PREFERENCE MATRIX

Summary: SMACOF is a strategy of multidimensional scaling which uses iterative majorization method to get increasingly better estimates of STRESS function. The aim of the paper is to present the methodology of multidimensional scaling by means of SMACOF algorithm which is implemented in an `R` environment and the modification of this algorithm when the data are in rectangular preference matrix. Finally, an example is presented in which the `smacofRect` function of `smacof` package is used.