

Ewa Dziawgo

Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

ANALIZA WŁASNOŚCI ZMODYFIKOWANYCH OPCJI WSTECZNYCH O ZMIENNEJ CENIE REALIZACJI

Streszczenie: W artykule przedstawiono zagadnienia dotyczące zmodyfikowanych opcji wstecznych o zmiennej cenie realizacji: charakterystykę instrumentu, funkcję wypłaty, model wyceny, wpływ wybranych czynników na cenę analizowanych opcji. Ilustracja empiryczna zawarta w artykule przedstawiona jest na podstawie symulacji wyceny opcji walutowych wystawionych na eur/pln.

Słowa kluczowe: opcje, zmodyfikowane opcje wsteczne, cena realizacji.

1. Wstęp

Prowadzenie działalności gospodarczej w coraz bardziej zmiennych warunkach rynkowych przyczynia się do poszukiwania nowych metod i rozwiązań w sferze zarządzania ryzykiem, których umiejętne wdrożenie może zapewnić poprawę wyników finansowych i wpłynąć na wzrost konkurencyjności firmy. Opcje są szczególnym instrumentem zarządzania ryzykiem [Hull 2002, s. 194; Tarczyński 2003, s. 149; Jajuga 2007, s. 73; Dziawgo 2003, s. 11]. Charakteryzują się one niesymetrycznością praw i obowiązków nałożonych na strony transakcji:

- nabywca opcji ma prawo realizacji umowy,
- wystawiający opcję ma obowiązek realizacji kontraktu.

Opcje wsteczne o zmiennej cenie realizacji (*floating lookback options*) należą do klasy opcji uwarunkowanych wartościami ekstremalnymi [Dziawgo 2009, s. 57; Napiórkowski 2002, s. 82].

2. Opcje wsteczne o zmiennej cenie realizacji i ich modyfikacja

Nabywca opcji kupna o zmiennej cenie realizacji ma prawo zakupu instrumentu bazowego po najniższej cenie osiągniętej przez instrument bazowy w okresie ważności kontraktu. Funkcja wypłaty wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji jest postaci:

$$W_c = \max[S_T - K_m^T; 0] = S_T - K_m^T, \quad (1)$$

gdzie: W_c – wartość funkcji wypłaty wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,

S_t – cena instrumentu bazowego w chwili t ,

T – termin wygaśnięcia opcji, $t \in [0; T]$,

K_m^T – cena wykonania wstecznej opcji kupna – najniższa cena instrumentu bazowego w okresie ważności opcji.

Nabywca opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji ma prawo sprzedaży instrumentu bazowego po najwyższej cenie, którą zaobserwowano w okresie ważności opcji. Funkcja wypłaty wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji wynosi:

$$W_p = \max[K_M^T - S_T; 0] = K_M^T - S_T, \quad (2)$$

gdzie: W – wartość funkcji wypłaty wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji,

S_t – cena instrumentu bazowego w chwili t ,

T – termin wygaśnięcia opcji, $t \in [0; T]$,

K_M^T – cena wykonania wstecznej opcji sprzedaży – najwyższa cena instrumentu bazowego w okresie ważności opcji.

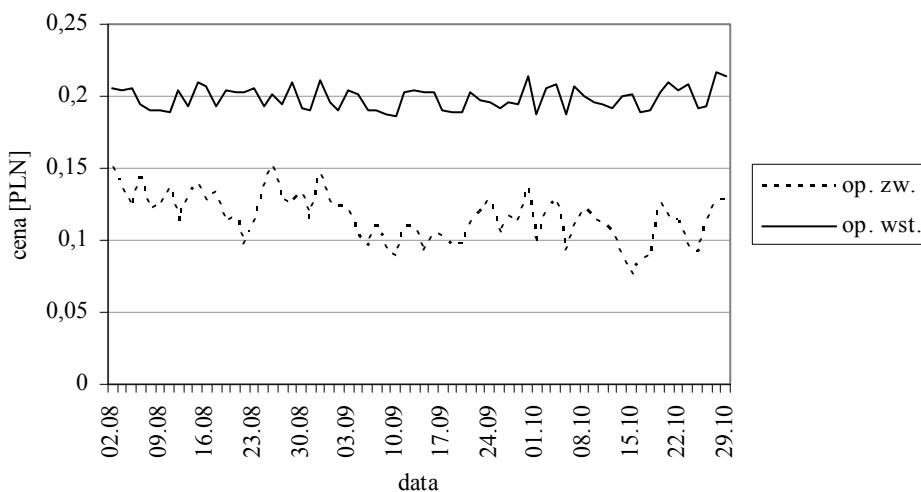
Przykład 1

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny opcji zwykłych i opcji wstecznych o zmiennej cenie realizacji. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla walutowych opcji kupna i sprzedaży wystawionych na EUR/PLN i dotyczy okresu 2.08.-29.10.2010 roku. Czas wygaśnięcia rozpatrywanych opcji wynosi 6 miesięcy. Na rysunku 1 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna i wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji.

Z analizy kształtowania się cen wynikają następujące własności wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji:

- wsteczna opcja o zmiennej cenie realizacji jest znacznie droższa od zwykłej opcji kupna,
- wzrost ceny instrumentu bazowego wpływa na wzrost ceny zarówno zwykłej opcji kupna, jak i wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,
- wsteczna opcja kupna o zmiennej cenie realizacji może być typu *w-cenie* i *po-cenie*¹,

¹ Opcja kupna/sprzedaży jest typu *w-cenie* w sytuacji, kiedy bieżąca cena instrumentu bazowego jest większa/mniejsza od ceny wykonania. Opcja kupna/sprzedaży jest typu *nie-w-cenie* w sytuacji, kiedy bieżąca cena instrumentu bazowego jest mniejsza/większa od ceny wykonania. Jeśli bieżąca cena instrumentu bazowego jest równa cenie wykonania, wówczas opcja kupna/sprzedaży jest typu *po-cenie* [Dziawgo 2003, s. 15].



Rys. 1. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji kupna i wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji

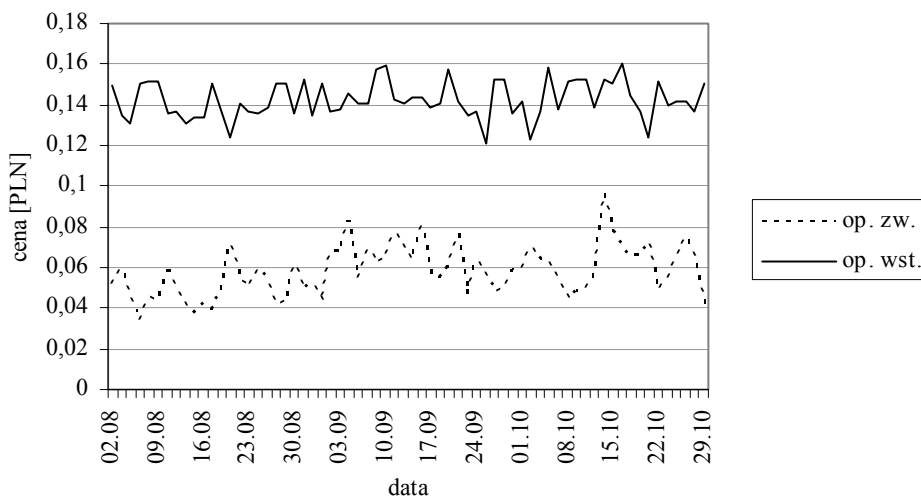
Źródło: opracowanie własne.

- wsteczna opcja kupna o zmiennej cenie realizacji nigdy nie jest typu *nie-w-cenie*: jeżeli bieżąca cena instrumentu bazowego będzie mniejsza od ceny wykonania, to stanie się ona nową ceną wykonania, a opcja kupna będzie typu *po-cenie*,
- spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek ceny zwykłej opcji kupna,
- w przypadku opcji kupna o zmiennej cenie realizacji spadek ceny instrumentu bazowego wpływa na:
 - spadek ceny opcji, jeśli bieżąca cena instrumentu bazowego nie przekroczy ceny wykonania,
 - wzrost ceny opcji, w sytuacji kiedy bieżąca cena instrumentu bazowego znacznie spadnie i przekroczy cenę wykonania.

Rysunek 2 jest ilustracją kształtowania się ceny zwykłej opcji sprzedaży oraz wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji.

Z przeprowadzonej analizy kształtowania się cen rozpatrywanych opcji sprzedaży wynikają następujące własności:

- wsteczna opcja sprzedaży o zmiennej cenie realizacji jest znacznie droższa od zwykłej opcji sprzedaży,
- spadek ceny instrumentu bazowego powoduje wzrost ceny zwykłej opcji sprzedaży oraz wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji,
- wsteczna opcja sprzedaży o zmiennej cenie realizacji może być typu *w-cenie* i *po-cenie*,
- wsteczna opcja sprzedaży o zmiennej cenie realizacji nigdy nie jest typu *nie-w-cenie*: jeśli bieżąca cena instrumentu bazowego będzie większa od ceny wykonania, to dochodzi do zmiany ceny wykonania i wówczas opcja sprzedaży jest typu *po-cenie*,



Rys. 2. Kształtowanie się ceny zwykłej opcji sprzedaży i wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

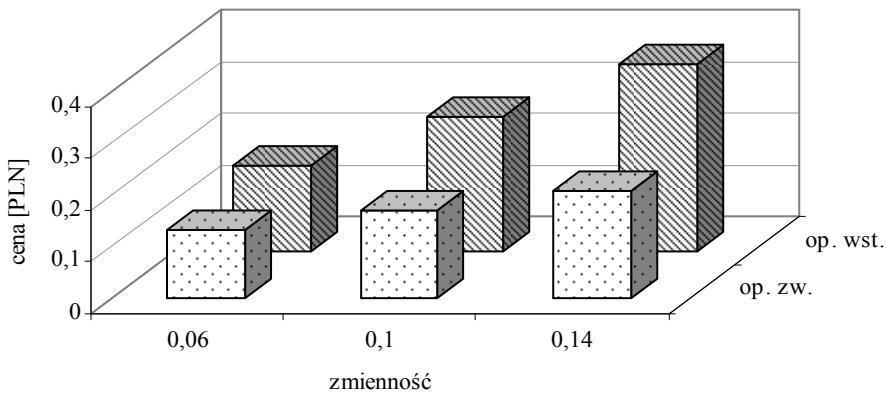
- wzrost ceny instrumentu bazowego wpływa na spadek ceny zwykłej opcji sprzedaży,
- w sytuacji opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji wzrost ceny instrumentu bazowego przyczynia się do:
 - spadku ceny opcji, jeśli bieżąca cena instrumentu bazowego nie przekroczy ceny wykonania,
 - wzrostu ceny opcji, w sytuacji kiedy bieżąca cena instrumentu bazowego znacznie wzrośnie i przekroczy cenę wykonania.

Z analizy wpływu zmienności ceny instrumentu bazowego na cenę opcji zwykłych i wstecznych o zmiennej cenie realizacji (rys. 3 i rys. 4) wynika, że wzrost zmienności wpływa na wzrost ceny zarówno opcji zwykłych, jak i wstecznych o zmiennej cenie realizacji, przy czym znaczniejszy wzrost ceny występuje w przypadku opcji wstecznych. Wzrost zmienności wpływa na wzrost różnicy między ceną zwykłej opcji i wstecznej opcji o zmiennej cenie realizacji. Oznacza to, że zmienność ceny instrumentu bazowego jest istotnym czynnikiem wpływającym na cenę wstecznej opcji o zmiennej cenie realizacji.

Zmienność ma wpływ na kształtowanie się wartości dwóch elementów funkcji wypłaty opcji wstecznej o zmiennej cenie realizacji:

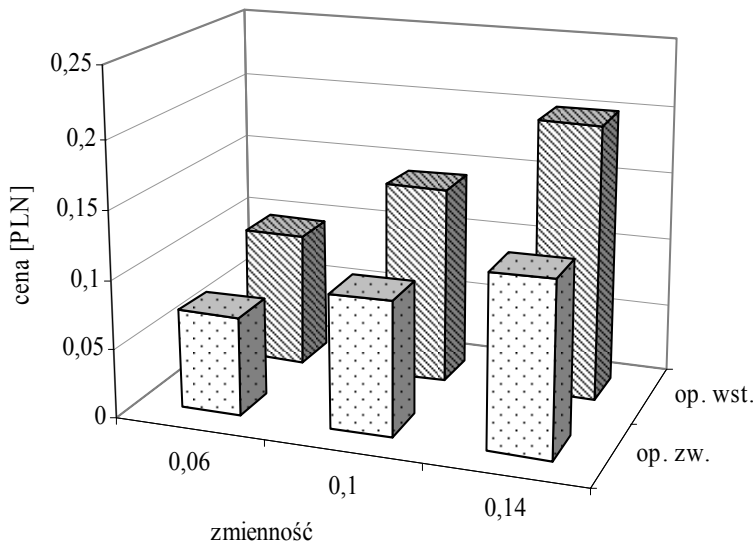
- ceny instrumentu bazowego w dniu wykonania opcji,
- ceny wykonania – ekstremalnej wartości osiągniętej przez cenę instrumentu bazowego w okresie ważności opcji.

Dlatego wsteczna opcja o zmiennej cenie realizacji jest szczególnym instrumentem zarządzania ryzykiem, stosowanym w warunkach znacznej zmienności ceny



Rys. 3. Wpływ zmienności na cenę zwykłej opcji kupna i wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 4. Wpływ zmienności na cenę zwykłej opcji sprzedaży i wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

instrumentu bazowego. Wadą tego instrumentu może być stosunkowo wysoka cena w porównaniu z opcjami zwykłymi. Zmodyfikowane opcje wsteczne o zmiennej cenie realizacji, które nazywane są częściowymi opcjami wstecznymi (*partial look-back options*), powstają przez wprowadzenie do funkcji wypłaty opcji wstecznych

parametru f , przez który mnoży się cenę wykonania [Conze 1991, s. 1900]. Można w ten sposób obniżyć cenę opcji wstecznych, przy jednoczesnym zachowaniu charakterystycznych własności tego instrumentu.

3. Analiza własności zmodyfikowanych opcji wstecznych o zmiennej cenie realizacji – ilustracja empiryczna

Funkcja wypłaty częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji jest postaci:

$$W_{c_1} = \max[S_T - f \cdot K_m^T; 0] = S_T - f \cdot K_m^T, \quad (3)$$

gdzie: W_{c_1} – wartość funkcji wypłaty częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,

f – parametr, $f \geq 1$,

pozostałe oznaczenia są takie same, jak we wzorze (1).

W chwili $t \in [0; T]$ cena częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji wynosi [Conze 1991, s. 1900]:

$$C_t = e^{-g(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} f \cdot K_m^t N(d_2) + \frac{f \cdot S_t \sigma^2}{2(r-g)} \left[-e^{g(T-t)} (f)^h S_t \frac{\sigma^2}{2r} N(-\bar{d}_1) + e^{-r(T-t)} \left(\frac{S_t}{K_m^t} \right)^{-h} N(\bar{d}_2) \right], \quad (4)$$

gdzie: $d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{f \cdot K_m^t}\right) + (r - g + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $h = \frac{2(r-g)}{\sigma^2}$,

$$\bar{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{f \cdot S_t}{K_m^t}\right) + (r - g + 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\bar{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{K_m^t}{f \cdot S_t}\right) + (r - g - 0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

σ – zmienność ceny instrumentu bazowego,

r – stopa procentowa,

g – stopa dywidendy,

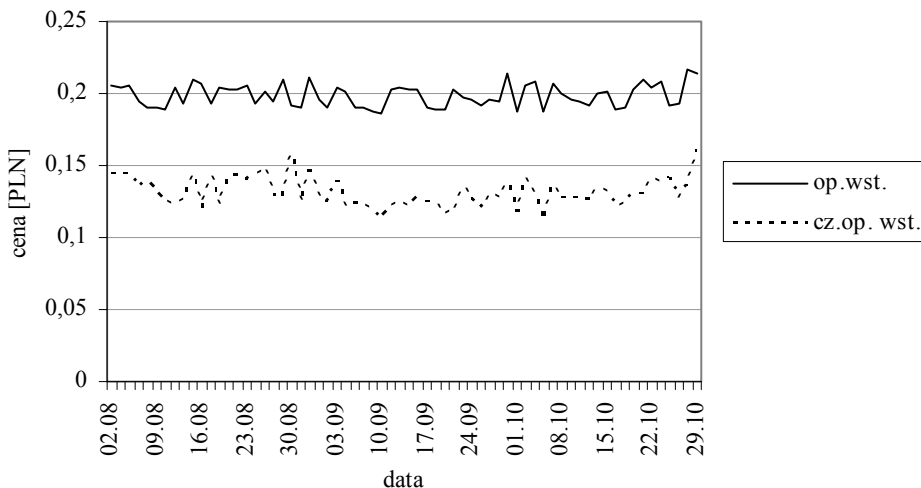
T – czas wygaśnięcia opcji,

$N(d)$ – dystrybuanta rozkładu normalnego,

pozostałe oznaczenia są takie same, jak we wzorze (3).

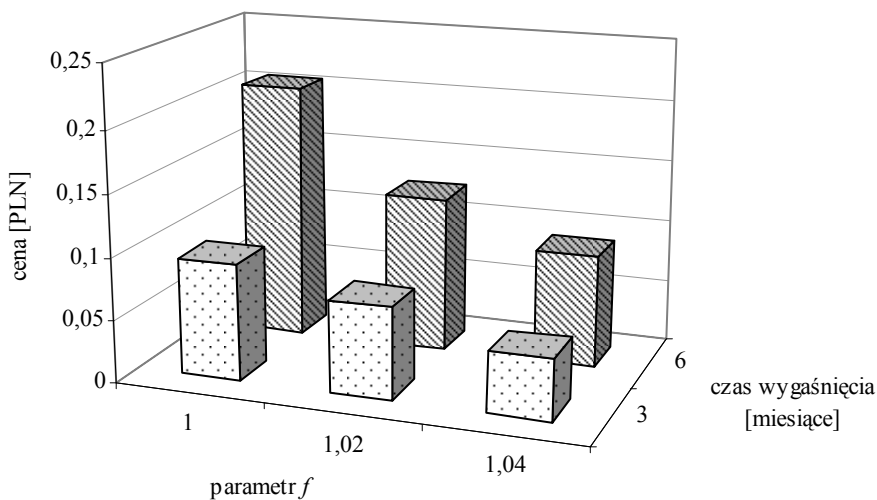
Przykład 2

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny zwykłej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji oraz częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla opcji walutowych wystawio-



Rys. 5. Kształtowanie się ceny wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji oraz wstecznej częściowej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji z parametrem $f = 1,02$

Źródło: opracowanie własne.



Rys. 6. Wpływ parametru f oraz czasu wygaśnięcia na cenę częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

nych na EUR/PLN i dotyczy okresu 2.08-29.10. 2010 roku. Czas wygaśnięcia rozpatrywanych opcji wynosi 6 miesięcy. Na rysunku 5 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej i częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji. Rysunek 6 jest ilustracją wpływu parametru f oraz czasu wygaśnięcia na kształtowanie się ceny częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji.

Z analizy kształtowania się cen przedstawionych na wykresach wynikają następujące własności zmodyfikowanej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji:

- częściowa wsteczna opcja kupna o zmiennej cenie realizacji jest tańsza od zwykłej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,
- wzrost parametru f wpływa na obniżenie ceny częściowej wstecznej opcji kupna o zmiennej cenie realizacji,
- dla każdego parametru f opcje charakteryzujące się dłuższym terminem wygaśnięcia są droższe.

Funkcja wypłaty częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji jest postaci:

$$W_{p_i} = \max[f \cdot K_M^T - S_T; 0] = f \cdot K_M^T - S_T, \quad (5)$$

gdzie: W_{p_i} – wartość funkcji wypłaty częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji,

f – parametr, $0 \leq f \leq 1$,

pozostałe oznaczenia są takie same, jak we wzorze (2).

W chwili $t \in [0; T]$ cena częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji wynosi [Conze 1991, s. 1900]:

$$P_t = e^{-r(T-t)} f \cdot K_M^t N(-\hat{d}_2) - e^{-g(T-t)} S_t N(-\hat{d}_1) + \frac{f \cdot S_t \sigma^2}{2(r-g)} \left[e^{g(T-t)} (f)^h S_t \frac{\sigma^2}{2r} N(\tilde{d}_1) - e^{-r(T-t)} \left(\frac{S_t}{K_M^t} \right)^{-h} N(-\tilde{d}_2) \right], \quad (6)$$

gdzie: $\hat{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{f \cdot K_M^t}\right) + (r-g+0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$, $\hat{d}_2 = \hat{d}_1 - \sigma\sqrt{T-t}$, $h = \frac{2(r-g)}{\sigma^2}$,

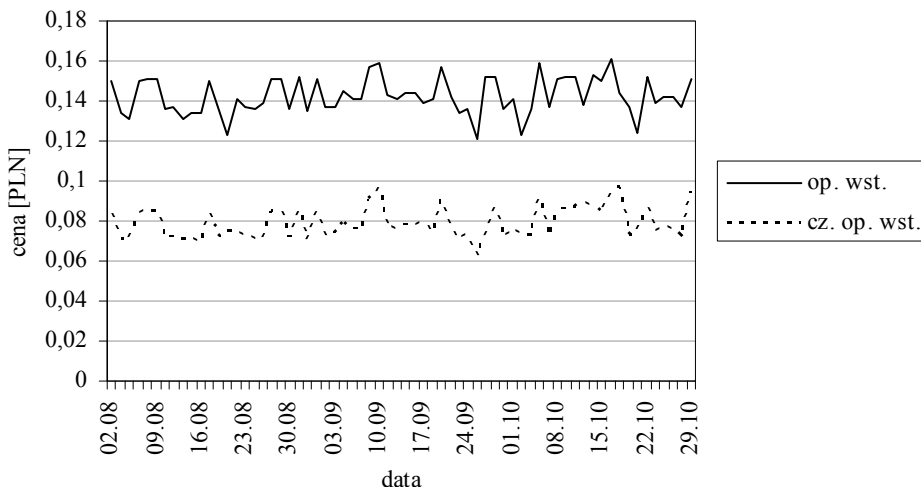
$$\tilde{d}_1 = \frac{\ln\left(\frac{f \cdot S_t}{K_M^t}\right) + (r-g+0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$\tilde{d}_2 = \frac{\ln\left(\frac{K_M^t}{f \cdot S_t}\right) + (r-g-0,5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

pozostałe oznaczenia są takie same, jak we wzorze (5).

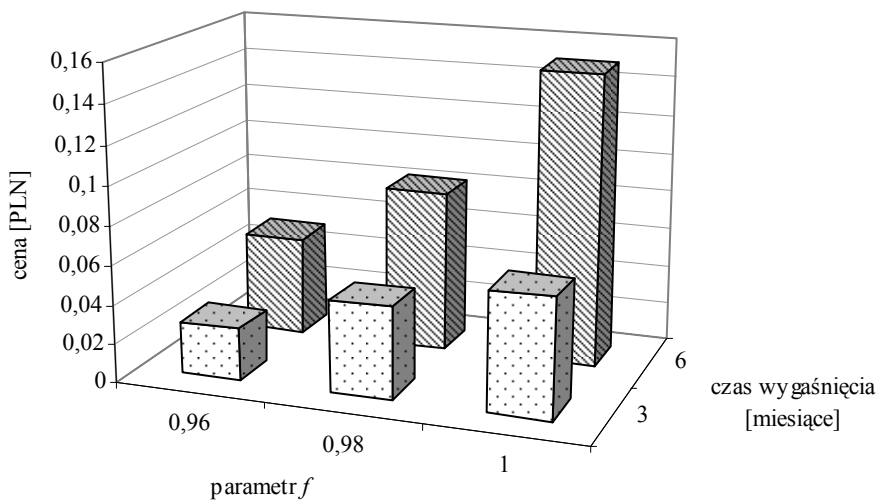
Przykład 3

Rozważania dotyczą kształtowania się ceny zwykłej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji oraz częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji. Symulacja wyceny przeprowadzona jest dla opcji walutowych wy-



Rys. 7. Kształtowanie się ceny wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji oraz częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji z parametrem $f = 0,98$

Źródło: opracowanie własne.



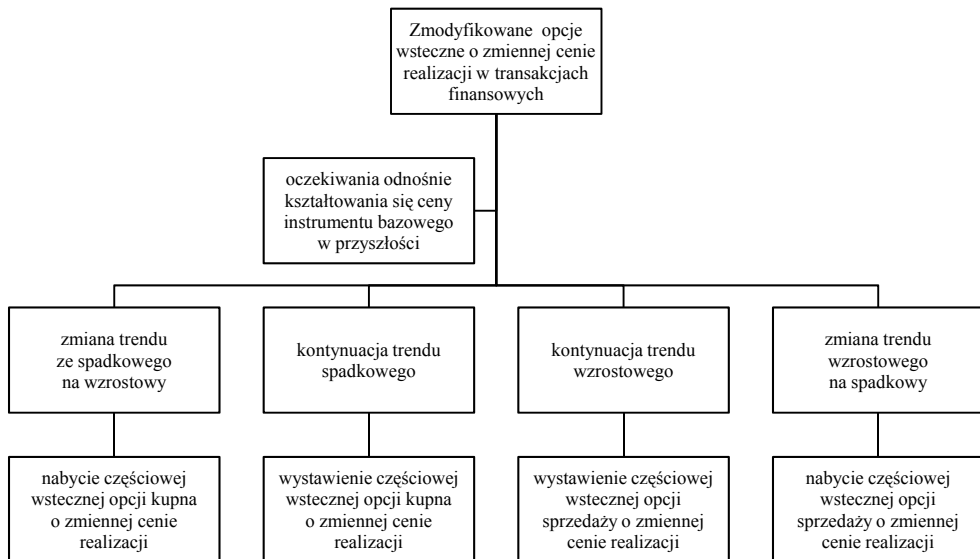
Rys. 8. Wpływ parametru f oraz czasu wygaśnięcia na cenę częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji

Źródło: opracowanie własne.

stawionych na EUR/PLN i dotyczy okresu 2.08-29.10. 2010 roku. Czas wygaśnięcia rozpatrywanych opcji wynosi 6 miesięcy. Na rysunku 7 przedstawiono kształtowanie się ceny zwykłej i częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji. Rysunek 8 jest ilustracją wpływu parametru f oraz czasu wygaśnięcia na kształtowanie się ceny częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji.

Z przeprowadzonej analizy kształtowania się cen wynikają następujące własności zmodyfikowanej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji:

- częściowa wsteczna opcja sprzedaży o zmiennej cenie realizacji jest tańsza od zwykłej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji,
- spadek parametru f wpływa na obniżenie ceny częściowej wstecznej opcji sprzedaży o zmiennej cenie realizacji,
- dla każdego parametru f opcje, które charakteryzują się dłuższym terminem wygaśnięcia, są droższe.



Rys. 9. Przykłady zastosowania zmodyfikowanych opcji wstecznych o zmiennej cenie realizacji w transakcjach finansowych

Źródło: opracowanie własne.

Wybór odpowiedniej wartości parametru f oraz czasu wygaśnięcia pozwala na kształtowanie różnych profili dochodu ze zmodyfikowanych opcji wstecznych. Schemat na rys. 9 prezentuje przykłady zastosowania zmodyfikowanych opcji wstecznych w transakcjach finansowych w zależności od oczekiwań związanych z kształtowaniem się cen instrumentu bazowego w przyszłości.

4. Podsumowanie

Opcje wsteczne o zmiennej cenie realizacji występują w obrocie na rynku pozagiełdowym. Są szczególnym instrumentem zarządzania ryzykiem, ponieważ zapewniają kupno (opcja kupna) lub sprzedaż (opcja sprzedaży) instrumentu bazowego po najkorzystniejszej cenie osiągniętej w okresie ważności opcji. Zmodyfikowane opcje wsteczne o zmiennej cenie realizacji również pozwalają kształtować poziom zabezpieczenia do oczekiwanej zmienności ceny instrumentu bazowego, jednakże przez stwarzaną możliwość wyboru odpowiedniej wartości parametru f umożliwiają obniżenie kosztu zabezpieczenia. Zmienność ceny instrumentu bazowego, także dla zmodyfikowanych opcji wstecznych, jest istotnym czynnikiem wpływającym na ich cenę. Dlatego tego typu opcje mogą być również atrakcyjnym instrumentem w transakcjach spekulacyjnych na rynku zmienności cen instrumentu bazowego.

Literatura

- Conze A., *Path dependent options: The case of lookback options*, „The Journal of Finance” 1991, vol. XLVI.
- Dziawgo E., *Modele kontraktów opcyjnych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika w Toruniu, Toruń 2003.
- Dziawgo E., *Zastosowanie opcji wstecznych o zmiennej cenie realizacji w zarządzaniu firmą*, [w:] P. Dittmann, E. Szabela-Pasierbińska (red.), *Prognozowanie w zarządzaniu firmą*, Wydawnictwo Uniwersytetu Ekonomicznego we Wrocławiu, Wrocław 2009.
- Jajuga K., *Zarządzanie ryzykiem*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2007.
- Tarczyński W., *Instrumenty pochodne na rynku kapitałowym*, Polskie Wydawnictwo Ekonomiczne, Warszawa 2003.
- Goldman B.M., Sosin H. B., Gatto M.A., *Path dependent options: “Buy at the Low, Sell at the High”*, „The Journal of Finance” 1979, vol. XXXIV.
- Hull J.C., *Options, Futures and other Derivatives*, Prentice Hall International, Inc. 2002.
- Napiórkowski A., *Charakterystyka, wycena i zastosowanie wybranych opcji egzotycznych*, NBP Departament Analiz i Badań, Warszawa 2002.

ANALYSIS OF THE PROPERTIES OF THE MODIFIED FLOATING STRIKE LOOKBACK OPTIONS

Summary: The article presents the issues connected with the modified floating strike lookback options: instrument characteristics, payoff function, pricing model, the influence of selected factors on the option price. The empirical data included in the article are concerned with the pricing simulations of the options on eur/pln.

The aim of the article is to present the properties of the modified floating strike lookback options as well as the comparative analysis of price performance of standard, lookback and modified lookback options.