Akademia Ekonomiczna im. Oskara Langego
we Wrocławiu
Wydział Informatyki i Zarządzania
Katedra Matematyki

Janusz Łyko

ZASADA INERCJI I PROGNOZY GOSPODARCZE

**Praca doktorska napisana pod kierunkiem
prof. dr. hab. Antoniego Smoluka**

Wrocław 1992

Pragnę podziękować swojemu Promotorowi
Profesorowi Antoniemu Smolukowi
za długie dyskusje
i wiele cennych wskazówek,
które pomogły mi
w sformułowaniu i rozwiązaniu
problemów przedstawionych w pracy.

SPIS TREŚCI

WSTĘP

Termin "prognoza" pochodzi od greckigo słowa *prognosis* i oznacza przewidywanie oparte na określonych danych, obliczeniach. Drugie znaczenie jakie jest jemu przypisywane w terminologii medycznej sprowadza się do rokowań o rozwoju i skutkach choroby. W takim też kontekście zostało ono wprowadzone przez Hipokratesa do terminologii naukowej.

Słowo "prognoza" składa się z dwóch części *pro* oraz *gnosis* i jeśli po takim rozkładzie przyjrzymy się jego znaczeniu, to można dokładniej zrozumieć treść, jaką pierwotnie ono wyrażało. Przedrostek *pro* wskazuje na wstępną, przygotowawczą fazę, niższy stopień tego, co oznacza drugi człon i tłumaczony jest jako uprzedni, występujący przed. *Gnosis* - poznanie, w starożytności oznaczało wiedzę tajemną dostępną tylko wybranym. Patrząc w ten sposób na termin "prognoza" dochodzi się do wniosku, że oznacza on uprzednią wiedzę o czymś, co jeszcze nie nastąpiło, wiedzę niedostęną powszechnie, lecz tylko wybranym, tym którzy wykazują się znajomością określonej problematyki.

Zauważmy jak dalece odbiega od pierwotnego, znaczenie tego słowa w języku potocznym. Dzisiaj każdy sąd o przyszłych stanach zjawisk, procesów, niezależnie od podstaw wnioskowania, skłonni jesteśmy określać jako prognozę. Jego etymologia wskazuje natomiast wyraźnie, że wnioskowanie takie powinno mieć naukowe podstawy, opierać się na prawach nauki.

W takim konteście stwierdzenie, że 31 grudnia 1992 roku Słońce w Warszawie zajdzie o godzinie 15.33 jest prognozą. Wnioskowanie to oparte jest na prawach nauki opisujących ruchy planet. Podobnie, jeżeli z przeprowadzonych badań statystycznych wynika, że w Polsce 28% młodocianych przestępców skazanych przez sądy na karę pozbawienia wolności powraca po jej odbyciu do przestępstwa, to teza głosząca, że losowo wybrany skazany popełni z prawdopodobieństwem 0.28 kolejne przestępstwo jest prognozą. Jej podstawą teoretyczną jest analiza danych statystycznych. Trudno natomiast mianem prognozy określić stwierdzenie laika, człowieka który nie zna zasad funkcjonowania giełdy papierów wartościowych, przewidujące na przykład wzrost na najbliższej sesji kursu akcji określonej spółki.

Należy wyraźnie odróżnić prognozę od wróżby, wizji, przepowiedni czy przypuszczenia. O ile w pierwszym przypadku podstawą wnioskowania musi być wiedza, znajomość zagadnienia, to w pozostałych mogą to być intuicja, objawienie, przekonanie itp.

Oddzielnym problemem jest kwestia dokładności prognoz. Nawet w tak oczywistym przypadku, jak prognozowanie zachodu Słońca danego dnia w określonym miejscu na Ziemi może okazać się błędne. Mimo że określone stwierdzenie jest konsekwencją praw nauki, tutaj praw ruchu planet, to przez to, że funkcjonuje ono w określonej obiektywnej rzeczywistości może być błędne. Nie ma bowiem gwarancji, że nie nastąpi kataklizm zaburzający ład panujący we Wszechświecie. Prawa nauki opisują zdarzenia w modelach teoretycznych, a rzeczywistość nie zawsze odpowiada modelowi.

W przedstawionej pracy podjęto próbę usystematyzowania wybranej grupy metod prognozy stosowanych w ekonomii oraz szczegółowo zaprezentowano metodę wyznaczania przyszłych stanów zjawisk opartą na jednej z zasad rządzących rozwojem realnych, występujących w rzeczywistości, procesów, a mianowicie zasadzie inercji.

Rozdział pierwszy zawiera krótki opis wybranych metod prognozy ekonomicznej. Cechą wspólną ich wszystkich jest to, że przyszłe stany zjawisk wyznacza się jedynie na podstawie danych dotyczących ich wcześniejszych realizacji. Opis ten jest zwięzły, przedstawia w krótkiej formie jedynie sposób wyznaczania prognozy. Podstawy teoretyczne służące budowie tych modeli można znaleźć w cytowanej literaturze. W rozdziale tym zaproponowano także podział wspomnianych metod na dyskretne i ciągłe. Dyskretne charakteryzują się tym, że prognozy wyznaczane za ich pomocą są jednostkowe, określają wielkość danego zjawiska tylko w ustalonych punktach czasu, dzięki ciągłym można natomiast podać trend rozwoju zjawiska w przyszłości. Dla każdej z wymienionych grup metod wskazano tam również ogólny model obejmujący zasady ich tworzenia.

W rozdziale drugim przypomniano jedną z ważniejszych zasad mechaniki klasycznej, a mianowicie zasadę inercji i przedstawiono jej znaczenie w prognozowaniu zjawisk ekonomicznych. Szczególną rolę odgrywać powinna ona wtedy, gdy rozwojem interesującego nas procesu nie rządzą prawa nauki, dzięki którym moglibyśmy określać jego przyszłe stany. Zaproponowano ją jako rozwiązanie, gdy w sytuacji nieznajomości praw nauki nie można odwołać się do wiedzy ekspertów z danej dziedziny, czyli wtedy, kiedy należy wyznaczyć prognozę mając do dyspozycji jedynie dane dotyczące wcześniejszych realizacji obserwowanego zjawiska.

Rozdział trzeci poświęcony jest matematycznemu opisowi zaprezentowanego w rozdziale drugim modelu. Udowodniono podstawowe twierdzenia dotyczące istnienia funkcji trendu spełniającej postulat inercyjnego rozwoju zjawiska. Przedstawiono również efektywny sposób wyznacznia prognoz, w którym wykorzystuje się wspomnianą zasadę.

Przykład zastosowania opisanych w rozdziale pierwszym i trzecim metod do prognozowania konkretnych zjawisk ekonomicznych można znaleźć w rozdziale czwartym. Celem wykonanych obliczeń było porównanie dokładności prognoz uzyskanych za pomocą różnych metod. W związku z tym nie wyznaczano prognoz aktualnych, lecz na lata, z których posiadano dane o rzeczywistych realizacjach rozważanych zjawisk. Wnioski wynikające z przeprowadzonej analizy mogą uzasadniać tezę zaprezentowaną w rozdziale drugim, mówiącą o tym, że w przypadku nieznajomości praw rządzących rozwojem zjawiska i niemożliwości odwołania się do opinii eksperta usprawiedliwione jest odwołanie się do ogólnych zasad rozwoju realnych, występujących w otaczającym nas świecie, procesów.

W przypadku zjawisk ekonomicznych rzadko mamy do czynienia z prognozami opartymi na prawach nauki. Jeżeli wiadomo, że rozwój w czasie interesującego nas zjawiska jest na przykład liniowy, opisywany funkcją $f(t)=at+b$, to stwierdzenie, że jego wielkość w chwili T będzie wynosić $aT+b$, jest prognozą. Natomiast, gdy nie znamy praw rządzących rozwojem zjawiska i nie możemy w danej sytuacji odwołać się do opinii osób kompetentnych w tej dziedzinie najczęściej próbuje się znaleźć, wśród istniejących model najlepiej, według ustalonego kryterium, opisujący proces, którego stany ilościowe nas interesują, a następnie używa się tego modelu do wyznaczenia prognozy. Tak wyznaczona prognoza oparta jest na określonych przesłankach teoretycznych, jakimi są twierdzenia służące budowie wybranego modelu. Powstaje jednak pytanie na ile wybór modelu - metody prognozy jest prognozą naukową a na ile subiektywną hipotezą, arbitralną decyzją, czy zdarzeniem losowym.

Rozdział 1

KLASYFIKACJA METOD PROGNOZY

Każde działanie człowieka składa się z realizacji strategii - ciągu decyzji. Decyzja natomiast oparta jest na określonym przypuszczeniu jej trafności. Najczęściej z kilku wariantów wybiera się jeden, zdaniem decydującego najbardziej słuszny. Wybór optymalnej decyzji następuje na podstawie oceny dopuszczalnych wariantów, z których każdy opracowany zostaje na podstawie prognozy o stanie danego zjawiska w przyszłości. Rozpatrzmy prosty przykład. Kierowca przejeżdża samochodem obok stacji benzynowej i podejmuje decyzję o tankowaniu. Analiza jego sytuacji jest prosta. Ma on do dyspozycji takie dane, jak ilość paliwa w zbiorniku i odległość do następnej stacji. Informacje te w połączeniu z prognozą zużycia paliwa w czasie jazdy warunkują podjęcie określonej decyzji.

Wybór optymalnej decyzji jest tym łatwiejszy, im lepiej znana jest dokładność prognoz, na podstawie których opracowywane są poszczególne warianty. Dokładność prognozy zależy natomiast od przyjętego modelu, który jest podstawą wnioskowania o ilościowych czy jakościowych stanach zjawiska. Sytuacja jest jasna, gdy za model służy prawo nauki. Prognozowanie tego typu zjawisk jest zastosowaniem w konkretnym przypadku ogólnej prawidłowości, a podjęcie optymalnej decyzji uzależnione jest tylko od znajomości określonych praw.

Decyzje ekonomiczne podejmowane są najczęściej na podstawie prognoz opartych na modelach. Rzadko mamy tu prawa nauki. Najliczniejszą grupę stanowią prognozy z modeli ekonometrycznych. Podstawowym zadaniem w tym wypadku jest zbudowanie modelu. Przypuśćmy, że zadaniem jest prognoza wielkości pewnej zmiennej $\mathbf{y}$ w czasie t_0+t, gdzie t_0 jest chwilą aktualną, a $t>0$. Załóżmy ponadto, że wielkość $\mathbf{y}$ zależy od wartości zmiennych $x_1,\ldots,x_n$, inaczej mówiąc $\mathbf{y}$ jest funkcją wektora $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$, czyli $\mathbf{y}=f(\mathbf{x})$. Przy takich oznaczeniach funkcję f nazywa się modelem ekonometrycznym kształtowania się zmiennej $\mathbf{y}$, $\mathbf{y}$ - zmienną objaśnianą, zaś $\mathbf{x}$ - wektorem zmiennych objaśniających. Pamiętać należy, że zależność funkcyjna zostaje ułożona w czasie t_0, w którym znane są wartości zmiennych objaśniających. Niech F oznacza przestrzeń wszystkich modeli ekonometrycznych wyjaśniających kształtowanie się zmiennej $\mathbf{y}$, a F^* przestrzeń funkcjonałów nad F. Wartości tych funkcjonałów nazywa się prognozami zmiennej $\mathbf{y}$. Wybór określonego funkcjonału do obliczenia prognozy zależy od przyjętej zasady predykcji, np. może to być wartość oczekiwana prawej strony modelu (zasada predykcji nieobciążonej). Potrzebne do wyznaczenia zmiennej **y** w chwili t_0+t wartości zmiennych objaśniających są albo wielkościami danymi, jak np. w przypadku, gdy taką zmienną jest czas, albo wielkościami, które się prognozuje lub przyjmuje za znane na podstawie odpowiedniego oszacowania.

Dokładna analiza tego typu prognoz wykracza poza zamierzone ramy opracowania. Opis ekonometrycznych metod prognozy można znaleźć w monografiach [1,2,3]. W dalszych rozważaniach ograniczymy się tylko do przypadku, gdy jedyną zmienną objaśniającą jest czas. Powoduje to przyjęcie kolejnego założenia o ograniczeniu problemu do prognoz czasowych. Nie będziemy w związku z tym zajmować się prognozami przestrzennymi, niezależnymi od czasu. Tego typu zagadnienia rozpatrywane są np. w pracy [4]. W ramach prognoz czasowych świadomie nie zostaną uwzględnione metody dotyczące prognozowania zjawisk okresowych. Jest to spowodowane chęcią zachowania przejrzystości i spójności konstruowanych dalej modeli ogólnych. Procesy okresowe stanowią wyraźnie odrębną grupę zjawisk i jakiekolwiek porównania metod służących ich prognozowaniu z pozostałymi nie mogą być podstawą do wysnuwania ogólnych wniosków. W związku z tym opisane zostaną jedynie wybrane z pozostałych metody prognoz czasowych. Krótki przegląd metod okresowych można znaleźć np. w pracy [5].

MODELE DYSKRETNE

1. Metoda naiwna [5]

Jest to najprostsza i najmniej skomplikowana z rozpatrywanych metod prognozy. Oparta jest ona na założeniu niezmienności zjawiska w czasie. Mając dany szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$ prognozę p_{T+1} na okres T+1 wyznacza się z równości

$$p_{T+1}=y_T.$$

Niektóre z opisanych w dalszej części rozdziału metod, bardziej skomplikowanych, zależnych od kilku nieraz parametrów przy odpowiednim ich doborze redukują się do metody naiwnej. Co więcej, często w zagadnieniach praktycznych dobierając parametry tych metod, tak aby przy ustalonym mierniku *ex post* rzędu dokładości prognozy otrzymać najmniejsze błędy, dochodzi się, o czym świadczą przykłady zamieszczone w ostatnim rozdziale, do tej właśnie metody.

2. Metoda średnich ruchomych [6,7,8]

Przyjmijmy, że dane są wielkości prognozowanej zmiennej **y** w poprzednich jednostkach czasu, czyli że mamy dany szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$. Jednostka czasu jest dowolna. Może nią być tydzień, miesiąc, rok itd. Niech k będzie liczbą naturalną mniejszą od T. Prognozę na okres T+1 wyznacza się według następującego wzoru:

$$p_{T+1}=(y_T+y_{T-1}+...+y_{T-k+1})/k.$$

W analogiczny sposób można wyznaczyć prognozy na okresy dalsze, tzn. p_{T+2}, p_{T+3} itd., dysponując danymi z okresów wcześniejszych, czyli znając y_{T+1}, y_{T+2} itd. Zauważmy ponadto, że prognozę p_{T+2} można obliczyć także inaczej, korzystając z wcześniej wyznaczonej prognozy p_{T+1}, prawdziwa jest bowiem równość

$$p_{T+2}=p_{T+1}+(y_{T+1}-y_{T-k+1})/k,$$

gdyż

$$p_{T+2}=(y_{T+1}+y_T+...+y_{T-k+2})/k=$$
$$(y_{T+1}+y_T+...+y_{T-k+2}+y_{T-k+1}-y_{T-k+1})/k=$$
$$(y_T+y_{T-1}+...+y_{T-k+1})/k+(y_{T+1}-y_{T-k+1})/k=$$
$$p_{T+1}+(y_{T+1}-y_{T-k+1})/k.$$

Dobór liczby k zależy od charakteru prognozowanej wielkości. Może ona być tym większa, im mniej dynamiczny jest rozwój zmiennej **y**. Dla k=1 metoda ta redukuje się do opisanej wcześniej metody naiwnej.

3. Metoda średnich ważonych [8]

Przy założeniach i oznaczeniach takich, jak w metodzie średnich ruchomych, prognozę oblicza się według wzoru

$$p_{T+1}=w_0y_T+w_1y_{T-1}+...+w_{k-1}y_{T-k+1},$$

gdzie $w_0+w_1+\ldots+w_{k-1}=1$. Wagi w_i wprowadzone zostają po to, aby można było zaznaczyć, który z okresów wcześniejszych, zdaniem podającego prognozę, będzie miał największy wpływ na przyszłe kształtowanie się zmiennej **y**. Najczęściej w takim wypadku spotyka się założenie, że w_i jest ciągiem malejącym, czyli że największy wpływ na przyszły rozwój zjawiska ma okres bezpośrednio poprzedzający, a następnie wpływ ten wraz z biegiem czasu maleje.

Prognozy na okresy następne wyznacza się podobnie, jak we wcześniej opisanej metodzie średnich ruchomych. Podobnie także dla k=1 redukuje się ona do metody naiwnej.

4. Metoda podwójnych średnich ruchomych [6,9]

Przypuśćmy, że dane szeregu czasowego $y_1,y_2,\ldots,y_T$ pochodzą z pewnego procesu liniowego, tzn. $y_i=ai+b$, $i=1,2,\ldots,T$. Łatwo zauważyć, że wówczas prognozy wyznaczone metodą średnich ruchomych będą zawsze zaniżone lub zawyżone, w zależności od współczynnika a, w stosunku do rzeczywistej realizacji zmiennej **y**. Gdy przez S_i oznaczymy prognozę na okres i wyznaczoną tą metodą przy ustalonej długości okresu $k\neq 1$, to wówczas

$$S_{i+1}=b-(k-1)a/2+ai=y_i-(k-1)a/2,\quad i=k+1,k+2,\ldots,T.$$

Widać stąd, że wartości S_i należą do pewnej prostej równoległej do wyjściowej opisanej równaniem $f(t)=at+b$.

Oznaczmy przez S_i' średnie ruchome wcześniej znalezionych średnich S_i, tzn.

$$S_i'=(S_i+S_{i-1}+...+S_{i-k+1})/k, \quad i=2k,2k+1,...,T.$$

Podobnie jak poprzednio można zauważyć, iż

$$S_{i+1}'=b-(k-1)a/2+ai=S_i-(k-1)a/2.$$

Stąd łatwo wyliczyć, że

$$y_i=2S_{i+1}-S_{i+1}'$$

i

$$a=2(S_{i+1}-S_{i+1}')/(k-1).$$

W związku z tym

$$y_{i+1}=a(i+1)+b=ai+b+a=y_i+a=$$
$$2S_{i+1}-S_{i+1}'+2(S_{i+1}-S_{i+1}')/(k-1).$$

Prognozę na okres T+1 metodą podwójnych średnich ruchomych wyznacza się wobec tego według wzoru

$$p_{T+1}=2S_{T+1}-S_{T+1}'+2(S_{T+1}-S_{T+1}')/(k-1).$$

Rozumowanie prowadzące do powyższego wzoru zostało dokonane przy założeniu liniowości rozpatrywanego procesu. W takim przypadku prognoza pokrywa się z rzeczywistą realizacją zmiennej **y**. W praktyce nie możemy stwierdzić linowości, chyba że znamy prawo nauki stwierdzające ten fakt, ale wówczas nie potrzebujemy żadnej innej metody prognozy. Niemniej jednak teoretyczne przesłanki służące budowie modelu można traktować jako wskazówki co do zakresu stosowalności metody. Ponadto taka modyfikacja metody średnich ruchomych pozwala zmniejszyć błąd prognozy w przypadku monotonicznych szeregów czasowych.

5. Metoda wyrównywania wykładniczego [6]

Aby móc korzystać z metody średnich ruchomych, trzeba dysponować określoną, zależną od długości cyklu k, liczbą danych z poprzednich okresów. Uniemożliwia to korzystanie z tej metody w sytuacji, gdy zjawisko dopiero zaczęto obserwować lub z innych przyczyn nie są znane jego poprzednie stany. Okazuje się, że przy pewnych upraszczających sytuację założeniach można ideę tamtej metody przenieść na wyżej wspomniane przypadki.

Przypuśćmy, że dysponujemy wyznaczoną metodą średnich ruchomych prognozą na okres p_{T+1}, nie potrafimy natomiast odtworzyć danych o kształtowaniu się wielkości prognozowanej zmiennej **y** w okresach wcześniejszych niż T+1. Chcąc skorzystać ze wzoru

$$p_{T+2}=p_{T+1}+(y_{T+1}-y_{T-k+1})/k$$

musimy w pewien sposób "odtworzyć" wielkość y_{T-k+1}. Najbardziej naturalne jest przyjęcie jej jako średniej arytmetycznej wszystkich danych od okresu T-k+1 do okresu T włącznie. Jak łatwo zauważyć, korzystając z zależności

$$p_{T+1}=(y_T+y_{T-1}+...+y_{T-k+1})/k$$

otrzymujemy następującą równość pozwalającą wyznaczyć prognozę na okres T+2:

$$p_{T+2}=p_{T+1}+(y_{T+1}-p_{T+1})/k.$$

Po przekształceniu dostajemy wzór

$$p_{T+2}=y_{T+1}/k+(1-1/k)p_{T+1},$$

a podstawiając $1/k=\alpha$

$$p_{T+2}=\alpha y_{T+1}+(1-\alpha)p_{T+1},$$

który określa sposób wyznaczania prognozy metodą wyrównywania wykładniczego.

Współczynnik $\alpha\in[0,1]$ nazywany parametrem wygładzania lub stałą wygładzającą, jest więc uogólnieniem czynnika uśredniającego 1/k z metody średnich ruchomych. Jego dobór, podobnie jak w tamtej metodzie, zależy od charakteru prognozowanego zjawiska. Jeśli przewidujemy kontynuację dotychczasowej prawidłowości rozwoju zmiennej prognozowanej, to przyjmujemy parametr wygładzania bliski zeru, natomiast gdy np. w chwili T+1 nastąpiła nagła zmiana zmiennej **y** i sądzimy, że fakt ten będzie miał istotniejsze dla dalszego rozwoju znaczenie niż wcześniejsze tendencje, to wówczas parametr wygładzania przyjmujemy bliski jedności. Najczęściej stałą wygładzającą wyznacza się w sposób doświadczalny konstruując prognozy na okresy minione przy różnych wartościach α, a następnie porównuje się prognozy z rzeczywistą realizacją zmiennej **y** i wybiera tę stałą, przy której, według ustalonego miernika, prognozy najlepiej aproksymują rzeczywistość. Należy zwrócić uwagę, że w metodzie wyrównywania wykładniczego, posługując się ogólnym wzorem, nie można wyznaczyć prognozy na drugi okres, gdyż

$$p_2=\alpha y_1+(1-\alpha)p_1,$$

a nie jest znana prognoza p_1, czyli prognoza na okres odpowiadający początkowi obserwacji zjawiska. W takiej sytuacji najczęściej przyjmuje się, iż $p_1=y_1$, czyli że "prognoza" równa jest rzeczywistej realizacji zmiennej **y**.

Zauważmy, że

$$p_{T+1}=\alpha y_T+(1-\alpha)p_T=\alpha y_T+(1-\alpha)(\alpha y_{T-1}+(1-\alpha)p_{T-1})=$$

$$\alpha y_T+\alpha(1-\alpha)y_{T-1}+(1-\alpha)^2(\alpha y_{T-2}+(1-\alpha)p_{T-2})=$$

$$\alpha y_T+\alpha(1-\alpha)y_{T-1}+\alpha(1-\alpha)^2\alpha y_{T-2}+\ldots+\alpha(1-\alpha)^{T-1}y_1+(1-\alpha)^T p_1=$$

$$\alpha\sum_{k=1}^{T}(1-\alpha)^{T-k}y_k+(1-\alpha)^T p_1.$$

Przyjmując wcześniej wspomniane założenie o pierwszej prognozie p_1 możemy zapisać, że

$$p_{T+1}=\alpha\sum_{k=1}^{T}(1-\alpha)^{T-k}y_k+(1-\alpha)^T y_1.$$

Związek ten wskazuje na to, że przy obliczaniu prognozy w okresie T+1 rozpatruje się liniową kombinację wszystkich wcześniejszych obserwacji. Współczynniki tej kombinacji maleją geometrycznie wraz z cofaniem się w czasie, co świadczy o przypisywaniu większego znaczenia późniejszym danym. Zasada ta zbliża częściowo metodę wyrównywania wykładniczego do metody średnich ważonych. Zauważmy na koniec, że jeżeli $\alpha=1$, to metoda wyrównywania wykładniczego redukuje się do metody naiwnej.

6. Metoda wyrównywania wykładniczo-autoregresyjnego [1]

Metoda ta jest uogólnieniem wcześniej opisanej metody wyrównywania wykładniczego. Prognozę wyznacza się według następującej zależności:

$$p_{T+1}=\alpha y_T+(1-\alpha)\sum_{i=0}^{n}\beta_i p_{T-i},$$

gdzie $0<\beta_i<1$, $\beta_0+\beta_1+...+\beta_n=1$.

O ciągu β_i najczęściej zakłada się, że jest malejący, co odpowiada wspomnianej zasadzie większej wagi okresów późniejszych. Model wyrównywania wykładniczego może mieć zastosowanie, gdy zmienna prognozowana **y** wykazuje wahania periodyczne. Przyjęcie w takim wypadku liczby n takiej, aby n+1 było równe długości cyklu zmiennej **y**, pozwala uwzględnić okresowość zjawiska. Wtedy oczywiście założenie o tym, że ciąg β_i jest malejący traci znaczenie. Należy przyjąć inny, odpowiadający charakterowi rozwoju zmiennej **y**, system wag. W najprostszym przypadku można założyć, że $\beta_0=\beta_1=...=\beta_n=1/(n+1)$.

Podobnie jak poprzednio, dla $\alpha=1$ metoda ta redukuje się do metody naiwnej.

7. Metoda podwójnego wygładzania wykładniczego [6,9]

Rozumując podobnie jak w wypadku metody podwójnych średnich ruchomych i oznaczając przez S_i prognozę na okres i wyznaczoną metodą wyrównywania wykładniczego przy ustalonej stałej wygładzającej α różnej od zera i jedności, można zauważyć że

$$S_{i+1}=b-(1-\alpha)a/\alpha+ai,\ i=1,2,...,T,$$

gdzie a oraz b oznaczają, podobnie jak poprzednio, parametry procesu liniowego $f(t)=at+b$, z którego pochodzą dane $y_1,y_2,...,y_T$. Niech wielkości S_i' będą wygładzeniem szeregu prognoz otrzymanych metodą wyrównywania wykładniczego ze stałą α, czyli

$$S_{i+1}'=\alpha S_i+(1-\alpha)S_i',\ i=1,2,...,T.$$

S_1' można zdefiniować podobnie jak to zostało uczynione w punkcie piątym dla prognozy wyznaczanej na pierwszy okres. Punkty S_i oraz S_i' dla $i=3,4,...,T$ leżą na prostych równoległych do wykresu funkcji $f(t)$, a odległości pomiędzy sąsiednimi prostymi są stałe i równe $(1-\alpha)a/\alpha$. Stąd, podobnie jak w punkcie czwartym wylicza się

$$y_i=2S_{i+1}-S_{i+1}'$$

oraz

$$a=\alpha(S_{i+1}-S'_{i+1})/(1-\alpha).$$

Prowadzi to do określenia, analogicznie jak w przypadku metody podwójnych średnich ruchomych, prognozy na okres T+1 wzorem:

$$p_{T+1}=2S_{T+1}-S'_{T+1}+\alpha(S_{T+1}-S'_{T+1})/(1-\alpha).$$

8. Metoda potrójnego wygładzania wykładniczego [6]

W poprzednim punkcie pokazane zostało jak można zmodyfikować metodę wygładzania wykładniczego tak, aby otrzymane prognozy dokładniej aproksymowały dane procesów liniowych, lub zbliżonych do liniowych. Rozumowanie takie można uogólnić [6, s. 132] na procesy reprezentowane wielomianami wyższych rzędów typu

$$f(t)=a_0+a_1t+a_2t^2/2+...+a_nt^n/n!.$$

W zastosowaniach praktycznych przypadek wielomianów stopnia wyższego niż jeden ogranicza się zazwyczaj do funkcji kwadratowej. Otrzymuje się wówczas następujący wzór określający prognozę na okres T+1:

$$p_{T+1}=a_{T+1}+b_{T+1}+c_{T+1}/2,$$

gdzie

$$a_{T+1}=3S_{T+1}-3S'_{T+1}+S''_{T+1},$$

$$b_{T+1}=\alpha((6-5\alpha)S_{T+1}-(10-8\alpha)S'_{T+1}+(4-3\alpha)S''_{T+1})(2-2\alpha),$$

$$c_{T+1}=\alpha^2(S_{T+1}-2S'_{T+1}+S''_{T+1})/(1-\alpha)^2.$$

Wielkości wcześniej zdefiniowane w punkcie siódmym oznaczane są tak samo, natomiast S''_i jest wygładzeniem poprzednio otrzymanego ciągu liczb S'_i, czyli

$$S''_i=\alpha S'_i+(1-\alpha)S''_i,\ i=1,2,...,T.$$

Wartość S''_1 można określić analogicznie, jak to zostało uczynione w punktach piątym i siódmym przyjmując, że $S''_1=S'_1$.

9. Jednoparametrowa metoda liniowego wygładzania wykładniczego [8]

Załóżmy, że wielkość prognozowanej zmiennej **y** rośnie w rozpatrywanym przez nas okresie, tzn. $y_1\le y_2\le...\le y_T$. Zauważmy, iż

$$p_2=(1-\alpha)y_1+\alpha p_1=(1-\alpha)y_1+\alpha y_1=y_1\le y_2,$$

podobnie

$$p_3=(1-\alpha)y_2+\alpha p_2\le(1-\alpha)y_2+\alpha y_2=y_2\le y_3.$$

Łatwo można stwierdzić, że rozumowanie indukcyjne doprowadzi nas do wniosku, iż przy powyższych założeniach prognozy zawsze będą niższe od rzeczywistej realizacji zmiennej **y**. Analogicznie przedstawia się sytuacja w przypadku, gdy ciąg $y_1,y_2,...,y_T$ jest malejący. Aby tego uniknąć, można zmodyfikować klasyczną metodę uwzględniając tempo zmian prognozowanej zmiennej **y**. Czyni się to podobnie, jak w dwóch poprzednio opisanych metodach, dodając składnik powodujący zmniejszenie rozbieżności prognoz i rzeczywistej realizacji prognozowanego procesu. Określmy ciąg r_i w sposób rekurencyjny:

$$r_1=0,$$

$$r_{i+1}=\alpha(p_{i+1}-p_i)+(1-\alpha)r_i,\ i=1,2,\ldots,T,$$

gdzie p_i jest prognozą zmiennej **y** wyznaczoną metodą wyrównywania wykładniczego ze stałą $\alpha\in[0,1]$. Przewidywaną wielkość zmiennej **y** w okresie T+1 określa wówczas następujący wzór:

$$P_{T+1}=p_{T+1}+r_{T+1}.$$

10. Dwuparametrowa metoda liniowego wygładzania wykładniczego [5]

Przyczyny prowadzące do powstania tej metody były takie same, jak w przypadku modelu jednoparametrycznego. Różnica polega jedynie na tym, iż nie wymaga się, aby w definicji ciągu r_i występowała ta sama stała wygładzająca α, jak w definicji ciągu prognoz p_i. W związku z tym ciąg r_i określa się następująco:

$$r_1=0,$$

$$r_{i+1}=\beta(p_{i+1}-p_i)+(1-\beta)r_i,\ i=1,2,\ldots,T,\ \beta\in[0,1].$$

Prognozę P_{T+1} określa się identycznie przyjmując

$$P_{T+1}=p_{T+1}+r_{T+1}.$$

Łatwo zauważyć, że metoda jednoparametryczna jet szczególnym przypadkiem dwuparametrycznej i w sytuacji, gdy $\beta=\alpha$ wyniki otrzymywane jedną i drugą metodą są takie same.

Mimo eliminacji stałego zaniżania lub zawyżania prognoz w przypadku stałych tendencji rozwojowych zmiennej **y**, model ten nie pozwala, podobnie jak wszystkie wcześniej opisane, na przewidywanie zmian jakościowych badanego zjawiska. Najpóźniej zmiany takie są wykrywane metodą średnich ruchomych, gdyż zaobserwowana nawet zmiana charakteru rozwoju zmiennej **y** wpływa, ze względu na jednakową wagę wszystkich obserwacji, bardzo późno na prognozę, tym później, im dłuższy jest cykl k. Najwcześniej zmiany jakościowe można wykryć posługując się metodą wygładzania wykładniczego, szczególnie wtedy, gdy stała wygładzająca α jest tak dobrana, aby prognozując można było uwzględniać przede wszystkim ostatnią obserwację zmiennej **y**, czyli gdy jest ona bliska jedności.

Analizując przedstawione metody prognozowania można stwierdzić, że mają one wiele cech wspólnych. Wszystkie pozwalają wyznaczyć prognozę tylko na jeden, następujący bezpośrednio po chwili aktualnej okres. Oznacza to, iż są to metody punktowe i prognoza wielkości zmiennej **y** może być wyznaczona tylko na czas odległy od chwili aktualnej o jedną jednostkę ustaloną przez częstotliwość pomiaru danych. Są one powtarzalne w tym sensie, że możliwe jest, po każdorazowym uaktualnieniu danych, ich wielokrotne stosowanie. Wreszcie cecha najważniejsza: w każdej z tych metod prognoza jest kombinacją liniową wartości szeregu czasowego. Nasuwa to przypuszczenie o możliwości stworzenia jednego modelu, którego wspomniane metody będą szczególnymi przypadkami.

MODEL OGÓLNY METOD DYSKRETNYCH

Niech $F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń wszystkich funkcji określonych na zbiorze liczb całkowitych przyjmujących wartości rzeczywiste. Tradycyjnie wartości funkcji $a\in F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ w punkcie $i\in\mathbb{Z}$ będziemy oznaczać przez a_i. Rozpatrzmy zbiór $\mathbb{L}(F(\mathbb{Z},\mathbb{R}))$ wszystkich operatorów liniowych określonych i przyjmujących wartości w przestrzeni $F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ i oznaczmy przez kerA jądro operatora A. Będziemy mówili, że ciąg $a\in F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ spełnia warunek początkowy wyznaczony przez szereg czasowy $y_1,y_2,...,y_T$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje takie $j\in\mathbb{Z}$, że $a_{j+k}=y_k$, gdzie $k\in\{1,2,...,T\}$. Liczbę j nazywać będziemy okresem zerowym. Zauważmy, że jeśli ciąg a spełnia warunek początkowy wyznaczony przez szereg czasowy $y_1,y_2,...,y_T$, to także ciąg $a\circ\phi$ spełnia ten warunek, gdzie ϕ jest translacją zbioru liczb całkowitych, tzn.

$$\phi:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z} \text{ i } \phi(l)=l+r,\ r\in\mathbb{Z}.$$

W związku z tym w praktycznych zastosowaniach można przyjąć, że okres zerowy j jest równy zeru.

Załóżmy, że mamy dany szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$ i niech $B \in \mathbb{L}(F(\mathbb{Z}, \mathbb{R}))$ będzie operatorem określonym następująco:

$$B(a) = b \Leftrightarrow \forall_{i \in \mathbb{Z}}\; b_i = \sum_{k=i-T}^{i-1} \alpha_{k-(i-T)+1} a_k,$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_T \in \mathbb{R}$. Jak łatwo zauważyć, obrazem elementu a w operacji B jest taki ciąg, którego wyrazy są kombinacjami liniowymi o współczynnikach α_k wyrazów ciągu a. Jest więc to taka operacja, która odpowiada zasadzie wyznaczania opisanych prognoz punktowych. Oznaczmy A=B-I, gdzie I jest operatorem identycznościowym i zauważmy, że do jądra operatora A należą wszystkie punkty stałe operatora B. Jeżeli istnieje taki element $a \in \ker A$, który spełnia warunek początkowy wyznaczony przez szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$, to prognozę na okres T+1 określa zależność

$$p_{T+1} = a_{j+T+1},$$

gdzie j jest okresem zerowym. Jak łatwo zauważyć, mimo iż ciąg a nie jest wyznaczony jednoznacznie, to określenie prognozy jest poprawne, czyli nie zależy od wyboru ciągu.

Powstaje jednak problem co zrobić, gdy w zbiorze kerA nie istnieje ciąg spełniający warunek początkowy. W takim wypadku można szukać w zbiorze kerA ciągu najlepiej aproksymującego warunek początkowy, tzn. poszukiwać takiej funkcji a, której obcięcie do pewnego podzbioru postaci $\{i+1, i+2, \ldots, i+T\}$, $i \in \mathbb{Z}$, najdokładniej, zgodnie z przyjętą regułą aproksymacji (np. klasyczną regułą najmniejszych kwadratów), przybliża szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$. Jeżeli okaże się, że błąd aproksymacji jest większy od przyjętego jako dopuszczalny, to należy stwierdzić, iż reguła prognozowania opisana operatorem A nie może być zastosowana w tym konkretnym przypadku.

Możliwa jest także całkiem inna konstrukcja ogólnego modelu pozwalająca ominąć wspomniane trudności. Rozpatrzmy mianowicie operator S określony wzorem

$$S_l(a) = b \Leftrightarrow \begin{cases} b_i = a_i & \text{dla } i \le l \\ b_i = \sum\limits_{k=i-T}^{i-1} \alpha_{k-(i-T)+1} a_k & \text{dla } i > l, \; l \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

Niech a będzie ciągiem spełniającym warunek początkowy wyznaczony przez szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$. Załóżmy ponadto, że okres zerowy $j=l-T$. W takim przypadku prognozę p_{T+1} można wyznaczyć następująco:

$$p_{T+1} = b_{l+1},$$

gdzie $l=j+T$, a $b=S_l(a)$. Łatwo zauważyć, utożsamiając okres zerowy z liczbą 0, że jeśli zamiast przestrzeni $F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$ będziemy rozpatrywać przestrzeń $F(\mathbb{N},\mathbb{R})$, a operator $B \in L(F(\mathbb{N},\mathbb{R}))$ zdefiniujemy następująco:

$$B(a)=b \Leftrightarrow \begin{cases} b_i = a_i & \text{dla } i=1,2,\ldots,T \\ b_i = \sum\limits_{k=i-T}^{i-1} \alpha_{k-(i-T)+1} a_k & \text{dla } i>T, \end{cases}$$

to określając $A=B-I\in\mathbf{L}(F(\mathbb{N},\mathbb{R}))$ otrzymamy dokładnie takie samo zagadnienie, jak dla operatorów na przestrzeni $F(\mathbb{Z},\mathbb{R})$. W tym przypadku element $a\in\ker A$, spełniający warunek początkowy wyznaczony przez szereg czasowy $y_1,y_2,\ldots,y_T$ istnieje i jest wyznaczony jednoznacznie. Wynika to bezpośrednio z definicji operatora B.

Opisana tu klasa operatorów liniowych została wybrana tak, aby odpowiadała ona metodom prognozy opisanym w punktach 1-10. Nie stanowi to oczywiście żadnego ograniczenia. Analogiczne do wspomnianego wyżej postępowanie pozwoli wyznaczyć prognozę przy wyborze dowolnego innego operatora liniowego. Operator jest tu odpowiednikiem prawa nauki albo samym prawem nauki.

MODELE CIĄGŁE

11. Trend liniowy [5,8,9]

Przypuśćmy, że wiemy jak kształtowała się wielkość prognozowanej zmiennej **y** w T poprzednich jednostkach czasu, czyli że dysponujemy szeregiem czasowym $y_1,y_2,\ldots,y_T$. Załóżmy ponadto, że ciąg ten jest monotoniczny. Jeżeli posiadane informacje wskazują na stałe tempo zmian prognozowanego zjawiska, to można założyć, że jego rozwój jest liniowy i jako podstawę prognozy przyjąć trend będący przedłużeniem aktualnej tendencji. Należy w takim przypadku znaleźć funkcję liniową $y(t)=at+b$, która w najlepszy sposób aproksymuje dany szereg czasowy. Znalezienie takiej funkcji sprowadza się do wyznaczenia parametrów a oraz b i jedynym problemem do rozwiązania pozostaje rozstrzygnięcie co będziemy rozumieć przez najlepszą aproksymację danych. Najczęściej przyjmuje się za kryterium minimalizację sumy kwadratów błędów, czyli wyznaczając a i b stosuje się klasyczną metodę najmniejszych kwadratów. Przy takich założeniach współczynnik a wyraża się wzorem

$$a = \frac{1y_1+2y_2+\ldots+Ty_T-TT_sy_s}{1^2+2^2+\ldots+T^2-TT_s^2},$$

gdzie $T_s=1/T(1+2+\ldots+T)$, a $y_s=1/T(y_1+y_2+\ldots+y_T)$, natomiast

$$b=y_s-aT_s.$$

Samo wyznaczenie prognozy, jeśli dysponujemy linią trendu, sprowadza się do obliczenia odpowiednich wartości funkcji liniowej. Wobec tego

$$p_{T+1}=y(T+1)=a(T+1)+b,$$

$$p_{T+2}=y(T+2)=a(T+2)+b \text{ itd.}$$

Zasada prognozy na podstawie trendu jest taka sama we wszystkich przypadkach, niezależnie od tego jaka funkcja trend ten opisuje. Aby obliczyć przypuszczalną wartość zmiennej **y** w okresach następnych T+x, x>0, należy wyznaczyć w tych punktach wartości funkcji trendu, tzn. jeśli funkcja y(t) opisuje trend zmiennej **y**, to $p_{T+x}=y(T+x)$.

Zasadą, którą należy przyjąć, jest dostosowanie wyprzedzenia prognozy do czasu zbierania danych. Im dłuższy jest ten okres, tym większy może być horyzont prognozy. Przyjęte na początku założenie o monotoniczności szeregu czasowego wynika oczywiście z faktu, że do wyznaczenia trendu posługiwaliśmy się funkcją monotoniczną. Założenie to jednak można pominąć, jeśli zdecydujemy się na zwiększenie błędów aproksymacji lub w miarę możliwości ograniczymy szereg czasowy do monotonicznego. Gdy zabiegi takie w konkretnym przypadku nie są możliwe, np. gdy zmienna **y** jest okresowa, należy zrezygnować z prognozowania na podstawie trendu liniowego.

12. Trend wielomianowy [3,6]

Prognozowanie na podstawie trendów wielomianowych jest uogólnieniem poprzednio opisanego modelu liniowego. W tym przypadku poszukuje się zamiast funkcji liniowej wielomianu wyższego stopnia aproksymującego dane szeregu czasowego. Do zagadnienia tego można podejść w dwojaki sposób: albo ustalić stopień wielomianu, albo zdecydować się na dokładność aproksymacji i rozpatrywać wielomian interpolacyjny.

W pierwszym przypadku, oceniając chrakter zjawiska, decydujemy na wstępie jaki będzie stopień wielomianu opisującego trend. Decyzja taka może być oparta np. na analizie graficznej rozmieszczenia punktów szeregu czsowego w układzie współrzędnych. Położenie punktów na płaszczyźnie wskazuje dynamikę zjawiska, co związane jest oczywiście ze stopniem wielomianu opisującego trend. Im większe są zmiany w czasie, tym wyższy należy dobrać stopień wielomianu. Przy takim podejściu mogą pojawić się problemy z aproksymacją punktów szeregu czasowego. Wiadomo bowiem, że w ogólnym przypadku wielomian interpolujący n punktów szeregu czasowego musi być stopnia co najmniej n-1. Jeżeli z analizy graficznej wynika, że rozwój zjawiska będzie najlepiej opisany wielomianem stopnia niższego, to można nie znaleźć takiego, który interpoluje wszystkie punkty szeregu danych. W takim przypadku, podobnie jak w metodzie trendu liniowego, należy wybrać kryterium najlepszej aproksymacji. Może to być np. ponownie zasada minimalizacji kwadratów błędów.

Problemu takiego unika się wyznaczając trend na podstawie wielomianu najniższego stopnia interpolującego punkty szeregu czasowego, gdyż jest on wyznaczony jednoznacznie. Widać natomiast, że w tym modelu abstrahuje się w ogóle od charakteru prognozowanego zjawiska. Można sobie wyobrazić sytuację, w której mimo iż zmienna prognozowana **y** wykazuje prawie liniowy wzrost, to do opisu trendu użyje się wielomianu wyższego stopnia, przez co uzyska się, szczególnie w dalszych okresach, prognozy dalece odbiegające od rzeczywistych realizacji.

Pomysł użycia wielomianów do opisu przyszłych stanów prognozowanych zmiennych jest naturalny i ma swoje teoretyczne uzasadnienie. Przyjmijmy bowiem założenie, że rozwój zmiennej **y** opisywany jest przez nieznany, teoretyczny i ciągły względem czasu trend f(t). Wówczas na podstawie twierdzenia Weierstrassa wiemy, że na odcinku [1,T], odpowiadającemu czasowi obserwacji zjawiska, można funkcję f aproksymować wielomianami. W naszym przypadku funkcja f znana jest tylko w T punktach odpowiadających chwilom pomiaru zmiennej **y** (przy założeniu, że pomiary nie są obciążone błędami). Powoduje to, że dokładność maleje wraz ze zmniejszaniem liczby obserwacji. Jeżeli nawet przyjmiemy, iż trend wielomianowy na odcinku [1,T] dokładnie przybliża trend teoretyczny f, to w dalszym ciągu nie mamy gwarancji, że tak będzie w okresach następnych, czyli na półprostej (T,∞). Wiąże się to ze wspomnianym wcześniej oderwaniem trendów wielomianowych od charakteru zjawiska. Ten brak ekonomicznego uzasadnienia, szczególnie trendów opisywanych wielomianami interpolacyjnymi, jest głównym powodem krytyki tego modelu.

13. Analiza graficzna i metoda krzywych wzrostu [1]

Potraktujmy elementy szeregu jako punkty prostokątnego układu współrzędnych, w którym jednostką na jednej osi jest jednostka czasu, a na drugiej jednostkowa miara zmiennej **y**. Jedną z metod wstępnej oceny charakteru rozwoju prognozowanej zmiennej jest analiza graficzna. Polega ona na ustaleniu na podstawie rozmieszczenia punktów szeregu czasowego w układzie współrzędnych typu funkcji trendu. Po takiej analizie można stwierdzić, że punkty szeregu czasowego układają się wzdłuż pewnej krzywej, np. logarytmicznej, wykładniczej, lub że zjawisko wykazuje wzrost liniowy. Jest więc to pewien etap wstępny, po którym ograniczając się do ustalonej klasy funkcji, można przystąpić do wyznaczania trendu.

Załóżmy, że z analizy graficznej wynika, iż zmienna **y** ma charakter liniowy, wówczas parametry trendu można wyznaczyć wykorzystując metodę opisaną w punkcie szóstym. Podobnie o typie funkcji trendu można wnioskować analizując różnice

$$\Delta y = y_{i+1} - y_i, \; i=1,2,\ldots,T-1.$$

Wiadomo bowiem, że jeśli punkty (i, y_i) należą do wykresu funkcji liniowej, to jednostkowym przyrostom zmiennej niezależnej odpowiadają jednakowe przyrosty funkcji. Z tego wynika, że jeśli przyrosty $y_{i+1}-y_i$ są stałe, to potwierdza to hipotezę o liniowości trendu. O wykładniczym rozwoju zjawiska świadczyć będzie natomiast proporcjonalność przyrostów zmiennej niezależnej do względnych przyrostów wartości funkcji. Podobnie można stwierdzić czy rozwój zjawiska jest potęgowy, logarytmiczny itd.

Teoretycznie bardziej uzasadniona byłaby metoda wyznaczania funkcji trendu opierająca się na równaniu różniczkowym budowanym na podstawie znajomości mechanizmu rozwoju prognozowanej zmiennej. Niestety tylko w nielicznych przypadkach można ją zastosować w praktyce, gdyż często w wyniku takiego postępowania otrzymuje się bardzo skomplikowaną funkcję trendu. Może się zdarzyć nawet tak, że nie będzie się ona wyrażała przez funkcje elementarne. Z tego względu używa się metody mniej poprawnej teoretycznie, ale dającej efekty w praktyce.

14. Trendy segmentowe [10]

Załóżmy, że prognozowana zmienna **y** nie wykazuje w obserwowanym okresie jednakowej tendencji rozwoju, tzn. że zmienia się prędkość lub kierunek wzrostu wartości **y**. W takim przypadku, jak już wcześniej wspomniano, nie jest wskazane stosowanie metody trendu liniowego, gdyż błędy w aproksymacji szeregu czasowego funkcją liniową byłyby zbyt duże. Ideą opisywanego modelu jest rozszerzenie zastosowania trendów liniowych na przypadki niejednorodnego rozwoju zmiennej **y**.

Nazwijmy punktem zwrotnym szeregu czasowego $y_1, y_2, \ldots y_T$ taki czas t_i, że ciąg wartości (y_k), $k \in \{t_i - \alpha, t_i - \alpha + 1, \ldots, t_i\}$ charakteryzuje się tendencją odmienną od tendencji rozwoju ciągu wartości (y_k), $k \in \{t_i + 1, t_i + 2, \ldots, t_i + \beta\}$, gdzie α i β są liczbami naturalnymi, takimi że $t_i + \beta \leq T$, a $t_i - \alpha \geq 1$ i ponadto α i β są na tyle duże, aby można było mówić o pewnej tendencji rozwoju zmiennej **y**. W ten sposób pragnie się rozpatrywać okresy trwałych zmian pomijając momenty chwilowych odchyleń, które w pewnych przypadkach mogą wynikać z błędów pomiaru. Punkty zwrotne $z_1, z_2, \ldots, z_{S-1}$ dzielą przedział $[1,T]$ na S segmentów $[1,z_1],[z_1,z_2],\ldots,[z_{S-1},T]$, wewnątrz których zmienna **y** wykazuje jednakowy charakter rozwoju. Należy teraz znaleźć funkcję ciągłą, liniową na każdym segmencie, aproksymującą punkty szeregu czasowego. Można to uczynić dwoma sposobami: metodą najmniejszych kwadratów wyznaczyć, pczynając od pierwszego, dla każdego segmentu z osobna funkcję liniową $y_i(t)$ spełniającą postulat ciągłości w punktach zwrotnych, tzn. $y_i(z_i)=y_{i+1}(z_i)$, albo znaleźć takie funkcje liniowe $y_i(t)$ na każdym z segmentów, aby minimalizowały one wyrażenie

$$(y_1-y_1(t))^2+(y_2-y_1(t))^2+\ldots+(y_{z_1}-y_1(t))^2+\ldots+$$

$$(y_{z_{S-1}}-y_S(t))^2+\ldots+(y_T-y_S(t))^2$$

i spełnione było założenie ciągłości w punktach $z_1, z_2, \ldots, z_{S-1}$.

Łatwo zauważyć, że drugi sposób aproksymacji punktów szeregu czasowego wykorzystuje także metodę najmniejszych kwadratów z tym tylko, że żąda się minimalizacji błędów w całym przedziale łącznie, a nie jak poprzednio dla każdego segmentu oddzielnie. Prognozę wyznacza się na podstawie trendu, który na przedziale $[T,\infty)$ jest funkcją liniową będącą przedłużeniem funkcji $y_S(t)$. Wobec tego

$$p_{T+x}=y_S(T+x), \quad x>0.$$

O innych regułach prognozowania na podstawie trendów segmentowych można przeczytać w monografii [10]. Warto podkreślić, że w przypadku jednego segmentu metoda ta redukuje się do metody trendu liniowego.

15. Prognozowanie na podstawie trendu wyznaczonego przez aproksymantę ruchomą [10]

Załóżmy, że mamy dany szereg czasowy $y_1, y_2, \ldots, y_T$ i niech k będzie liczbą naturalną należącą do zbioru $\{2,3,\ldots,T\}$. Utwórzmy T-k+1 podzbiorów zbioru $\{1,2,\ldots,T\}$

tak, aby każdy podzbiór S_i składał się z k kolejnych liczb naturalnych, a najmniejszą w nim była liczba i, tzn. $S_i=\{i,i+1,...,i+k-1\}$. Na każdym z przedziałów $C_i=[i,i+k-1]$ można metodą najmniejszych kwadratów znaleźć funkcję liniową $f_i(t)$ aproksymującą punkty $y_i,y_{i+1},...,y_{i+k-1}$. Przyjmijmy ponadto, że $f_i(t)=0$ dla $t\in[1,T]-C_i$. Dla każdego $t\in[1,T]$ niech C_t oznacza rodzinę tych podzbiorów C_i, do których t należy, $m_t=\mathrm{card}(C_t)$. Funkcję

$$f(t)=1/m_t \sum_{i=1}^{T-k+1} f_i(t),\ t\in[1,T]$$

nazywamy aproksymantą ruchomą. Regułę prognozy kształtowania się wielkości y w dowolnym okresie T+x,x>0 opisuje wzór

$$p_{T+x}=ax+f(T),$$

czyli funkcja trendu jest postaci:

$$y(t)=a(t-T)+f(T).$$

Paramertr a wyznacza się według wzoru

$$a=\sum_{i=1}^{T-1} w_i o_i,$$

gdzie $o_i=f(i+1)-f(i)$, a w_i jest układem wag, o którym najczęściej zakłada się, że spełnia warunki $\sum_{i=1}^{T-1} w_i=1$, $w_i\geq 0$ oraz $w_{i+1}>w_i$.

16. Metoda L. i J. Waszkiewiczów [10]

Wyznacznie trendu na podstawie aproksymanty ruchomej jest zadaniem żmudnym rachunkowo, zwłaszcza gdy liczba k jest mała w stosunku do T. Z tego powodu zaproponowano pewną modyfikację tej metody polegającą na rezygnacji z wyznaczania aproksymanty f(t) i zastąpienie jej wartości przez rzeczywiste pochodzące z pomiarów, wartości zmiennej **y**. W takim przypadku funkcja trendu wyraża się wzorem

$$y(t)=a(t-T)+y_T,$$

gdzie podobnie jak poprzednio

$$a=\sum_{i=1}^{T-1} w_i o_i,$$

a o_i jest tym razem przyrostem zmiennej **y**, czyli $o_i=y_{i+1}-y_i$, a nie jak poprzednio aproksymanty ruchomej.

Łatwo zauważyć, że metoda ta jest szczególnym przypadkiem metody opisanej poprzednio, bo jeżeli przyjmiemy k=2 i zdecydujemy się na każdym przedziale aproksymować punkty szeregu czasowego funkcjami liniowymi, to wartości aproksymanty ruchomej w punktach 1,2,...,T będą spełniały równość $f(i)=y_i$.

17. Nieliniowe funkcje trendu

Na zasadzie podobnej do opisanej w punktach dziesiątym i jedenastym można prognozowane wielkości wyznaczać opierając się na nieliniowych funkcjach trendu. Parametry tych funkcji mogą być wyznaczone na podstawie rzeczywistych danych o kształtowaniu się zmiennej **y** w przeszłości lub wartości otrzymanych z konstrukcji aproksymanty ruchomej czy dowolnej innej funkcji aproksymującej szereg czasowy $y_1, y_2, ..., y_T$. Ponieważ konstrukcja linii trendu jest w każdym przypadku taka sama, przyjmijmy że ciąg $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_T$ spełnia jeden z warunków: albo $\varepsilon_i = y_i$, albo $\varepsilon_i = f(i)$; gdzie f jest aproksymantą ruchomą lub dowolną inną funkcją aproksymującą szereg czasowy **y**, a $i \in \{1, 2, ... T\}$.

17.1. Trend paraboliczny [10]

Funkcja kwadratowa $y(t) = at^2 + bt + c$ jak wiadomo charakteryzuje się stałymi niezależnymi od argumentu przyrostami drugiego rzędu. W związku z tym celowe jest skorzystanie z tego faktu przy wyznaczaniu parametrów trendu parabolicznego. Oczywiście we wspomniany sposób wyznaczony zostaje jedynie współczynnik a, natomiast dwa pozostałe oblicza się nakładając na $y(t)$ warunki początkowe $y(T-1) = \varepsilon_{T-1}$ i $y(T) = \varepsilon_T$ oznaczające zgodność funkcji trendu z parą ostatnich danych. Przyjęcie zgodności w dwóch ostatnich punktach jest wyrazem zasady większej wagi późniejszych obserwacji, lecz w praktyce można żądać równości funkcji trendu z wartościami ciągu $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_T$ w dwóch dowolnych innych chwilach $k, l \in \{1, 2, ..., T\}$. Przyjmijmy wobec tego, że

$$a=\sum_{i=1}^{T-2} w_i o_i,$$

gdzie w_i jest pewnym układem wag, natomiast o_i są przyrostami drugiego rzędu, czyli

$$o_i=1/2(\varepsilon_{i+2}-2\cdot\varepsilon_{i+1}+\varepsilon_i).$$

Wyznaczając parametry b i c z układu równań

$$y(T-1)=\varepsilon_{T-1}$$

$$y(T)=\varepsilon_T$$

otrzymujemy funkcję trendu określoną wzorem

$$y(t)=a(t-T)^2+(a+\varepsilon_T-\varepsilon_{T-1})(t-T)+\varepsilon_T.$$

17.2. Trend wykładniczy [10]

W tym przypadku szukamy funkcji trendu w postaci wykładniczej $y(t)=b(1+a)^t$ Ponieważ parametr a wyraża względny przyrost wartości funkcji przy jednostkowym przyroście zmiennej niezależnej, można go wyrazić w sposób następujący:

$$a=\sum_{i=1}^{T-1} w_i o_i,$$

gdzie w_i jest układem wag, natomiast $o_i=(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)/\varepsilon_i$. Wyznaczając parametr b z warunku początkowego

$$y(T)=\varepsilon_T$$

otrzymujemy wzór funkcji trendu

$$y(t)=\varepsilon_T(1+a)^{t-T}$$

17.3. Trend potęgowy [10]

Przypuśćmy, że poszukiwana funkcja trendu jest postaci $y(t)=bt^a$. W przypadku funkcji potęgowej względny przyrost wartości jest odwrotnie proporcjonalny do jednostkowych przyrostów zmiennej niezależnej. W związku z tym parametr a może być wyznaczony według wzoru

$$a=\sum_{i=1}^{T-1} w_i o_i,$$

gdzie, podobnie jak poprzednio, w_i jest układem wag, a $o_i=1/2(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)(i/\varepsilon_i+(i+1)/\varepsilon_{i+1})$, czyli o_i jest średnią arytmetyczną elastyczności różnicowych: $i/\varepsilon_i(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)$ oraz $(i+1)/\varepsilon_{i+1}(\varepsilon_{i+1}-\varepsilon_i)$. Nakładając jak poprzednio warunek początkowy

$$y(T)=\varepsilon_T$$

otrzymujemy analityczną postać funkcji trendu

$$y(t)=\varepsilon_T(t/T)^a.$$

MODEL OGÓLNY METOD CIĄGŁYCH

Zauważmy, że wszystkie opisane w tej części metody różnią się od metod dyskretnych tym, że prognozy mogą być wyznaczone na dowolny okres, niezależnie od jednostki ustalonej szeregiem czasowym. Prognozowanie w tym wypadku nie jest określeniem jednej konkretnej liczby, lecz podaniem tendencji rozwoju zjawiska w przyszłości. Na podstawie tej tendencji określa się dopiero konkretne wielkości prognozowanej zmiennej **y**.

Wspólny model dla opisanych w tej części metod sprowadza się do następującego schematu ogólnego. Niech $C(\mathbb{R})$ oznacza przestrzeń liniową wszystkich funkcji ciągłych określonych i przyjmujących wartości w zbiorze liczb rzeczywistych. Niech **U** będzie podzbiorem zbioru $C(\mathbb{R})$, a μ określonym na nim funkcjonałem. Wyznaczanie funkcji trendu można traktować jako zadanie minimalizacji funkcjonału μ na zbiorze **U**. W niektórych metodach para $(\mathbf{U},\mu)$ podana jest w sposób jawny, jak np. w metodzie minimalizacji średniego kwadratu drugiej pochodnej, która będzie opisana w rozdziale trzecim, mamy parę $(I_2(U),w)$, gdzie $I_2(U)$ jest zbiorem wszystkich funkcji klasy $C^2(\mathbb{R})$ interpolujących punkty szeregu czasowego, a w jest określony wzorem

$$w(f)=\int_{\mathbb{R}} f''^2(t)dt.$$

W innych natomiast łatwo ją znaleźć analizując sposób konstrukcji funkcji trendu. Zauważmy, że np. w przypadku trendu liniowego modelem tym jest para (L,s), gdzie L jest zbiorem wszystkich funkcji liniowych, a s funkcjonałem zdefiniowanym następująco:

$$s(f)=\sum_{i=1}^{T}(f(i)-y_i)^2.$$

Rozdział 2

ZASADA INERCJI

1. Słowo inercja pochodzi od łacińskiego *inertia* i oznacza bierność, bezwładność, nieruchomość, bierne poddawanie się czemuś, niechęć do czynu. W języku polskim funkcjonuje głównie jako synonim bezwładności. Jako termin naukowy inercja pojawia się po raz pierwszy na początku XVII wieku. Jest wynikiem podjętych pod koniec XVI wieku prac w dziedzinie fizyki związanych z analizą ruchu ciał. Były co najmniej dwa powody zainteresowania się tym problemem, mianowicie: rozwój artylerii i próby znalezienia praw ruchu pocisku oraz powstanie heliocentrycznego systemu Kopernika. Odkrycie, że Ziemia nie jest środkiem Wszechświata, lecz jedną z planet krążących wokół Słońca, spowodowało obalenie panującego od starożytności przekonania, iż ruch jest zjawiskiem wymuszonym. Starożytni, a wśród nich Arystoteles, z prawdziwego stwierdzenia, że wzajemne oddziaływanie ciał wywołuje zmianę ich prędkości, wysnuli fałszywy wniosek, iż ruch jest wynikiem takiego właśnie oddziaływania. Doprowadziło to do ug-

runtowania poglądu że, utrzymanie ciała w ruchu wymaga ingerencji zewnętrznej, pewnej siły. Konsekwencją tego było stwierdzenie, że naturalnym stanem ciała jest spoczynek i w takim stanie ono pozostaje, gdy nie działa na nie żadna siła. Odkrycie Kopernika podważyło dość istotnie te poglądy, gdyż przy poprzednich założeniach prowadziło do hipotezy, że planety krążące wokół Słońca są przez cały czas popychane. Niewiarygodność takiej sytuacji doprowadziła do głębszej analizy praw ruchu i sformułowania w rezultacie pierwszej zasady dynamiki Newtona.

Podane przez Newtona sformułowanie tej zasady było następujące: "Każde ciało pozostaje w stanie spoczynku lub ruchu jednostajnego po linii prostej dopóty, dopóki nie zostanie zmuszone za pomocą wywierania odpowiednich sił do zmiany tego stanu" [11, s. 114]. Obecnie najczęściej zasadę tę podaje się w formie: "Jeżeli dane ciało nie oddziałuje z otaczającymi ciałami, to porusza się ono ruchem jednostajnym prostoliniowym" [12, s. 26]. Oczywiście, jak łatwo zauważyć, brak zewnętrznego oddziaływania powoduje niezmienność prędkości co do wartości i kierunku, w szczególnym przypadku, gdy prędkość równa jest zeru, mamy do czynienia ze stanem spoczynku.

Sformułowana przez Newtona pierwsza zasada dynamiki, wraz z dwiema pozostałymi, została opublikowana w 1686 roku.

Ze względu na kompleksowość rozwiązania problemu ruchu ciał w trzech zasadach dynamiki, zasada inercji formułowana jest jako pierwsza z nich, lecz faktycznie jest ona autorstwa Galileusza, który podał ją już na początku XVII wieku. Doprowadziło go to tego bardzo proste rozumowanie. Wyobraźmy sobie, że pchniemy klocek po poziomej sztywnej płaszczyźnie. Po pewnym czasie zatrzyma się on, gdyż hamować go będzie siła tarcia. Gdy zmniejszymy tarcie, używając np. gładszego klocka i powierzchni, droga przebyta przez klocek pchnięty z taką samą siłą będzie dłuższa. Rozumując analogicznie, zmniejszając siłę tarcia do zera, czyli tworząc warunki, w których nie działa żadna siła, osiągniemy sytuację, w której klocek nie będzie zwalniał, lecz będzie się poruszał w nieskończoność po linii prostej z prędkością ustaloną na początku ruchu w chwili pchnięcia.

Zasada bezwładności Galileusza zawierała pewien błąd, sądził on mianowicie, że w sytuacji, gdy na ciało nie działa żadna siła może ono poruszać się jednostajnie prostoliniowo lub po okręgu. Dopuszczona tu zostaje jak widać możliwość zmiany kierunku prędkości bez działania jakiejkolwiek siły. Niemniej jednak nowatorskie podejście Galileusza, dopuszczające ruch bez przyczyny, rezygnacja z pojęcia ruchu jako zjawiska wymuszonego, stworzyło możliwość sformułowania pół wieku później praw ruchu w mechanice klasycznej.

2. Zauważmy, że o zasadzie inercji można też mówić w kontekście zadań dotyczących prognozy ekonomicznej. Jeżeli nie znamy praw rządzących rozwojem zjawiska i jedynymi danymi jakimi dysponujemy są jego wcześniejsze realizacje, to prognozując stany w przyszłości musimy zakładać pewną niezmienność obserwowanego procesu. Dzieje się tak w przypadku każdej z wcześniej opisanych metod. Najłatwiej to zauważyć rozpatrując modele ciągłe, gdyż postać funkcji trendu jest właśnie wyrazem tej niezmienności. To, jak autorzy poszczególnych metod rozumieli niezmienność, bezwładność zjawiska można można odczytać albo ze wzoru pozwalającego na wyznaczenie prognozy, albo należy sięgnąć do założeń, które legły u podstaw tych metod. Rozpatrzmy dla przykładu metodę trendu wielomianowego. Konstrukcja tego modelu oparta jest na założeniu, że obserwowane dane pochodzą z pewnego procesu opisywanego funkcją typu wielomianowego. Poszukuje się wówczas wielomianu, który najlepiej, według przyjętych kryteriów, aproksymuje punkty szeregu czasowego. Następnie w celu wyznaczenia prognozy, tutaj za pomocą funkcji trendu, przyjmuje się, że także w przyszłości zjawisko to będzie opisywane tym samym wielomianem. Sposób określenia prognozy jest w tym wypadku bardzo podobny do sposobu wyznaczania przyszłych stanów zjawiska na podstawie praw rozwojowych.

Faktycznie przyjmuje się bowiem że, znaleziony wielomian opisuje zjawisko zarówno w przeszłości, jak i przyszłości, czyli rozwojowym prawem nauki dla tego zjawiska jest prawo głoszące, że jego stany w czasie opisuje wspomniany wielomian. Jest to więc praktycznie próba znalezienia prawa rozwojowego, a nie prognozowanie w warunkach nieznajomości tego prawa.

Każdą inną metodę prognozy opierającą się na zbliżonym rozumieniu niezmienności zjawiska można podobnie klasyfikować jako próbę znalezienia praw rozwojowych. Będzie tak wtedy, gdy o stanie zjawiska w przyszłości będziemy rozstrzygać na podstawie wartości pochodzących z tej samej trajektorii co punkty szeregu czasowego. Oznacza to przyjęcie założenia, że trajektoria ta opisuje rozwój rozpatrywanego zjawiska, czyli stanowi prawo nauki rządzące danym procesem. W zagadnieniach praktycznych należenie do trajektorii jest często zastępowane innym kryterium, np. minimalizacją odchyleń według ustalonego miernika. Wynika to z trudności dokładnego podania danych, które w większości przypadków, jeśli nie uwzględniać prostych prognoz mikroekonomicznych, np. dotyczących wielkości sprzedaży pewnego towaru przez ustaloną sieć sklepów, obarczone są błędami. Niemniej jednak każde prognozowanie, które opiera się na podaniu analitycznego wzoru funkcji aproksymującej posiadane dane, gdzie prognozę wyznacza się na podstawie wartości funkcji ustalonej na całej prostej lub przynajmniej półprostej rzeczywistej, należy klasyfikować jako metodę dążącą do odkrycia praw rozwoju.

Innym problemem jest to, czy w ogóle takie podejście przy danej metodzie ma uzasadnienie teoretyczne. Wiadomo przecież, że np. dowolne n punktów na płaszczyźnie interpoluje wielomian n-1 stopnia. Jednakże powstaje pytanie o powody, dla których wielomian taki miałby opisywać konkretne zjawisko ekonomiczne. W przypadkach, gdy uzasadnienie takiego, a nie innego, charakteru rozwoju jest nieprzekonywujące należy uznać, że nie jest to nic innego jak tylko życzenie autora metody. Brakuje obecnie wiedzy i aparatu formalnego pozwalającego na naukową weryfikację takich poglądów. Pozostaje jedynie wiara w genialną intuicję twórcy i możliwość sprawdzenia *ex post* otrzymanych wyników, co jednak w przypadku drugiego wariantu pozostaje nadal jedynie eksperymentem myślowym, pewnym doświadczeniem, które dopiero może służyć jako wstęp do podania teorii naukowej. Jest to droga, która w wielu przypadkach w dziedzinie fizyki doprowadziła do odnalezienia praw nauki i być może podobnie stanie się w przypadku zagadnień ekonomicznych. Dzisiaj zmuszeni jasteśmy jednak traktować takie próby w kategoriach eksperymentów i doświadczeń, co oznacza, że wiarygodność tych prognoz należy oceniać tak samo jak, wiarygodność każdej innej prognozy, np. naiwnej, głoszącej że stan zjawiska jutro będzie taki sam jak dzisiaj.

Istnieje pewna grupa zjawisk w świecie nas otaczającym, których człowiek nigdy nie będzie w stanie prognozować opierając się na prawie nauki rządzącym danym procesem. Niewyobrażalne jest np. prognozowanie z dokładnością do dnia i godziny długości życia człowieka. Stworzenie takiej możliwości doprowadziłoby do zaprzeczenia istnienia ludzkości w dotychczasowej formie. Szkody w psychice jakie powoduje znajomość daty swojego zgonu były jednym z głównych argumentów przeciwników kary śmierci. Przykłady takie mogą uzasadniać tezę o tym, że niektóre zjawiska nie dają się ująć w ramy praw rozwojowych. Jednakże na problem ten można spojrzeć inaczej. Nie można mianowicie wykluczyć obiektywnego istnienia tych praw. Ich nieznajomość niekoniecznie musi wynikać z ich nieistnienia, lecz z braku możliwości poznania. Nie można stwierdzić, która z tych możliwości zachodzi. Stwierdzenie takie równałoby się bowiem poznaniu.

3. W przypadku prognozy ekonomicznej, jeżeli nie znamy prawa nauki niezależnie od przyczyny takiego stanu rzeczy, to należy zastanowić się nad innymi sposobami wyznaczania przyszłych stanów zjawisk. Jedną z możliwości są prognozy

wyznaczne na podstawie opinii ekspertów z danej dziedziny. W takiej sytuacji nie szuka się modelu ogólnego, lecz opracowuje analizę przewidywanych przyszłych stanów konkretnego zjawiska. Abstrahując od technicznej strony opracowywania takich prognoz można stwierdzić, że przy zachowaniu dwóch podstawowych warunków prognozy te mogą okazać się bardzo przydatne. Warunkami tymi są kompetencja eksperta i odpowiednio długi okres obserwacji zjawiska. Długość tego okresu jest zależna od charakteru procesu i wiedzy eksperta. Musi ona być taka, aby pozwalała na poziomie jego wiedzy na zauważenie, o ile istnieją, pewnych prawidłowości warunkujących wyciągnięcie wniosków na przyszłość.

Podstawową zaletą takiego podejścia do prognozowania przyszłych stanów zjawisk jest jego konkretność. Wiadomo bowiem, że jakiekolwiek uogólnienia, próby zastosowania modeli opracowanych do prognozowania jednego określonego zjawiska, czy grupy zjawisk, na inne procesy mogą stać się całkiem nieprzydatne. Nie jest to droga prowadząca do poznawania praw rozwoju. Jednostkowej, konkretnej opinii eksperta nie można uogólniać nawet wówczas, gdy jest to możliwe od strony technicznej, tzn. w przypadku, gdy ekspert podaje pewien algorytm wyznaczania prognozy na podstawie posiadanych danych, a nie określoną wielkość będącą jego zdaniem przyszłym ilościowym stanem zjawiska. W przypadku podania takiego algorytmu możemy co najwyżej traktować go jako autora jeszcze jednej metody prognozowania. Jeżeli została ona stworzona na podstawie analizy konkretnego szeregu czasowego, to jej przydatność w innych przypadkach jest raczej wątpliwa.

Druga możliwość, to pewne próby tworzenia modeli ogólnych. Pomocne w tej sytuacji może okazać się rozumienie niezmienności bezwładności procesu zaczerpnięte z innych działów nauki, a konkretnie z fizyki. Wyobraźmy sobie sytuację, w której poruszjący się punkt materialny przechodzi z obszaru działania pola sił do obszaru, w którym nie działają żadne siły. Punkt ten w drugim obszarze porusza się ruchem jednostajnym, prostoliniowym o parametrach jednoznacznie wyznaczonych w punkcie wspólnym toru i brzegu obszarów. Odpowiednikiem pierwszego obszaru jest przeszłość. Tam znamy przebieg rozwoju zjawiska. Wiemy co i w jaki sposób kształtowało takie, a nie inne jego stany ilościowe. Wiedza ta, z pewnym uproszczeniem, sięga teraźniejszości - brzegu obszarów, lecz to co będzie się działo w przyszłości jest dla nas rzeczą niewiadomą. Zjawisko wchodzi w informacyjną "próżnię". To, co i w jaki sposób będzie nań oddziałowywało można rozpatrywać jedynie w sferach prognoz. Nawet jeżeli wiemy na przykład, że cenę danego surowca kształtuje poziom jego wydobycia w kilku określonych krajach, to tego czy tak będzie w przyszłości, nawet najbliższej, nie wiemy. Zdarzyć się bowiem może, że zostaną odkryte nowe złoża lub surowiec ten na skutek wdrożenia nowych technologii straci na znaczeniu gospodarczym i to w rezultacie spowoduje znaczne obniżenie ceny.

Modelem przyszłości jest tu obszar, w którym nie działają żadne siły. Tam rozwój powinien być jednostajny prostoliniowy, co oznacza, że trend zjawiska ma opisywać funkcja liniowa, której parametry wyznaczone są na podstawie obserwacji przeszłości. Wydaje się, że takie rozumienie bezwładności procesu jest najbardziej naturalne. Czynniki zewnętrzne kształtujące zjawisko w przeszłości nadają mu pewien kierunek rozwoju, który w przyszłości, przynajmniej najbliższej, powinien być zachowany. Kierunek ten odzwierciedla właśnie liniowa funkcja trendu.

Można zastanawiać się nad tym czy takie rozumowanie, w którym abstrahuje się od wpływu innych czynników na dane zjawisko w przyszłości, jest słuszne. Jeden z argumentów uzasadniających takie podejście został już podany, a mianowicie skalę wpływu takich czynników można jedynie prognozować i prowadzi to w efekcie do prognozowania na podstawie prognozy, co może powodować kumulację błędów.

Są także inne argumenty przemawiające za takim rozumieniem bezwładności. Zjawiska ekonomiczne często z pewnym opóźnieniem reagują na zmiany warunków zewnętrznych i o ich poziomie w danym momencie nie decyduje aktualny stan innych czynników, lecz ich stany wcześniejsze. Wiadomo, że w czasie wzrostu gospodarczego wzrastają wydatki inwestycyjne. Trend ten zostaje w pewnym stopniu zachowany nawet w wypadku załamania koniunktury. Wiąże się to kwestią opłacalności przerwania inwestycji. Proces realizacji nowych przedsięwzięć jest stosunkowo długi i jeżeli obniżenie wzrostu gospodarczego nastąpi jeszcze w tej fazie, to często nieopłacalna staje się rezygnacja z wcześniejszych zamierzeń. Powoduje to poszukiwanie nowych rozwiązań, takich jak przebranżowienie lub na przykład zmiana przeznaczenia rozpoczętych budów. W konsekwencji wydatki na inwestycje z pewnymi korektami idą dalej torem wyznaczonym w okresie dobrej koniunktury.

Podobnie dzieje się z innymi zjawiskami szczególnie w skali makroekonomicznej. Elastyczne reagowanie zjawisk w skali makro na zmiany czynników zewnętrznych musiałoby być konsekwencją idealnego zachowania się podmiotów w skali mikro. Często wymagałoby to od nich precyzyjnego prognozowania punktów zwrotnych, co jak wiadomo nie jest rzeczą prostą. Oprócz tego nie wszystkie jednostki gospodarcze cechuje pełna racjonalność działania. Czynniki te powodują, że zjawiska gospodarcze, w skali np. kraju, zachowują się często jak ciężka maszyna poruszająca się po pewnym torze. Zmiany w kierunku jej poruszania się ze względu na dużą bezwładność są trudne i dlatego następują z pewnym opóźnieniem. Z tego też powodu zakładanie inercji zjawisk w ujęciu zaczerpniętym z fizyki ma także pewne uzasadnienie praktyczne wynikające z charakteru obserwowanych procesów.

Innym problemem jest kwestia horyzontu prognozy wyznaczonej na podstawie tak określonego trendu. Oczywiste jest, że dokładność prognozy maleje wraz ze wzrostem jej horyzontu. Zasada ta jest także widoczna w tym przypadku, gdyż trudne wydaje się utrzymanie przez dłuższy czas bezwładnego rozwoju zjawiska. Wpływy czynników zewnętrznych muszą w pewnym momencie dać znać o sobie kształtując inne tory rozwoju. Należy stwierdzić, że najlepsze prognozy będzie się otrzymywać na okres następny, tzn. czas wyznaczony jednostką pomiaru szeregu czasowego. W świetle wcześniejszych uwag na temat horyzontu prognozy nie jest to oczywiście nic odkrywczego. Niemniej jednak nie można wykluczyć trafnego prognozowania także na okresy późniejsze. Zależeć to jedna że musi od specyficznych właściwości prognozowanego zjawiska. Im bardziej dany proces jest niezależny od otoczenia, im trudniej reaguje na zmiany zewnętrzne, tym trafniejsze będą prognozy średnio- i długoterminowe.

4. Zauważmy, że o takim pojmowaniu niezmienności rozwoju zjawiska w przyszłości możemy mówić w przypadku kilku metod opisanych w poprzednim rozdziale. Wszędzie, gdzie autorzy jako funkcję trendu proponują funkcję liniową, faktycznie przyjmują fizyczną zasadę inercji. Wyjątkiem może tu być jedynie metoda trendu liniowego, którą ze względu na postulowaną liniową zależność kształtowania się zjawiska w czasie, należy raczej klasyfikować jako próbę znalezienia prawa rozwojowego. Zasada inercji jest także widoczna w metodach dyskretnych. Zwróćmy uwagę, że w przypadku metod podwójnych średnich ruchomych i powójnego wygładzania wykładniczego, prognozę na okres T+k można wyznaczyć ze wzoru

$$p_{T+k}=ak+b,$$

gdzie odpowiednio $b=2S_{T+1}-S'_{T+1}$ i $a=2(S_{T+1}-S'_{T+1})/(k-1)$ lub $a=\alpha(S_{T+1}-S'_{T+1})/(1-\alpha)$. Podobnie dla metod opisanych w punktach dziewiątym i dziesiątym można przyjąć, że

$$p_{T+k}=r_{T+1}k+p_{T+1}.$$

O prostoliniowym rozwoju zjawiska w przyszłości można mówić także, z wyjątkiem metody z punktu ósmego, w wypadku pozostałych modeli. Wystarczy przyjąć, że współczynnik kierunkowy prostej określającej trend jest równy zeru. Wspomniane metody różnią się jedynie wyborem parametrów opisujących trend, co wynika z różnicy przesłanek, jakimi kierowali się autorzy w interpretowaniu wsześniejszych stanów zjawiska. Z tego też powodu na ogół inne będą prognozy wyznaczone metodą aproksymanty ruchomej, a inne otrzymamy po zastosowaniu liniowego wygładzania wykładniczego.

Cechą wspólną wszystkich tych metod jest traktowanie inercji jako dodatkowego postulatu. Nie jest ona wynikiem przyjętych wcześniej zasad interpretowania poprzednich stanów zjawiska. Wyjątkiem wydawać się tu może metoda trendu segmentowego, gdzie prostoliniowy rozwój w przyszłości jest konsekwencją aproksymowania danych doświadczalnych. Pamiętać jednak należy, że prognozując na podstawie tej metody, na samym wstępie czyni się założenia niedopuszczające żadnych innych funkcji oprócz liniowych, przez co postulat bezwładności tkwi w założeniach już od samego początku. W skrajnym przypadku można sobie wyobrazić, że jednakowe wykorzystanie danych statystycznych będzie prowadziło do utworzenia różnego rodzaju funkcji trendu.

Z sytuacją niepostulowanej bezwładności mamy do czynienia wtedy, gdy w rezultacie analizy szeregu czasowego, dokonywanej bez szczególnych ograniczeń dotyczących możliwości kształtowania się procesu, otrzymamy liniową funkcję trendu. Korzystając z oznaczeń przyjętych w poprzednim rozdziale można powiedzieć, że funkcja minimalizująca na zbiorze **U** funkcjonał μ musi na przedziale $[T,\infty)$ być liniowa, przy czym elementami **U** nie mogą być jedynie funkcje przedziałami liniowe, jak to ma miejsce w przypadku metody trendu segmentowego, czy metody trendu liniowego. Trudno jednoznacznie stwierdzić, jaką co najmniej klasę funkcji ma obejmować zbiór **U**. Jeżeli przyjmiemy założenie, jak to się czyni w pracy [13, s. 111], że każdy realny proces można opisać za pomocą równania różniczkowego liniowego o stałych współczynnikach, to **U** powinien zawierać wszystkie rozwiązania takich równań, tzn. kombinacje liniowe wielomianów, funkcji wykładniczych i trygonometrycznych. Przy konstrukcji metody opisywanej w następnym rozdziale przyjmuje się, że $U=C^2(\mathbb{R})$. Jest to wyraz przekonania o niemożliwości zachodzenia gwałtownych, nieciągłych zmian procesów ekonomicznych.

Interpretacja przeszłości, powody dla których zjawisko rozwijało się w taki, a nie inny sposób, stanowią podstawę tworzenia danego modelu prognostycznego. Przesłanki te mają różne uzasadnienia, które można znaleźć w literaturze opisującej poszczególne metody.

5. Spróbujmy zastanowić się nad zasadami, które rządzą otaczającymi nas procesami. O jednej z nich, a mianowicie o zasadzie inercji już wspomniano. Inną, zgodnie z którą zachowują się także zjawiska ekonomiczne, jest zasada równowagi [14] W najprostszej wersji może ona oznaczać na przykład zrównanie popytu z podażą.

Jedną z ważniejszych zasad mechaniki klasycznej jest zasada najmniejszego działania Hamiltona [15, s. 60] Głosi ona, że ruchy układów mechanicznych odbywają się wzdłuż ekstremal funkcjonału opisującego całkowitą różnicę energii kinetycznej i potencjalnej. Upraszczając można stwierdzić, że układy mechaniczne dążą do minimalizacji energii. Rozpatrzmy przykład idealnie giętkiego, jednorodnego i nieskończonego pręta, umocowanego skończoną liczbą węzłów, na który nie działają żadne siły. Kształt pręta będzie w tej sytuacji ustalony przez zasadę minimalizacji energii, w tym przypadku energii sprężystości.

Jeżeli ograniczymy nasze rozważania do prognoz wyznaczanych na podstawie szeregów czasowych i w związku z tym jedynymi danymi jakimi dysponujemy będą wcześniejsze realizacje obserwowanego zjawiska, tzn. jedyną zmienną od której zależą jego stany ilościowe jest czas, to możemy zauważyć, że wspomniany pręt jest dobrym modelem opisującym tę sytuację. Jego położenie jest wykresem stanów ilościowych zjawiska w czasie, a więzy, którymi jest umocowany, to warunek przechodzenia trajektorii przez punkty, w których zjawisko było obserwowane i znane są jego realizacje. Odpowiednikiem założenia, że na pręt nie działają żadne siły zewnętrzne jest tu postulat braku zależności procesu od innych niż czas czynników. Położenie pręta między węzłami można traktować jako model rozwoju zjawiska w przeszłości, jego kształt zaś poza ostatnim węzłem, jako trend na przyszłość.

Przy tak postawionym zadaniu rodzą się jednak pewne trudności teoretyczne związane z podaniem analitycznego wzoru funkcji przedstawiającej ułożenie pręta. Z tego powodu nie jest w przypadku ogólnym znany jego kształt, a co za tym idzie postać funkcji trendu; nie wiadomo dlatego czy spełnia ona warunek inercji. Przy pewnych upraszczających założeniach można jednak problem opisu kształtu pręta rozwiązać. Okazuje się, że trend opisywany jest wówczas funkcją liniową, czyli z jednej strony mamy spełnioną zasadę minimalizacji energii dotychczasowego przebiegu zjawiska, a z drugiej jego bezwładność w przyszłości. W tym przypadku bezwładność ta jest konsekwencją minimalizacji energii, a nie wynikiem dodatkowych założeń.

Szczegółowa analiza budowy modelu prognostycznego opartego na opisanych przesłankach zostanie przedstawiona w następnym rozdziale. Tam też zostanie podana metoda prognozy, która jest wynikiem wspomnianych uproszczeń tego modelu.

Rozdział 3

FUNKCJE O MINIMALNEJ ŚREDNIOKWADRATOWEJ KRZYWIŹNIE

1. Podstawowym problemem zagadnień prognostycznych jest określenie obserwowanego zjawiska w czasie $t>t_T$, gdzie T jest chwilą jego ostatniej obserwacji. Od wybranej metody prognozy zależy to, w jaki sposób wykorzystywane będą posiadane dane z przeszłości. Przykłady cytowane w pierwszym rozdziale wykazują, że niezależnie od podstaw teoretycznych wnioskowania zadanie takie sprowadza się albo do utworzenia kombinacji liniowej obserwowanych wielkości, albo do minimalizacji pewnego funkcjonału zależnego od danego szeregu czasowego. Zachowując wspomniany dychotomiczny podział metod prognozy spróbujmy skonstruować model spełniający postulaty zawarte w poprzednim rozdziale, oparty na zasadzie minimalizacji średniokwadratowej krzywizny funkcji interpolującej punkty szeregu czasowego i inercji zjawiska w przyszłości.

Przypuśćmy, że dany mamy szereg czasowy $y_1,y_2,\ldots,y_T$ wielkości ekonomicznych mierzonych w czasie $t_1,t_2,\ldots,t_T$. Wspomniana zasada minimalizacji średniokwadratowej krzywizny funkcji interpolującej punkty szeregu czasowego ma swój odpowiednik w naturze. Wyobraźmy sobie, że mamy idealnie giętki pręt umocowany węzłami $U=\{(t_1,y_1),(t_2,y_2),...,(t_T,y_T)\}$. Reguła minimalizacji energii sprężystości spowoduje, że pręt ułoży się wzdłuż krzywej minimalizującej średniokwadratową krzywiznę [16, s. 171]. Całkowita energia E wygiętego pręta wyraża się wówczas wzorem

$$E=\int_l k^2 dl,$$

gdzie k jest funkcją opisującą krzywiznę, l zaś krzywą, wzdłuż której układa się pręt. Energia zależy więc od kwadratu krzywizny w każdym punkcie wygiętego pręta oraz położenia, w jakim się on znajduje. W rozważaniach tych nie uwzględnia się współczynników proporcjonalności, związanych np. z materiałem z jakiego wykonany jest pręt, w celu zachowania przejrzystości zagadnienia. Wielkość E można intuicyjnie traktować jako iloczyn długości pręta i jego średniokwadratowej krzywizny.

Teoretycznie l może być dowolną krzywą, natomiast w praktycznych zastosowaniach ekonomicznych dotyczących prognozowania zjawisk należy założyć, że l jest wykresem pewnej funkcji, gdyż w określonej chwili t stan obserwowanego zjawiska jest jednoznacznie wyznaczony. Innymi słowy rozważa się tylko takie krzywe, które w układzie współrzędnych czas-wartość szeregu czasowego mają z każdą prostą prostopadłą do osi czasu co najwyżej jeden punkt wspólny. W takim przypadku można albo całkę krzywoliniową sprowadzić do całki po odcinku [17, s. 7], albo zadanie minimalizacji całkowitej energii uprościć do zagadnienia minimalizacji w zbiorze $I_1(U)$ funkcjonału

$$v(f)=\int_D k_f^2(t)\,dt=\int_D \frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}\,dt,$$

gdzie $D=[t_1,t_T]$, a $I_1(U)$ jest zbiorem wszystkich funkcji $f:[t_1,t_T]\to\mathbb{R}$, ciągłych na odcinku $[t_1,t_T]$, mających ciągłą drugą pochodną w przedziale (t_1,t_T), dla których istnieje całka określająca funkcjonał v i które interpolują punkty zbioru U, czyli spełniają równości $f(t_i)=y_i$, $i=1,2,\ldots,T$. Zbiór $I_1(U)$ jest oczywiście niepusty, gdyż należy do niego np. każdy wielomian interpolujący układ punktów U.

Wyrażenie pod znakiem całki przedstawia kwadrat krzywizny w punkcie t krzywej, która jest wykresem funkcji f [18, s. 222]. Wartość funkcjonału v można interpretować intuicyjnie jako iloczyn długości rzutu krzywej na oś t i jej średniokwadratowej krzywizny.

Rozpatrywanie funkcjonału v w takiej postaci, jak to zostało przedstawione, nie prowadzi jeszcze do wyznaczenia prognozy, gdyż nie bada się tam zachowania funkcji w czasie

$t>T$. Wręcz przeciwnie, rozważania ogranicza się tylko do obserwowanego okresu $[t_1,t_T]$. Należy więc podać, w jaki sposób należy wyznaczać funkcję trendu. W tym celu rozpatrzmy jeszcze dwa zbiory:

$I_2(U)$ - zbiór wszystkich funkcji $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, klasy C^2, interpolujących układ punktów U, dla których istnieje całka określająca funkcjonał v, przy czym całkuje się po zbiorze $D=\mathbb{R}$,

$I_3(U)$ - zbiór wszystkich funkcji $f\in I_2(U)$ takich, że

$$f(t)=a_1t+b_1,\ \text{dla } t\in(-\infty,t_1)$$

i

$$f(t)=a_2t+b_2,\ \text{dla } t\in(t_T,\infty).$$

W dalszych rozważaniach funkcjonał $v(f)=\int_D k_f^2(t)dt$ będzie oznaczany tak samo, niezależnie do którego ze zbiorów należy funkcja f. Należy tylko pamiętać, że jeśli $f\in I_1(U)$, to $D=[t_1,t_T]$, natomiast gdy $f\in I_2(U)$ lub $f\in I_3(U)$, to $D=\mathbb{R}$.

Zauważmy, że jeżeli f jest wielomianem stopnia $n\geq 2$, interpolującym układ punktów U, to licznik w wyrażeniu pod całką jest wielomianem stpnia $2n-4$, a mianownik wielomianem stopnia $6n-6$ nie posiadającym pierwiastków rzeczywistych, czyli $\int_D \frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}dt$ istnieje. Gdy f jest wielomianem stopnia pierwszego lub funkcją stałą, to wyrażenie pod całką jest tożsamościowo równe zeru, a więc każdy wielomian interpolujący układ punktów U należy do zbioru $I_2(U)$, czyli zbiór ten nie jest pusty. Z definicji zbioru $I_3(U)$ wynika, że $I_3(U)\subseteq I_2(U)$. Zbiór ten także jest niepusty. Przykłady funkcji należących do tego zbioru zostaną podane w dalszej części tego rozdziału.

Łatwo zauważyć, że obcięcie do przedziału $[t_1,t_T]$ każdej funkcji należącej do zbioru $I_2(U)$, należy do $I_1(U)$. Spostrzeżenie to uzasadnia fakt, iż $I_2(U)\subsetneq I_1(U)$, przy czym zanurzenie należy rozumieć tak, że każdej funkcji $f\in I_2(U)$ przyporządkowuje się jej obcięcie do przedziału $[t_1,t_T]$. Nie można natomiast zbioru $I_1(U)$ zanurzyć w żaden ze zbiorów $I_2(U)$ i $I_3(U)$. Jest to konsekwencją tego, że nie każdą funkcję należącą do zbioru $I_1(U)$ można przedłużyć w klasie C^2 na cały zbiór liczb rzeczywistych. Uzasadnia to prosty przykład.

Niech $U_0=\{(-1,0),(0,1),(1,0)\}$ i niech $f\in I_1(U_0)$ będzie określona wzorem $f(t)=\sqrt{1-t^2}$, wtedy

$$\lim_{t\to -1^+} f'(t)=\lim_{t\to -1^+} \frac{-t}{\sqrt{1-t^2}}=\infty,$$

czyli przedłużenie tej funkcji w sposób C^2 na $\mathbb{R}$ nie jest możliwe. Istnieje jedynie możliwość przedłużenia ciągłego, co gwarantuje twierdzenie Tietzego [19, s. 143].

Zgodnie z opisaną poprzednio zasadą inercji rozwój zjawiska w czasie $t>T$ powinien być wyznaczony przez funkcję liniową. Podobnie możemy założyć, że w chwilach $t<t_1$, tzn. w czasie gdy nie obserwowaliśmy zjawiska, czyli w informacyjnej "próżni", rozwój także był liniowy. Stąd wniosek, że funkcja realizująca minimum funkcjonału v w zbiorze $I_2(U)$ powinna należeć do zbioru $I_3(U)$. Ograniczenie rozważań do zbioru $I_3(U)$ oznaczałoby potraktowanie zasady inercji jako dodatkowego postulatu. W obu przypadkach trend zjawiska opisywany będzie przez liniową część a_2t+b_2 funkcji realizującej minimum v. Aby wyznaczyć prognozę ilościową zjawiska w dowolnym interesującym nas czasie wystarczy podstawić do wzoru funkcji odpowiednią wartość zmiennej t. Oczywiście, jak to zostało zasygnalizowane w rozdziale drugim, horyzont prognozy nie może być zbyt duży. Najlepiej gdy nie przekracza on jednostki czasu wyznaczonej przez pomiary szeregu czasowego. Prognozując na podstawie trendu wielkość zjawiska w chwilach odległych od aktualnej t_T można oczekiwać dużych odchyleń od rzeczywistej realizacji zmiennej **y**.

2. Podstawowym pytaniem w zadaniach minimalizacyjnych jest pytanie o istnienie nietrywialnego minimum. W przypadku funkcjonału v łatwo zauważyć, że $\inf_{f\in I_i(U)} v(f)\geq 0$ dla $i=1,2,3$, gdyż wyrażenie pod całką jest kwadratem krzywizny, czyli

wielkością nieujemną. Jeżeli punkty układu U są współliniowe, to istnieje funkcja liniowa g interpolująca ten układ punktów. Wówczas

$$\inf_{f \in I_i(U)} v(f)=v(g)=0, \text{ dla } i=1,2,3.$$

Wynika to z faktu, że krzywizna prostej jest równa zeru. W takim przypadku zagadnienie prognozowania na podstawie trendu o minimalnej średniokwadratowej krzywiźnie sprowadza się do opisanego w rozdziale pierwszym trendu liniowego. Oznacza to, że zarówno w przypadku jednej, jak i drugiej metody szukana funkcja trendu będzie taka sama. Zauważmy ponadto, że jeśli f jest klasy C^2, to k_f^2 jest funkcją ciągłą, czyli warunek $v(f)=0$ jest równoważny temu, że k_f^2 jest funkcją tożsamościowo równą zeru [20, s. 189]. Stąd wynika, że w takim razie f" jest funkcją tożsamościowo równą zeru, czyli f jest funkcją liniową. Tym samym udowodniliśmy

TWIERDZENIE 1. $v(f)=0$ wtedy i tylko wtedy, gdy f jest funkcją liniową.

Można stwierdzić wobec tego, że w przypadku gdy punkty zbioru U są wspóliniowe, to w każdym z rozpatrywanych zbiorów $I_i(U)$ istnieje funkcja realizująca równe zeru minimum funkcjonału v.

Powstaje naturalne pytanie, czy jeśli układ punktów nie jest współliniowy, to także $\inf_{f\in I_1(U)} v(f)=0$?

Odpowiedź na nie jest negatywna. Zauważmy najpierw, że

$$\inf_{f\in I_1(U)} v(f) \le \inf_{f\in I_2(U)} v(f) \le \inf_{f\in I_3(U)} v(f),$$

co wynika z opisanej wcześniej zależności między zbiorami $I_1(U)$, $I_2(U)$, $I_3(U)$. W związku z tym wystarczy udowodnić, że $\inf_{f\in I_1(U)} v(f)>0$. Dowód tego faktu poprzedzimy kilkoma prostymi lematami.

LEMAT 1. Jeżeli $U_1=\{(t_1,0),(t_2,y_2),(t_3,0)\}$ i $y_2<0$, to dla każdej funkcji $f\in I_1(U_1)$ istnieje przedział $[c,d]$, zawarty w przedziale $[t_1,t_3]$, taki że

$$f'(c)=\frac{y_2}{t_3-t_1}, \quad f'(d)=\frac{-y_2}{t_3-t_1}$$

i

$$|f'(t)|\le\frac{-y_2}{t_3-t_1}, \text{ dla } t\in[c,d].$$

D o w ó d. Wiemy, że $f\in I_1(U)$, czyli f jest funkcją ciągłą i wobectego istnieje punkt $m\in[t_1,t_3]$, taki że $f(m)=\inf_{t\in[t_1,t_3]}\{f(t)\}$ [18, s. 78]. Ponadto

$$f(m)\le f(t_2)=y_2<0,$$

czyli m jest punktem wewnętrznym odcinka $[t_1,t_3]$ i $f'(m)=0$, gdyż m jest ekstremum lokalnym funkcji f. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej [18, s. 105] wynika, że istnieje punkt $\xi\in(t_1,m)$, taki że

$$f'(\xi)=\frac{f(m)-f(t_1)}{m-t_1} \le \frac{f(m)}{t_3-t_1} \le \frac{y_2}{t_3-t_1}.$$

Podobnie istnieje punkt $\zeta\in(m,t_3)$, taki że

$$f'(\zeta)=\frac{f(t_3)-f(m)}{t_3-m} \ge \frac{-f(m)}{t_3-t_1} \ge \frac{-y_2}{t_3-t_1}.$$

Niech
$$c=\sup\left\{ f^{-1}\left(\left\{\frac{y_2}{t_3-t_1}\right\}\right) \cap [t_1,m] \right\},$$

$$d=\inf\left\{ f^{-1}\left(\left\{\frac{-y_2}{t_3-t_1}\right\}\right) \cap [m,t_3] \right\}.$$

Funkcja f jest ciągła, więc przeciwobraz zbioru domkniętego jest domknięty [19, s. 133]. Domknięty jest także iloczyn zbiorów domkniętych [19, s. 114] i wobec tego $c<d$. Łatwo zauważyć, że przedział $[c,d]$ spełnia tezę lematu. ∎

LEMAT 2. Jeżeli $U_2=\{(t_1,0),(t_2,y_2),(t_3,0)\}$ i $y_2>0$, to dla każdej funkcji $f\in I_1(U_2)$ istnieje przedział $[c,d]$ zawarty w przedziale $[t_1,t_3]$, taki że

$$f'(c)=\frac{y_2}{t_3-t_1}, \quad f'(d)=\frac{-y_2}{t_3-t_1}$$

i
$$|f'(t)|\le\frac{y_2}{t_3-t_1}, \text{ dla } t\in[c,d].$$

D o w ó d. Wystarczy zauważyć, że $f\in I_1(U_2)$ wtedy i tylko wtedy, gdy $-f\in I_1(U_1)$, gdzie U_1 spełnia założenia lematu 1, a $k_f^2=k_{-f}^2$. ∎

LEMAT 3. Jeżeli $U_3=\{(t_1,y_1),(t_2,y_2),(t_3,y_3)\}$ jest układem punktów niewspółliniowych, to istnieje taki zbiór U_1, spełniający założenia lematu 1 i U_2 spełniający założenia lematu 2 oraz funkcja liniowa h, że każda funkcja $f\in I_1(U_3)$ rozkłada się na sumę funkcji g i h, gdzie $g\in I_1(U_1)\cup I_1(U_2)$.

D o w ó d. Przyjmijmy, że

$$h(t)=at+y_1-at_1,$$

$$g(t)=f(t)-h(t),$$

gdzie $a=\dfrac{y_3-y_1}{t_3-t_1}$. Z równości $f(t_1)=h(t_1)$ i $f(t_3)=h(t_3)$ oraz z założenia niewspółliniowości układu punktów U_3, wynika że $g\in I_1(U_1)\cup I_1(U_2)$, gdyż wówczas $f(t_2)\neq h(t_2)$. ∎

LEMAT 4. Jeżeli $U_3=\{(t_1,y_1),(t_2,y_2),(t_3,y_3)\}$ jest układem punktów niewspółliniowych, to $\inf\limits_{f\in I_1(U_3)} v(f)>0$.

D o w ó d. Z lematu 3 wiemy, że f=g+h, gdzie h jest liniowa, a $g\in I_1(U_1)\cup I_1(U_2)$. Przypuśćmy, że $g\in I_1(U_1)$ oraz $U_1=\{(t_1,0),(t_2,y_2'),(t_3,0)\}$ i $y_2'<0$. Niech [c,d] będzie przedziałem spełniającym w przypadku funkcji g tezę lematu 1. Przyjmijmy oznaczenia

$$a=\frac{y_3-y_1}{t_3-t_1}, \qquad s=\left(1+\left(\frac{-y_2'}{t_3-t_1}+|a|^2\right)\right)^3$$

Korzystając z nierówności Schwarza [18, s. 287] otrzymujemy, że

$$\int_{t_1}^{t_3}\frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}\,dt \geq \int_c^d \frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}\,dt = \int_c^d \frac{g''^2(t)}{(1+(g'(t)+a)^2)^3}\,dt \geq$$

$$\int_c^d \frac{g''^2(t)}{(1+(|g'(t)|+a)^2)^3}\,dt \geq \int_c^d \frac{g''^2(t)}{s}\,dt = \frac{1}{s}\int_c^d g''^2(t)\,dt\frac{1}{d-c}\int_c^d 1^2 dt \geq$$

$$\frac{1}{s(d-c)}\left(\int_c^d g''^2(t)\,dt\right)^2 \geq \frac{1}{s(t_3-t_1)}\Big(g'(d)-g'(c)\Big)^2 = \frac{4y_2'^2}{s(t_3-t_1)^3} > 0.$$

Stała $\frac{4y_2'^2}{s(t_3-t_1)^3}$ nie zależy od funkcji f, lecz tylko od układu punktów U_3, więc także $\inf\limits_{f\in I_1(U_3)} v(f)>0$. ∎

Prostym wnioskiem z lematu 4 jest

TWIERDZENIE 2. Jeżeli $U\{(t_1,y_1),(t_2,y_2),\ldots,(t_n,y_n)\}$ jest układem punktów niewspółliniowych, to $\inf\limits_{f\in I_1(U)} v(f)>0$.

Twierdzenie to nie rozstrzyga kwestii istnienia minimum funkcjonału v i nie wiadomo, czy ono istnieje w którymkolwiek z rozpatrywanych zbiorów. Co więcej, istnienie minimum w jednym zbiorze nie gwarantuje istnienia w pozostałych. Można jednak podać postać funkcji realizującej minimum v w zbiorze $I_3(U)$ przy założeniu, że funkcja taka istnieje. Z twierdzenia 1 wynika, że dla $f \in I_3(U)$ $\int_{\mathbb{R}} k_f^2(t)dt = \int_{t_1}^{t_T} k_f^2(t)dt$, ponadto $\int_{t_1}^{t_T} k_f^2(t)dt = \sum_{i=1}^{T-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} k_f^2(t)dt$ i ponieważ składniki sumy są dodatnie, więc jeśli f, przy zachowaniu odpowiednich warunków gładkości, minimalizuje całkę $\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_f^2(t)dt$ na każdym z przedziałów $[t_i, t_{i+1}]$, $i=1,2,\ldots,T-1$, to także minimalizuje wartość v w zbiorze $I_3(U)$. Niech

$$f(t) = \begin{cases} a_1 t + b_1 & \text{dla } t \in (-\infty, t_1] \\ f_1(t) & \text{dla } t \in (t_1, t_2] \\ \\ f_{T-1}(t) & \text{dla } t \in (t_{T-1}, t_T] \\ a_2 t + b_2 & \text{dla } t \in (t_T, \infty) \end{cases}$$

gdzie każda z funkcji f_i minimalizuje całkę $\int_{t_i}^{t_{i+1}} k_f^2(t)dt$ na przedziale $[t_i, t_{i+1}]$ i wobec tego f_i spełnia równanie Eulera dla funkcji tworzącej $F(t, f_i(t), f_i'(t), f_i''(t)) = \dfrac{f_i''^2(t)}{(1+f_i'^2(t))^3}$ [21, s. 53]. W tym przypadku ma ono następującą postać:

$$\frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial F}{\partial f_i''(t)}(t, f_i(t), f_i'(t), f_i''(t)) -$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial f_i'(t)}(t,f_i(t),f_i'(t),f_i''(t))=0.$$

Obliczając odpowiednie pochodne otrzymujemy:

$$\frac{\partial F}{\partial f_i'(t)} = -\frac{6f_i'(t)f_i''^2(t)}{(1+f_i'^2(t))^4}, \qquad \frac{\partial F}{\partial f_i''(t)} = \frac{2f_i''(t)}{(1+f_i'^2(t))^3},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial f_i'(t)} =$$

$$\frac{48f_i'^2(t)f_i''^3(t)-6(1+f_i'^2(t))(f_i''^3(t)+2f_i'(t)f_i''(t)f_i^{(3)}(t))}{(1+f_i'^2(t))^5},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial f_i''(t)} = \frac{2f_i^{(3)}(t)(1+f_i'^2(t))-12f_i'(t)f_i''^2(t)}{(1+f_i'^2(t))^4},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial F}{\partial f_i''(t)} = \frac{2f_i^{(4)}(t)(1+f_i'^2(t))^2}{(1+f_i'^2(t))^5} +$$

$$\frac{-12(1+f_i'^2(t))(3f_i'(t)f_i''(t)f_i^{(3)}(t)+f_i''^3(t))+96f_i'^2(t)f_i''^3(t)}{(1+f_i'^2(t))^5}.$$

Podstawiając je do równania Eulera otrzymujemy równanie różniczkowe czwartego rzędu. Całka ogólna takiego równania zależy od czterech parametrów, czyli f_i ma postać $f_i(t,c_1,c_2,c_3,c_4)$, gdzie c_1,c_2,c_3,c_4 są stałymi. W związku z tym w całym zadaniu mamy 4T-4 parametry, gdyż liczba funkcji f_i wynosi T-1. Funkcja f musi należeć do zbioru $I_3(U)$, czyli muszą być spełnione 2T-2 warunki interpolacyjne

$$f_i(t_i)=y_i,$$

$$f_i(t_{i+1})=y_{i+1},\ i=1,2,\dots,T-1$$

oraz 2T-2 warunki gładkości

$$f_i^{(k)}(t_{i+1})=f_{i+1}^{(k)}(t_{i+1}),\ i=1,2,\dots,T-2,\ k=1,2,$$

$$f_1''(t_1)=f_{T-1}''(t_T)=0.$$

Parametry a_1, b_1, a_2, b_2 części liniowych wyznaczone są jednoznacznie przez założenie gładkości w punktach t_1 i t_T. Stąd wniosek, że w ten sposób otrzymuje się układ 4T-4 równań z 4T-4 niewiadomymi i jeśli posiada on rozwiązania, to wśród tak wyznaczonych funkcji f należy poszukiwać funkcji realizującej minimum funkcjonału v w zbiorze $I_3(U)$. W takim przypadku funkcja f charakteryzuje się większą od zakładanej gładkością. Jej części liniowe są oczywiście klasy C^{∞}, natomiast z twierdzenia Poissona [22, s. 128] wynika, że każda z funkcji f_i jest klasy C^4. Na tej podstawie możemy stwierdzić, że w każdym punkcie różnym od t_i, $i=1,2,\dots,T$, f ma ciągłą co najmniej czwartą pochodną, a w punktach t_i ciągłą co najmniej drugą.

Spełnienie równania Eulera jest tylko warunkiem koniecznym minimalizacji funkcjonału, a więc znalezienie rozwiązań tego równania nie gwarantuje jeszcze znalezienia minimum. Należy dodatkowo sprawdzić czy funkcja będąca ekstremalą jest argumentem minimum. Łatwo zauważyć, że rodziny

$\tilde{f}(t)=c_1t+c_2$ i $\approx f(t)=c_1+\sqrt{c_2^2-t^2}$ są oczywiście rozwiązaniami równania Eulera dla funkcjonału v. Z twierdzenia 1 wiadomo także, iż $\tilde{f}$ w szczególnym przypadku minimalizuje v. Nie są to jednak wszystkie rozwiązania i dlatego nie wiadomo czy funkcji minimalizujących należy szukać jedynie w tych dwóch klasach, niemniej jednak są to najbardziej naturalne krzywe dla tego zagadnienia. Charakteryzują się one bowiem stałą niezależną od punktu t krzywizną. W pierwszym przypadku jest ona równa zeru, w drugim zaś $1/c_2$, gdyż wykresem funkcji $\approx f$ jest część łuku okręgu o promieniu c_2.

3. Trudności ze znalezieniem minimum funkcjonału v powodują, że w zagadnieniach praktycznych konieczne jest pewne uproszczenie zadania. Prognozę rozwoju zjawiska określać się będzie na podstawie trendu, który jest wyznaczony przez funkcję minimalizującą funkcjonał

$$w(f)=\int_D f''^2(t)\,dt.$$

Podobnie jak poprzednio, funkcja f może należeć do któregoś ze zbiorów $I_1(U),I_2(U),I_3(U)$, a zbiór D, w zależności od tego który z tych zbiowrów rozpatrujemy, jest równy przedziałowi $[t_1,t_T]$ lub prostej rzeczywistej. W definicji tych zbiorów oczywiście warunek istnienia $\int_D \frac{f''^2(t)}{(1+f'^2(t))^3}\,dt$

zastępuje się warunkiem istnienia $\int_D f''^2(t)dt$.

Różnica między funkcjonałem w a v polega na zamianie mianownika funkcjonału v na stałą równą jeden. W tym przypadku oznacza to przyjęcie założenia, że $f'^2=0$. Stąd wniosek, że uproszczenie takie najlepiej stosować w przypadku zjawisk charakteryzujących się małą dynamiką rozwoju. Niewielkie zmiany ilościowe zjawiska w czasie usprawiedliwiają wó czas założenie, że pochodna jest równa zeru i można przyjąć, iż średni kwadrat drugiej pochodnej dostatecznie dobrze przybliża średniokwadratową krzywiznę. Na ile dobre jest to przybliżenie w konkretnym przypadku można ocenić obliczając wartość minimalną funkcjonału w i porównując z oszacowaniem infimum funkcjonału v podanym w lematach 1 i 2. Inne oszacowanie tego infimum podane zostanie w dalszej części tego rozdziału. Znalezienie wartości minimalnej w nie jest zadaniem trudnym, okazuje się nawet, że w tym przypadku nie jest konieczne oddzielne rozpatrywanie zbiorów $I_1(U), I_2(U), I_3(U)$. Wynika to bezpośrednio z twierdzenia Holladaya [23, s. 227]. Konsekwencją tego twierdzenia jest to, że funkcją minimalizującą funkcjonał w w zbiorze $I_1(U)$ jest funkcja

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) & \text{dla } t\in(t_1, t_2] \\ \\ f_{T-1}(t) & \text{dla } t\in(t_{T-1}, t_T], \end{cases}$$

gdzie f_i, $i=1,2,\dots,T-1$ jest wielomianem trzeciego stopnia i $f_1''(t_1)=f_{T-1}''(t_T)=0$, ponadto funkcja f jest wyznaczona jednoznacznie.

Łatwo zauważyć, że f można przedłużyć na całą prostą tak, aby przedłużenie należało do zbioru $I_3(U)$ i minimalizowało funkcjonał w w tym zbiorze, a co za tym idzie, także w zbiorze $I_2(U)$. Wystarczy na pozostałych przedziałach określić f jako funkcję liniową spełniającą w punktach t_1 i t_T odpowiednie warunki gładkości. Funkcja liniowa ma drugą pochodną stale równą zeru, więc oczywiste jest, że tak przedłużona funkcja f będzie minimalizowała funkcjonał w w zbiorach $I_2(U)$ i $I_3(U)$. Postać szukanej funkcji f jest więc następująca:

$$f(t) = \begin{cases} a_1t+b_1 & \text{dla } t\in(-\infty, t_1] \\ f_1(t) & \text{dla } t\in(t_1, t_2] \\ \\ f_{T-1}(t) & \text{dla } t\in(t_{T-1}, t_T] \\ a_2t+b_2 & \text{dla } t\in(t_T, \infty), \end{cases}$$

gdzie f_i są funkcjami określonymi tak jak poprzednio, a parametry części liniowych wyznaczane są z równań

$$\begin{cases} a_1=f_1'(t_1) \\ a_1t_1+b_1=y_1 \end{cases} \quad \text{i} \quad \begin{cases} a_2=f_{T-1}'(t_T) \\ a_2t_T+b_2=y_T. \end{cases}$$

W konkretnym zadaniu prognostycznym, aby znaleźć funkcję trendu a_2t+b_2 musimy najpierw wyznaczyć funkcje f_i, $i=1,2,...,T-1$. Wiemy, że funkcje te są wielomianami trzeciego stopnia, czyli zależą od czterech parametrów - współczynników tego wielomianu, mamy więc 4T-4 niewiadome. Warunki interpolacyjne i warunki gładkości dają 4T-6 równań. Dodatkowo wiadomo, że funkcja minimalizująca funkcjonał w w punktach t_1 i t_T ma drugą pochodną równą zeru. Wobec tego otrzymujemy układ 4T-4 równań

$$f_i(t_i)=y_i,\ i=1,2,...,T-1,$$

$$f_i(t_{i+1})=y_{i+1},\ i=1,2,...,T-1,$$

$$f_i^{(k)}(t_{i+1})=f_{i+1}^{(k)}(t_{i+1}),\ i=1,2,...,T-2,\ k=1,2,$$

$$f_1''(t_1)=0,$$

$$f_{T-1}''(t_T)=0$$

z 4T-4 niewiadomymi, a ponieważ jest on kramerowski, możemy więc z niego jednoznacznie wyznaczyć współczynniki wielomianów f_i. Znalezienie stałych a_2 i b_2 nie sprawia w tym momencie żadnych kłopotów i sprowadza się do rozwiązania napisanego wcześniej układu dwóch równań z dwiema niewiadomymi, wynikającego z warunku ciągłości w punkcie t_T funkcji f i jej pochodnej. Określenie prognozy wielkości zjawiska w chwili $t>t_T$ sprowadza się wtedy do obliczenia wartości funkcji trendu dla konkretnego argumentu.

Wyniki zastosowania tej metody do prognozowania konkretnych zjawisk ekonomicznych zostaną przedstawione w następnym rozdziale.

4. Opisana redukcja zagadnienia minimalizacji funkcjonału v do zadania znalezienia minimum funkcjonału w nie jest jedynym sposobem uproszczenia tego problemu. Można również zastanawiać się nad możliwością konstruowania prognoz na podstawie minimalizacji średniej wartości bezwzględnej krzywizny, czyli funkcjonału

$$v_1(f)=\int_D |k_f(t)|dt=\int_D \left| \frac{f''(t)}{(1+f'^2(t))^{3/2}} \right| dt.$$

Podobnie jak w poprzednich zadaniach, funkcjonał v_1 można teore-tycznie minimalizować w zbiorach $I_1(U), I_2(U)$ oraz $I_3(U)$. Zbiory te definiuje się tak samo jak w przypadku funkcjonału v, z tym że zamiast istnienia całki określającej v wymaga się istnienia całki definiującej v_1. Zbiór D, analogicznie jak w poprzednich zadaniach, jest równy przedziałowi $[t_1,t_T]$ lub prostej rzeczywistej, w zależności od tego, w którym z rozpatrywanych zbiorów funkcji minmalizuje się funkcjonał v_1. W praktyce, w związku z koniecznością wyznaczenia funkcji trendu, należałoby zajmować się przede wszystkim zbiorami $I_2(U)$ i $I_3(U)$. Z późniejszych rozważań wyniknie jednak, że zadanie minimalizacyjne w każdym z trzech określonych wyżej zbiorów ma takie samo rozwiązanie. Z tego powodu ograniczmy badanie minimum funkcjonału v_1 do zbioru $I_1(U)$.

Zauważmy na wstępie, że

$$\int \frac{f''(t)}{(1+f'^2(t))^{3/2}}\,dt = \frac{f'(t)}{\sqrt{1+f'^2(t)}}$$

Prawdziwość tej równości można łatwo sprawdzić różniczkując jej prawą stronę. Korzystając z niej uzasadnimy, że funkcjonał v_1 nie osiąga minimum w zbiorze $I_1(U_1)$, gdzie $U_0=\{(-1,0),(0,1),(1,0)\}$. W tym celu udowodnimy wcześniej trzy pomocnicze lematy.

LEMAT 5. Jeśli $f\in I_1(U_0)$, to $\sup\limits_{t\in[-1,1]} f'(t)>1$ lub $\inf\limits_{t\in[-1,1]} f'(t)<-1$.

D o w ó d. Z twierdzenia Lagrange'a o wartości średniej wynika, że istnieje punkt $\xi\in(-1,0)$, taki że $f'(\xi)=1$. Przypuśćmy, że $\sup\limits_{t\in[-1,1]} f'(t)=1$, wtedy $f'(t)\equiv 1$ na przedziale $[-1,0]$, gdyż inaczej $f(0)<1$. Z ciągłości funkcji f' wynika, że $f'(t)>0$ na pewnym przedziale $(0,m)$, czyli $f(m)>f(0)=1$. Kontynuując dalej rozumowanie, z twierdzenia o wartości średniej wiemy, że istnieje punkt $\zeta\in(m,1)$, taki że

$$f'(\zeta)=\frac{f(1)-f(m)}{1-m}=\frac{-f(m)}{1-m}<\frac{-f(m)}{1}<-1. \blacksquare$$

LEMAT 6. Dla każdego $f\in I_1(U_0)$ $v_1(f)>\sqrt{2}$

D o w ó d. Niech $c<d$ będą takimi punktami przedział $[-1,1]$, że:

$$f'(c)=1 \text{ i } f(d)<-1$$

lub

$$f'(c)>1 \text{ i } f'(d)=-1,$$

wtedy

$$\int_c^d \left| \frac{f''(t)}{(1+f'^2(t))^{3/2}} \right| dt \geq \left| \int_c^d \frac{f''(t)}{(1+f'^2(t))^{3/2}} dt \right| =$$

$$\left| \frac{f'(d)}{\sqrt{1+f'^2(d)}} - \frac{f'(c)}{\sqrt{1+f'^2(c)}} \right| > \left| \frac{-1}{\sqrt{1+1}} - \frac{1}{\sqrt{1+1}} \right| = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

Niech ϕ będzie funkcją określoną następującym wzorem:

$$\phi(t) = \begin{cases} \exp(1/t) & \text{dla } t<0 \\ 0 & \text{dla } t\geq 0. \end{cases}$$

Rozpatrzmy dwie rodziny funkcji

$$g_n(t) = \frac{(1+1/n)\phi(t)}{\phi(t)+\phi(x-t)}$$

i

$$h_n(t) = -g_n(-t); \; x\in[-1,0), \; n>5.$$

Z definicji g_n wynika, że

$$g_n(t)=1+1/n \quad \text{dla } t\in[-\infty,x],$$

$$g_n(t)=0 \quad \text{dla } t\in[0,\infty].$$

Podobnie

$$h_n(t)=-(1+1/n) \quad \text{dla } t\in[-x,\infty],$$

$$h_n(t)=0 \quad \text{dla } t\in[-\infty,0].$$

LEMAT 7. Dla każdego $n>5$ istnieje $x\in(-1,0]$, takie że $\int_{-1}^{0} g_n(t)dt=1$.

D o w ó d. Zauważmy, że

$$\exp(1/t)>\exp(1/(-1-t)) \quad \text{dla } t\in[-1,-\tfrac{1}{2})$$

i

$$\exp(1/t)<\exp(1/(-1-t)) \quad \text{dla } t\in(-\tfrac{1}{2},0].$$

W przypadku, gdy $x=-1$

$$\int_{-1}^{0} g_n(t)dt \ge \int_{-1}^{0} \frac{(1+1/n)\phi(t)}{\phi(t)+\phi(-1-t)}dt = \int_{-1}^{-1/2} \frac{(1+1/n)\phi(t)}{\phi(t)+\phi(-1-t)}dt +$$

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{(1+1/n)\phi(t)}{\phi(t)+\phi(-1-t)}dt \le (1+1/n)\left(\int_{-1}^{-1/2} 1\, dt + \int_{-1/2}^{0} \frac{\phi(t)}{2\phi(t)}dt \right) =$$

$$3(1+1/n)/4 < 1.$$

Niech $|x|<1-n/(n+1)$, wtedy

$$\int_{-1}^{0} g_n(t)dt \ge \int_{-1}^{x} g_n(t)dt = (1-|x|)(1+1/n) >$$

$$(n+1/n)(1-(1-(n+1/n)))=1.$$

Korzystając teraz z ciągłości względem x otrzymujemy tezę lematu. ■

Podobnie można uzasadnić, że dla każdego $n>5$ istnieje $x\in[-1,0]$, takie że $\int_0^1 h_n(t)dt=-1$.

Dla każdego $n>5$ funkcje $g_n(t)$ i $h_n(t)$ spełniające tezę lematu oznaczmy odpowiednio $G_n(t)$ i $H_n(t)$.

TWIERDZENIE 3. Funkcjonał v_1 nie osiąga minimum na zbiorze $I_1(U_0)$.

D o w ó d. Niech f_n będzie ciągiem funkcji określonym na przedziale $[-1,1]$ następującym wzorem:

$$f_n(t)=\begin{cases} G_n(t) & \text{dla } t\in[-1,0] \\ H_n(t) & \text{dla } t\in(0,1]. \end{cases}$$

Zauważmy, że ciąg

$$F_n(t) = \int_{-1}^{t} f_n(s)ds$$

jest ciągiem funkcji należących do zbioru $I_1(U_0)$, gdyż:

$$F_n(-1)=0,$$

$$F_n(0) = \int_{-1}^{0} f_n(t)dt = \int_{-1}^{0} G_n(t)dt=1,$$

$$F_n(1) = \int_{-1}^{1} f_n(t)dt = \int_{-1}^{0} G_n(t)dt + \int_{0}^{1} H_n(t)dt=0$$

i $F_n \in C^{\infty}[-1,1]$ [24, s. 16]. Ponadto $F_n'' \le 0$ dla $t \in (-1,1)$. W związku z tym

$$\lim_{n\to\infty} v_1(F_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{F_n'(-1)}{\sqrt{1+F_n'^2(-1)}} - \frac{F_n'(1)}{\sqrt{1+F_n'^2(1)}} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f_n(-1)}{\sqrt{1+f_n^2(-1)}} - \frac{f_n(1)}{\sqrt{1+f_n^2(1)}} = \sqrt{2} \quad \blacksquare$$

Wybór zbioru U_0 podyktowany był chęcią uproszczenia zapisu dowodów lematów i twierdzenia. Bez trudu można zauważyć, że podobne rozumowanie może być przeprowadzone dla każdego innego, trzyelementowego zbioru $U_0^*=\{(t_1,y_1),(t_2,y_2),(t_3,y_3)\}$. Idea wszystkich dowodów pozostaje taka sama, a zmieniają się tylko współczynniki liczbowe związane z układem punktów interpolowanych. Dla celów praktycznych najważniejsze jest oszacowanie podane w lemacie 6, gdyż może ono być także stosowane, jak to zostanie wykazane w dalszej części rozdziału, do szacowania wartości minimalnej funkcjonału v. Można je bez trudu podać w wersji ogólnej. Zauważmy, że kluczową rolę w obliczeniu tej stałej spełnia twierdzenie Lagrange'a. Liczby 1 i -1 z tezy lematu

5 to nic innego jak tangensy nachylenia siecznych wykresu funkcji f przechodzących przez punkty (-1,0), (0,1) oraz (0,1) i (1,0) do dodatniej półosi t. Liczb tych następnie używa się do wyznaczenia stałej $\sqrt{2}$ W przypadku ogólnym, jeżeli $\bar{u}_1$ i $\bar{u}_2$ są odcinkami łączącymi odpowiednio punkty (t_1,y_1), (t_2,y_2) oraz (t_2,y_2) i (t_3,y_3), a półproste l_1 i l_2 o wspólnym początku (t_2,y_2) zawierają te odcinki i tworzą z dodatnią półosią czasu kąty odpowiednio α_1 i α_2, to wspomniane oszacowanie wynosić będzie

$$r = \left| \frac{tg\alpha_2}{\sqrt{1+tg^2\alpha_2}} - \frac{tg\alpha_1}{\sqrt{1+tg^2\alpha_1}} \right| .$$

Zauważmy także, iż stała r nie zależy od wyboru punktów na półprostych l_1 i l_2. Jeżeli $U_0^{**}=\{(t_1',y_1'),(t_2,y_2),(t_3',y_3')\}$ i punkty

(t_1',y_1') i (t_3',y_3') należą odpowiednio do prostych l_1 i l_2, to

$$\inf_{f\in I_1(U_0^{*})} v_1(f) = \inf_{f\in I_1(U_0^{**})} v_1(f).$$

Możemy więc poprawnie określić średnią krzywiznę łamanej utworzonej przez takie półproste przyjmując, iż jest ona równa r. Oczywiście warunki $t_1<t_2<t_3$ oraz $(t_1,y_1)\in l_1$ i $(t_3,y_3)\in l_2$ implikują, że powyższa definicja nie dotyczy wszystkich łamanych utworzonych przez półproste o wspólnym początku. Nie obejmuje ona takich, które nie są wykresem żadnej funkcji. Jeżeli a_1 i a_2 są współczynnikami kierunko-

wymi prostych zawierających odpowiednio półproste l_1 i l_2, to jak łatwo zauważyć

$$r = \left| \frac{a_2}{\sqrt{1+a_2^2}} - \frac{a_1}{\sqrt{1+a_1^2}} \right| .$$

W szczególnym przypadku, gdy punkty zbioru U_0^* są współliniowe, to r=0 i minimum jest osiągane dla funkcji, której wykresem jest prosta przechodąca przez te punkty. Zauważmy ponadto, że ciąg funkcji F_n skonstruowany w dowodzie twierdzenia 3 ma tę własność, że na końcach rozpatrywanego przedziału drugie pochodne (jednostronne) są równe zeru, co pozwala te funkcje rozszerzyć w klasie C^2 na całą prostą rzeczywistą tak, aby rozszerzenie to należało do zbioru $I_1(U_0)$, a więc także do $I_2(U_0)$. Wartość funkcjonału v_1 na rozszerzonych funkcjach nie ulegnie oczywiście zmianie, gdyż krzywizna prostej jest równa zeru. Zatem funkcje te aproksymują infimum v_1 w zbiorach $I_2(U_0^*)$ i $I_3(U_0^*)$. Wcześniejsze uwagi na temat możliwości przeformułowania twierdzenia 3 na przypadek dowolnego zbioru trzyelementowego U_0^* uzasadniają, że rozumowanie to można także powtórzyć w przypadku takiego zbioru. W związku z tym problem minimalizacji v_1 w zbiorach $I_1(U_0)$,$I_2(U_0)$ i $I_3(U_0)$ ma takie samo rozwiązanie, które jest negatywne.W zbiorach tych nie istnieje funkcja realizująca minimum.

5. Dalsze rozważania dotyczyć będą uogólnienienia pojęcia średniej wartości bezwzględnej krzywizny na szerszą klasę funkcji, w której wspomniane minimum jest osiągane. Do zbiorów $I_1(U), I_2(U), I_3(U)$ włączmy dodatkowo wszystkie funkcje interpolujące układ punktów U, których zbiór punktów nieciągłości pierwszej i drugiej pochodnej jest zawarty w zbiorze $\{t_1, t_2, \ldots, t_{T-1}\}$ oraz $\lim_{t \to t_i^+} |f^{(k)}(t)| < \infty$ i $\lim_{t \to t_i^-} |f^{(k)}(t)| < \infty$ dla $i=2,3,\ldots,T-1$, $k=1,2$, tworząc odpowiednio zbiory $I_1^*(U), I_2^*(U), I_3^*(U)$ Zakładamy oczywiście, że dołączamy tylko te funkcje, dla których całka określająca funkcjonał v_1 istnieje w każdym z przedziałów $(-\infty, t_1), (t_1, t_2), \ldots, (t_T, \infty)$.

Rozszerzenie klasy rozpatrywanych funkcji następuje jak widać kosztem rezygnacji z zakładanej wcześniej gładkości. Pewna regularność procesu jest oczywiście czynnikiem nieodzownym w przypadku prognozowania. Jak można jednak zauważyć, choćby na przykładzie metod rozpatrywanych w rozdziale pierwszym, stopień tej regularności jest różny. Zależy on nie tylko od charakteru prognozowanego zjawiska i przyjęcia koncepcji praw rozwojowych, ale także od stosowanego aparatu matematycznego. Istnieją metody, np. metoda trendów segmentowych, które nie postulują nawet ciągłości rozwoju zjawiska. Dokonana redukcja gładkości funkcji interpolującej punkty szeregu czasowego nie jest jak widać czymś nowym.

Na zbiorze $I_1^*(U)$ rozszerzenie v_1^* funkcjonału v_1 możemy określić następująco:

$$v_1^*(f) = \sum_{i=1}^{T-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_f(t)|dt + \sum_{i=2}^{T-1} r_i,$$

gdzie r_i jest krzywizną łamanej utworzonej przez półproste o początku w punkcie (t_i, y_i), będące stycznymi do wykresu funkcji f w punkcie t_i. Łatwo zauważyć, że jest to rzeczywiście rozszerzenie funkcjonału v_1. Jeżeli $f \in I_1(U)$, to f ma ciągłą pochodną w punktach $t_2, t_2, \ldots, t_{T-1}$ i styczne prawo- i lewostronna są identyczne. Wobec tego utworzona z nich łamana jest prostą i $r_i=0$ dla $i=2,3,\ldots,T-1$, czyli $v_1(f)=v_1^*(f)$.

Funkcjonał v_1^* na zbiorach $I_2^*(U)$ i $I_3^*(U)$ określa się analogicznie przyjmując

$$v_1^*(f) =$$
$$\int_{-\infty}^{t_1} |k_f(t)|dt + \sum_{i=1}^{T-1} \int_{t_i}^{t_{i+1}} |k_f(t)|dt + \int_{t_T}^{\infty} |k_f(t)|dt + \sum_{i=2}^{T-1} r_i.$$

Z wcześniejszych rozważań wynika, że prawdziwe jest

TWIERDZENIE 4. Funkcja

$$F(t) = \begin{cases} a_1t+b_1 & \text{dla } t\in[t_1,t_2] \\ \\ a_{T-1}t+b_{T-1} & \text{dla } t\in[t_{T-1},t_T] \end{cases}$$

minimalizuje funkcjonał v_1^* w zbiorze $I_1^*(U)$, a funkcja

$$\tilde{F}(t) = \begin{cases} a_1t+b_1 & \text{dla } t\in(-\infty,t_2] \\ \\ a_{T-1}t+b_{T-1} & \text{dla } t\in[t_{T-1},\infty) \end{cases}$$

w zbiorach $I_2^*(U)$ i $I_3^*(U)$, gdzie parametry a_i oraz b_i określone są przez warunki ciągłości

$$\begin{cases} a_1t_1+b_1=y_1 \\ a_it_{i+1}+b_i=y_{i+1}, \quad i=1,2,\ldots,T-1. \end{cases}$$

Twierdzenie 4 teoretycznie rozwiązuje problem stosowania metody minimalizacji średniej wartości bezwzględnej krzywizny do prognozowania zjawisk ekonomicznych. W zastosowaniach praktycznych metoda ta redukuje się jak widać do trendu liniowego. Wyznaczony jest on jednoznacznie przez dwa ostatnie punkty szeregu czasowego. Wykresem tej funkcji jest prosta przechodząca przez te punkty. Trend wyznaczony w ten sposób zależy więc tylko od dwóch ostatnich obserwacji. Prognozy tak otrzymane są w związku z tym identyczne jak prognozy otrzymane za pomocą trendu liniowego i metody najmniejszych kwadratów stosowanej dla dwuelementowego szeregu czasowego.

Warto zauważyć, że funkcja $a_{T-1}t+b_{T-1}$ opisująca trend zjawiska ma wszystkie pochodne ciągłe w punkcie t_T, czyli redukcja gładkości funkcji interpolującej nie wpłynęła na gładkość funkcji $\tilde{F}$w punkcie t_T. Ponadto wyznaczony trend czyni zadość postulatowi inercyjnego rozwoju zjawiska.

Twierdzenie 4 może być także stosowane do oszacowania infimum funkcjonału v. Zauważmy bowiem, iż z nierówności Schwartza wynika, że

$$\int_{t_1}^{t_T} k_f^2(t)\,dt \geq \frac{1}{t_T-t_1}\left(\int_{t_1}^{t_T} |k_f(t)|\,dt\right)^2$$

czyli

$$\inf_{f\in I_1(U)} v(f) \geq \frac{1}{t_T-t_1} \inf_{f\in I_1^{*}(U)} (v_1^{*}(f))^2.$$

Rozdział 4

EMPIRYCZNA WERYFIKACJA WYBRANYCH METOD PROGNOZY

1. W celu zaprezentowania praktycznego zastosowania opisanych wcześniej metod wybrano czternaście szeregów czasowych opisujących wartość netto środków trwałych w sektorach polskiej gospodarki. Ważne, z powodu przeprowadzonych później porównań, jest to, że są to szeregi jednakowe ze względu na swój charakter. Dotyczą tego samego zjawiska ekonomicznego ujętego w rozbiciu działowym. Można więc przypuszczać, że reguły rozwoju i kształtowania się stanów ilościowych tych szeregów powinny być takie same, z niewielkimi odchyleniami związanymi z okresowymi prioryretami dla niektórych działów. W związku z tym uzasadnione jest stosowanie takich samych metod w celu prognozowania przyszłych stanów wszystkich tych procesów.

Wykorzystywane dalej dane statystyczne można podzielić na dwie grupy. Pierwsza z nich to dwudziestoczteroelementowe szeregi czasowe z lat 1962-1985, przedstawiające kształtowanie się wartości netto środków trwałych w cenach stałych z roku 1971 w sześciu działach gospodarki narodowej, a mianowicie w:

budownictwie (1),

handlu (2),

leśnictwie (3),

przemyśle (4),

rolnictwie (5),

transporcie i łączności (6).

Ze względu na szczególną rolę przemysłu w tworzeniu dochodu narodowego i zdecydowanie największy jego udział w kumulacji majątku trwałego, wydzielono osiem podstawowych gałęzi tego działu i utworzono drugą grupę szeregów czasowych. Są one tym razem siedemnastoelementowe i obejmują dane dotyczące wartości netto produkcyjnych środków trwałych w przedsiębiorstwach uspołecznionych w latach 1970-1986. Podane są one w cenach stałych z 1977 roku w rozbiciu na następujące gałęzie:

przemysł chemiczny (7),

przemysł drzewno-papierniczy (8),

przemysł elektromaszynowy (9),

przemysł lekki (10),

przemysł metalurgiczny (11),

przemysł mineralny (12),

przemysł paliwowo-energetyczny (13),

przemysł spożywczy (14).

Dane te jak widać nie są aktualne, lecz celowo zostały ograniczone jedynie do połowy lat osiemdziesiątych. Powodem tego był z jednej strony narastający proces inflacyjny, który mógłby w konsekwencji doprowadzić, mimo podawania wielkości w cenach stałych, do powiększenia i tak już występujących błędów w podawaniu danych statystycznych. O ich istnieniu może świadczyć na przykład to iż dana wielkość w różnych rocznikach statystycznych jest podawana inaczej [25]. Z drugiej strony, rozpoczynający się na przełomie lat osiemdziesiątych i dziewięćdziesiątych proces prywatyzacji powodujący zmianę charakteru przedsiębiorstw, a co za tym idzie, ich wyłączenie z majątku narodowego, praktycznie uniemożliwia dalszą analizę tego typu szeregów czasowych. Aktualność danych nie jest jednak warunkiem koniecznym dla przeprowadzania porównań modelowych i ze względu na zalety opisane na wstępie zdecydowano się na ich wykorzystanie. Procesy te charakteryzują się dodatkowo małą dynamiką rozwoju, co w kontekście wspomnianej zasady inercji też nie jest bez znaczenia.

Analizowane szeregi czasowe otrzymano na podstawie danych podanych w rocznikach statystycznych GUS [26] i rocznikach statystycznych przemysłu [27]. Podane tam wartości brutto wielkości majątku trwałego zostały najpierw przeliczone na ceny stałe w określonych wcześniej latach. Wyliczenie to wykonano w sposób proporcjonalny, uwzględniając wzrost cen tychże środków w poszczególnych latach. Jeżeli na przykład rocznik statystyczny z roku t podaje daną wielkość w cenach z tego roku jako y_t, natomiast rocznik z roku t+k podaje ją w cenach z roku t+k jako y'_t, to można przyjąć, że ceny w okresie k wzrosły w przybliżeniu $s=\frac{y'_t}{y_t}$ razy. Iloraz ten umożliwia teraz podanie wielkości y_{t+k} umieszczonej w roczniku w cenach z roku t+k w postaci wielkości w cenach stałych z roku t, przyjmując ją jako $\frac{y_{t+k}}{s}$. Dysponując już jednolitymi wartościami brutto można podać wartość netto w cenach stałych, pomniejszając wartości brutto o podany w rocznikach stopień zużycia. Otrzymane w ten sposób dane umieszczono w tabeli 1 i tabeli 2.

Dla tak wybranych szeregów czasowych zostały wyznaczone prognozy dwudziestoma, spośród wymienionych w rozdziale pierwszym, metodami. Są to:

metoda naiwna (1),

metoda średnich ruchomych (2),

metoda średnich ważonych (3),

metoda podwójnych średnich ruchomych (4),

metoda wyrównywania wykładniczego (5),

metoda wygładzania wykładniczo-autoregresyjnego (6), metoda podwójnego wygładzania wykładniczego (7),

metoda potrójnego wygładzania wykładniczego (8),

jednoparametrowa metoda liniowego wygładzania wykładniczego (9),

dwuparametrowa metoda liniowego wygładzania wykładniczego (10),

metoda trendu liniowego (11),

metoda trendu liniowego wyznaczonego przez aproksymantę ruchomą (12),

metoda trendu parabolicznego wyznaczonego przez aproksymantę ruchomą (13),

metoda trendu wykładniczego wyznaczonego przez aproksymantę ruchomą (14),

metoda trendu potęgowego wyznaczonego przez aproksymantę ruchomą (15),

metoda trendu liniowego wyznaczonego metodą Waszkiewiczów (16),

metoda trendu parabolicznego wyznaczonego metodą Waszkiewiczów (17),

metoda trendu wykładnicczego wyznaczonego metodą Waszkiewiczów (18),

metoda trendu potęgowego wyznaczonego metodą Waszkiewiczów (19), metoda trendu minimalizującego średni kwadrat drugiej pochodnej (20).

Zrezygnowano z podawania prognoz na podstawie analizy graficznej i krzywych wzrostu, ponieważ wymagają one pewnej subiektywnej oceny kształtowania się zjawiska, co może powodować kontrowersyjność otrzymanych wyników. Z podobnych przyczyn nie została też uwzględniona metoda trendów segmentowych, w której podobne zastrzeżenia mogą dotyczyć lokalizacji punktów podziału na segmenty. Ponadto wydaje się, że w omawianym przypadku w ogóle trudno mówić o jakichkolwiek zmianach tendencji rozwojowych i w związku z tym można przyjąć, iż metoda ta występuje w dalszych rozważaniach rachunkowych zredukowana do jednego segmentu, czyli w postaci metody trendu liniowego. Nie umieszczono też w tabelach, mimo wykonania takich obliczeń, wyników prognoz uzyskanych metodą wielomianu interpolacyjnego. Tym razem rezygnacja ta była spowodowana bardzo dużymi ich odchyleniami od rzeczywistej realizacji zadanych szeregów czasowych.

Pozostałymi metodami wyznaczono prognozy na pięć ostatnich lat, z których posiadano dane, czyli w przypadku szeregów dwudziestoczteroelementowych na lata 1981-1985, natomiast dla szeregów o siedemnastoelementowych na lata 1982-1986. Wybór okresu pięcioletniego spowodowany był chęcią uwzględnienia, w sytuacji szeregów o mniejszej liczbie danych, przynajmniej dwunastu okresów poprzednich. Odpowiada to często wyznaczanym, na podstawie rocznych obserwacji, prognozom miesięcznym. W każdym przypadku przyjęto zasady maksymalnego wykorzystania danych i rocznego wyprzedzenia prognozy. Oznacza to ustalenie horyzontu prognozy na jeden okres naprzód oraz wyznaczanie stanu zjawiska w danym roku na podstawie wszystkich posiadanych danych do roku poprzedającego włącznie. Zrezygnowano więc z prognozowania opierającego się na szeregach jednakowej długości. W takiej sytuacji należałoby w każdym następnym okresie odrzucać daną najwcześniejszą, aby utrzymać stałą liczbę danych wyjściowych. Otrzymane w ten sposób wielkości prognozowanych zmiennych zostały następnie porównane z rzeczywistymi realizacjami przy wykorzystaniu kwadratu błędu jako miernika *ex post* rzędu dokładności prognozy.

Większość spośród analizowanych dwudziestu metod zależy od pewnej liczby parametrów. Są to: długość okresu, stałe wygładzające oraz wagi. W obliczeniach zrezygnowano z ich arbitralnego ustalania i zastosowano metodę optymalnego wyboru spośród z góry zadanego zbioru możliwych stałych czy wag. Za kryterium optymalności przyjęto minimalizację średniego kwadratu błędu w okresach wcześniejszych. W związku z tym, przy różnym układzie parametrów, daną metodą wyznaczano, o ile było to formalnie możliwe, prognozę na każdy rok, począwszy od piątego z kolei, a skończywszy na roku bezpośrednio poprzedzającym, na który chce się określić prognozę z uwzględnieniem optymalnego doboru parametrów i wybierano taki układ, dla którego średni kwadrat odchyleń otrzymanych wyników od rzeczywistej realizacji w badanym okresie był najmniejszy. Aby w ten sposób wybrać np. stałą wygładzającą α ze zbioru $A=\{0,0.1,...,1\}$ w metodzie wygładzania wykładniczego w celu wyznaczenia prognozy wielkości netto środków trwałych w przemyśle spożywczym w roku 1984 należy określić tą metodą dla każdej warości α należącej do zbioru A prognozę na wszyskie lata od 1976 do 1983. Jeżeli y_i oznacza rzeczywistą realizację w roku i, a p_i^{α} - prognozę na okres i otrzymaną dla stałej α, gdzie $\alpha \in A$, $i \in \{1976,1977,...,1983\}$, to wówczas zadanie optymalnego wyboru parametru sprowadza się do znalezienia takiego α, aby

$$\varepsilon_{\alpha} = \min_{\alpha' \in A} \{ \varepsilon_{\alpha'} \},$$

a $\varepsilon_{\alpha'}=((y_{1976}-p^{\alpha'}_{1976})^2+(y_{1977}-p^{\alpha'}_{1977})^2+...+(y_{1983}-p^{\alpha'}_{1983})^2)/8$.

Przyjęcie analizowania błędów dopiero od piątego roku było spowodowane chęcią zagwarantowania pewnego minimum danych, na podstawie których wyznacza się prognozę. Niektóre metody pozwalają od strony formalnej na prognozowanie z uwzględnieniem mniejszej liczby danych, lecz wówczas można mieć zastrzeżenia co do tego, czy otrzymana wielkość wyraża koncepcję twórcy modelu.

Nie każdą metodą przy dowolnie wybranych parametrach można wyznaczać prognozę na wszystkie poprzednie lata. Stąd mamy wcześniejsze zastrzeżenie o formalnej możliwości wykonania tego. Nie można na przykład wyznaczyć prognozy w wyżej omawianym przypadku na rok 1978 posługując się metodą średnich ruchomych i ustalając parametr tej metody, jakim jest długość okresu, jako równy dwanaście. Ogólnie, długość okresu we wszystkich metodach, w których jest on parametrem, nie może przekraczać liczby posiadanych danych statystycznych. Z tego też powodu jako kryterium optymalności przy wyborze parametrów przyjęto średni błąd kwadratowy, a nie sumę kwadratów błędów, gdyż sumy te składałyby się z różnej liczby składników.

Długość okresu wybierano spośród wszystkich możliwych wartości, tzn. od długości równej jeden do długości równej liczbie aktualnie posiadanych danych. Wyjątkiem jest tu jedynie metoda podwójnych średnich ruchomych, gdzie ze względu na niewykonalność działań arytmetycznych nie rozpatrywano okresów o długości jeden. W przypadku stałych wygładzających, testowanie wszystkich możliwych parametrów byłoby oczywiście niemożliwe, więc zdecydowano się na ich wybór ze zbioru {0,0.1,...,1}. Jeśli nie można było przyjąć stałej α równej zeru bądź jedności, ze względu na niewykonalność dzielenia przez zero, zastępowano je odpowiednio stałymi 0.01 i 0.99. Wagi dobierano spośród czterech najbardziej typowych układów, a mianowicie układu wag stałych, liniowych, harmonicznych i wykładniczych. Przy założeniu, że są one T-elementowe, można je zdefiniować następująco:

$$w_s(i) = \frac{1}{T},$$

$$w_l(i) = \frac{2i}{T(T+1)},$$

$$w_h(0) = 0,\ w_h(i) = w_h(i-1) + \frac{1}{T(T-i+1)},$$

$$w_w(i) = \frac{(1-q)q^{T-i}}{1-q^T},\ i=1,2,\ldots,T,\ q\in(0,1),$$

gdzie w_s, w_l, w_h, w_w oznaczają odpowiednio ciągi wag stałych, liniowych, harmonicznych i wykładniczych; parametr q występujący w definicji wagi wykładniczej wybierany był ze zbioru { 0.01,0.1,0.2,...,0.9,0.09 }.

2. Wyniki obliczeń prognoz otrzymanych we wcześniej opisany sposób zostały przedstawione w tabelach 3-16. Analizie poddano, jak już wspomniano, czternaście szeregów czasowych. Jest to stosunkowo mała liczba, aby można było pokusić się o wyciągnięcie konstruktywnych, ogólnych wniosków.

Niemniej jednak spróbujmy prześledzić i skomentować uzyskane wyniki.

Pierwszą rzeczą jaką można zauważyć jest redukcja metod bardziej skomplikowanych do prostszych. Dziewięć spośród analizowanych modeli mogło, przy odpowiednim układzie parametrów, ulec uproszczeniu sprowadzając się do modelu zależącego od mniejszej liczby parametrów lub nie zależącego od nich w ogóle. Uwzględniając to, że każdą metodą wyznaczono siedemdziesiąt jednostkowych prognoz, otrzymujemy ogólną liczbę sześćset trzydziestu przypadków, w których mogła nastąpić wspomniana redukcja. Nastąpiła ona w dwustu dziewięćdziesięciu ośmiu przypadkach, co stanowi 47.3%.

Na podkreślenie zasługuje, że optymalny dobór parametrów w metodach średnich ruchomych i wygładzania wykładniczego zawsze sprowadzał je do metody naiwnej. Okazało się, że dla każdego szeregu czasowego, niezależnie od roku, na który wyznaczano prognozę, najmniejsze błędy w okresach wcześniejszych otrzymywano dla długości okresu i stałej wygładzającej równych jeden. Może to posłużyć jako argument za unikaniem metod skomplikowanych, zależnych od wielu parametrów. Określanie prognozy takimi metodami jest bowiem bardziej czasochłonne, szczególnie wtedy, gdy zdecydujemy się na optymalizację doboru tychże parametrów w sposób zbliżony do wcześniej opisanego. W sytuacji, gdy otrzymane rezultaty mają być identyczne lub bardzo zbliżone, względy racjonalnego działania nakazują zastanowienie się nad możliwością uproszczenia problemu.

3. Na początku tego rozdziału podkreślono, że do obliczeń wybrano szeregi czasowe o podobnym charakterze, opisujące kształtowanie się w czasie takich samych zjawisk ekonomicznych. Nasuwać się powinno przypuszczenie, że któraś z zastosowanych metod okaże się najskuteczniejsza ze względu na dokładność prognoz w sensie minimalizacji kwadratów błędów w wyznaczaniu przyszłych stanów tych procesów. Okazuje się, że tak nie jest. Niech σ_i^j oznacza średni kwadratowy błąd prognoz uzyskanych metodą i na pięć ostatnich okresów zjawiska opisywanego szeregiem czasowym o numerze j, zgodnie z numeracją zaprezentowaną na początku tego rozdziału, czyli

$$\sigma_i^j = ((y_k^j-p_k^{ij})^2+(y_{k+1}^j-p_{k+1}^{ij})^2+...+(y_{k+4}^j-p_{k+4}^{ij})^2)/5,$$

gdzie k w zależności od szeregu czasowego równa się 1981 dla szeregów dwudziestoczteroelementowych lub 1982 dla siedemnastoelementowych; y_k^j oznacza wartość szeregu czasowego o numerze j w roku k, a p_k^{ij} prognozę uzyskaną na rok k dla tego szeregu metodą i. Za najskuteczniejszą w prognozowaniu wielkości szeregu czasowego j należy, w myśl wcześniejszych uwag, uznać taką metodę, dla której wartość σ_i^j jest najmniejsza. Przyjmijmy, że

$$\sigma^j = \min_{i\in\{1,2,\ldots,20\}} \{ \sigma_i^j \},$$

$$\Sigma^j = \{ i: \sigma_i^j=\sigma^j \}.$$

Σ^j formalnie jest zbiorem numerów metod najskuteczniejszych dla szeregu j, przyporządkowanych im w wyliczeniu przedstawionym na początku tego rozdziału. Po utożsamieniu numeru metody z nią samą, podobnie jak numeru szeregu czasowego z odpowiadającym mu szeregiem, wspomniany zbiór można traktować jako zbiór metod najskuteczniejszych w przypadku szeregu czasowego j.

Jeżeli według rozpatrywanego kryterium porównamy wyniki otrzymanych obliczeń, to okazuje się, że zbiór

$$\Sigma = \bigcup_{j=1}^{14} \Sigma^j$$

jest dwunastoelementowy, co oznacza, że dwanaście metod przynajmniej raz okazało się najskuteczniejszymi. Dla niektórych szeregów czasowych suma kwadratów błędów była najmniejsza w przypadku więcej niż jednej metody. Oznacza to, że dla pewnych j zbiór Σ^j był więcej niż jednoelementowy. Działo się tak na przykład wówczas, gdy najskuteczniejszą okazywała się metoda naiwna. Wtedy redukujące się do niej metody średnich ruchomych i wygładzania wykładniczego także minimalizowały sumę kwadratów błędów.

Najczęściej, bo w przypadku czterech szeregów czasowych, najskuteczniejszą okazała się metoda średnich ważonych. Fakt, że prognozy wyznaczone tą metodą były najdokładniejsze dla czterech szeregów czasowych nie oznacza jednak, że gdyby należało zdecydować się na prognozowanie wszystkich czternastu zjawisk jedną metodą, to wybór miałby paść właśnie na nią. Dokładniejsza analiza błędów prognoz otrzymywanych poszczególnymi metodami w przekroju wszystkich szeregów czasowych zostanie przedstawiona w dalszej części tego rozdziału. Tu warto jednak podkreślić, że jeśli uporządkujemy rosnąco ciąg σ_i^{13}, czyli błędy prognoz otrzymanych dla szeregu czasowego opisującego wartość netto środków trwałych w przemyśle paliwowo-energetycznym, to wielkość σ_3^{13} odpowiadająca błędowi uzyskanemu metodą średnich ważonych znajdzie się na dziewiętnastym, przedostatnim miejscu.

Jeszcze bardziej nieskuteczność prognoz obliczonych tą metodą dla wspomnianego szeregu czasowego obrazuje analiza wyrażonego w procentach stosunku średniego błędu kwadratowego do średniej wartości prognozowanej zmiennej w rozpatrywanym pięcioletnim okresie, tzn. wielkości

$$\delta_i^j = \frac{\sigma_i^j}{\overline{y^j}}$$

gdzie $\overline{y^j}=(y_k^j+y_{k+1}^j+\ldots+y_{k+4}^j)/5$. (Jako kryterium można przyjąć także średnią arytmetyczną wyrażonych w procentach stosunków kwadratów błędów i rzeczywistych realizacji zmiennej w rozpatrywanym okresie. W przypadku, gdy przyrost wartości szeregu czasowego w porównaniu z jego wartością bezwzględną nie jest duży wspomniana wielkość niewiele różni się zdefiniowanej wielkości δ_i^j).

Wartość δ_i^{13} w przypadku metody najskuteczniejszej wynosiła 1.1%, natomiast δ_3^{13} aż 56.22%. Jest to także ponad dwukrotnie więcej niż średnia $\overline{\delta^j}$ dla tego szeregu czasowego, gdzie

$$\overline{\delta^j} = \frac{1}{20} \sum_{i=1}^{20} \delta_i^j,$$

gdyż tak obliczona wielkość $\overline{\delta^{13}}$ wynosi 26.45%.

4. Spróbujmy teraz wskazać metodę, która w przekroju wszystkich badanych szeregów czasowych dawała najmniejsze błędy prognozy. Jako kryterium wyboru przyjmijmy minimalizację rozważanego wcześniej procentowego stosunku średniego kwadratu błędu do średniej wartości prognozowanej zmiennej. Niech

$$\overline{\delta_i} = \frac{1}{14} \sum_{j=1}^{14} \delta_i^j,$$

$$\delta = \min_{i \in \{1,2,...,20\}} \{ \overline{\delta_i} \},$$

oraz

$$\Delta = \{ i: \overline{\delta_i} = \delta \}.$$

Elementami zbioru Δ są więc numery metod, dla których prognozy porównane według wspomnianego kryterium, okazały się najdokładniejsze w skali wszystkich szeregów czasowych.

Analizując błędy globalnie warto zwrócić uwagę, że trzy szeregi czasowe, a mianowicie opisujące wartość netto środków trwałych w przemyśle elektromaszynowym, przemyśle oraz transporcie i łączności, charakteryzowały się gwałtownym wzrostem wartości w jednym z pięciu okresów, na które wyznaczano prognozę. Ten jednostkowy wzrost wynosił dla szeregu 9 - 9.62%, 4 - 6.48%, 6 - 44.62%, w stosunku do ich poprzedniej wartości. Spowodowało to gwałtowny wzrost błędów prognoz. Dla wspomnanych szeregów wiekości $\overline{\delta^j}$ wynosiły odpowiednio 182.1%, 235.02% i 1647.6%.

Uwzględniając, że w pozostałych przypadkach $\overline{\delta^j}$ nie przekraczał 95.18% można stwierdzić, że istotny wpływ na wielkość $\overline{\delta_i}$ miały składniki δ_i^9, δ_i^4 oraz δ_i^6. Można więc wysnuć wniosek, że aby w ocenie poszczególnych metod nie przykładać zbyt dużej wagi do trafności jednostkowych prognoz trzeba także rozważyć oddzielnie skuteczność metod na przykładzie jedenastu pozostałych szeregów czasowych. W tym celu określmy

$$\overline{\overline{\delta_i}} = \frac{1}{11} \left(\sum_{j=1}^{3} \delta_i^j + \delta_i^5 + \sum_{j=7}^{14} \delta_i^j \right),$$

$$\delta' = \min_{i\in\{1,2,...,20\}} \{ \overline{\overline{\delta}}_i \},$$

i

$$\Delta' = \{ i: \overline{\overline{\delta}}_i=\delta' \}.$$

Zbiór Δ' jest jednoelementowy. Najskuteczniejszą we wspomnianym sensie okazała się jednoparametrowa metoda wygładzania wykładniczego. Prognozy wyznaczone tą metodą nie minimalizowały jednak średniego kwadratu błędu dla żadnego szeregu czasowego. Co więcej, jeżeli uporządkujemy rosnąco wielkości $\overline{\overline{\delta}}_i$, to także metoda odpowiadająca trzeciej z kolei wartości $\overline{\overline{\delta}}_i$ w żadnym jednostkowym przypadku nie okazała się najskuteczniejsza.

Na dziewiątym miejscu we wspomnianym uporządkowaniu znajduje się metoda naiwna i redukujące się do niej metody średnich ruchomych i wygładzania wykładniczego. Są one natomiast najskuteczniejsze w przypadku wszystkich czternastu szeregów czasowych. Metody te minimalizowały także dla trzech szeregów błąd σ_i^j. Metoda wygładzania wykładniczo-autoregresyjnego, dla której wartość $\overline{\overline{\delta}}_i$ w uporządkowaniu rosnącym znajdowała się bezpośrednio za wspomnianymi, nie była już natomiast metodą najskuteczniejszą w przypadku żadnego szeregu czasowego.

5. Na zakończenie warto jeszcze zwrócić uwagę na dokładność otrzymanych prognoz w przypadku każdego z szeregów czasowych. Oznaczmy w tym celu przez δ^j najmniejszy, wyrażony w procentach, stosunek średniokwadratowego błędu do średniej wartości szeregu j w rozpatrywanym pięcioletnim okresie, czyli

$$\delta^j = \min_{i \in \{1,2,\ldots,20\}} \{ \delta_i^j \}.$$

Tak określona wielkość δ^j przyjmowała wartości od 1.1 do 1270.84%. Podkreślmy, że w przypadku czterech szeregów czasowych δ^j nie przekraczała 2%, a w przypadku siedmiu, czyli połowy - 7%.

Dane te mogą sugerować, że dokładność otrzymanych prognoz powinna skłaniać do stosowania tych metod w konkretnych zadaniach prognostycznych. Pamiętać jednak należy, że najważniejsze jest wybranie odpowiedniej metody dla danego szeregu czasowego. To, że posługiwanie się daną metodą pozwoli nam na wyznaczenie prognozy, której średni błąd kwadratowy różni się od średniej rzeczywistej realizacji o mniej niż 2%, nie oznacza, że w rzeczywistości nie otrzymamy większych błędów. Nie ma bowiem gwarancji, iż wybierając metodę zdecydujemy się na właściwą, tzn. taką, która pozwoli wyznaczyć prognozy najmniej różniące się od rzeczywistej wartości. Wybór innej może już zdecydowanie pogorszyć dokładność. Potwierdza to analiza średniego dla wszystkich metod błędu prognozy, także wyrażonego w procentach, otrzymanego dla konkretnego szeregu j, czyli wielkości $\overline{\delta^j}$. Można ją traktować jako ogólny miernik dokładności prognozy dla wszystkich dwudziestu metod. Zestawienie wielkości $\overline{\delta^j}$ częściowo tonuje optymizm, który mógłby sie zrodzić po przestudiowaniu błędów δ^j. Okazuje się na przykład, że gdy błąd δ^j był najmniejszy i wynosił 1.1%, to średni błąd prognoz $\overline{\delta^j}$ był równy 26.45% i jedynie dla jednego szeregu czasowego nie przekraczał on 10%, a w poszczególnych przypadkach wahał się od 4.1 do 1647.6%.

Można zauważyć, że najmniej dokładne prognozy otrzymywano metodą trendu liniowego. Błędy prognoz wyznacznych tą metodą stanowiły najczęściej zdecydowanie największy składnik sumy $\overline{\delta^j}$. Jednakże pomijając ją nawet w obliczaniu średniego błędu nie otrzymamy wyników o wiele lepszych. Liczba przypadków, w których średni błąd był mniejszy od 10% wzrośnie do trzech, natomiast przedział wahań tych błędów zmieni się nieznacznie. Średni błąd będzie wówczas nie mniejszy niż 3.02%, a nie większy niż 1641.63%.

6. Zestawienie tych danych pokazuje jak trudno mając do dyspozycji dwadzieścia metod wybrać tę, którą należy zastosować w konkretnym, jednostkowym przypadku, nie mając oczy-

wiście żadnych innych informacji oprócz wcześniejszych realizacji danego zjawiska. Wybór taki, choć może poprzedzony analizą skuteczności tych metod w prognozowaniu wcześniejszych stanów rozpatrywanego zjawiska, nie musi być trafny. Mimo tego, że zjawisko obserwowano już wcześniej - wcześniej wyznaczano prognozy jego kształtowania się i oceniano, które z metod czyniły to najlepiej - nie zawsze w danym momencie na takiej podstawie można właściwie wybrać metodę i wskazać tę, która zastosowana w aktualnej chwili pozwoli wyznaczyć prognozę najmniej różniącą się od rzeczywistej realizacji.

Jeżeli w przypadku jednolitych pod względem opisywanego zjawiska szeregów czasowych można zauważyć tak dużą różnorodność metod najskuteczniejszych, w sensie któregoś z opisywanych kryteriów, to gdy mamy do dyspozycji tylko jeden zestaw danych statystycznych wybór metody prognozy będzie zapewne zupełnie przypadkowy. Nie będąc ekspertem w danej dziedzinie posiadającym odpowiednią wiedzę teoretyczną lub praktyczną, to wynikającą z długotrwałej obserwacji, o prawach rządzących jego rozwojem wybierając metodę prognozy musimy zawsze się liczyć z możliwością złego wyboru. W takiej sytuacji lepiej chyba zdecydować się na taką metodę, której konstrukcja oparta jest na ogólnych zasadach rządzących zjawiskami otaczającego nas świata. Jej zastosowanie w danym momencie ma przynajmniej pewne uzasadnienie teoretyczne. W takich przypadkach istotną rolę powinny odgrywać metody konstruowane na podstawie zasady inercji, w szczególności metoda opisana w rozdziale trzecim.

DODATEK

W opisie przedstawianych tabel wykorzystano oznaczenia wprowadzone w czwartym rozdziale. Dodatkowo przez $\overline{\overline{\delta^j}}$ oznaczono wspomnianą wcześniej średnią arytmetyczną wartości δ_i^j bez uwzględnienia składnika δ_{11}^j, czyli błędu prognozy wyznaczonej metodą trendu liniowego.

W tabelach 3a-16a przedstawiających wyniki prognoz (w mld. zł.) umieszczono tatże obok nich wartości parametrów, przy których zostały one wyznaczone. Jeżeli metoda zależała od więcej niż jednego parametru, to wymieniano je w kolejności: stała wygładzająca, długość okresu i waga, a gdy była nią waga wykładnicza także jej parametr. W przypadku dwuparametrowej metody liniowego wygładzania wykładniczego najpierw podawano stałą wygładzającą α, a potem β. Przyjęcie stałej wygładzającej równej jedności w metodzie wygładzania wykładniczo-autoregresyjnego uniezależnia wynik prognozy od pozostałych parametrów i dlatego w niektórych przypadkach traktowana jest ona w opisie jako zależna tylko od jednego parametru.

Ze względu na chęć zachowania przejrzystości tabel zrezygnowano w przypadku ułamków właściwych z pisania zera przed kropką dziesiętną.

TABELA 1. Wartość netto środków trwałych w cenach stałych z 1971 roku (mld zł.)

ROK	1	2	3	4	5	6
1962	18.0	34.2	12.3	318.6	234.7	196.5
1963	20.3	35.8	12.4	339.9	239.0	202.4
1964	20.6	36.7	11.8	363.4	245.8	207.8
1965	22.3	39.2	11.5	386.7	269.8	212.5
1966	24.9	41.5	11.7	421.1	274.7	219.4
1967	28.3	45.5	11.6	451.0	293.2	227.4
1968	32.5	49.2	11.8	486.8	312.8	235.2
1969	37.9	53.8	11.5	523.0	315.7	246.3
1970	40.2	57.5	11.8	573.1	332.2	255.3
1971	42.6	53.2	12.8	596.8	347.8	268.8
1972	51.0	56.2	12.9	683.8	368.6	287.6
1973	58.6	59.1	13.4	734.3	385.5	315.5
1974	75.0	65.9	14.4	848.3	410.3	343.6
1975	87.8	71.9	14.9	950.0	440.1	378.2
1976	95.6	78.8	16.0	1014.3	483.6	367.9
1977	105.6	83.2	16.5	1133.4	528.0	383.7
1978	118.6	87.1	17.8	1237.7	578.8	413.7
1979	132.2	92.2	18.6	1310.5	626.6	430.9
1980	140.7	96.9	19.1	1342.8	669.4	440.5
1981	135.5	99.0	18.1	1335.3	690.6	439.5
1982	131.7	101.8	19.7	1342.1	720.2	435.1
1983	138.4	103.9	19.1	1428.4	726.0	629.1
1984	136.3	105.1	21.1	1428.6	739.8	630.2
1985	134.5	107.5	22.4	1448.6	749.6	640.8

TABELA 2. Wartość netto produkcyjnych środków trwałych w przedsiębiorstwach uspołecznionych w cenach stałych z 1977 roku (mld zł.)

ROK	7	8	9	10	11	12	13	14
1970	84.7	24.6	117.1	35.8	75.6	44.7	195.5	66.1
1971	91.9	26.0	126.1	37.5	79.7	47.9	210.1	74.2
1972	98.9	30.1	144.1	45.7	93.5	52.2	227.3	80.4
1973	108.8	32.8	171.9	53.4	100.9	57.5	245.8	92.6
1974	120.1	40.4	206.6	70.2	118.8	66.7	278.5	112.6
1975	130.5	44.6	246.6	79.6	126.9	74.9	292.4	130.9
1976	140.7	53.5	290.7	86.4	131.1	80.2	315.9	147.3
1977	148.9	61.0	328.7	92.7	169.4	91.9	341.8	161.7
1978	152.8	62.2	341.5	93.1	206.6	95.4	382.4	169.5
1979	166.4	61.4	357.6	93.3	221.9	96.6	405.0	181.4
1980	165.9	60.2	364.1	91.7	220.4	96.2	421.5	181.7
1981	160.7	58.6	357.0	89.0	215.8	94.9	419.8	181.5
1982	163.6	65.0	353.1	86.7	207.2	94.2	433.6	179.7
1983	169.7	67.2	386.3	88.9	206.1	96.8	450.5	180.3
1984	171.8	64.5	380.9	86.5	198.9	95.7	467.0	180.2
1985	177.5	66.2	382.8	86.6	188.8	96.2	484.3	183.9
1986	182.5	67.0	399.6	90.2	184.2	96.7	498.3	187.4

TABELA 3a

i	p^{i1}_{1981}		p^{i1}_{1982}		p^{i1}_{1983}		p^{i1}_{1984}		p^{i1}_{1985}	
1	140.7		135.5		131.7		138.4		136.3	
2	140.7	1	135.5	1	131.7	1	138.4	1	136.3	1
3	140.6	18	135.8	19	132.3	20	136.2	19	136.3	22
		W .01		W .3		W .5		W .4		W .4
4	153.0	2	146.9	10	126.8	2	137.2	2	140.8	2
5	140.7	1	135.5	1	131.7	1	138.4	1	136.3	1
6	140.7	1	135.0	.7	131.6	.6	136.9	.7	136.1	.6
				19		20		19		22
				W .2		W .4		W .3		W .1
7	151.1	.8	130.6	.99	127.9	.99	144.9	.99	135.6	.9
8	149.4	.4	137.5	.5	129.0	.5	136.0	.5	134.7	.5
9	149.1	.9	133.5	.9	128.5	.9	142.5	.9	135.7	.9
10	150.1	1	132.1	.9	128.3	.9	143.4	.9	135.7	.8
		.6		1		1		1		1
11	130.1		138.1		143.9		149.8		154.4	
12	150.9	2	130.4	2	127.9	2	145.0	2	136.3	2
		W .4		W .01		W .01		W .01		W .4
13	149.6	2	129.9	2	127.6	2	145.3	2	134.0	2
		S		S		S		S		S
14	149.3	18	150.4	19	128.0	2	158.2	21	151.7	22
		H		L		W .01		W .99		W .99
15	152.4	2	142.2	19	128.2	2	145.0	2	136.0	2
		W .6		S		W .01		W .01		W .3
16	150.9	W .4	130.4	W .01	127.9	W .01	145.0	W .01	136.3	W .4
17	149.6	S	129.9	S	127.6	S	145.3	S	134.0	S
18	157.9	S	130.6	W .01	128.0	W .01	145.3	W .01	135.6	W .2
19	152.4	W .6	130.8	W .01	128.2	W .01	145.0	W .01	136.0	W .3
20	147.8		127.0		129.2		147.6		131.2	

TABELA 3b

i	σ^1_i	δ^1_i
1	18.804	13.90
2	18.804	13.90
3	16.656	12.31
4	142.470	105.31
5	18.804	13.90
6	17.418	12.86
7	85.998	63.57
8	63.068	46.62
9	65.218	48.21
10	73.034	53.99

i	σ^1_i	δ^1_i
11	135.726	100.33
12	85.606	63.28
13	79.988	59.13
14	284.748	210.49
15	115.568	85.43
16	85.606	63.28
17	79.988	59.13
18	138.668	102.50
19	93.680	69.25
20	79.320	58.63

$\overline{\delta^1}$	62.80

$\overline{\overline{\delta^1}}$	60.83

TABELA 4a

i	p^{i2}_{1981}		p^{i2}_{1982}		p^{i2}_{1983}		p^{i2}_{1984}		p^{i2}_{1985}	
1	96.9		99.0		101.8		103.9		105.1	
2	96.9	1	99.0	1	101.8	1	103.9	1	105.1	1
3	96.9	15	99.0	19	101.8	19	103.9	21	105.1	22
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
4	101.9	2	103.0	2	104.1	2	109.2	11	107.0	2
5	96.9	1	99.0	1	101.8	1	103.9	1	105.1	1
6	96.9	1	99.0	1	101.8	1	103.9	1	105.1	1
7	101.7	.8	102.2	.8	104.6	.8	106.3	.8	106.7	.8
8	99.3	.5	100.8	.5	102.9	.5	104.7	.5	105.5	.5
9	101.1	.9	101.4	.8	103.9	.8	105.7	.8	106.3	.8
10	101.7	1	102.9	1	104.3	.9	106.0	.9	106.6	.9
		.4		.3		.7		.7		.7
11	94.7		99.0		103.1		106.8		110.1	
12	101.4	2	102.9	2	105.5	2	107.5	21	110.7	22
		W .8		H		H		L		L
13	102.1	3	102.5	3	104.4	20	107.9	21	110.9	22
		S		S		L		L		L
14	102.7	2	102.5	19	106.7	20	108.5	21	111.0	22
		S		S		S		W .8		W .01
15	101.6	2	102.6	2	104.8	2	107.8	21	109.8	22
		W .6		W .6		W .5		W .01		S
16	101.4	W .8	102.9	H	105.5	H	107.4	H	107.3	W .6
17	101.8	S	101.1	S	104.7	S	106.0	S	106.3	S
18	102.7	S	104.8	S	107.6	S	106.7	W .5	107.1	W .5
19	101.6	W .6	102.6	W .6	104.8	W .5	106.4	W .5	106.9	W .5
20	101.4		100.5		105.0		105.7		106.1	

TABELA 4b

i	σ^2_i	δ^2_i
1	4.772	4.61
2	4.772	4.61
3	4.772	4.61
4	5.390	5.21
5	4.772	4.61
6	4.772	4.61
7	2.004	1.94
8	1.250	1.20
9	1.274	1.23
10	2.056	1.99

i	σ^2_i	δ^2_i
11	7.324	7.08
12	5.106	4.94
13	5.950	5.75
14	9.166	8.86
15	4.158	4.02
16	2.972	2.87
17	2.244	2.17
18	7.820	7.56
19	2.052	1.98
20	2.196	2.12

$\overline{\delta^2}$	4.10

$\overline{\overline{\delta^2}}$	3.94

TABELA 5a

i	p^{13}_{1981}		p^{13}_{1982}		p^{13}_{1983}		p^{13}_{1984}		p^{13}_{1985}	
1	19.1		18.1		19.7		19.1		21.1	
2	19.1	1	18.1	1	19.7	1	19.1	1	21.1	1
3	19.1	18	18.0	19	19.7	1	19.1	21	21.1	1
		W .01		W .6				W .4		
4	20.2	3	19.2	10	20.1	10	20.4	11	21.5	10
5	19.1	1	18.1	1	19.7	1	19.1	1	21.1	1
6	19.1	1	18.0	.5	19.7	1	18.7	.8	21.1	1
				19				21		
				W .4				W .8		
7	19.9	.6	18.1	.7	20.0	.5	19.6	.5	21.4	.5
8	19.8	.4	18.1	.5	19.7	.4	19.3	.4	21.1	.3
9	19.6	.8	17.9	.8	19.9	.7	19.3	.6	21.1	.6
10	19.8	.9	18.0	.8	20.0	.8	19.4	.7	21.4	.8
		.5		.7		.4		.4		.3
11	17.9		18.3		19.0		19.4		20.2	
12	20.1	4	18.6	19	19.7	5	19.7	5	21.2	3
		W .3		W .99		W .3		L		H
13	20.2	6	18.7	19	19.8	19	19.8	21	21.2	19
		L		L		W .01		L		S
14	20.2	4	18.7	19	19.7	5	19.8	21	21.3	3
		W .4		S		W .2		W .9		L
15	20.1	4	18.7	19	19.6	4	19.8	21	21.2	3
		W .3		W .01		H		W .01		H
16	19.8	W .6	18.4	H	20.2	L	19.5	L	21.7	L
17	19.6	S	17.0	S	21.4	S	18.5	S	23.2	S
18	19.9	W .7	18.5	H	20.4	L	19.7	L	21.9	L
19	19.8	W .6	18.4	H	20.2	L	19.4	L	21.6	L
20	19.6		16.7		22.1		17.7		24.0	

TABELA 5b

i	σ^3_i	δ^3_i
1	1.922	9.57
2	1.922	9.57
3	1.988	9.90
4	1.392	6.93
5	1.922	9.57
6	2.340	11.65
7	1.972	9.82
8	2.148	10.70
9	2.212	11.02
10	2.096	10.44

i	σ^3_i	δ^3_i
11	1.948	9.70
12	1.794	8.93
13	1.806	8.99
14	1.734	8.64
15	1.676	8.35
16	1.768	8.80
17	3.726	18.56
18	2.108	10.50
19	1.864	9.28
20	6.874	34.23

$\overline{\delta^3}$	11.26

$\overline{\overline{\delta^3}}$	11.34

TABELA 6a

i	p^{i4}_{1981}	p^{i4}_{1982}	p^{i4}_{1983}	p^{i4}_{1984}	p^{i4}_{1985}
1	1342.8	1335.3	1342.1	1428.4	1428.6
2	1342.8 1	1335.3 1	1342.1 1	1428.4 1	1428.6 1
3	1342.5 18	1334.7 19	1341.5 19	1427.5 18	1428.6 22
	W .01	W .2	W .1	W .01	W .01
4	1405.5 2	1446.0 10	1338.2 2	1455.1 2	1493.4 2
5	1342.8 1	1335.3 1	1342.1 1	1428.4 1	1428.6 1
6	1342.8 1	1333.5 .9	1341.5 .9	1428.4 1	1428.6 1
		19	19		
		W .3	W .01		
7	1407.8 .7	1349.6 .8	1349.5 .8	1482.8 .8	1459.8 .7
8	1405.6 .4	1341.5 .5	1330.5 .5	1426.4 .4	1437.9 .4
9	1379.6 .9	1337.0 .9	1346.8 .9	1490.7 .9	1447.9 .8
10	1402.6 1	1342.3 .9	1347.4 .9	1483.5 .9	1453.2 .8
	.5	.8	.8	.8	.6
11	1321.2	1384.0	1436.1	1494.3	1542.4
12	1403.7 3	1399.2 19	1338.5 3	1508.5 21	1454.4 2
	W .3	W .99	W .01	L	W .5
13	1398.6 4	1409.1 19	1336.1 4	1514.3 21	1472.5 4
	W .5	L	W .01	L	W .01
14	1420.3 18	1416.3 19	1338.5 3	1516.8 21	1476.3 4
	S	W .7	W .01	W .01	W .01
15	1415.0 4	1408.1 19	1338.5 3	1501.2 21	1452.8 2
	W .01	W .01	W .01	W .99	W .5
16	1402.6 W .5	1344.2 W .3	1349.5 W .3	1484.5 W .4	1454.4 W .5
17	1375.7 S	1326.2 S	1348.1 S	1517.9 S	1427.8 S
18	1455.1 S	1345.4 W .3	1349.9 W .3	1495.2 W .3	1452.8 W .4
19	1401.8 W .5	1343.2 W .3	1349.0 W .3	1484.5 W .4	1452.8 W .5
20	1365.9	1319.6	1354.9	1534.4	1400.5

TABELA 6b

i	σ^4_i	δ^4_i
1	**1590.044**	**113.86**
2	**1590.044**	**113.86**
3	1611.884	115.41
4	5313.716	380.48
5	**1590.044**	**113.86**
6	1616.372	115.74
7	2920.158	209.10
8	2929.238	209.74
9	2500.792	179.06
10	2825.100	202.28

i	σ^4_i	δ^4_i
11	3025.728	216.65
12	4487.726	321.33
13	4986.176	357.02
14	5871.836	420.44
15	4815.700	344.82
16	2783.472	199.30
17	3348.038	239.73
18	4995.676	357.70
19	2774.054	198.63
20	4070.422	291.45

$\overline{\delta^4}$	235.02

$\overline{\overline{\delta^4}}$	235.99

TABELA 7a

i	p^{i5}_{1981}		p^{i5}_{1982}		p^{i5}_{1983}		p^{i5}_{1984}		p^{i5}_{1985}	
1	669.4		690.6		720.2		726.0		739.8	
2	669.4	1	690.6	1	720.2	1	726.0	1	739.8	1
3	669.4	1	690.4	19	719.9	19	725.9	21	739.7	21
				W .01		W .01		W .01		W .01
4	715.9	2	728.0	2	743.5	2	749.6	2	747.6	2
5	669.4	1	690.6	1	720.2	1	726.0	1	739.8	1
6	669.4	1	690.6	1	720.2	1	726.0	1	739.8	1
7	714.3	.8	721.1	.8	749.2	.8	741.0	.8	753.2	.8
8	705.6	.4	724.0	.4	745.6	.4	732.9	.5	749.6	.4
9	712.2	1	713.4	.9	745.6	.9	735.7	.9	751.3	.9
10	714.0	1	718.7	1	749.4	1	737.3	.9	751.4	.9
		.6		.7		.7		.8		.8
11	615.3		653.2		689.8		721.2		749.6	
12	714.9	3	722.3	3	749.4	2	744.5	3	747.4	3
		W .1		W .01		W .3		W .01		W .01
13	715.5	4	721.3	4	745.5	4	738.0	4	753.5	4
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .1
14	720.7	4	723.5	3	744.7	3	744.8	3	780.1	22
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .99
15	715.2	3	722.0	3	743.5	3	744.1	3	747.4	3
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
16	713.7	W .3	718.7	W .3	749.4	W .3	738.8	W .3	753.3	W .3
17	714.5	S	712.3	S	751.1	S	731.9	S	754.1	S
18	721.3	W .5	721.2	W .3	751.4	W .3	736.8	W .2	753.3	W .2
19	714.7	W .3	715.9	W .2	748.8	W .2	735.9	W .2	752.5	W .2
20	711.1		706.3		753.5		724.4		757.7	

TABELA 7b

i	σ^5_i	δ^5_i
1	329.144	45.38
2	329.144	45.38
3	333.182	45.94
4	221.444	30.53
5	329.144	45.38
6	329.144	45.38
7	223.028	30.75
8	134.242	18.51
9	183.332	25.28
10	265.922	36.67

i	σ^5_i	δ^5_i
11	2363.098	325.84
12	233.878	32.25
13	203.984	28.13
14	444.368	61.27
15	187.596	25.87
16	219.622	30.28
17	269.258	37.13
18	322.268	44.43
19	228.552	31.51
20	334.496	46.12

$\overline{\delta^5}$	51.60

$\overline{\overline{\delta^5}}$	37.17

TABELA 8a

i	p^{16}_{1981}	p^{16}_{1982}	p^{16}_{1983}	p^{16}_{1984}	p^{16}_{1985}
1	440.5	439.5	435.1	629.1	630.2
2	440.5 1	439.5 1	435.1 1	629.1 1	630.2 1
3	440.4 18 W .01	439.5 19 W .1	435.6 20 W .4	629.1 1	630.2 22 W .01
4	464.3 9	446.4 2	433.2 2	674.3 2	776.0 2
5	440.5 1	439.5 1	435.1 1	629.1 1	630.2 1
6	440.5 1	439.5 .9 19 W .01	435.0 .6 20 W .2	629.1 1	630.2 1
7	456.9 .6	451.0 .6	436.5 .7	574.5 .3	662.3 .4
8	451.4 .4	447.2 .4	437.3 .4	574.9 .2	637.6 .2
9	450.3 .8	442.8 .8	434.1 .8	665.9 .7	655.4 .6
10	454.4 .9 .4	448.6 .9 .4	437.2 .9 .5	652.1 .9 .2	659.6 .8 .2
11	444.3	458.0	468.3	511.9	548.8
12	456.4 2 L	461.8 19 L	445.2 2 H	593.7 4 L	691.8 3 L
13	463.9 14 W .01	463.1 19 L	431.0 3 S	594.0 7 S	647.5 7 W .01
14	456.9 18 S	463.5 19 W .01	439.0 2 W .6	600.3 4 S	700.8 3 S
15	454.6 2 H	457.3 19 S	443.0 2 H	594.6 4 L	695.8 3 L
16	456.4 L	452.3 H	445.2 H	658.1 L	649.9 S
17	450.3 S	438.1 S	430.2 S	832.5 S	631.1 S
18	460.9 S	458.7 S	439.0 W .6	667.1 S	666.5 S
19	454.6 H	450.3 H	443.0 H	662.4 L	659.4 L
20	447.9	436.2	430.4	876.3	565.3

TABELA 8b

i	σ^6_i	δ^6_i
1	7553.986	1361.23
2	7553.986	1361.23
3	7515.198	1354.24
4	11868.678	2138.73
5	7553.986	1361.23
6	7561.748	1362.62
7	8243.014	1485.39
8	8028.718	1446.77
9	7937.716	1430.37
10	7612.584	1371.79

i	σ^6_i	δ^6_i
11	9772.596	1761.02
12	7750.192	1396.58
13	8395.660	1512.90
14	8348.268	1504.36
15	7679.908	1383.92
16	**7052.376**	**1200.84**
17	16141.246	2908.65
18	7835.006	1411.87
19	7295.012	1314.56
20	21163.784	3813.71

$\overline{\delta^6}$	1647.60

$\overline{\overline{\delta^6}}$	1641.63

TABELA 9a

i	p^{17}_{1982}		p^{17}_{1983}		p^{17}_{1984}		p^{17}_{1985}		p^{17}_{1986}	
1	160.7		163.6		169.7		171.8		177.5	
2	160.7	1	163.6	1	169.7	1	171.8	1	177.5	1
3	160.9	11	163.1	12	169.1	10	171.8	14	177.4	10
		W .5		W .3		W .1		W .01		W .01
4	159.0	2	160.4	2	173.4	2	176.9	2	180.5	2
5	160.7	1	163.6	1	169.7	1	171.8	1	177.5	1
6	159.0	.7	163.1	.7	169.0	.0	171.8	1	177.5	1
		11		12		10				
		W .6		W .01		W .4				
7	158.8	.8	164.1	.7	172.7	.7	174.9	.7	181.6	.7
8	159.8	.5	161.3	.5	169.2	.5	172.6	.5	179.2	.5
9	159.4	.8	164.0	.8	172.7	.8	174.2	.8	180.9	.8
10	158.5	.8	163.9	.8	172.2	.8	174.2	.8	180.7	.8
		.9		.7		.7		.7		.7
11	182.9		185.0		188.0		190.6		193.9	
12	159.1	2	165.5	2	174.3	2	175.1	2	182.0	2
		W .4		W .6		H		W .7		H
13	160.7	4	158.0	4	167.2	5	175.4	5	183.8	5
		W .01		W .6		W .01		W .01		W .01
14	164.5	4	160.1	4	173.7	2	174.9	2	182.0	2
		W .01		W .01		W .5		W .5		W .5
15	162.7	2	166.0	2	173.0	2	174.8	2	180.7	2
		H		H		L		L		L
16	159.1	W .4	165.5	W .6	174.3	H	175.1	W .7	182.0	H
17	154.2	S	166.1	S	175.7	S	173.5	S	183.1	S
18	158.1	W .3	164.8	W .4	173.7	W .5	174.9	W .5	182.0	W .5
19	162.7	H	166.0	H	173.0	L	174.8	L	180.7	L
20	155.5		168.7		176.1		172.8		184.5	

TABELA 9b

i	σ^7_i	δ^7_i
1	21.504	12.43
2	21.504	12.43
3	23.328	13.48
4	22.914	13.24
5	21.504	12.43
6	26.010	15.03
7	12.556	7.26
8	25.332	14.64
9	12.878	7.44
10	14.788	8.55

i	σ^7_i	δ^7_i
11	234.118	135.31
12	6.830	3.95
13	34.512	19.95
14	20.718	11.98
15	5.294	3.06
16	6.830	3.95
17	26.578	15.36
18	12.976	7.50
19	5.294	3.06
20	22.238	12.85

$\overline{\delta^7}$	16.70

$\overline{\overline{\delta^7}}$	10.46

TABELA 10a

i	p^{i8}_{1982}		p^{i8}_{1983}		p^{i8}_{1984}		p^{i8}_{1985}		p^{i8}_{1986}	
1	58.6		65.0		76.2		64.5		66.2	
2	58.6	1	65.0	1	76.2	1	64.5	1	66.2	1
3	58.8	11 W .6	64.9	8 W .01	67.2	13 W .01	64.6	14 W .5	65.74	14 W .4
4	57.3	3	65.4	2	72.6	2	65.5	2	64.6	2
5	58.6	1	65.0	1	76.2	1	64.5	1	66.2	1
6	58.6	.4 11 W .1	65.0	1	67.2	1	64.4	.5 14 W .1	65.7	.6 14 W .01
7	57.1	.9	69.8	.9	70.1	.8	64.0	.8	66.8	.8
8	56.6	.6	66.1	.6	68.9	.6	64.2	.6	66.0	.6
9	57.3	.9	69.3	.9	69.4	.8	64.2	.8	66.6	.8
10	57.5	.8 1	68.6	.8 1	69.2	.8 1	63.3	.8 1	66.7	.7 1
11	71.7		73.6		75.4		76.0		76.8	
12	57.1	2 W .2	67.8	2 H	69.8	2 H	65.9	2 H	67.8	2 H
13	57.0	3 W .01	70.8	3 W .01	71.0	4 W .01	66.1	4 W .01	64.5	4 W .01
14	57.2	3 W .01	67.6	3 W .01	72.5	3 W .01	63.6	2 W .3	67.1	2 W .4
15	57.3	2 W .2	67.2	2 H	69.2	2 H	65.3	2 H	67.2	2 H
16	57.1	W .2	67.8	H	69.8	H	65.9	H	67.8	H
17	56.7	S	71.9	S	69.5	S	61.5	S	67.9	S
18	57.2	W .2	70.4	W .2	70.2	W .3	63.6	W .3	67.1	W .4
19	57.3	W .2	67.2	H	69.2	H	65.3	H	67.2	H
20	56.9		73.6		67.7		60.9		69.3	

TABELA 10b

i	σ^8_i	δ^8_i
1	11.324	17.16
2	11.324	17.16
3	11.054	16.75
4	26.078	39.52
5	11.324	17.16
6	11.606	17.59
7	21.086	31.96
8	19.484	29.53
9	21.800	33.04
10	17.760	26.92

i	σ^8_i	δ^8_i
11	79.348	120.26
12	18.318	27.76
13	25.094	38.03
14	26.354	39.94
15	16.446	24.93
16	18.318	27.76
17	25.976	39.37
18	22.068	33.45
19	16.446	24.93
20	30.038	45.53

$\overline{\delta^8}$	33.44

$\overline{\overline{\delta^8}}$	28.88

TABELA 11a

i	p^{19}_{1982}		p^{19}_{1983}		p^{19}_{1984}		p^{19}_{1985}		p^{19}_{1986}	
1	357.0		353.1		386.3		380.9		382.8	
2	357.0	1	353.1	1	386.3	1	380.9	1	382.8	1
3	356.8	11 W .4	353.5	12 W .5	386.0	8 W .01	380.7	14 W .2	382.4	14 W .2
4	360.1	2	346.8	2	391.7	2	404.4	2	379.2	2
5	357.0	1	353.1	1	386.3	1	380.9	1	382.8	1
6	352.5	.9 11 H	352.4	.7 12 W .5	386.3	1	378.1	.9 14 W .7	382.4	.8 14 W .01
7	350.2	.99	349.1	.99	418.8	.99	386.5	.8	385.2	.8
8	353.8	.5	345.1	.5	385.5	.5	383.6	.5	382.8	.5
9	349.9	1	349.2	1	419.5	1	385.3	.8	384.7	.8
10	352.0	.9 1	349.5	.9 1	412.5	.9 1	383.7	.8 .9	384.2	.8 .9
11	425.6		429.6		441.2		447.8		452.8	
12	350.0	2 W .01	349.2	2 W .01	419.1	2 W .01	385.3	2 W .4	387.5	2 W .4
13	340.5	2 W .6	344.6	3 W .01	421.5	2 S	394.9	4 W .01	391.0	4 W .01
14	350.2	2 W .01	349.2	2 W .01	422.2	2 W .01	398.3	3 W .01	378.0	3 W .01
15	350.7	2 W .01	349.5	2 W .01	419.6	2 W .01	388.8	2 H	389.3	2 H
16	350.0	W .01	349.2	W .01	419.1	W .01	385.3	W .4	387.5	W .4
17	340.5	W .6	344.9	H	421.5	S	374.4	S	384.2	S
18	350.2	W .01	349.2	W .01	422.2	W .01	382.2	W .2	384.6	W .2
19	350.7	W .01	349.5	W .01	419.6	W .01	388.8	H	389.3	H
20	347.1		350.8		429.0		362.6		390.1	

TABELA 11b

i	σ^9_i	δ^9_i
1	286.604	75.32
2	286.604	75.32
3	**283.158**	**74.41**
4	521.722	137.10
5	286.604	75.32
6	299.332	78.66
7	609.942	160.28
8	400.394	105.22
9	620.974	163.18
10	518.396	136.23

i	σ^9_i	δ^9_i
11	3564.494	936.69
12	608.944	160.02
13	753.276	197.95
14	759.464	199.58
15	599.956	157.66
16	608.944	160.02
17	765.760	201.23
18	663.174	174.27
19	599.956	157.66
20	821.630	215.91

$\overline{\delta^9}$	182.10

$\overline{\overline{\delta^9}}$	142.37

TABELA 12a

i	p^{i10}_{1982}		p^{i10}_{1983}		p^{i10}_{1984}		p^{i10}_{1985}		p^{i10}_{1986}	
1	89.0		86.7		88.9		86.5		86.6	
2	89.0	1	86.7	1	88.9	1	86.5	1	86.6	1
3	89.8	11 W .6	86.9	12 H	88.7	13 W .6	86.9	14 H	86.6	14 W .01
4	87.1	2	84.1	2	87.7	2	87.6	2	84.8	2
5	89.0	1	86.7	1	88.9	1	86.5	1	86.6	1
6	87.1	.9 11 S	85.2	.9 12 S	89.0	.5 13 W .3	85.5	.7 14 L	86.7	.9 15 W .7
7	86.6	.9	84.4	.9	90.2	.9	84.9	.9	86.3	.9
8	86.5	.6	84.4	.6	88.6	.6	86.0	.6	86.3	.6
9	86.8	.9	84.6	.9	90.0	.9	85.1	.9	86.3	.9
10	87.2	.8 1	85.0	.8 1	89.9	.8 1	85.3	.8 1	86.4	.8 1
11	110.5		109.1		108.4		107.1		105.9	
12	86.6	2 W .2	84.4	2 W .2	90.2	2 W .2	86.8	3 W .01	85.1	3 W .01
13	85.7	3 W .01	84.1	3 W .01	91.0	3 W .01	86.0	3 W .01	84.6	3 W .01
14	86.8	3 W .01	84.2	3 W .01	88.9	3 W .01	86.8	3 W .01	85.1	3 W .01
15	87.0	3 W .01	84.4	3 W .01	88.8	3 W .01	86.8	3 W .01	85.2	3 W .01
16	86.6	W .2	84.4	W .2	90.2	W .2	84.8	W .2	86.3	W .2
17	85.0	W .8	83.6	W .9	91.1	S	83.7	W .99	86.6	S
18	86.5	W .1	84.4	W .1	90.7	W .1	84.9	W .2	86.4	W .2
19	86.9	W .2	84.5	W .2	89.9	W .3	85.2	W .3	86.3	W .3
20	86.2		84.5		92.3		82.6		87.8	

TABELA 12b

i	σ^{10}_{i}	δ^{10}_{i}
1	5.772	6.58
2	5.772	6.58
3	6.300	7.18
4	10.960	12.49
5	5.772	6.58
6	6.712	7.65
7	10.410	11.86
8	8.054	9.18
9	9.642	10.98
10	8.630	9.83

i	σ^{10}_{i}	δ^{10}_{i}
11	424.166	485.50
12	12.000	13.67
13	15.202	17.32
14	10.782	12.28
15	10.134	11.54
16	10.480	11.94
17	14.702	16.75
18	11.052	12.59
19	9.626	10.97
20	15.002	17.09

$\overline{\delta^{10}}$	34.94

$\overline{\overline{\delta^{10}}}$	11.23

TABELA 13a

i	p^{i11}_{1982}		p^{i11}_{1983}		p^{i11}_{1984}		p^{i11}_{1985}		p^{i11}_{1986}	
1	215.8		207.2		206.1		198.9		188.8	
2	215.8	1	207.2	1	206.1		198.9		188.8	
3	215.5	11	207.4	12	207.0	12	201.6	14	188.8	15
		W .4		W .6		W .6		W .7		L
4	213.5	2	201.6	2	199.4	2	196.3	2	180.9	2
5	215.8	1	207.2	1	206.1	1	198.9	1	188.8	1
6	213.1	.9	207.1	.4	206.1	.7	198.1	.5	182.3	.8
		11		12		13		14		15
		W .7		W .01		W .6		W .7		S
7	211.3	.99	198.7	.99	204.9	.99	191.8	.99	178.8	.99
8	208.1	.7	199.5	.7	203.4	.7	195.8	.7	184.4	.7
9	212.8	.9	200.4	.9	203.9	.9	193.4	.9	180.5	.9
10	213.4	.8	201.6	.8	204.3	.8	194.2	.8	181.8	.8
		1		1		1		1		1
11	246.5		249.8		251.4		250.2		246.3	
12	211.2	2	198.6	2	204.9	2	191.8	2	178.7	2
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
13	210.3	2	197.4	2	204.6	2	190.8	2	177.7	2
		S		S		S		S		S
14	211.3	2	199.0	2	204.9	2	192.0	2	179.2	2
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
15	247.9	10	199.6	2	205.0	2	192.4	2	179.8	2
		S		W .01		W .01		W .01		W .01
16	211.2	W .01	198.6	W .01	204.9	W .01	191.8	W .01	178.7	W .01
17	210.3	S	197.4	S	204.6	S	190.8	S	177.7	S
18	211.3	W .01	199.0	W .01	204.9	W .01	192.0	W .01	179.2	W .01
19	211.7	W .01	199.6	W .01	205.0	W .01	192.4	W .01	179.8	W .01
20	211.2		197.5		207.3		189.4		178.5	

TABELA 13b

i	σ^{11}_{i}	δ^{11}_{i}
1	50.360	25.56
2	50.360	25.56
3	79.038	40.11
4	21.466	10.89
5	50.360	25.56
6	35.550	18.04
7	25.492	12.94
8	22.732	11.54
9	24.740	12.56
10	24.554	12.46

i	σ^{11}_{i}	δ^{11}_{i}
11	2767.360	1404.47
12	29.500	14.97
13	32.808	16.65
14	27.692	14.05
15	353.654	179.48
16	29.500	14.97
17	32.808	16.65
18	27.692	14.05
19	26.404	13.40
20	38.674	19.63

$\overline{\delta^{11}}$	95.18

$\overline{\overline{\delta^{11}}}$	26.27

TABELA 14a

i	p^{112}_{1982}		p^{112}_{1983}		p^{112}_{1984}		p^{112}_{1985}		p^{112}_{1986}	
1	94.9		94.2		96.8		95.7		96.2	
2	94.9	1	94.2	1	96.8	1	95.7	1	96.2	1
3	94.7	11	94.5	11	95.7	11	95.7	14	96.0	14
		W .5		W .5		W .5		W .5		W .4
4	94.3	2	93.1	2	96.9	2	97.4	2	95.5	2
5	94.9	1	94.2	1	96.8	1	95.7	1	96.2	1
6	94.1	.9	94.3	.5	96.0	.6	95.5	.5	96.0	.6
		11		12		11		14		14
		H		W .3		W .3		W .2		W .01
7	93.8	.9	93.4	.9	98.7	.9	95.7	.8	96.4	.8
8	93.4	.5	92.2	.5	95.6	.5	95.0	.5	95.7	.5
9	94.0	.9	93.5	.9	98.5	.9	95.7	.8	96.3	.8
10	94.1	.8	93.6	.8	98.2	.8	95.5	.8	96.4	.8
		1		1		1		.9		.9
11	110.6		111.0		111.9		112.1		112.3	
12	94.1	2	93.5	2	98.4	2	95.4	2	96.4	2
		W .3		W .3		W .3		W .3		W .4
13	91.4	4	93.0	4	97.7	4	96.4	4	96.8	4
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
14	93.9	2 3	93.1	3	97.8	3	96.7	3	95.6	3
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
15	94.2	2	93.5	2	98.3	2	95.6	2	96.4	2
		W .3		W .3		W .3		W .4		W .4
16	94.1	W .3	93.5	W .3	98.4	W .3	95.4	W .3	96.4	W .4
17	93.2	S	93.1	S	99.3	S	94.3	S	96.5	S
18	93.9	W .2	93.4	W .2	98.5	W .3	95.4	W .3	96.5	W .3
19	94.2	W .3	93.5	W .3	98.3	W .3	95.6	W .4	96.4	W .4
20	93.5		93.7		100.2		93.4		97.5	

TABELA 14b

i	σ^{12}_{i}	δ^{12}_{i}
1	1.792	1.87
2	1.792	1.87
3	1.256	1.31
4	3.604	3.76
5	1.792	1.87
6	1.466	1.53
7	4.212	4.39
8	4.850	5.06
9	3.836	4.00
10	3.416	3.56

i	σ^{12}_{i}	δ^{12}_{i}
11	245.842	256.30
12	3.784	3.94
13	3.700	3.86
14	3.930	4.10
15	3.620	3.77
16	3.784	3.94
17	5.700	5.94
18	4.034	4.21
19	3.620	3.77
20	7.766	8.10

$\overline{\delta^{12}}$	16.36

$\overline{\overline{\delta^{12}}}$	3.73

TABELA 15a

i	p^{i13}_{1982}		p^{i13}_{1983}		p^{i13}_{1984}		p^{i13}_{1985}		p^{i13}_{1986}	
1	419.8		433.6		450.5		467.0		484.3	
2	419.8	1	433.6	1	450.5	1	467.0	1	484.3	1
3	419.8	11	432.2	11	450.3	11	466.8	11	484.1	11
		W .1		W .1		W .01		W .01		W .01
4	431.7	2	435.8	2	465.1	2	483.8	2	501.0	2
5	419.8	1	433.6	1	450.5	1	467.0	1	484.3	1
6	419.8	.9	432.2	.9	450.5	1	467.0	1	484.3	1
		11		11						
		W .01		W .01						
7	422.0	.9	443.7	.8	465.0	.8	483.0	.8	501.1	.8
8	425.3	.5	434.7	.5	455.5	.4	472.5	.4	491.1	.4
9	421.8	.9	443.6	.9	464.6	.9	481.6	.9	499.5	.9
10	421.8	.9	442.8	.9	463.4	.9	481.1	.9	499.2	.9
		.9		.7		.7		.7		.7
11	459.3		474.1		489.3		504.6		520.2	
12	440.2	2	453.4	2	470.1	2	486.4	2	503.6	2
		S		S		S		S		S
13	417.9	3	440.2	3	473.8	3	483.8	3	501.2	3
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
14	426.8	3	438.2	3	467.8	3	484.6	3	501.8	3
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
15	426.5	3	437.7	3	464.1	2	480.8	2	498.4	2
		W .01		W .01		H		H		H
16	440.2	S	453.4	S	470.1	S	486.4	S	503.6	S
17	416.5	S	447.3	S	467.6	S	483.6	S	501.8	S
18	425.0	W .3	445.6	W .4	466.0	W .4	483.7	W .4	502.0	W .4
19	421.6	W .2	446.6	H	464.1	H	480.8	H	498.4	H
20	413.2		452.3		466.8		483.6		501.8	

TABELA 15b

i	σ^{13}_{i}	δ^{13}_{i}
1	248.718	53.23
2	248.718	53.23
3	262.422	56.22
4	**5.130**	**1.10**
5	248.718	53.23
6	258.574	55.40
7	38.866	8.33
8	128.372	29.61
9	40.268	8.63
10	44.508	9.54

i	σ^{13}_{i}	δ^{13}_{i}
11	521.288	111.69
12	18.816	4.03
13	81.496	17.46
14	42.102	9.02
15	46.984	10.07
16	18.816	4.03
17	63.150	13.53
18	22.604	4.84
19	35.976	7.71
20	84.528	18.11

$\overline{\delta}^{13}$	26.45

$\overline{\overline{\delta}}^{13}$	21.96

TABELA 16a

i	p^{i14}_{1982}		p^{i14}_{1983}		p^{i14}_{1984}		p^{i14}_{1985}		p^{i14}_{1986}	
1	181.5		179.7		180.3		180.2		183.9	
2	181.5	1	179.7	1	180.3	1	180.2		183.9	1
3	181.5	11	179.9	12	180.2	13	180.2	14	183.9	10
		W .1		W .4		W .3		W .4		W .01
4	181.7	2	179.1	2	179.1	2	180.6	2	184.7	2
5	181.5	1	179.7	1	180.3	1	180.2	1	183.9	1
6	181.5	.9	179.7	.6	180.2	.7	180.2	.8	183.9	1
		11		12		13		14		
		W .01		W .2		W .01		W .4		
7	181.3	.99	177.9	.99	180.9	.99	180.1	.99	187.5	.99
8	180.8	.5	176.8	.5	177.1	.5	177.7	.5	182.9	.5
9	181.7	.9	178.4	.9	180.5	.9	180.2	.9	186.5	.9
10	181.5	.9	178.3	.9	180.6	.9	180.2	.9	186.9	.9
		1		1		1		1		1
11	211.0		213.6		215.3		216.1		217.4	
12	181.3	2	177.9	2	180.9	2	180.1	2	187.6	2
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
13	176.7	3	178.4	3	180.2	3	181.1	3	187.0	3
		W .1		W .01		W .01		W .01		W .01
14	181.3	2	177.9	2	180.9	2	180.1	2	187.6	2
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
15	181.3	2	178.1	2	180.8	2	180.1	2	187.4	2
		W .01		W .01		W .01		W .01		W .01
16	181.3	W .01	177.9	W .01	180.9	W .01	180.1	W .01	187.6	W .01
17	179.7	W .9	176.3	W .9	180.3	S	179.5	S	187.3	S
18	181.3	W .01	177.9	W .01	180.9	W .01	180.1	W .01	187.6	W .01
19	181.3	W .01	178.1	W .01	180.8	W .01	180.1	W .01	187.4	W .01
20	182.1		177.3		181.7		179.7		188.7	

TABELA 16b

i	σ^{14}_{i}	δ^{14}_{i}
1	5.910	3.24
2	5.910	3.24
3	5.868	3.22
4	4.966	2.72
5	5.910	3.24
6	5.908	3.24
7	3.676	2.02
8	16.352	8.97
9	4.440	2.44
10	4.268	2.34

i	σ^{14}_{i}	δ^{14}_{i}
11	1051.486	576.79
12	**3.530**	**1.94**
13	4.122	2.26
14	**3.530**	**1.94**
15	4.440	2.44
16	**3.530**	**1.94**
17	7.076	3.88
18	**3.530**	**1.94**
19	4.440	2.44
20	7.268	3.99

$\overline{\delta^{14}}$	31.70

$\overline{\overline{\delta^{14}}}$	3.02

TABELA 17. Średni procentowy stosunek średniego kwadratu błędu do średniej wartości prognozowanej zmiennej

i	$\overline{\delta}_i$	$\overline{\overline{\delta}}_i$
1	**124.57**	17.59
2	**124.57**	17.59
3	125.36	19.18
4	206.29	21.07
5	**124.57**	17.59
6	125.00	17.54
7	145.69	16.80
8	139.09	16.87
9	138.39	**14.98**
10	134.76	16.03
11	460.55	321.21
12	146.97	16.33
13	163.24	19.76
14	179.07	34.78
15	160.38	32.63
16	128.85	15.80
17	255.58	20.77
18	156.24	22.14
19	132.08	16.21
20	327.68	24.22

LIRERATURA

[1] Pawłowski Z., *Prognozy ekonometryczne*, PWN, Warszawa 1973.

[2] Pawłowski Z., *Teoria prognozy ekonometrycznej w gospodarce socjalistycznej*, PWN, Warszawa 1973.

[3] Zeliaś A., *Teoria prognozy*, PWE, Warszawa 1979.

[4] Steinhaus H., *O prognozie*, Zastosowania Matematyki, t. III, zeszyt 1, 1956, s. 1-7.

[5] Makridakis S. i in., *The Forecasting Accuracy of Major Time Series Methods*, John Wiley & Sons, Chichester, New York, Brisbane, Toronto, Singapore 1984.

[6] Brown R., *Smoothing Forecasting and Prediction of Discrete Time Series*, Prentice-Hall, Nowy Jork 1963.

[7] Brown R., *Statistical Forecasting for Inventory Control*, McGraw-Hill Book Company, Nowy Jork, Toronto, Londyn 1959.

[8] Levin R., Kirkpatrick C., Rubin D., *Quantitative Approaches to Management*, McGraw-Hill Book Company, 1982.

[9] Wheelwright S. C., Makridakis S., *Forecasting Methods*

for Management, John Wiley & Sons, New York, London, Sydney, Toronto 1973.

[10] Czerwiński Z., Guzik B., *Prognozowanie ekonometryczne*, PWE, Warszwa 1980.

[11] Resnick R., Halliday D., *Fizyka*, t. I, PWN, Warszawa 1973.

[12] Jaworski B. M., Piński A. A., *Elementy fizyki*, t. I, PWN, Warszawa 1977.

[13] Czerwiński Z., Maciejewski W., Smoluk A., Zadora K., *Ekonometria, nadzieje, osiągnięcia, niedostatki*, PWN, Warszawa 1987.

[14] Smoluk A., *Struktura cen i równowaga*, PN AE, nr 404, Wrocław 1988, s. 3-34.

[15] Arnold W. I., *Metody matematyczne mechaniki klasycznej*, PWN, Warszawa 1981.

[16] *Approximation of Functions*, Proccedings of the Symposium on Approximation of Functions, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan 1964; Ed. H. L. Garabedien, Elsevier Publishing Company, Amsterdam, London, New York 1965.

[17] Fichtenholtz G. M., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, t. III, PWN, Warszawa 1978.

[18] Leja F., *Rachunek różniczkowy i całkowy*, PWN, Warszawa 1978.

[19] Kuratowski K., *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, PWN, Warszawa 1977.

[20] Kołodziej A., *Analiza matematyczna*, PWN, Warszawa 1978.

[21] Gelfand I. M., Fomin S. W., *Rachunek wariacyjny*, PWN, Warszawa 1979.

[22] Tatarkiewicz K., *Rachunek wariacyjny*, cz. I, WNT, Warszawa 1969.

[23] Smoluk A., *Podstawy teorii aproksymacji i s-funkcje*, PWE, Warszawa 1974.

[24] Sulanke R., Wintgen P., *Geometria różniczkowa i teoria wiązek*, PWN, Warszawa 1977.

[25] Baniak A., Łyko J., Magiera J., Smoluk A., *Zastosowanie metody trendu o minimalnej krzywiżnie do prognozowania wartości majątku trwałego w sektorach polskiej gospodarki*, w druku.

[26] *Rocznik statystyczny GUS*, 1965-1987.

[27] *Rocznik statystyczny przemysłu*, 1976-1987.